



华南理工大学  
South China University of Technology

# 《自动控制原理》

主讲老师：刘桂雄 教授，博士生导师





## 第三章 自动控制的时域分析

### 需要掌握的知识点：

- 1、稳定性的概念和代数稳定判据
- 2、典型输入作用和时域性能指标
- 3、一阶系统的瞬态响应
- 4、二阶系统的瞬态响应
- 5、高阶系统分析
- 6、稳态误差分析
- 7、PID原理





## 知识点1

# 稳定性的概念和代数稳定判据

稳定是控制系统的重要性能，也是系统能够正常运行的首要条件。控制系统在实际运行过程中，总会受到外界和内部一些因素的扰动，例如负载和能源的波动、系统参数的变化、环境条件的改变等。如果系统不稳定，就会在任何微小的扰动作用下偏离原来的平衡状态，并随时间的推移而发散。因此，如何分析系统的稳定性并提出保证系统稳定的措施，是自动控制理论的基本任务之一。

## □ 稳定的基本概念：

一定要牢记

设系统处于某一起始的平衡状态。在外作用的影响下，离开了该平衡状态。当外作用消失后，如果经过足够长的时间它能回复到原来的起始平衡状态，则称这样的系统为稳定的系统。否则为不稳定的系统。





## 知识点1

# 稳定性的概念和代数稳定判据

## (1)线性稳定的充要条件

设系统或元件的微分方程为：

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0y(t) = b_mx^{(m)}(t) + b_{m-1}x^{(m-1)}(t) + \cdots + b_0x(t)$$

式中：x(t)—输入，y(t)—输出， $a_i, (i = 0 \sim n-1); b_j, j = 0 \sim m)$  为常系数。

将上式求拉氏变化，得(初始值不全为零)：

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0)Y(s) = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0)X(s) + \text{系数取决于初始条件的多项式}$$

$$Y(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} X(s) + \frac{\text{系数取决于初始条件的多项式}}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$



$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

上式右边第一项为零状态解，对应于由输入引起的响应过程。第二项为零输入解，对应于由初始状态引起的响应过程。这项相当于系统齐次微分方程的解。

## 知识点1

## 稳定性的概念和代数稳定判据

前面讨论的当外作用消失后，如果经过足够长的时间它能回复到原来的起始平衡状态可看作第二项经过足够长的时间变为零。

$$Y_2(s) = \frac{\text{系数取决于初始条件的多项式}}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} = \frac{\text{系数取决于初始条件的多项式}}{\prod_{j=1}^{n_1} (s + p_j) \prod_{l=1}^{n_2} (s^2 + 2\zeta_l \omega_{nl} s + \omega_{nl}^2)}$$
$$= \sum_{j=1}^{n_1} \frac{a_j}{s + p_j} + \sum_{l=1}^{n_2} \frac{\beta_l (s + \zeta_l \omega_{nl}) + \gamma_l \omega_{nl} \sqrt{1 - \zeta_l^2}}{s^2 + 2\zeta_l \omega_{nl} s + \omega_{nl}^2}$$
$$y_2(t) = \sum_{j=1}^{n_1} a_j e^{-p_j t} + \sum_{l=1}^{n_2} \beta_l e^{-\zeta_l \omega_{nl} t} \cos \omega_{nl} \sqrt{1 - \zeta_l^2} t + \sum_{l=1}^{n_2} \gamma_l e^{-\zeta_l \omega_{nl} t} \sin \omega_{nl} \sqrt{1 - \zeta_l^2} t$$

## □ 线性系统稳定的充要条件：

系统特征方程的根（即传递函数的极点）全为负实数或具有负实部的共轭复根。或者说，特征方程的根应全部位于S平面的左半部。



## 知识点1

# 稳定性的概念和代数稳定判据

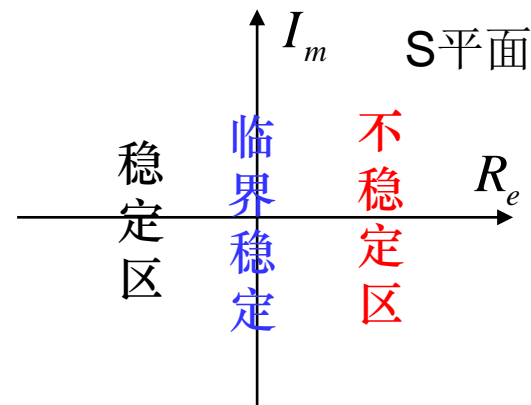
- ①如果特征方程中有一个正实根，它所对应的指数项将随时间单调增长；
- ②如果特征方程中有一对实部为正的共轭复根，它的对应项是发散的周期振荡。

上述两种情况下系统是不稳定的。

①如果特征方程中有一个零根，它所对应于一个常数项，系统可在任何状态下平衡，称为随遇平衡状态；

②如果特征方程中有一对共轭虚根，它的对应于等幅的周期振荡，称为临界平衡状态（或临界稳定状态）。

从控制工程的角度认为随遇平衡状态和临界稳定状态属于不稳定。





知识点1

## 稳定性的概念和代数稳定判据

**注意：**稳定性是线性定常系统的一个属性，只与系统本身的结构参数有关，与输入输出信号无关，与初始条件无关；只与极点有关，与零点无关。

◆ 对于**一阶系统**， $a_1s + a_0 = 0, s = -\frac{a_0}{a_1}$ ，只要 $a_0, a_1$ 都大于零，系统是稳定的。

◆ 对于**二阶系统**， $a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0, s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$

只有 $a_0, a_1, a_2$ 都大于零，系统才有可能稳定。（负实根或实部为负）

◆ 对于**三阶或以上系统**，求根是很烦琐的。于是就有了以下描述的**代数稳定性判据**。







知识点1

## 稳定性的概念和代数稳定判据

### (2) 劳斯—赫尔维茨稳定性判据

设线性系统的特征方程为  $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$ ，则该系统稳定的充要条件为：

- 特征方程的全部系数为正值；
- 由特征方程系数组成的劳思阵的第一列也为正。

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\cdots$
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\cdots$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\cdots$
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\cdots$
$s^{n-4}$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$			
$s^0$	$g_1$			

劳斯表的前两行由特征方程的系数组成。

第一行为1, 3, 5, ...项系数组成，

第二行为2, 4, 6, ...项系数组成。





知识点1

稳定性的概念和代数稳定判据

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\cdots$
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\cdots$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\cdots$
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\cdots$
$s^{n-4}$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$		
$s^1$	$f_1$			
$s^0$	$g_1$			





## 知识点1

## 稳定性的概念和代数稳定判据

以下各项的计算式为：

$$b_1 = \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\cdots$
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\cdots$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\cdots$
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\cdots$
$s^{n-4}$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$s^0$	$g_1$			

# 知识点1

## 稳定性的概念和代数稳定判据

$$c_1 = \frac{- \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{- \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{- \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_{n-7} - b_4 a_{n-1}}{b_1}$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} \quad d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1} \quad d_3 = \frac{c_1 b_4 - b_1 c_4}{c_1}$$

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\cdots$
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\cdots$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\cdots$
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\cdots$
$s^{n-4}$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$		
$s^0$	$g_1$			

依次类推。可求得  $e_i, f_i, g_i, \dots (i=1, 2, \dots)$



知识点1

稳定性的概念和代数稳定判据

[例3-1]: 特征方程为:  $a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$  , 试判断稳定性。

[解]: 劳斯表为:

$s^3$	$a_3$	$a_1$
$s^2$	$a_2$	$a_0$
$s^1$	$\frac{a_2a_1 - a_3a_0}{a_2}$	0
$s^0$	$a_0$	0

稳定的充要条件为:

❖  $a_3, a_2, a_1, a_0$  均大于零

❖ 且  $a_1a_2 - a_3a_0 > 0$





## 知识点1

# 稳定性的概念和代数稳定判据

特殊情况下劳斯表列的列写及结论：

□ 用一个正数去乘或除某整行，不会改变系统的稳定性结论；

□ 劳斯表第一列所有系数均不为零，但也不全为正数，则系统不稳定。表示s右半平面上有极点，极点个数等于劳斯表列第一列系数符号改变的次数。

**[例3-2]：**系统的特征方程为： $s^5 + 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$

$s^5$	1	1	4	
$s^4$	2	3	5	
$s^3$	-0.5	1.5	0	$\Rightarrow -1 \quad 3 \quad 0 (\times 2)$
$s^2$	9	5	0	
$s^1$	$\frac{32}{9}$	0	0	$\Rightarrow 1 \quad 0 \quad 0 (\times \frac{9}{32})$
$s^0$	5	0	0	

劳斯表第一列有负数，系统是不稳定的。其符号**变化两次**，表示有**两个极点**在S的右半平面。



## 知识点1

# 稳定性的概念和代数稳定判据

□ 劳斯表某一行第一项系数为零，而其余系数不全为零。

[处理办法]：用很小的正数  $\varepsilon$  代替零的那一项，然后据此计算出劳斯表中的其他项。  
若第一次零（即  $\varepsilon$ ）与其上项或下项的符号相反，计作一次符号变化。

[例]：  $s^4 + 2s^3 + s^2 + 2s + 1 = 0$

$s^4$	1	1	1
$s^3$	2	2	0
$s^2$	$0(\varepsilon)$	1	0
$s^1$	$\frac{2\varepsilon - 2}{\varepsilon}$	0	0
$s^0$	1	0	0

$\Rightarrow 2 - \frac{2}{\varepsilon}$

令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ，则  $2 - \frac{2}{\varepsilon} \rightarrow -\infty$ ，故第一列不全为正，系统不稳定，s右半平面有两个极点。

$\varepsilon \rightarrow 2 - \frac{2}{\varepsilon}, 2 - \frac{2}{\varepsilon} \rightarrow 1$





## 知识点1

# 稳定性的概念和代数稳定判据

□ 劳斯表某行系数全为零的情况。表明特征方程具有大小相等而位置径向相反的根。至少要下述几种情况之一出现，如：大小相等，符号相反的一对实根，或一对共轭虚根，或对称于虚轴的两对共轭复根。

例如：

$$\Delta_1 = (s^2 - 4)(s^2 + 25)(s + 2) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50$$
$$\Delta_2 = (s^2 + 4)$$

[处理办法]：

可将不为零的最后一行的系数组成辅助方程，对此辅助方程式对s求导所得方程的系数代替全零的行。

大小相等，位置径向相反的根可以通过求解辅助方程得到。辅助方程应为偶次数的。







## 知识点1

## 稳定性的概念和代数稳定判据

[例3-3]:  $s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16 = 0$

$s^6$	1	8	20	16	
$s^5$	2	12	16	0	$\Rightarrow 1 \ 6 \ 8$
$s^4$	2	12	16	0	$\Rightarrow 1 \ 6 \ 8$
$s^3$	0	0	0	0	$\Rightarrow 1 \ 3 \ 0$
$s^2$	3	8	0	0	$\Rightarrow 3 \ 8 \ 0$
$s^1$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	
$s^0$	8	0	0	0	

辅助方程为:  $s^4 + 6s^2 + 8 = 0$ , 求  
 导得:  $4s^3 + 12s = 0$ ,  
 或  $s^3 + 3s = 0$ , 用1, 3, 0代替全零  
 行即可。

从第一列都大于零可见, 好像系统是稳定的。注意此时还要计算大小相等位置径向相反的根再判断稳定性。由辅助方程求得:

$$(s^2 + 2)(s^2 + 4) = 0, \quad s_{1,2} = \pm j\sqrt{2}, \quad s_{3,4} = \pm j2$$

此时系统是临界稳定的。控制工程上认为是不稳定的。



## 知识点1

# 稳定性的概念和代数稳定判据

## (3) 赫尔维茨判据的基本概念

设系统的特征方程式为： $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$

则系统稳定的充要条件是： $a_n > 0$ ，且由特征方程系数构成的赫尔维茨行列式的主子行列式全部为正。

赫尔维茨行列式：

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} \quad n \times n$$

赫尔维茨行列式的构造：主对角线上的各项为特征方程的第二项系数  $a_{n-1}$  至最后一项系数  $a_0$ ，在主对角线以下各行中各项系数下标逐次增加，在主对角线以上各行中各项系数下标逐次减小。当下标大于  $n$  或小于  $0$  时，行列式中的项取  $0$ 。

## 知识点1

## 稳定性的概念和代数稳定判据

以4阶系统为例使用赫尔维茨判据： $a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$

赫尔维茨行列式为：

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

稳定的充要条件是：

1、 $a_4 > 0$

2、 $\Delta_1 = a_3 > 0$        $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_3a_2 - a_4a_1 > 0$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} > 0 \quad \Delta_4 = \Delta > 0$$





知识点1

## 稳定性的概念和代数稳定判据

### (4) 赫尔维茨判据的另一种形式

系统稳定的充要条件 (Lienard-Chipard定理) :

若

1、  $a_i > 0 (i = n \sim 0)$ ,

2、  $\Delta_j > 0 (j = 1, 3, 5, \dots)$ , 或  $\Delta_j > 0 (j = 2, 4, 6, \dots)$ , 则系统稳定。

式中,  $\Delta_j$  为赫尔维茨主子行列式。采用这种形式的判据可减少一半的计算工作量。

即: 系数严格为正, 只要检查偶次顺序的 Hurwitz行列式是否为正或奇次顺序的 Hurwitz行列式是否为正。(李纳德-威帕特稳定判据)





知识点1

## 稳定性的概念和代数稳定判据

### (5) 赫尔维茨判据的应用

#### □ 判定控制系统的稳定性

[例3-4] 系统的特征方程为： $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$ ，判断系统的稳定性。

[解]：排列劳斯表如下：

$s^4$	1	3	5
$s^3$	2	4	0
$s^2$	1	5	0
$s^1$	-6	0	0
$s^0$	5	0	0

因为  $a_i > 0, (i = 0 \sim 4)$ ，且劳斯表**第一列不全为正**，所以**系统不稳定**。

由于劳斯表第一列有两次符号变化，所以系统在S右半平面有两个极点。





知识点1

稳定性的概念和代数稳定判据

[例3-5]: 系统的特征方程为:  $0.001s^4 + 0.05s^3 + 0.2s^2 + 0.4s + 1 = 0$  , 试用赫尔维茨定理判断稳定性。

[解]: 系统的特征方程为:  $s^4 + 50s^3 + 200s^2 + 400s + 1000 = 0$

列赫尔维茨行列式如下:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 50 & 400 & 0 & 0 \\ 1 & 200 & 1000 & 0 \\ 0 & 50 & 400 & 0 \\ 0 & 1 & 200 & 1000 \end{vmatrix}$$

$$\because \Delta_1 = 50 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 50 & 400 \\ 1 & 200 \end{vmatrix} > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 50 & 400 & 0 \\ 1 & 200 & 1000 \\ 0 & 50 & 400 \end{vmatrix} > 0$$

$$\Delta_4 = 1000\Delta_3 > 0, \text{且 } a_4 = 1 > 0$$

→ 系统是稳定的。

注意: 由于  $a_i > 0$ , 所以根据Lienard-Chipard定理, 只要计算 $\Delta_1$ 、 $\Delta_3$ 或 $\Delta_2$ 、 $\Delta_4$ 即可, 这样可以减少一半的计算量。



## 知识点1

## 稳定性的概念和代数稳定判据

[例3-6]系统的特征方程为： $s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 + 23s + 46 = 0$ ，该系统稳定吗？求出每一个极点并画出极点分布图。

[解]：劳斯表如下

$$\begin{array}{l|lll} s^5 & 1 & 24 & 23 \\ s^4 & 2 & 48 & 46 \\ s^3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$s^3$ 行全为零。由前一行系数构成辅助方程得：

$$Q(s) = 2s^4 + 48s^2 + 46 \quad \text{或} \quad Q(s) = s^4 + 24s^2 + 23$$

其导数为： $\dot{Q}(s) = 4s^3 + 48s$  将 4,48 或 1,12 代替  $s^3$  行，可继续排列劳斯表如下：

$$\begin{array}{l|lll} s^5 & 1 & 24 & 23 \\ s^4 & 1 & 24 & 23 \\ s^3 & 1 & 12 & 0 \\ s^2 & 12 & 23 & 0 \\ & \hline s^1 & 12 & 0 & 0 \\ s^0 & 23 & 0 & 0 \end{array}$$

✚  $a_i > 0, (i = 0 \sim 5)$

✚ 因为  $s^3$  行全为零，所以特征方程必有特殊的根。  
求解如下：

$$\text{令 } Q(s) = 0, \text{ 有 } (s^2 + 23)(s^2 + 1) = 0,$$

$$\therefore s_{1,2} = \pm j\sqrt{23}, s_{3,4} = \pm j1$$

✚ 由于有特征根为共轭虚数，所以系统不稳定





## 知识点1

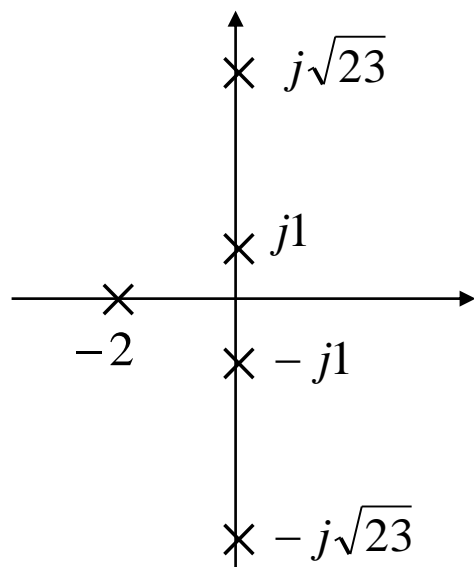
## 稳定性的概念和代数稳定判据

设剩余的一个根为 $-p$ 。则： $(s + p)(s^4 + 24s^2 + 23) = 0$ ，整理得：

$$s^5 + ps^4 + 24s^3 + 24ps^2 + 23s + 23p = 0$$

比较系数得： $-p = -2$

极点分布如下：



注意：

劳斯判据实际上只能判断代数方程的根是在S平面左半闭平面还是在右半开平面。对于虚轴上的根要用辅助方程求出。

若代数方程有对称于虚轴的实根或共轭复根，则一定在劳斯表的第一列有变号，并可由辅助方程求出。





## 知识点1

# 稳定性的概念和代数稳定判据

## (6)系统参数变化对稳定性的影响

### □ 确定系统的相对稳定性（稳定裕度）

利用劳斯和赫尔维茨稳定性判据确定的是系统稳定或不稳定，即绝对稳定性。在实际系统中，往往需要知道系统离临界稳定有多少裕量，这就是相对稳定性或稳定裕量问题。

利用实部最大的特征方程的根 $p$ (若稳定的话，它离虚轴最近)和虚轴的距离 $\sigma$ 表示系统稳定裕量。

若 $p$ 处于虚轴上，则 $\sigma=0$ ，表示稳定裕量为0。

作 $s = -\sigma$ 的垂线，若系统的极点都在该线的左边，则称该系统具有 $\sigma$ 的稳定裕度。一般说， $\sigma$ 越大，稳定程度越高。可用  $s = z - \sigma$  代入特征方程，得以 $z$ 为变量的新的特征方程，用劳斯-赫尔维茨判据进行判断稳定性。若稳定，则称系统具有 $\sigma$ 的稳定裕度。





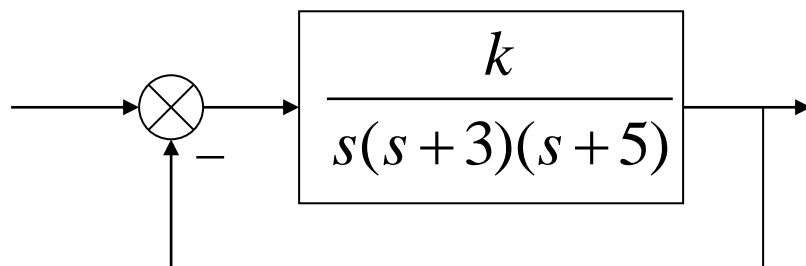
知识点1

## 稳定性的概念和代数稳定判据

### (6) 系统参数变化对稳定性的影响

利用劳斯和赫尔维茨稳定性判据还可以讨论个别参数对稳定性的影响，从而求得这些参数的取值范围。若讨论的参数为开环放大系数K，则使系统稳定的最大K称为临界放大系数  $K_p$ 。

[例3-7] 已知系统的结构图，试确定系统的临界放大系数。



[解]: 闭环传递函数为:

$$\Phi(s) = \frac{\frac{k}{s(s+3)(s+5)}}{1 + \frac{k}{s(s+3)(s+5)}} = \frac{k}{s^3 + 8s^2 + 15s + k}$$

特征方程为:

$$s^3 + 8s^2 + 15s + k = 0$$





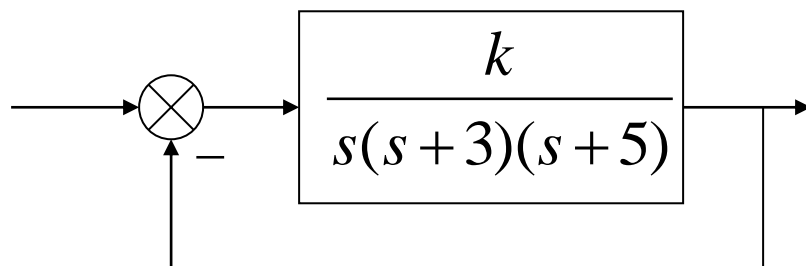
知识点1

## 稳定性的概念和代数稳定判据

### (6) 系统参数变化对稳定性的影响

利用劳斯和赫尔维茨稳定性判据还可以讨论个别参数对稳定性的影响，从而求得这些参数的取值范围。若讨论的参数为开环放大系数K，则使系统稳定的最大K称为临界放大系数  $K_p$ 。

[例3-7] 已知系统的结构图，试确定系统的临界放大系数。



[解]： 闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{\frac{k}{s(s+3)(s+5)}}{1 + \frac{k}{s(s+3)(s+5)}} = \frac{k}{s^3 + 8s^2 + 15s + k}$$

特征方程为：

$$s^3 + 8s^2 + 15s + k = 0$$





知识点1

## 稳定性的概念和代数稳定判据

劳斯表:

$s^3$	1	15
$s^2$	8	$k$
$s^1$	$\frac{120-k}{8}$	0
$s^0$	$k$	

要使系统稳定, 必须

①系数皆大于0,  $\therefore k > 0$

②劳斯表第一列皆大于0

有 
$$\begin{cases} \frac{120-k}{8} > 0 \Rightarrow k < 120 \\ k > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < k < 120$$

所以, 临界放大系数  $k_p = 120$

### □ 确定系统的相对稳定性 (稳定裕度)

利用劳斯和赫尔维茨稳定性判据确定的是系统稳定或不稳定, 即绝对稳定性。在实际系统中, 往往需要知道系统离临界稳定有多少裕量, 这就是相对稳定性或稳定裕量问题。





知识点1

稳定性的概念和代数稳定判据

[例]系统特征为： $s^3 + 5s^2 + 8s + 6 = 0$ ，可知它是稳定的。令 $s = z - 1$ 则：

$$(z-1)^3 + 5(z-1)^2 + 8(z-1) + 6 = 0, \text{即 } z^3 + 2z^2 + z + 2 = 0$$

$$\begin{array}{l|ll} z^3 & 1 & 1 \\ z^2 & 2 & 2 \\ z^1 & 1 & 0 \\ z^0 & 1 & 0 \end{array}$$

$z^1$ 行全为零，以它上面的行组成辅助方程，其解为特殊根。对辅助方程求导，用其系数代替  $z^1$  行。辅助方程为： $2s^2 + 2 = 0$ ，其系数为1，0。其解为： $s_{1,2} = \pm j1$ ，有一对共轭虚根，所以系统是临界稳定的。

系统的稳定裕度恰为1。

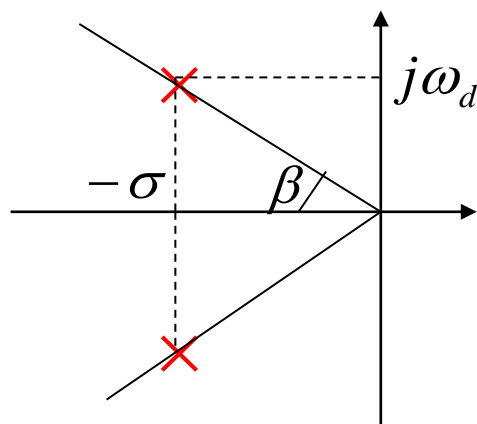




## 知识点1

# 稳定性的概念和代数稳定判据

讨论相对稳定性除了考虑极点离虚轴远近外，还要考虑共轭极点的振荡情况。对于共轭极点，其实部反映响应的衰减快慢，虚部反映响应的振荡情况。对于极点  $-\sigma \pm j\omega_d$ ，对应的时域响应为  $e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \varphi)$ 。所以， $\sigma$  越小，衰减越慢，越大， $\omega_d$  振荡越激烈。如下图所示：



可用共轭极点对负实轴的张角  $\beta$  来表示系统的相对稳定性。当  $\beta = 90^\circ$  时，表示极点在虚轴上，系统为临界稳定。 $\beta$  越小，稳定性越高。相对稳定性越好。



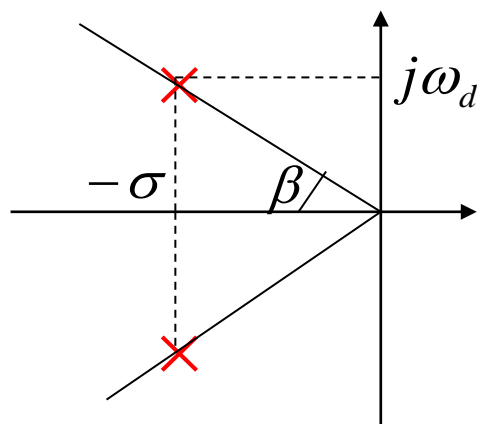




## 知识点1

# 稳定性的概念和代数稳定判据

讨论相对稳定性除了考虑极点离虚轴远近外，还要考虑共轭极点的振荡情况。对于共轭极点，其实部反映响应的衰减快慢，虚部反映响应的振荡情况。对于极点  $-\sigma \pm j\omega_d$ ，对应的时域响应为  $e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \varphi)$ 。所以， $\sigma$  越小，衰减越慢，越大， $\omega_d$  振荡越激烈。如下图所示：



可用共轭极点对负实轴的张角  $\beta$  来表示系统的相对稳定性。当  $\beta = 90^\circ$  时，表示极点在虚轴上，系统为临界稳定。 $\beta$  越小，稳定性越高。相对稳定性越好。

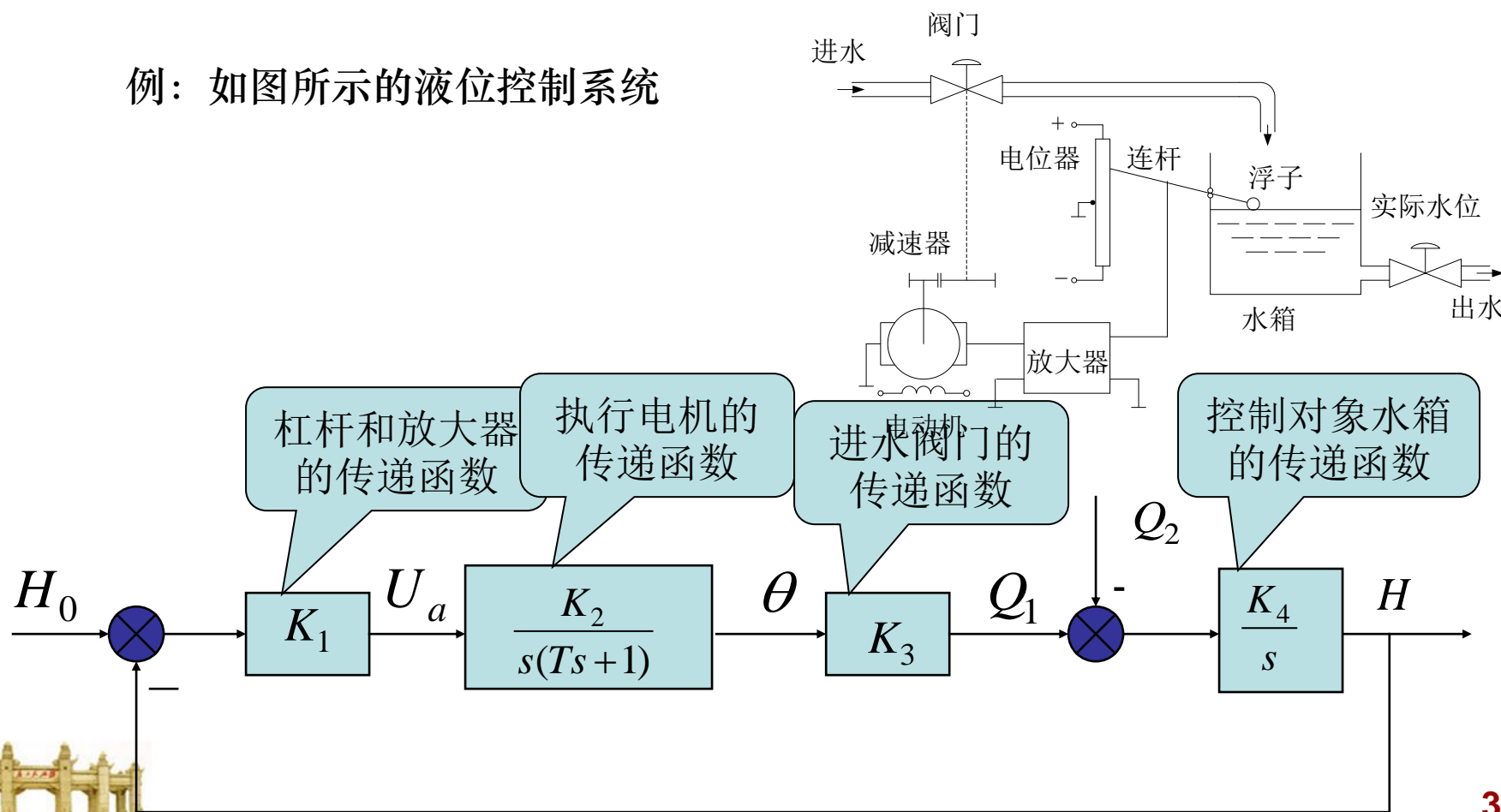


知识点1

# 稳定性的概念和代数稳定判据

## (7)结构不稳定系统及其改进措施

例：如图所示的液位控制系统





## 知识点1

## 稳定性的概念和代数稳定判据

闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{K_1 K_2 K_3 K_4}{s^2 (Ts + 1) + K_1 K_2 K_3 K_4}$$

令：  $K = K_1 K_2 K_3 K_4$

闭环特征方程为：  $s^2 (Ts + 1) + K = 0$

展开为：  $Ts^3 + s^2 + K = 0$

方程系数：  $a_3 = T, \quad a_2 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = K$

由于  $a_1 = 0$ ，不满足系统稳定的必要条件，所以系统是不稳定的。这也可从劳斯表看出。

由于无论怎样调节参数K和T都不能使系统稳定，所以是一个结构不稳定的系统。

欲使系统稳定，必须改变原系统的结构。

劳斯表：

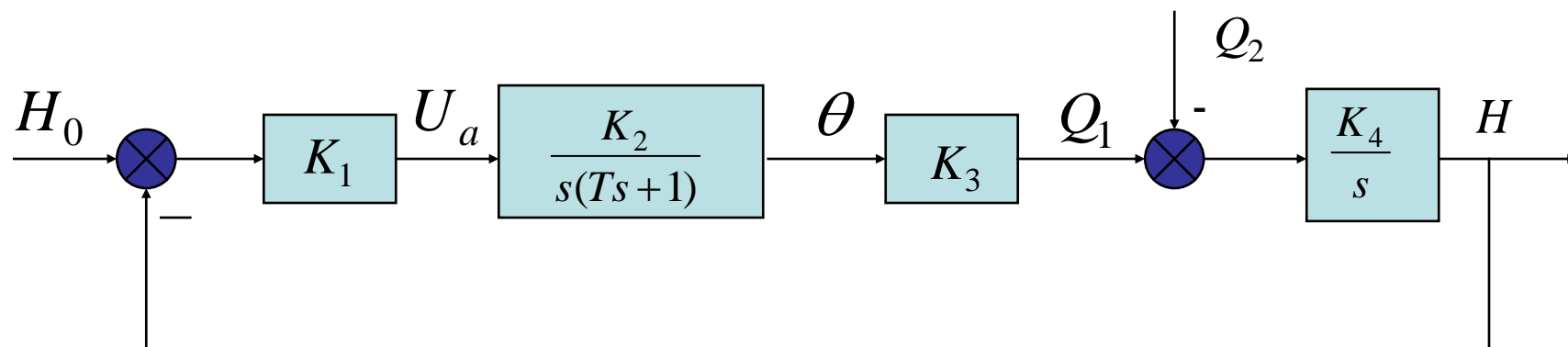
$s^3$	$T$	$0$
$s^2$	$1$	$K$
$s^1$	$-KT$	
$s^0$	$K$	





知识点1

## 稳定性的概念和代数稳定判据



由图可看出，造成系统结构不稳定的原因是前向通路中有两个积分环节串联，而传递函数的分子只有增益 $K$ 。这样，造成系统闭环特征方程缺项，即 $s$ 一次项系数为零。

因此，消除结构不稳定的措施可以有两种，一是改变积分性质；二是引入开环零点，补上特征方程中的缺项。

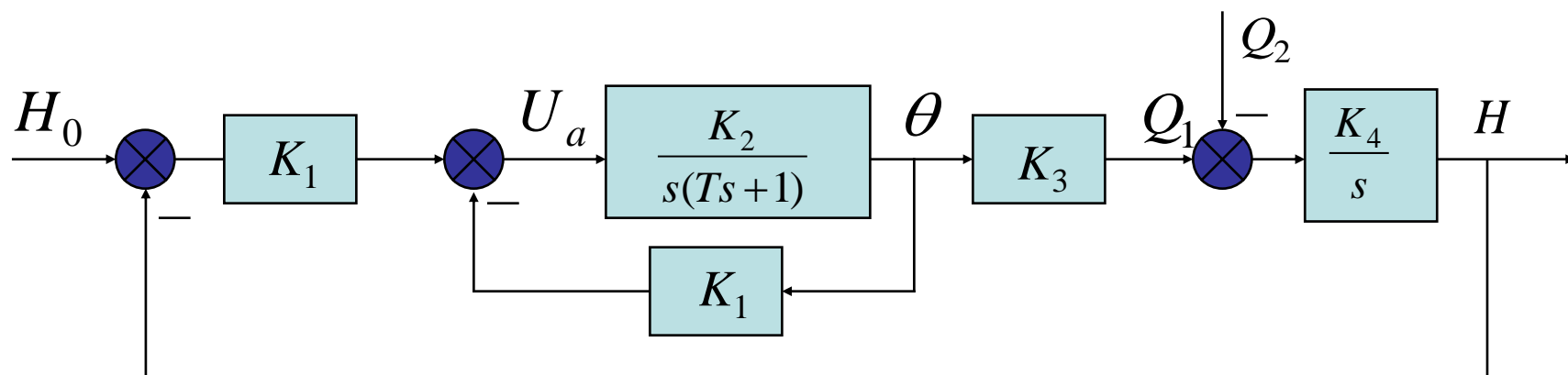
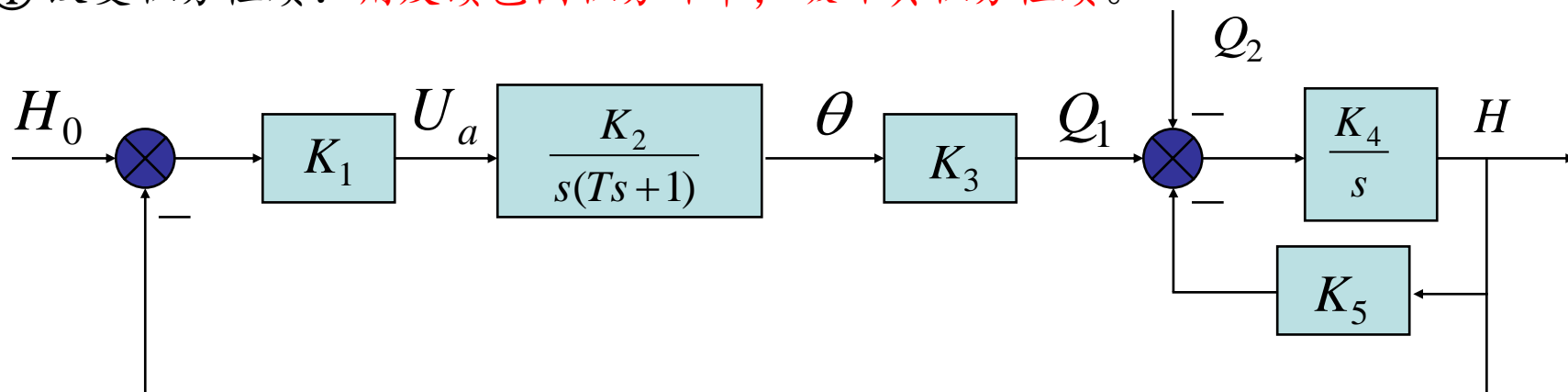




## 知识点1

# 稳定性的概念和代数稳定判据

① 改变积分性质：用反馈包围积分环节，破坏其积分性质。

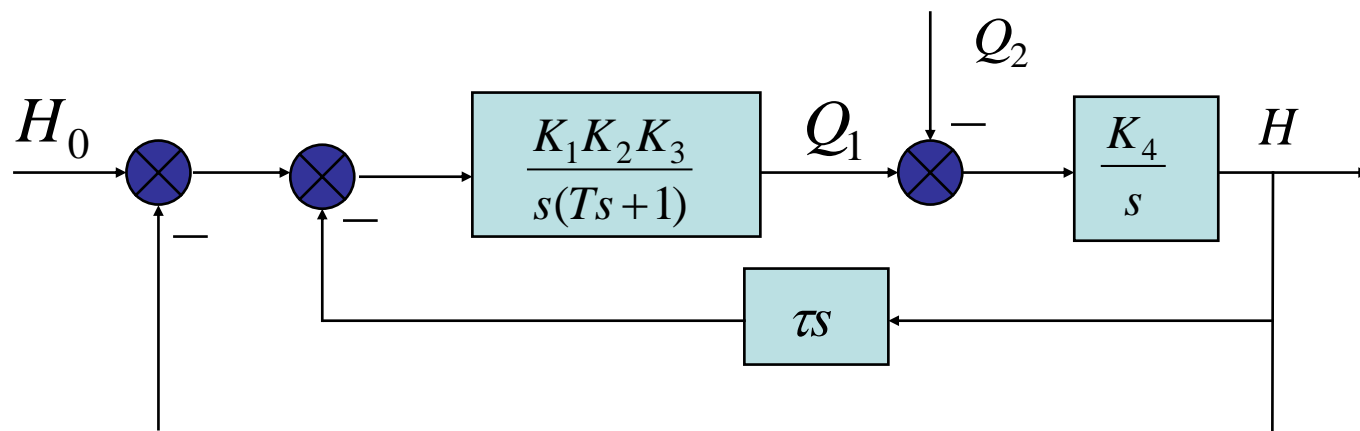


## 知识点1

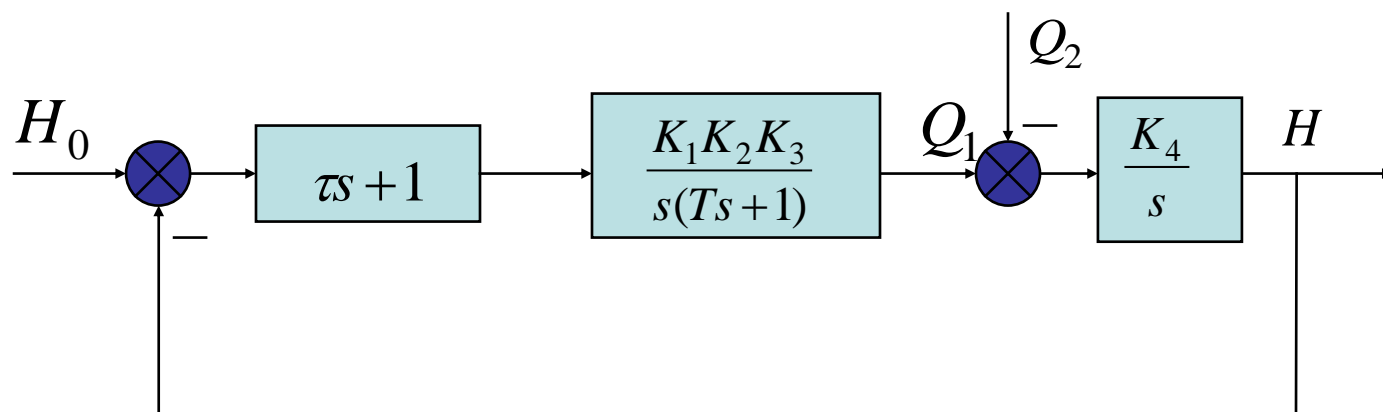
## 稳定性的概念和代数稳定判据

## ② 引入开环零点

## a. 速度反馈



## b. 比例+微分





## 知识点1

## 稳定性的概念和代数稳定判据

闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(Ts + 1) + K(\tau s + 1)}$$

闭环特征方程为：  $Ts^3 + s^2 + K\tau s + K = 0$

方程系数：  $a_3 = T, \quad a_2 = 1, \quad a_1 = K\tau, \quad a_0 = K$

稳定的充分必要条件为：

①  $a_i > 0$  即  $T > 0, \quad K > 0, \quad \tau > 0$

②  $K(\tau - T) > 0$  即  $\tau > T$

劳斯表：

$s^3$	$T$	$K\tau$
$s^2$	$1$	$K$
$s^1$	$K(\tau - T)$	
$s^0$	$K$	

引入比例+微分控制后，补上了特征方程中s一次项系数。故只要适当匹配参数，满足上述条件，系统就可稳定。







知识点1

## 稳定性的概念和代数稳定判据

### 第六次作业:

- 1、习题3-1 (1)
- 2、习题3-2 (4)
- 3、习题3-3 (2)
- 4、习题3-4
- 5、习题3-5
- 6、习题3-6





## 知识点2

# 典型输入作用和时域性能指标

## (1)时域分析的概念

指控制系统在一定的输入下，根据输出量的时域表达式，分析系统的稳定性、瞬态和稳态性能。

由于时域分析是直接在时间域中对系统进行分析的方法，所以时域分析具有直观和准确的优点。

系统输出量的时域表示可由微分方程得到，也可由传递函数得到。

在初值为零时，一般都利用传递函数进行研究，用传递函数间接地评价系统的性能指标。具体是根据闭环系统传递函数的极点和零点来分析系统的性能。此时也称为复频域分析。





知识点2

## 典型输入作用和时域性能指标

### (2) 典型初始状态

规定控制系统的初始状态均为零状态，即在  $t = 0^-$  时

$$c(0^-) = \dot{c}(0^-) = \ddot{c}(0^-) = \dots = 0$$

这表明，在外作用加入系统之前系统是相对静止的，被控制量及其各阶导数相对于平衡工作点的增量为零。



## 知识点2

## 典型输入作用和时域性能指标

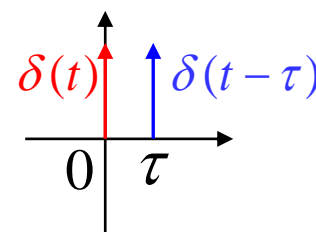
## (3) 典型输入作用

## 1、 脉冲函数：

理想单位脉冲函数：

[定义]：  $\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$ ，且  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ ，其积分面积为1。

其拉氏变换后的像函数为： $L[\delta(t)] = 1$



● 出现在  $t = \tau$  时刻，积分面积为A的理想脉冲函数定义如下：

$$A\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau \\ \infty, & t = \tau \end{cases} \quad \text{且} \quad \int_{-\infty}^{\infty} A\delta(t - \tau) dt = A$$



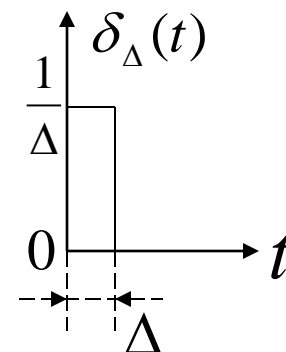
## 知识点2

## 典型输入作用和时域性能指标

● 实际单位脉冲函数：

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ 和 } t > \Delta \\ \frac{1}{\Delta}, & 0 < t < \Delta \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\Delta}(t) dt = \Delta \times \frac{1}{\Delta} = 1,$$

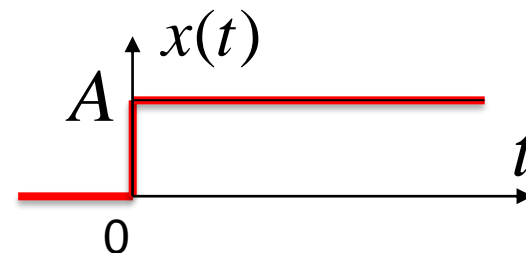


当  $\Delta \rightarrow 0$  时,  $\delta_{\Delta}(t) = \delta(t)$

2、阶跃函数：

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A, & t \geq 0 \end{cases}$$

A阶跃幅度,  $A=1$   
称为单位阶跃函数, 记为  $1(t)$ 。



其拉氏变换后的像函数为：  $L[x(t)] = \frac{A}{s}$





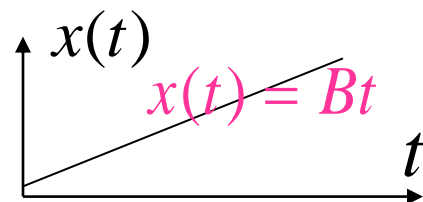
知识点2

典型输入作用和时域性能指标

3、斜坡函数（速度阶跃函数）

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ Bt, & t \geq 0 \end{cases}$$

**$B=1$ 时称为单位斜坡函数。**

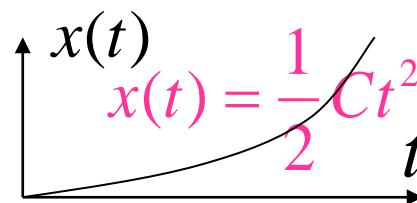


其拉氏变换后的像函数为： $L[x(t)] = \frac{B}{s^2}$

4、抛物线函数（加速度阶跃函数）

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2} Ct^2, & t \geq 0 \end{cases}$$

**$C=1$ 时称为单位抛物线函数。**



其拉氏变换后的像函数为： $L[x(t)] = \frac{C}{s^3}$





## 知识点2

## 典型输入作用和时域性能指标

[提示]：上述几种典型输入信号的关系如下：

$$A\delta(t) = \frac{d}{dt}[A \times 1(t)] = \frac{d^2}{dt^2}[At] = \frac{d^3}{dt^3}\left[\frac{1}{2}At^2\right]$$

5、正弦函数： $x(t) = A\sin\omega t$ ，式中A为振幅， $\omega$ 为频率。

其拉氏变换后的像函数为： $L[A\sin\omega t] = \frac{A\omega_n}{s^2 + \omega_n^2}$

- 分析系统特性究竟采用何种典型输入信号，取决于实际系统在正常工作情况下最常见的输入信号形式；
- 当系统的输入具有突变性质时，可选择阶跃函数为典型输入信号；
- 当系统的输入是随时间增长变化时，可选择斜坡函数为典型输入信号。





## 知识点2

# 典型输入作用和时域性能指标

## (4)典型响应

1. 单位脉冲函数响应:

$$C(s) = G(s) \times 1$$

2. 单位阶跃函数响应:

$$C(s) = G(s) \frac{1}{s}$$

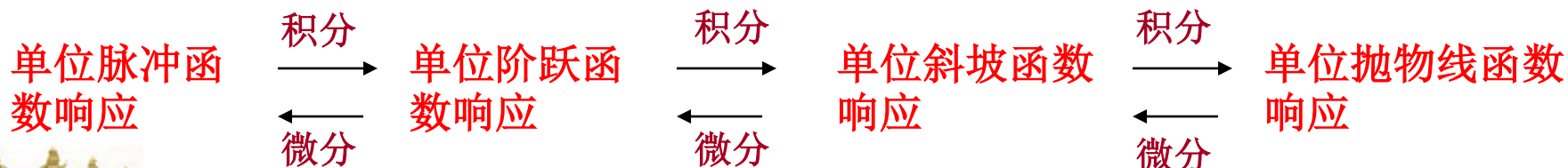
3. 单位斜坡函数响应:

$$C(s) = G(s) \frac{1}{s^2}$$

4. 单位抛物线函数响应:

$$C(s) = G(s) \frac{1}{s^3}$$

[提示]: 上述几种典型响应有如下关系:







## 知识点2

## 典型输入作用和时域性能指标

### (5)线性微分方程的解

时域分析以线性定常微分方程的解来讨论系统的特性和性能指标。设微分方程如下：

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \dots + b_0 x(t)$$

式中， $x(t)$ 为输入信号， $y(t)$ 为输出信号。

我们知道，微分方程的解可表示为： $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ ，其中  $y_h(t)$  为对应的齐次方程的通解，只与微分方程（系统本身的特性或系统的特征方程的根）有关。对于稳定的系统，当时间趋于无穷大时，通解趋于零。所以根据通解或特征方程的根可以分析系统的稳定性。

$y_p(t)$  为特解，与微分方程和输入有关。一般来说，当时间趋于无穷大时特解趋于一个稳态的函数。





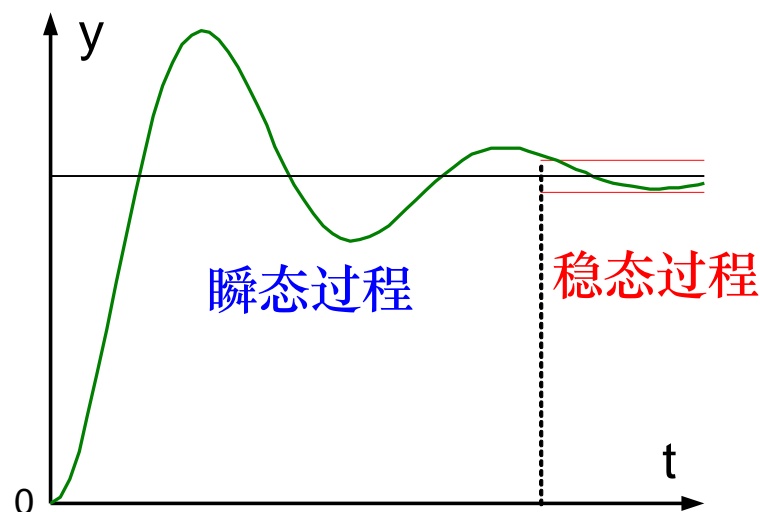
## 知识点2

## 典型输入作用和时域性能指标

综上所述，对于**稳定的系统**，对于一个**有界的输入**，当**时间趋于无穷大时**，微分方程的全解将趋于一个**稳态的函数**，使系统达到一个新的平衡状态。工程上称为进入**稳态过程**。

**系统达到稳态过程之前的过程**称为**瞬态过程**。瞬态分析是分析瞬态过程中输出响应的各种运动特性。理论上说，只有当时间趋于无穷大时，才进入稳态过程，但这在工程上显然是无法进行的。在工程上只讨论输入作用加入一段时间里的瞬态过程，在这段时间里，反映了主要的瞬态性能指标。

如某系统的单位阶跃响应曲线如图所示：



## 知识点2

## 典型输入作用和时域性能指标

## (6)瞬态过程的性能指标

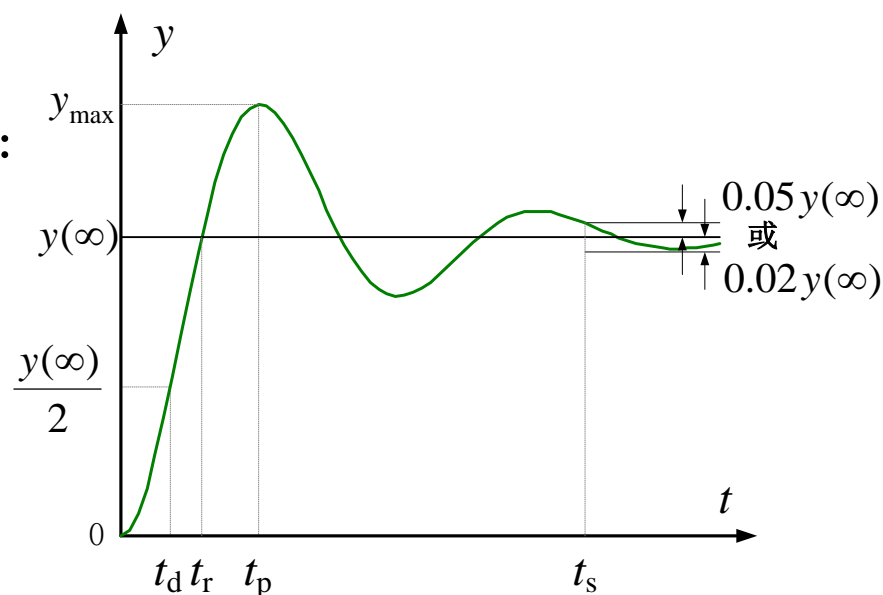
通常以**阶跃响应**来衡量系统控制性能的优劣和定义瞬态过程的时域性能指标。稳定的随动系统（不计扰动）的单位阶跃响应函数有**衰减振荡**和**单调变化**两种。

## (一)衰减振荡：

具有衰减振荡的瞬态过程如图所示：

1. 延迟时间  $t_d$ ：

输出响应**第一次**达到稳态值的**50%**所需的时间。



## 知识点2

## 典型输入作用和时域性能指标

2. 上升时间  $t_r$  :

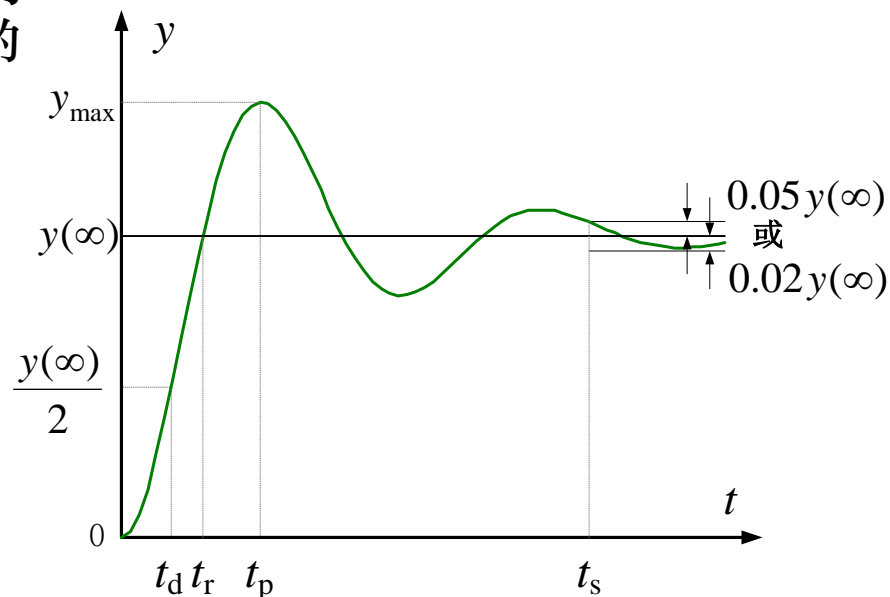
输出响应第一次达到稳态值 $y(\infty)$ 所需的时间。或指由稳态值的10%上升到稳态值的90%所需的时间。

3. 峰值时间  $t_p$  :

输出响应超过稳态值达到第一个峰值 $y_{\max}$ 所需要的时间。

4. 最大超调量(简称超调量)  $\delta\%$  :

$$\delta\% = \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$



式中:  $y_{\max}$  -- 输出响应的最大值;  $y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$  -- 稳态值;



## 知识点2

## 典型输入作用和时域性能指标

### 5. 调节时间或过渡过程时间 $t_s$ :

当  $y(t)$  和  $y(\infty)$  之间的误差达到规定的范围之内(比如  $5\% \times y(\infty)$  或  $2\% \times y(\infty)$  ), 且以后不再超出此范围的最小时间。即当  $t \geq t_s$  , 有:  $|y(t) - y(\infty)| \leq \Delta\% \times y(\infty)$ ,  $\Delta = 2$  或  $5$

### 6. 振荡次数N:

在调节时间内,  $y(t)$  偏离  $y(\infty)$  的 **振荡次数**。



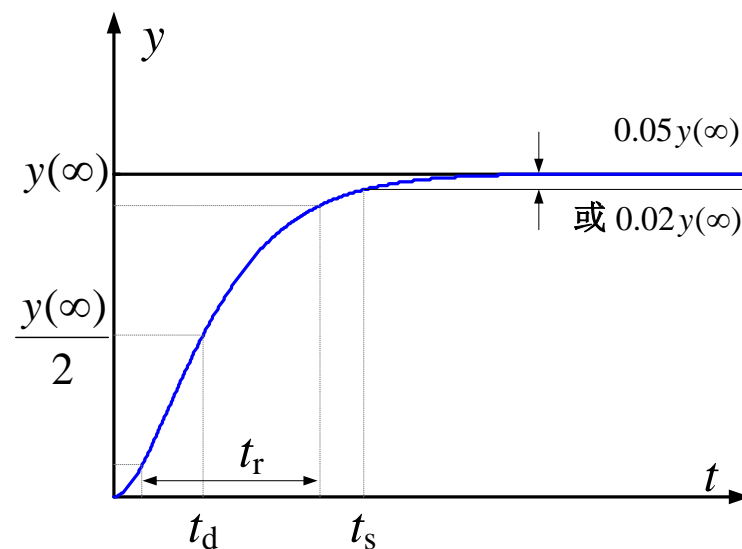
## 知识点2

## 典型输入作用和时域性能指标

## (二) 单调变化

单调变化响应曲线如图所示：

这种系统只用调节时间  $t_s$  来表示**快速性**。





### 知识点3

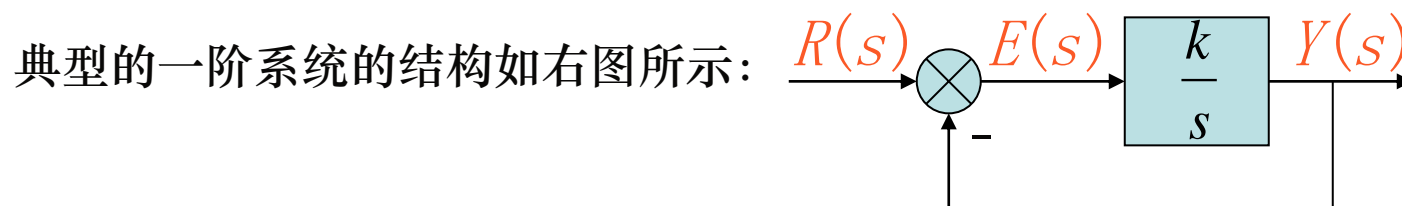
## 一阶系统的瞬态响应

### (1) 一阶系统的数学模型

一阶系统的数学表现形式：其微分方程是一阶的，或其传递函数的特征方程是s的一次方程。

一阶系统的微分方程为：

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = r(t)$$



其闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

式中， $T = \frac{1}{k}$  称为时间常数。



## 知识点3

## 一阶系统的瞬态响应

## (2)典型的一阶系统函数响应

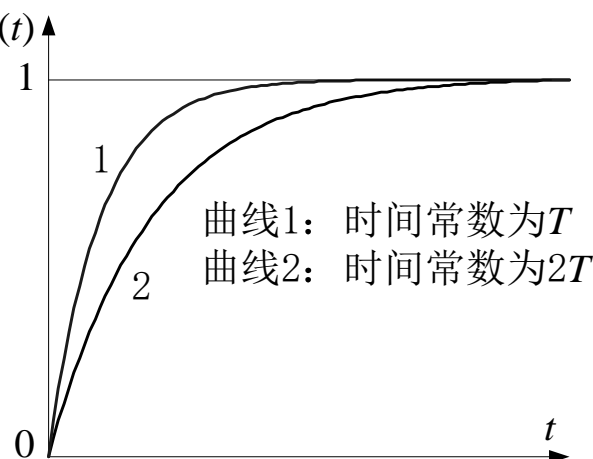
➤ 单位阶跃响应函数:  $R(s) = 1/s$

$$Y(s) = \frac{1}{Ts + 1} \times \frac{1}{s},$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{Ts + 1} \times \frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}\right] = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

■ 单位阶跃响应曲线是单调上升的指数曲线, 为非周期响应;

■ 时间常数 $T$ 反映了系统的惯性, 时间常数 $T$ 越大, 表示系统的惯性越大, 响应速度越慢, 系统跟踪单位阶跃信号越慢, 单位阶跃响应曲线上升越平缓。反之, 惯性越小, 响应速度越快, 系统跟踪单位阶跃信号越快, 单位阶跃响应曲线上升越陡峭。







知识点3

一阶系统的瞬态响应

单位斜坡响应函数:  $R(s) = \frac{1}{s^2}$

$$Y_t(s) = \frac{1}{Ts + 1} \times \frac{1}{s^2} = \frac{-T}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{T}{s + 1/T}, \quad y_t(t) = -T + t + Te^{-t/T}$$

显然, 输出  $\dot{c}_t(t) = c_s(t)$ , 而输入  $\dot{i} = 1$ , 所以: 系统对输入信号导数的响应等于对输入信号响应的导数。这个结论对任何阶的线性定常系统都是适用的。





### 知识点3

## 一阶系统的瞬态响应

➡ 单位脉冲响应函数：  $R(s)=1$

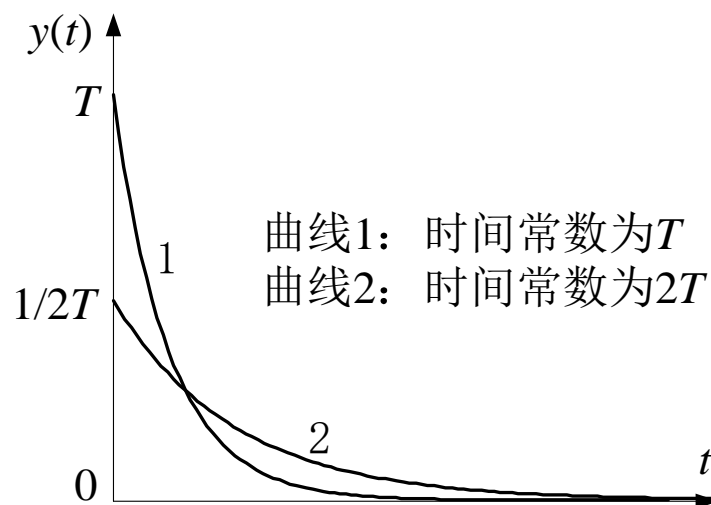
当一阶系统的输入信号为单位脉冲信号  $r(t)=d(t)$ ，其拉氏变换为  $R(s)=1$ ，则系统的输出为：

$$Y(s) = \frac{R(s)}{Ts + 1} = \frac{1}{Ts + 1} = \frac{1/T}{s + 1/T}$$

上式的拉氏反变换称为一阶系统的单位脉冲响应：

$$y(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0$$

一阶系统的单位脉冲响应曲线：一阶系统的单位脉冲响应曲线为单调下降的指数曲线，时间常数T越大，响应曲线下  
降越慢，表明系统受到脉冲输入信号后，恢复到初始状态的时间越长。单位脉冲响应的终值均为零。





### 知识点3

## 一阶系统的瞬态响应

◆ 单位加速度响应函数： $R(s)=1/s^3$

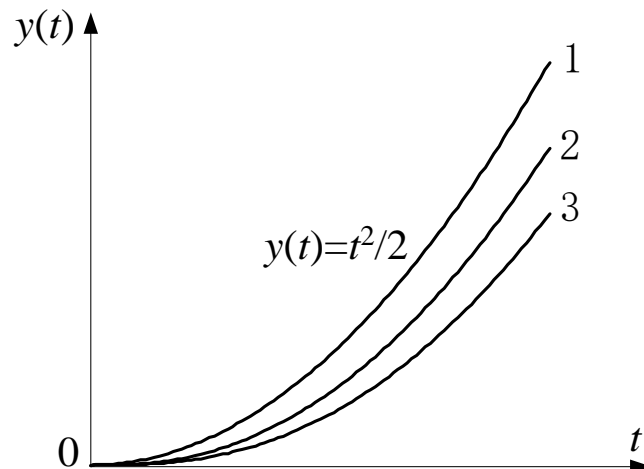
当一阶系统的输入信号为单位加速度信号 $r(t)=t^2/2$ ，其拉氏变换为 $R(s)=1/s^3$ ，则系统的输出为：

$$Y(s) = \frac{R(s)}{Ts + 1} = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s^3} = \frac{1}{s^3} - \frac{T}{s^2} + \frac{T^2}{s} - \frac{T^2}{s + 1/T}$$

上式的拉氏反变换称为一阶系统的单位加速度响应：

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 - Tt + T^2(1 - e^{-\frac{t}{T}}), \quad t \geq 0$$

一阶系统的单位加速度响应曲线：曲线1表示输入单位加速度信号 $r(t)=t^2/2$ ，曲线2和曲线3分别表示系统时间常数等于 $T$ 和 $2T$ 时的单位加速度响应曲线。



## 知识点3

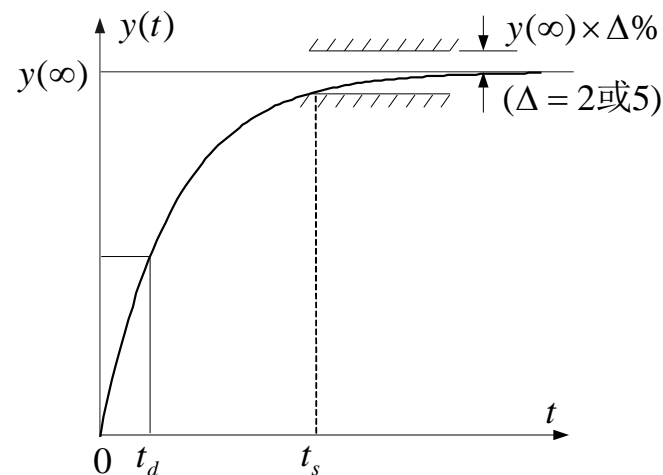
## 一阶系统的瞬态响应

## (3) 一阶系统的瞬态性能指标

■ 延迟时间 $t_d$ ：延迟时间定义为输出响应第一次达到稳态值的50%所需的时间。

$$\text{由：} \quad 0.5 = 1 - e^{-\frac{t_d}{T}}$$

$$\text{得：} \quad t_d \approx 0.693T$$




■ 上升时间 $t_r$ ：设一阶系统输出响应达到10%稳态值的时间为 $t_1$ ，达到90%稳态值的时间为 $t_2$ ，则有：

$$0.1 = 1 - e^{-\frac{t_1}{T}} \quad 0.9 = 1 - e^{-\frac{t_2}{T}}$$

$$\text{解得：} \quad t_1 \approx 0.10536T$$

$$t_2 \approx 2.30259T$$


$$\text{所以上升时间 } t_r \text{ 为：} t_r = t_2 - t_1 \approx 2.197T$$

## 知识点3

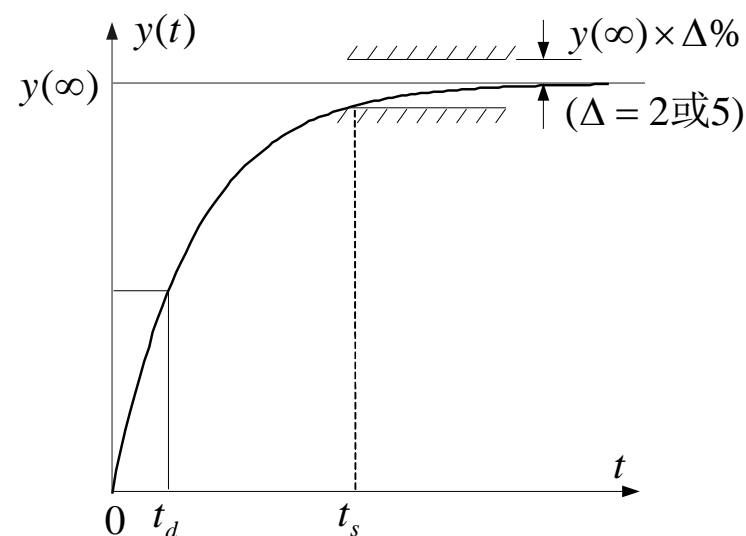
## 一阶系统的瞬态响应

■ 调整时间 $t_s$ :假设系统的误差带宽度为 $D$ ,则根据调整时间的定义有:

$$1 - \Delta\% = 1 - e^{-\frac{t_s}{T}}$$

得:

$$t_s = -T \ln \Delta\% \approx \begin{cases} 4T, & \Delta = 2 \\ 3T, & \Delta = 5 \end{cases}$$



■ 峰值时间 $t_p$ 和超调量 $d\%$ :

一阶系统的单位阶跃响应曲线为单调上升的指数曲线, 没有振荡, 所以峰值时间和超调量不存在。





### 知识点3

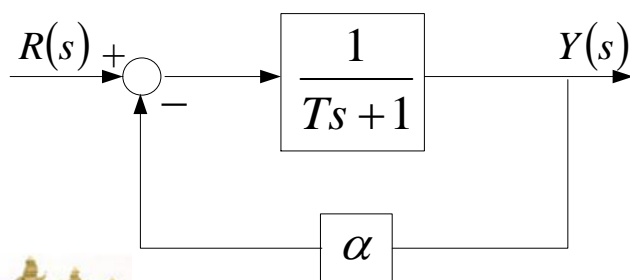
## 一阶系统的瞬态响应

### (4)如何减小一阶系统的时间常数

- 一阶系统的时间常数 $T$ 对系统性能起着非常重要的作用，**时间常数不仅影响一阶系统的响应速度，还影响系统跟踪输入信号的精度。**
- 对于不同的输入信号，**时间常数越大，系统的响应速度越慢，跟踪精度越低。**
- 对于大多数的实际工程系统，通常**希望有较小的时间常数。**

[方法一] 通过负反馈减小时间常数：

原系统为： $G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$ ，加入负反馈如下图：



反馈后系统的闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{\frac{1}{Ts + 1}}{1 + \frac{\alpha}{Ts + 1}} = \frac{\frac{1}{1 + \alpha}}{\frac{T}{1 + \alpha}s + 1} = \frac{K'}{T's + 1}$$



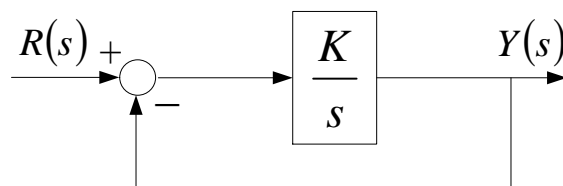


知识点3

## 一阶系统的瞬态响应

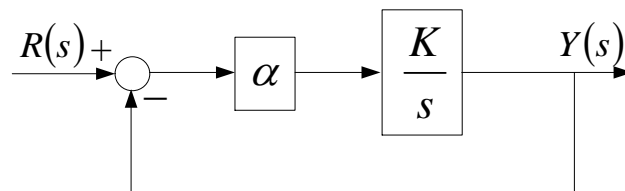
[方法二] 在系统的前向通道上串联一个比例环节。

原系统为：



传递函数为：  $\Phi_0(s) = \frac{1}{Ts + 1}$

改进后系统为：



$$\Phi(s) = \frac{\frac{\alpha K}{s}}{1 + \frac{\alpha K}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha K}s + 1} = \frac{1}{\frac{T}{\alpha}s + 1} = \frac{1}{T's + 1} \quad T' = \frac{T}{\alpha}$$



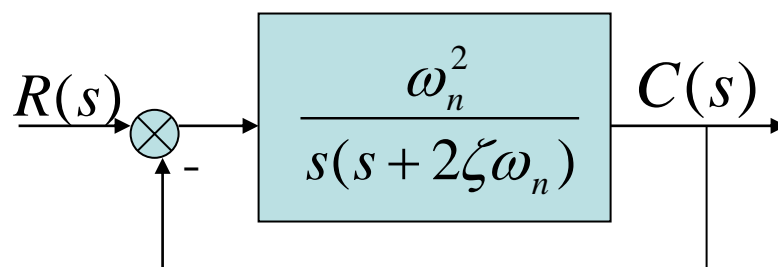


知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

### (1) 典型二阶系统的数学模型

下图所示为稳定的二阶系统的典型结构图。



开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s}$$

闭环传递函数为:

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$\Phi(s)$  称为典型二阶系统的传递函数,  $\zeta$  称为阻尼系数,  $\omega_n$  称为无阻尼振荡圆频率或自然频率。注意:  $\omega_n$  和  $\omega_d$  有区别。  $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$  称为系统的阻尼振荡角频率。







## 知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

特征方程为： $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

特征根为： $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ ，注意：当  $\zeta$  不同时，(极点)有不同的形式，其阶跃响应的形式也不同。它的阶跃响应有振荡和非振荡两种情况。

1. 当  $\zeta = 0$  时，特征方程有一对共轭的虚根，称为零(无)阻尼系统，系统的阶跃响应为持续的等幅振荡。
2. 当  $0 < \zeta < 1$  时，特征方程有一对实部为负的共轭复根，称为欠阻尼系统，系统的阶跃响应为衰减的振荡过程。
3. 当  $\zeta = 1$  时，特征方程有一对相等的实根，称为临界阻尼系统，系统的阶跃响应为非振荡过程。
4. 当  $\zeta > 1$  时，特征方程有一对不等的实根，称为过阻尼系统，系统的阶跃响应为非振荡过程。

## 知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

## (2) 典型二阶系统的瞬态响应

当输入为单位阶跃函数时,  $R(s) = \frac{1}{s}$ , 有:

$$C(s) = \Phi(s) \times \frac{1}{s},$$

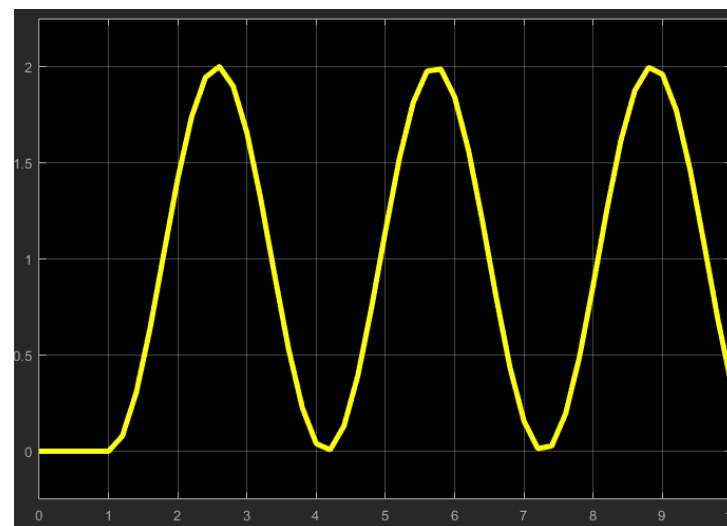
$$c(t) = L^{-1}[\Phi(s) \times \frac{1}{s}]$$

[分析]:

➤ 当  $\zeta = 0$  时, 极点为:  $s = \pm j\omega_n$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(\omega_n^2 + s^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$\therefore c(t) = 1 - \cos\omega_n t, t \geq 0$$



此时输出将以频率  $\omega_n$  做等幅振荡, 所以,  $\omega_n$  称为无阻尼振荡圆频率。





## 知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

➤ 当  $0 < \zeta < 1$  时, 极点为:  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

阶跃响应为:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} - \frac{\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \end{aligned}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left[ \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t) \right], \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right), \quad t \geq 0$$

极点的负实部  $-\zeta\omega_n$  决定了指数衰减的快慢, 虚部  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$  是振荡频率。  
称  $\omega_d$  为阻尼振荡圆频率。



知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

➤ 当  $\zeta = 1$  时，极点为： $s_{1,2} = -\omega_n$

阶跃响应函数为：

$$C(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$$





## 知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

➤ 当  $\zeta > 1$  时，极点为：  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

即特征方程为

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = [s + \omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})][s + \omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})]$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{[s + \omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})][s + \omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})]}$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{[s + \omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})][s + \omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})]} \cdot \frac{1}{s}$$

$$c(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[ \frac{e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}}{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} - \frac{e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}}{(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} \right]$$

特征方程还可为  $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = (s + \frac{1}{T_1})(s + \frac{1}{T_2})$





知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

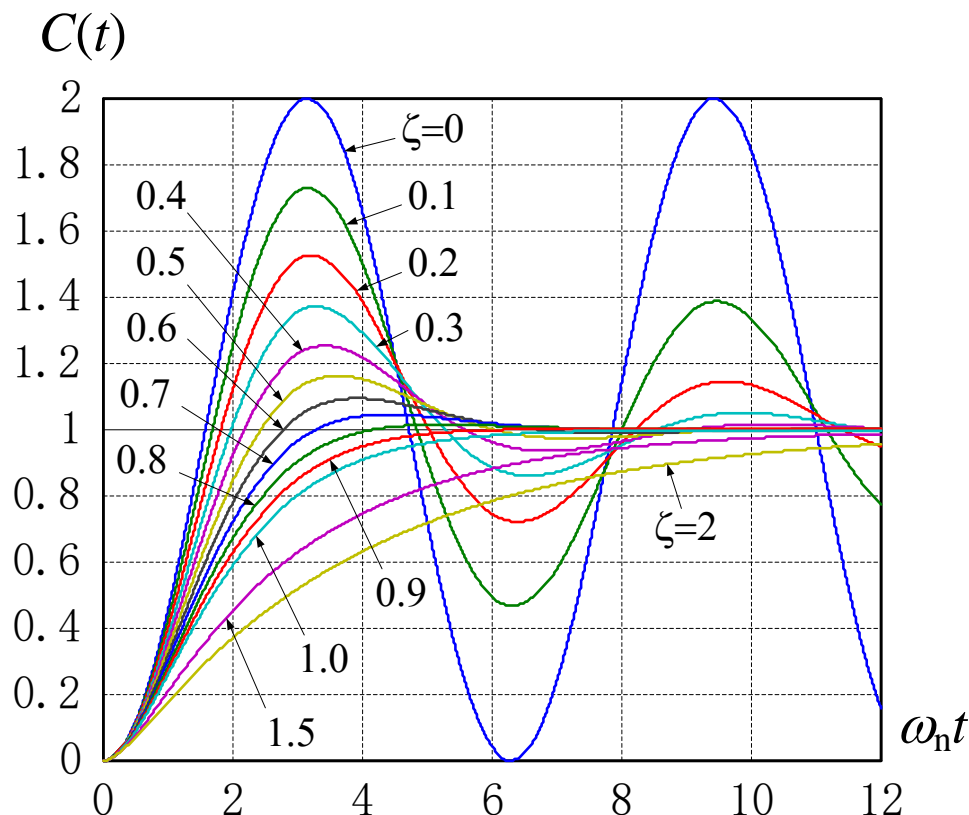
上述四种情况分别称为二阶**无阻尼**、**欠阻尼**、**临界阻尼**和**过阻尼**系统。其阻尼系数、特征根、极点分布和单位阶跃响应如下表所示：

阻尼系数	特征根	极点位置	单位阶跃响应
$\zeta = 0$ , 无阻尼	$s_{1,2} = \pm j\omega_n$	一对共轭虚根	等幅周期振荡
$0 < \zeta < 1$ , 欠阻尼	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$	一对共轭复根(左半平面)	衰减振荡
$\zeta = 1$ , 临界阻尼	$s_{1,2} = -\omega_n$ (重根)	一对负实重根	单调上升
$\zeta > 1$ , 过阻尼	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \mp \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$	两个互异负实根	单调上升



## 知识点4

## 二阶系统的瞬态响应



可以看出：随着  $\zeta$  的增加， $c(t)$  将从无衰减的周期运动变为有衰减的正弦运动，当  $\zeta \geq 1$  时， $c(t)$  呈现单调上升运动（无振荡）。可见  $\zeta$  反映实际系统的阻尼情况，故称为阻尼系数。

知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

### (3)典型二阶性能指标及其与系统参数的关系

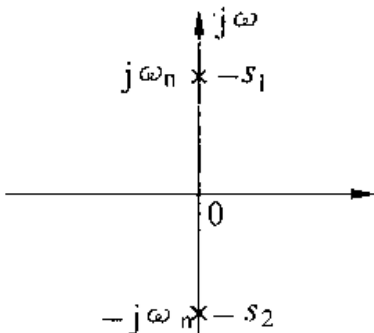
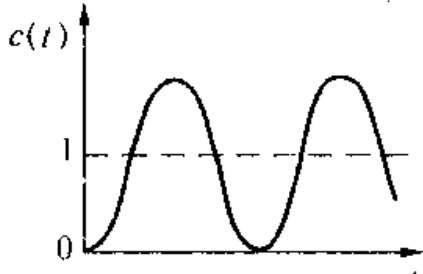
1. 系统无阻尼状态瞬态过程( $\zeta = 0$ ) :

系统无阻尼特征方程有一对共轭虚根  $-s_{1,2} = \pm j\omega_n$

$$c_t(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ -\frac{s}{s^2 + \omega_n^2} \right] = -\cos \omega_n t, t \geq 0$$

$$c(t) = c_t(t) + c_{ss}(t) = c_t(t) + 1 = 1 - \cos \omega_n t$$

表 3-1 二阶系统的典型阶跃响应曲线

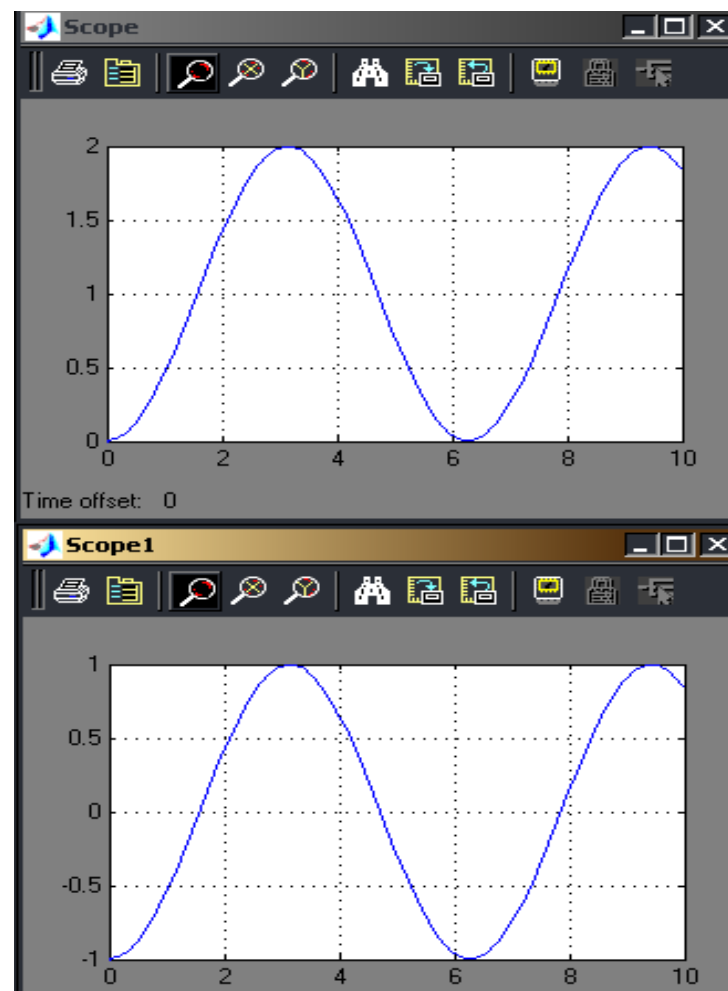
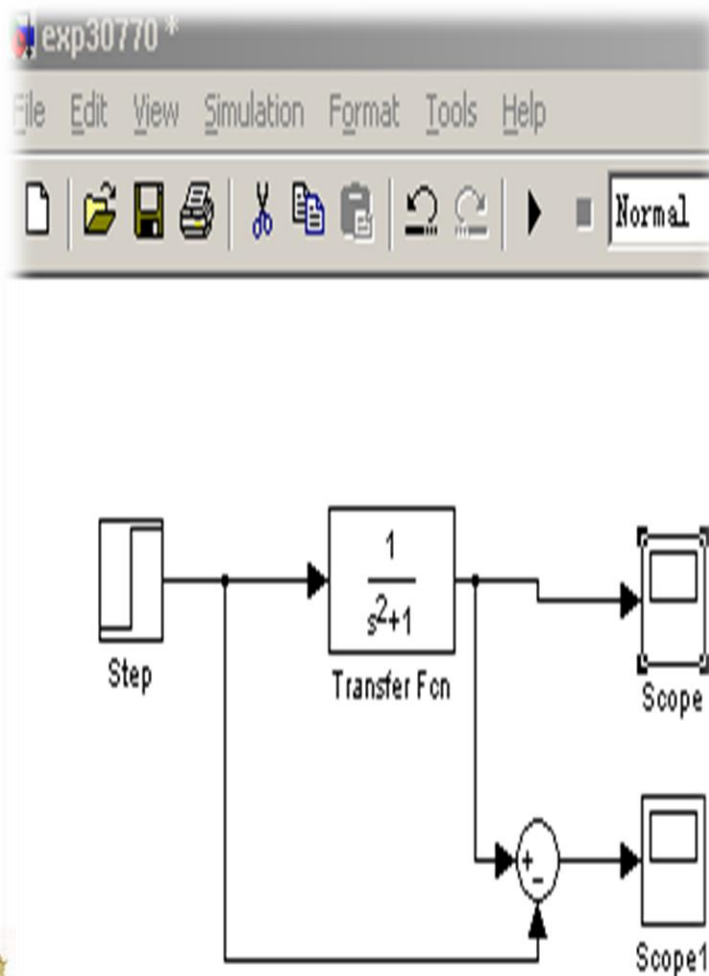
阻尼系数	特征方程根	根在复平面上位置	单位阶跃响应
$\zeta = 0$  (无阻尼)	$-s_{1,2} = \pm j\omega_n$		





知识点4

二阶系统的瞬态响应





知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

### 2. 衰减振荡瞬态过程 ( $0 < \zeta < 1$ ):

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right), \quad t \geq 0$$

(1) **上升时间**  $t_r$ : 根据定义, 当  $t = t_r$  时,  $c(t_r) = 1$ 。

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_r} \left( \cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_r \right) = 1$$
$$\cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_r = 0$$

$$\operatorname{tg} \omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

解得:

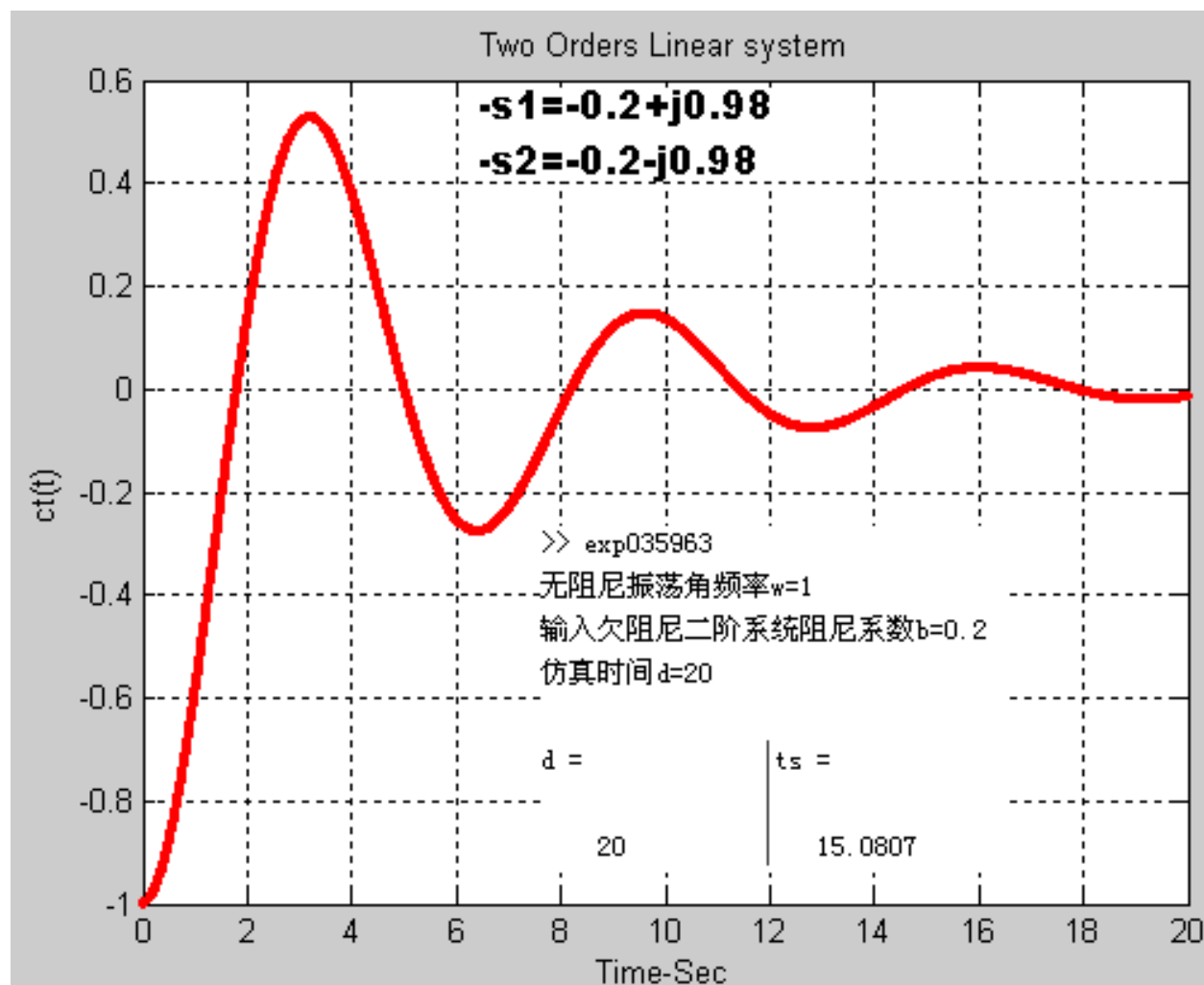
$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \operatorname{tg}^{-1} \left( -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$$





知识点4

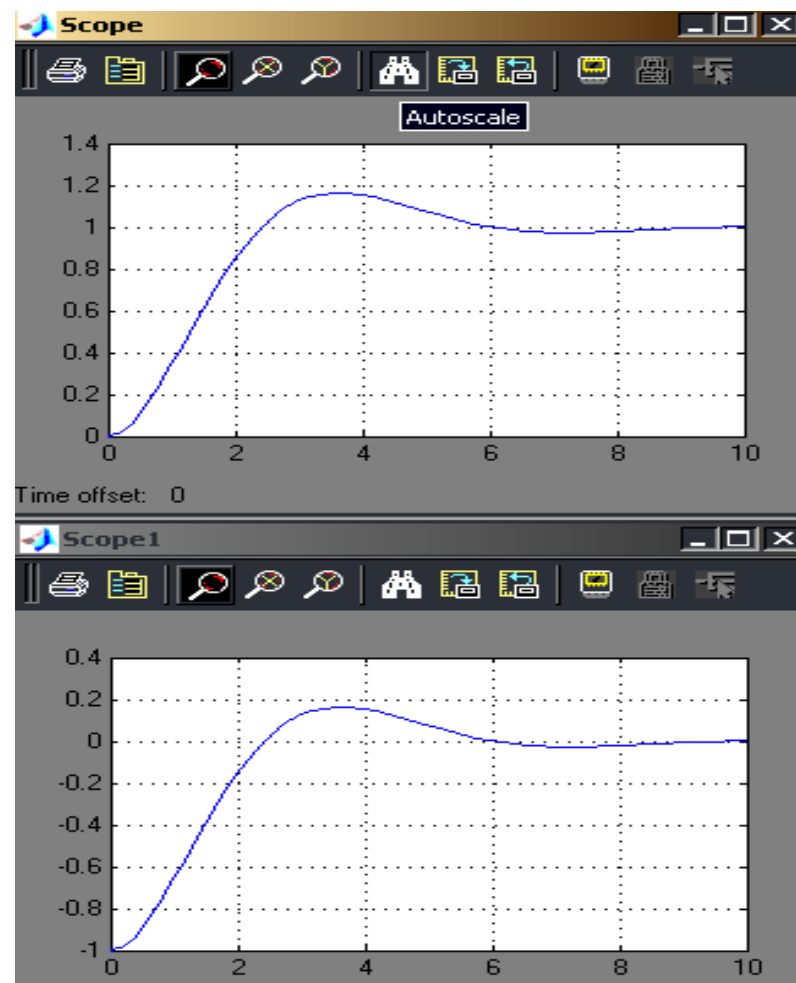
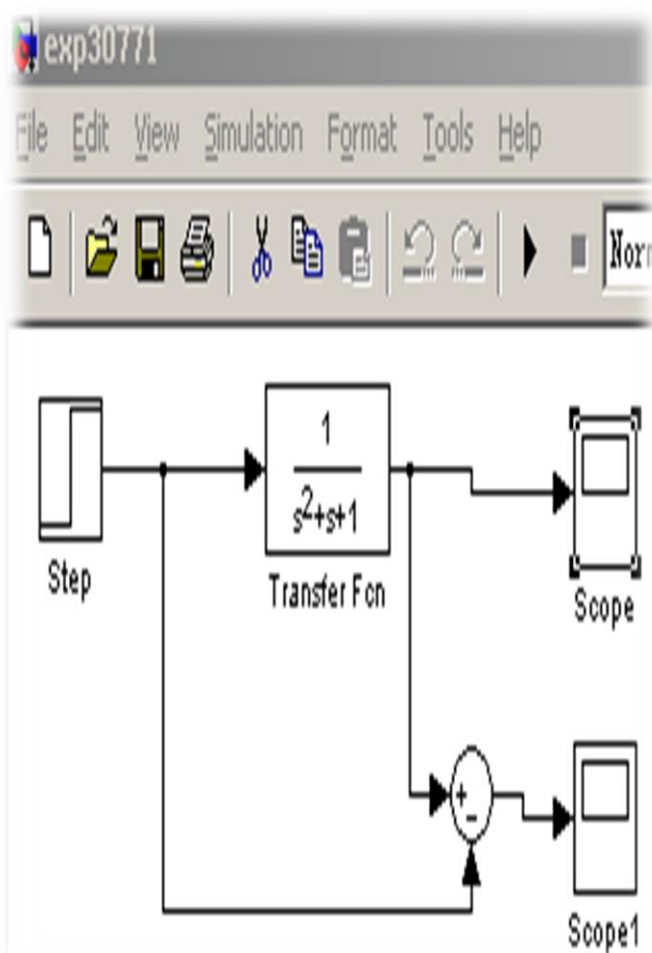
## 二阶系统的瞬态响应





知识点4

## 二阶系统的瞬态响应





知识点4

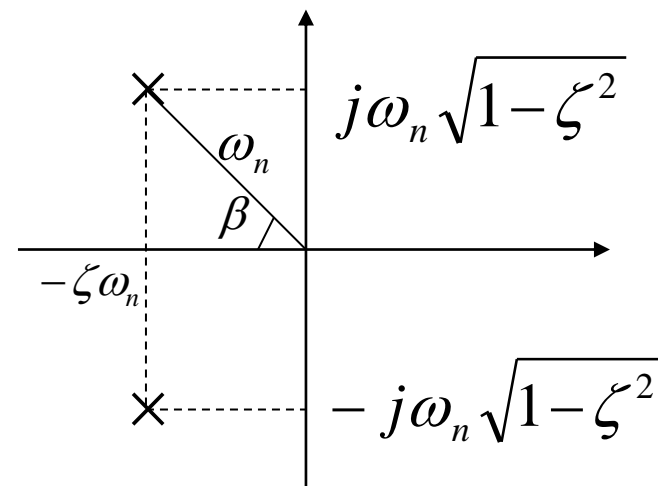
## 二阶系统的瞬态响应

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \operatorname{tg}^{-1} \left( -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$$

$$\because \operatorname{tg}(\pi - \beta) = -\frac{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta \omega_n} = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$\operatorname{tg}^{-1} \left( -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) = \pi - \beta$$

$$\Rightarrow t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \beta}{\omega_n (\sqrt{1-\zeta^2})}$$



(1)  $\beta$  称为阻尼角，这是由于  $\cos \beta = \zeta$ 。





知识点4

二阶系统的瞬态响应

(2) **峰值时间**  $t_p$ : 当  $t = t_p$  时,  $\dot{c}(t_p) = 0$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta), \quad t \geq 0 \quad \text{其中} \quad \beta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$c'(t) = -\frac{-\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_p + \beta) - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \omega_d \cdot \cos(\omega_d t_p + \beta) = 0$$

$$\zeta\omega_n \sin(\omega_d t_p + \beta) - \omega_d \cdot \cos(\omega_d t_p + \beta) = 0$$

$$\text{整理得: } \operatorname{tg}(\omega_d t_p + \beta) = \frac{\omega_d}{\zeta\omega_n} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \operatorname{tg}\beta$$

$$\omega_d t_p + \beta = n\pi + \beta, (n=0,1,2,\dots)$$

由于  $t_p$  出现在第一次峰值时间, 取  $n=1$ , 有:

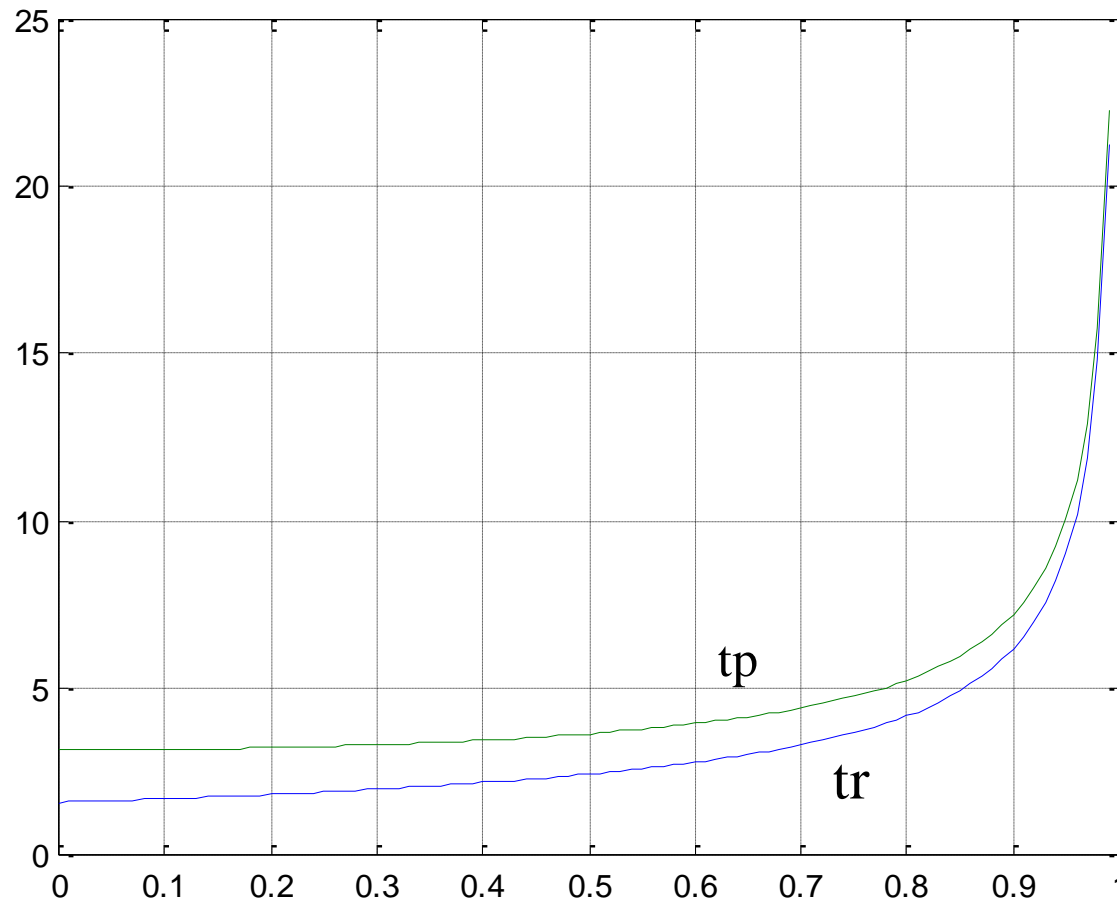
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$





知识点4

## 二阶系统的瞬态响应





知识点4

二阶系统的瞬态响应

(3) 最大超调量  $\delta\%$ :

将峰值时间  $t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$  代入  $c(t)$  得  $c(t_p) = c_{\max}$

$$\begin{aligned} c_{\max} = c(t_p) &= 1 - e^{-\zeta \omega_n t_p} \left( \cos \omega_d t_p + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_n t_p \right) \\ &= 1 - e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \left( \cos \pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \pi \right) = 1 + e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \end{aligned}$$

$$\delta\% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% = (c(t_p) - 1) \times 100\%$$

故  $\delta\% = e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$

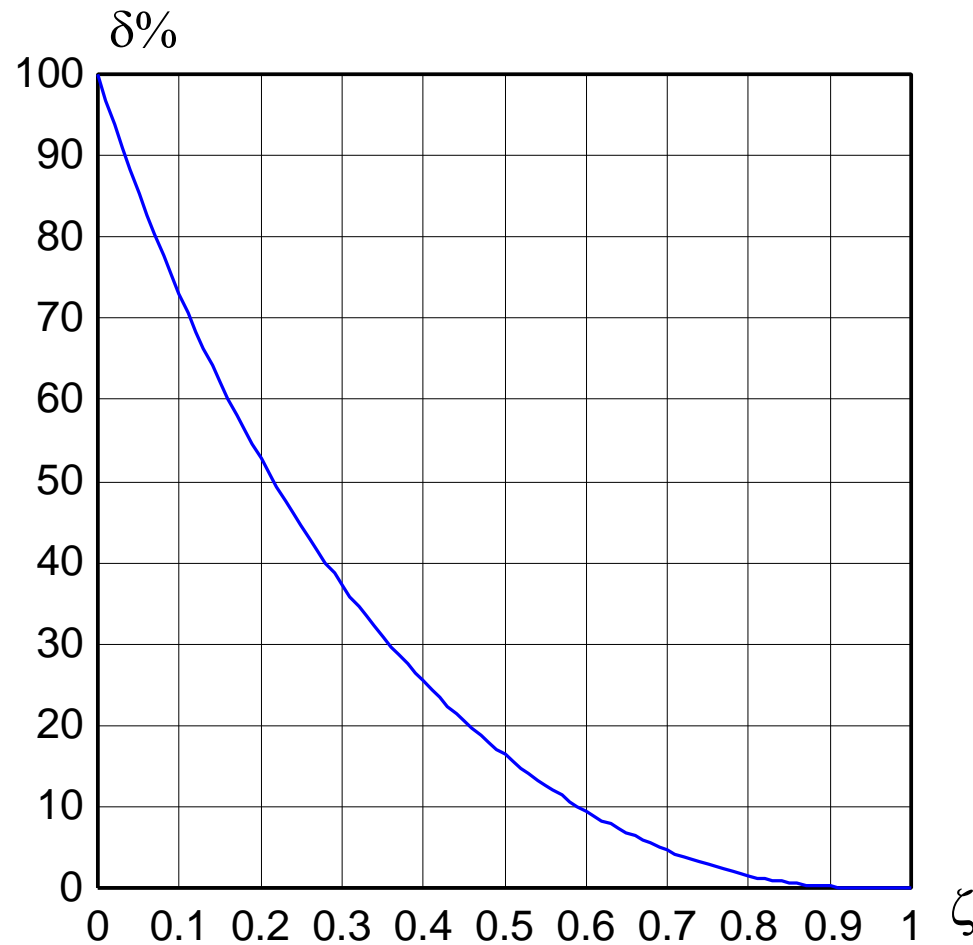






知识点4

## 二阶系统的瞬态响应





## 知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

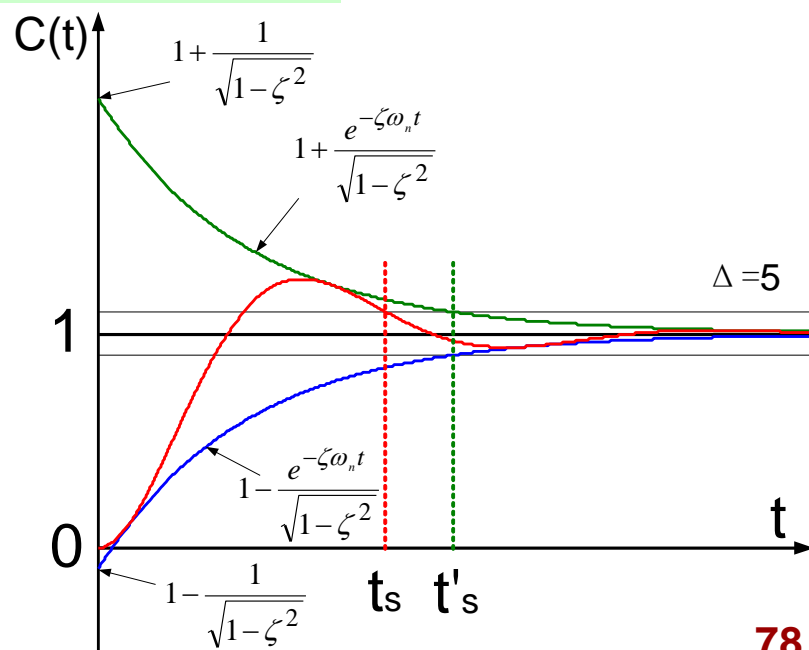
### (4) 调节时间 $t_s$ :

根据调节时间的定义，当  $t \geq t_s$  时  $|c(t)-c(\infty)| \leq c(\infty) \times \Delta\%$ 。

$$\left| \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \text{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}) \right| \leq \Delta\%$$

可见，写出调节时间的表达式是困难的。  
由右图可知响应曲线总在一对包络线之内。包络线为

$$1 \pm \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$





知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

当  $\zeta$  较小时, 近似取:  $\sqrt{1-\zeta^2} \approx 1$ , 且

$$\ln(0.02) \approx -3.912 \approx -4$$

$$\ln(0.05) \approx -2.996 \approx -3$$

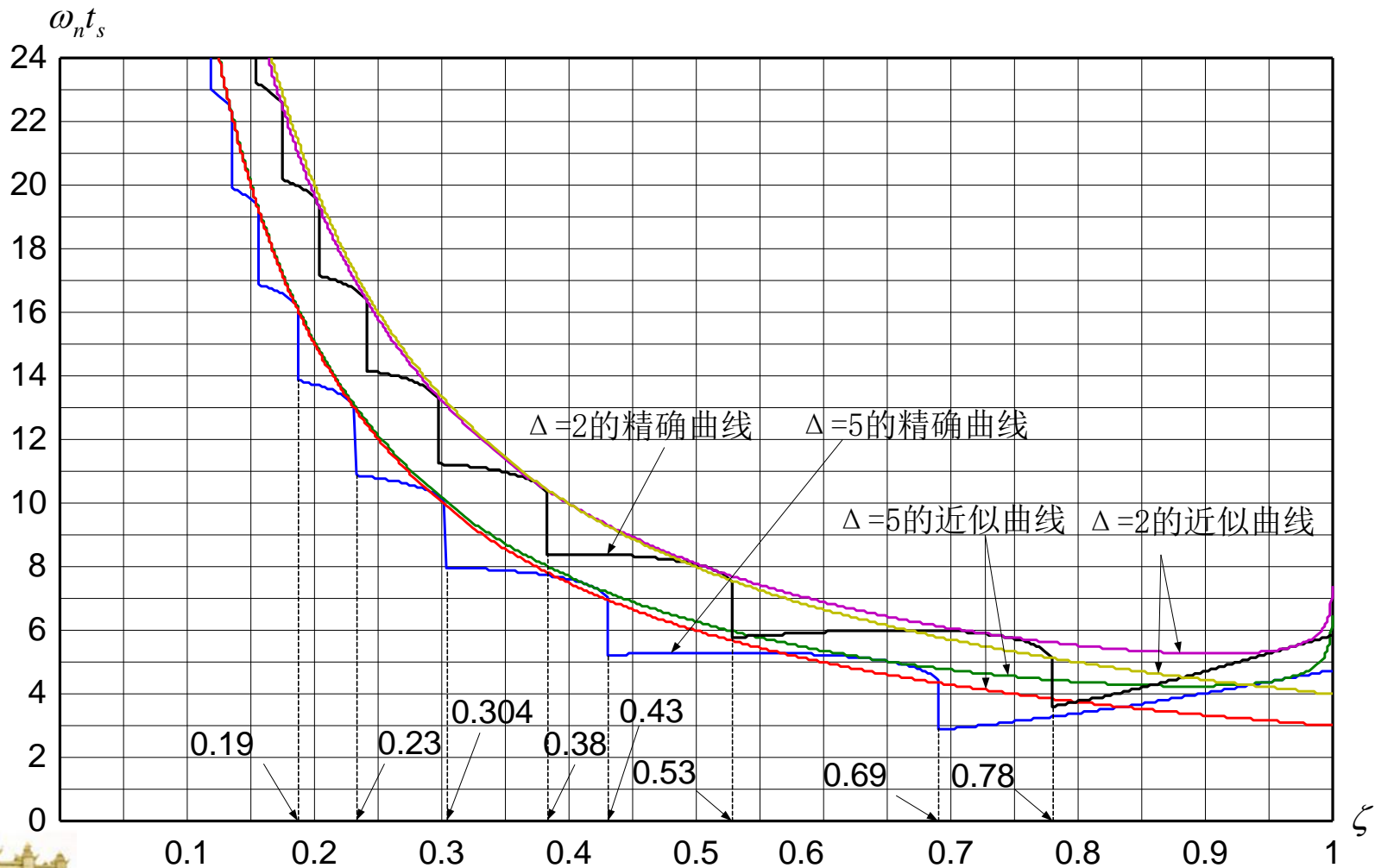
所以

$$t_s \approx \begin{cases} \frac{4}{\zeta\omega_n}, & \text{当 } \Delta = 2 \text{ 时} \\ \frac{3}{\zeta\omega_n}, & \text{当 } \Delta = 5 \text{ 时} \end{cases}$$



知识点4

## 二阶系统的瞬态响应





知识点4

二阶系统的瞬态响应

(5) 振荡次数  $N$ :

$$N = \frac{t_s}{t_f}, \text{ 式中 } t_f = \frac{2\pi}{\omega_d} \text{ 为阻尼振荡周期。}$$





## 知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

### 3. 非振荡瞬态过程:

(1) 对于  $\zeta = 1$  , 极点为:  $s_{1,2} = -\omega_n$

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e^{-x_k} (1 + x_k) - 0.02}{x_k e^{-x_k}} \quad \text{或} \quad x_{k+1} = x_k - \frac{e^{-x_k} (1 + x_k) - 0.05}{x_k e^{-x_k}}$$

$$t_s \approx \begin{cases} \frac{5.84}{\omega_n} & \Delta = 2 \\ \frac{4.75}{\omega_n} & \Delta = 5 \end{cases}$$

牛顿迭代公式: 对  $f(x) = 0$  其根可迭代求出

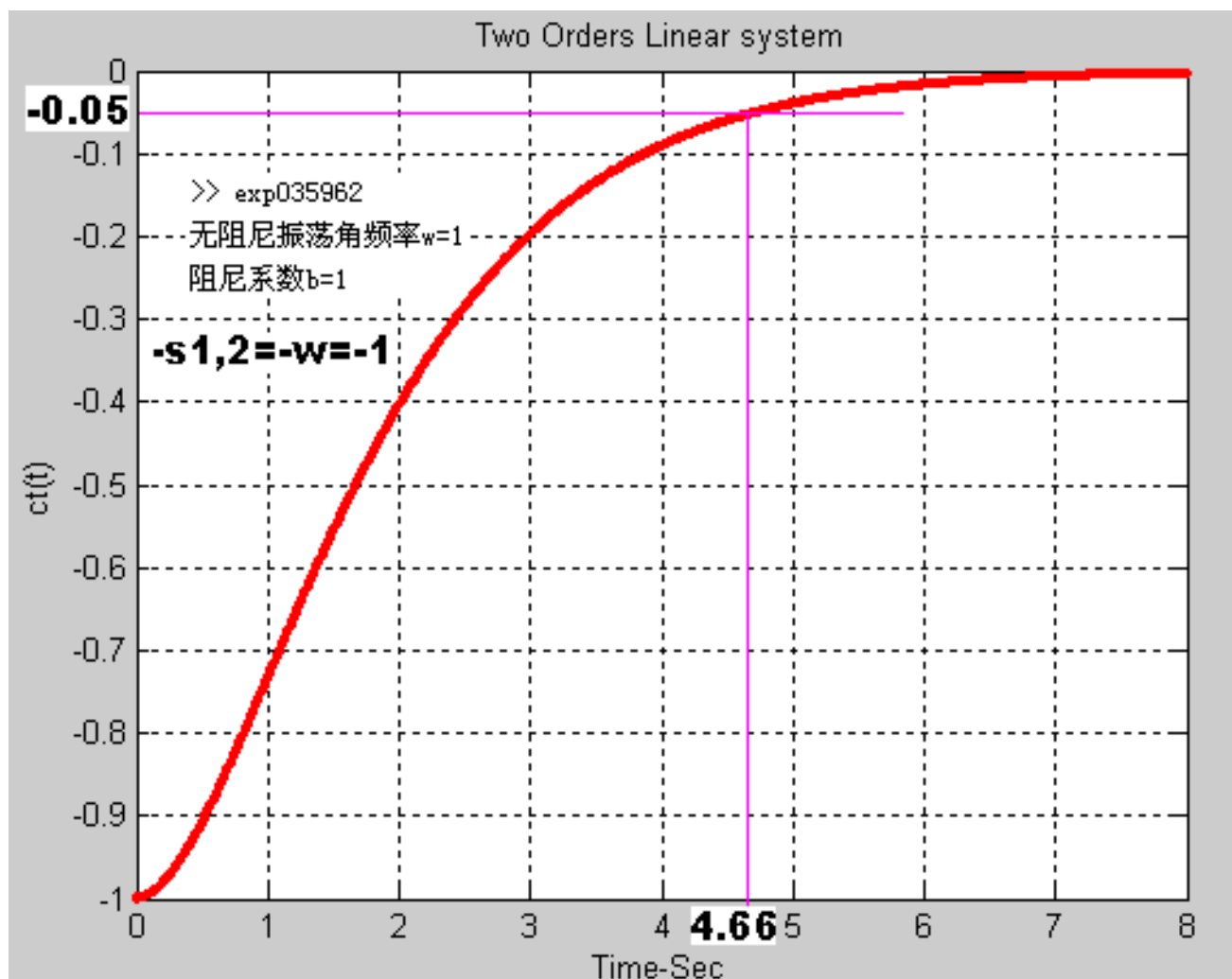
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$





知识点4

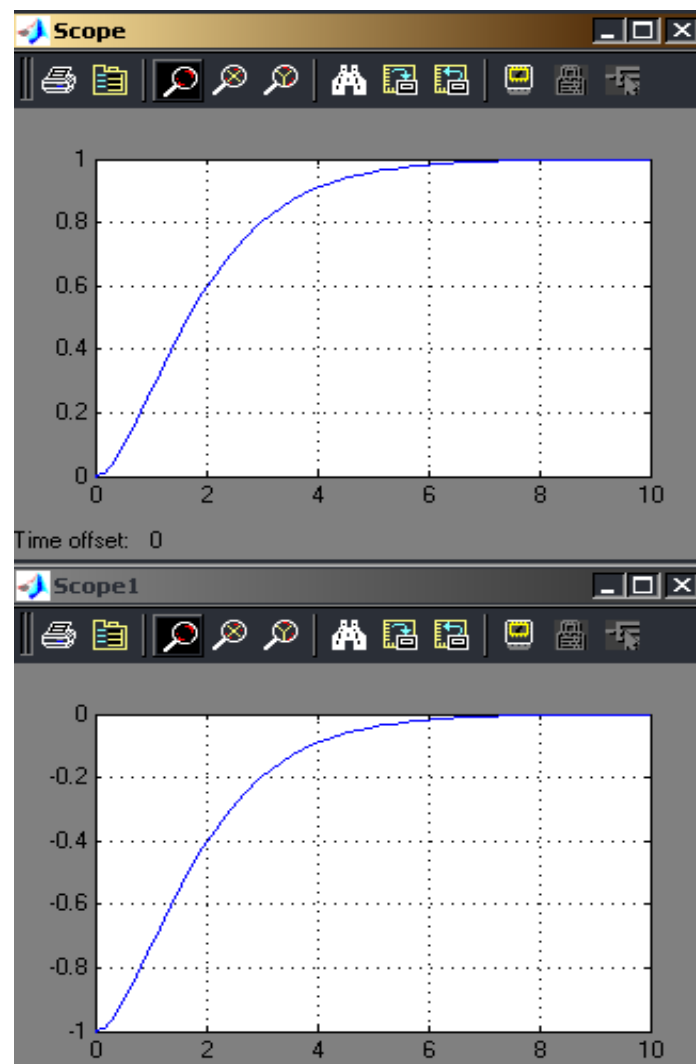
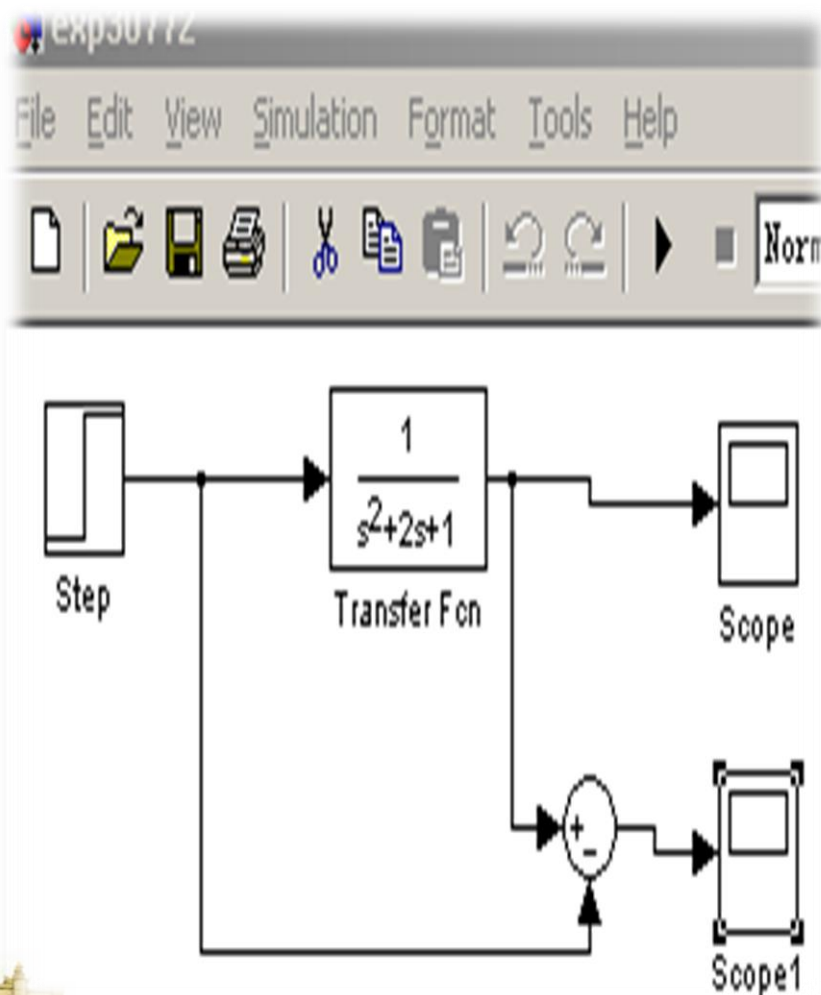
## 二阶系统的瞬态响应





知识点4

二阶系统的瞬态响应







## 知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

(2) 对于  $\zeta > 1$ ，极点为： $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \mp \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

$$c(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[ \frac{e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} - \frac{e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right]$$

在  $c(t)$  中，有两个衰减指数项，所以是一个单调上升的过程。用调整时间  $t_s$  就可以描述瞬态过程的性能。

◆ 当  $\zeta = 1.25$  时  $T_1 = \frac{2}{\omega_n}, T_2 = \frac{1}{2\omega_n} \quad \therefore \frac{T_1}{T_2} = 4 \quad \text{即} \quad T_1 = 4T_2$

利用牛顿迭代公式可得  $t_s \approx \begin{cases} 4.2T_1 & \Delta = 2 \\ 3.3T_1 & \Delta = 5 \end{cases}$

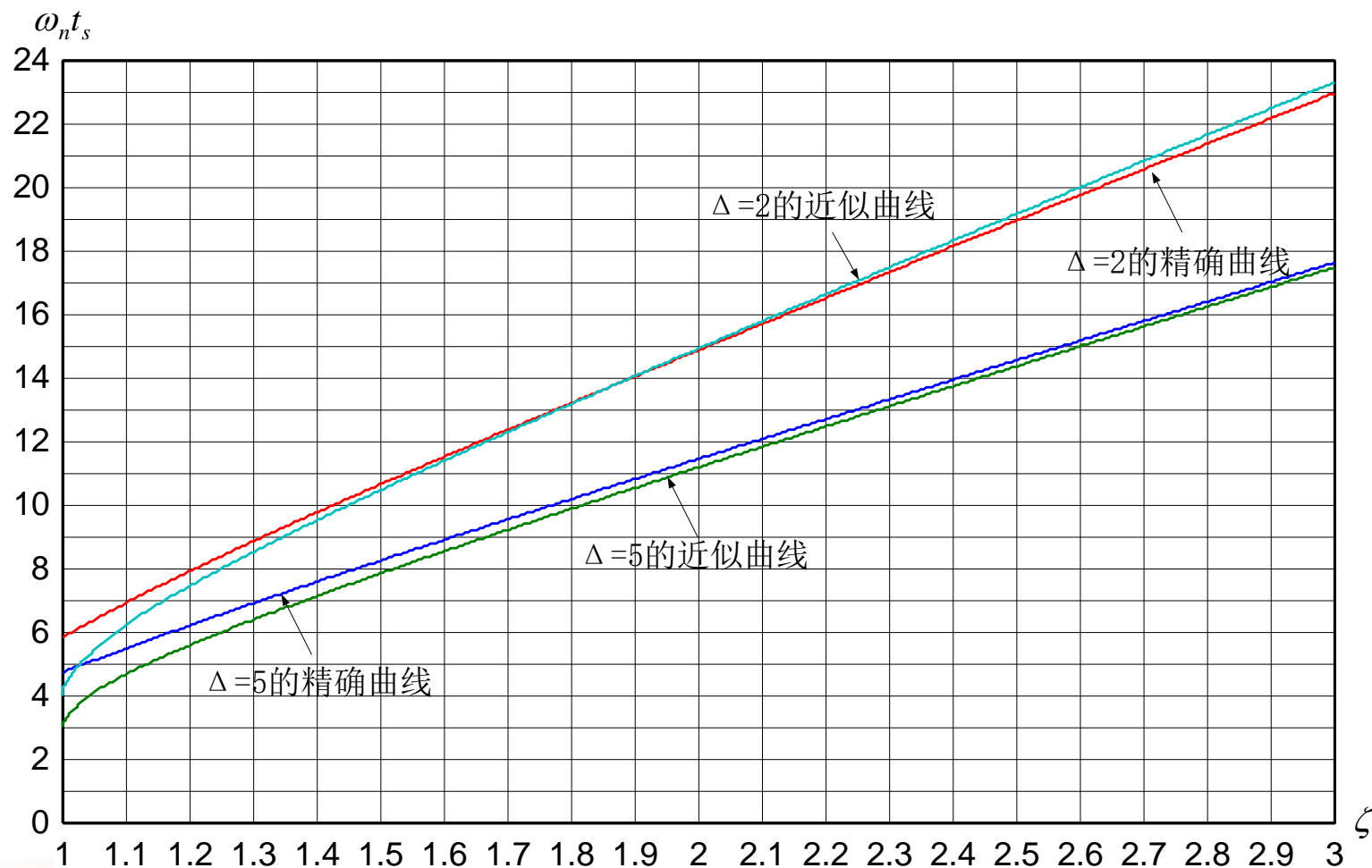
当  $\zeta \geq 0.6\sqrt{5} \approx 1.34$  时， $T_1 \geq 5T_2$ ，

这时可用一阶系统来近似  $t_s \approx \begin{cases} 4T_1 & \Delta = 2 \\ 3T_1 & \Delta = 5 \end{cases}$



知识点4

## 二阶系统的瞬态响应





## 知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

◆当  $\zeta \gg 1$  时，极点  $s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$  远离虚轴，且  $c(t)$  中包含极点  $s_2$  的衰减项的系数小，所以由极点  $s_2$  引起的指数项衰减的很快，因此，在瞬态过程中可以忽略  $s_2$  的影响，把二阶系统近似为一阶系统。

◆当  $\zeta = 1$  时，系统也具有单调非振荡的瞬间过程，是单调非振荡的临界状态。在非振荡过程中，它的  $t_s$  最小。

通常，都希望控制系统有较快的响应时间，即希望系统的阻尼系数在0-1之间。而不希望处于过阻尼情况 ( $\zeta > 1$ )，因为调节时间过长。但对于一些特殊的系统不希望出现超调系统(如液位控制)和大惯性系统(如加热装置)，则可以处于  $\zeta > 1$  情况。





## 知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

### [总结]

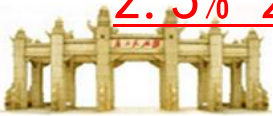
□ **阻尼系数**  $\zeta$  是二阶系统的一个重要参数，用它可以直接地判断一个二阶系统的瞬态品质。在  $\zeta > 1$  的情况下 瞬态特性为单调变化曲线，无超调和振荡，但  $t_s$  长。当  $\zeta \leq 0$  时，输出量作等幅振荡或发散振荡，系统不能稳定工作。

□ 在欠阻尼 ( $0 < \zeta < 1$ ) 情况下工作时，若  $\zeta$  过小，则超调量大，振荡次数多，调节时间长，瞬态控制品质差。

注意：  $\delta\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$  只与  $\zeta$  有关，所以一般根据  $\delta\%$  来选择  $\zeta$ 。

□  $\because t_s = \frac{4}{\omega_n \zeta}$  (或  $\frac{3}{\omega_n \zeta}$ ),  $\therefore \omega_n$  越大,  $t_s \downarrow$  (当  $\zeta$  一定时)

□ 为限制超调量，并使  $t_s$  较小， $\zeta$  一般取  $0.4 \sim 0.8$ ，则 超调量在  $2.5\% \sim 25\%$  之间。





知识点4

二阶系统的瞬态响应

表1 阻尼系数、阻尼角与最大超调量的关系

$\zeta$	$\beta = \cos^{-1} \zeta$	$\delta \%$	$\zeta$	$\beta = \cos^{-1} \zeta$	$\delta \%$
0.1	$84.26^\circ$	72.9	0.69		5
0.2	$78.46^\circ$	52.7	0.7	$45.57^\circ$	4.6
0.3	$72.54^\circ$	37.23	0.707	$45^\circ$	4.3
0.4	$66.42^\circ$	25.38	0.78		2
0.5	$60^\circ$	16.3	0.8	$36.87^\circ$	1.5
0.6	$53.13^\circ$	9.84	0.9	$25.84^\circ$	0.15

□ 阻尼系数一般取0.4~0.8，超调量在2.5%~25%之间

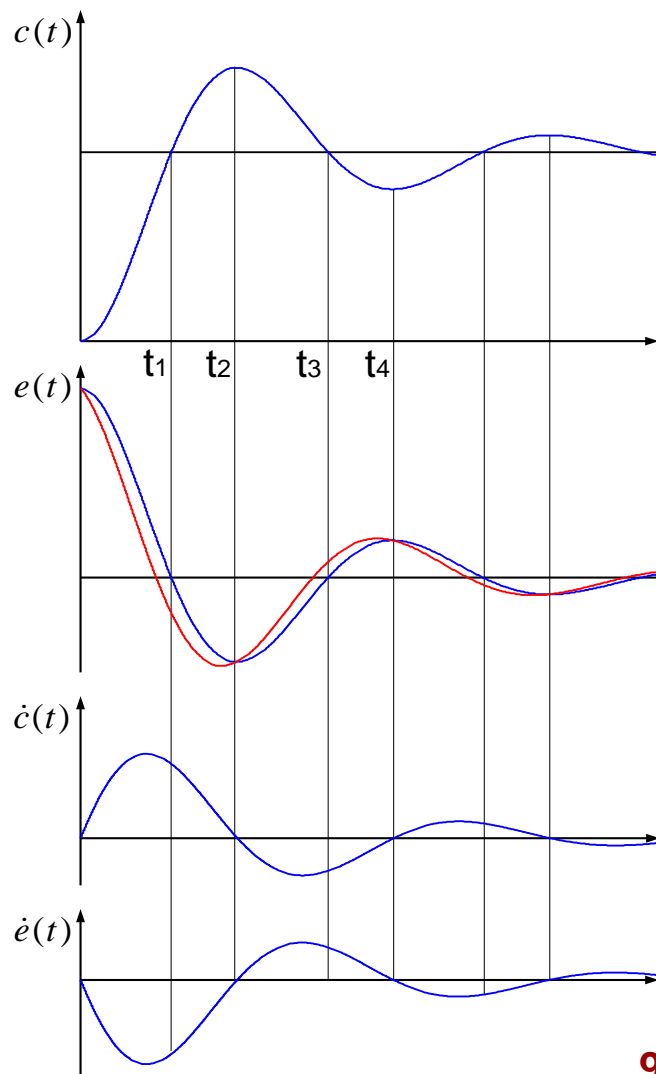
## 知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

## (4)改善二阶系统响应特性的措施

## 1.二阶系统超调产生过程

- a)  $[0, t_1]$  误差信号为正，产生正向修正作用，以使误差减小，但因系统阻尼系数小，正向速度大，造成响应出现正向超调。
- b)  $[t_1, t_2]$  误差信号为负，产生反向修正作用，但开始反向修正作用不够大，经过一段时间才使正向速度为零，此时输出达到最大值。
- c)  $[t_2, t_3]$  误差信号为负，此时反向修正作用大，使输出返回过程中又穿过稳态值，出现反向超调。
- d)  $[t_3, t_4]$  误差信号为正，产生正向修正作用，但开始正向修正作用不够大，经过一段时间才使反向速度为零，此时输出达到反向最大值。



## 知识点4

# 二阶系统的瞬态响应

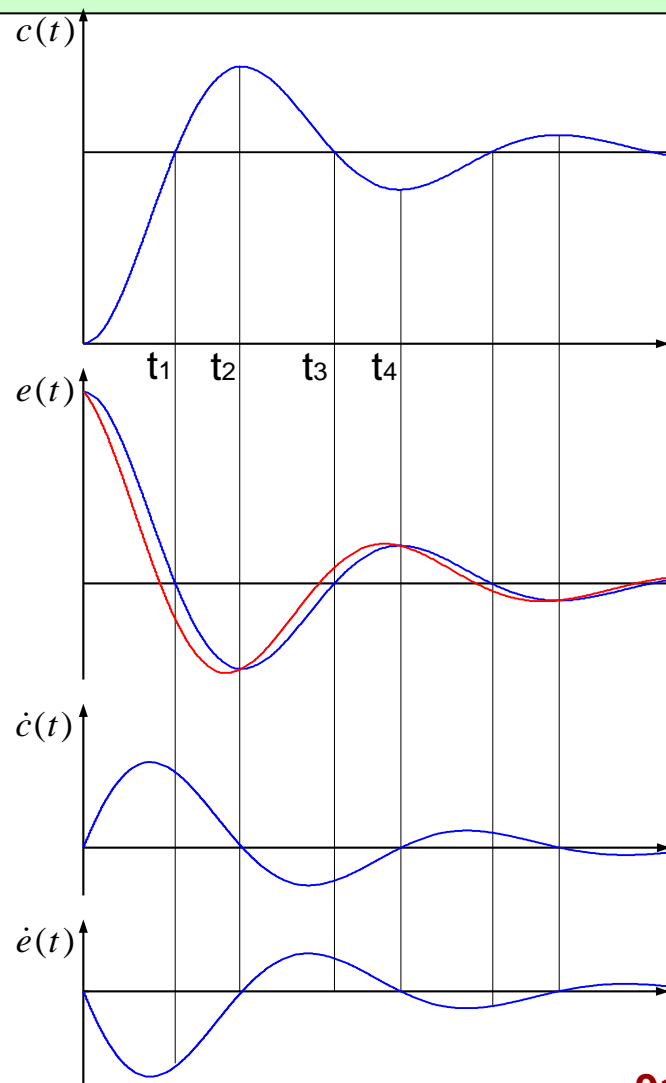
## 2. 二阶系统超调产生原因

- $[0, t_1]$  正向修正作用太大，特别在靠近  $t_1$  点时。
- $[t_1, t_2]$  反向修正作用不足。

## 3. 减小二阶系统超调的思路

- $[0, t_1]$  减小正向修正作用。附加与原误差信号相反的信号。
- $[t_1, t_2]$  加大反向修正作用。附加与原误差信号同向的信号。
- $[t_2, t_3]$  减小反向修正作用。附加与原误差信号相反的信号。
- $[t_3, t_4]$  加大正向修正作用。附加与原误差信号同向的信号。

即在  $[0, t_2]$  内附加一个负信号，在  $[t_2, t_4]$  内附加一个正信号。减去输出的微分或加上误差的微分都具有这种效果。

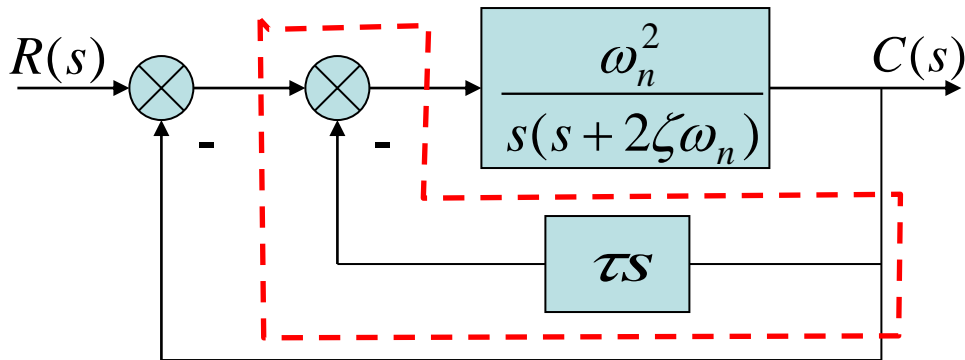


## 知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

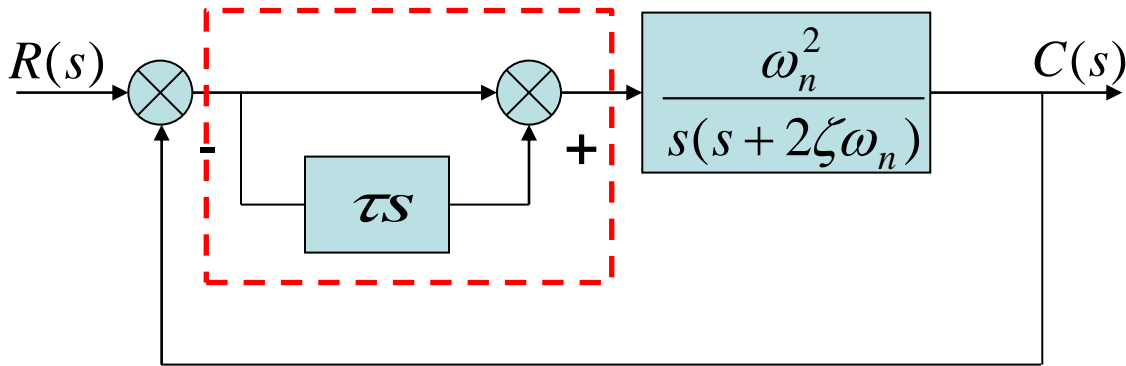
## (1) 输出量的速度反馈控制

将输出量的速度信号 $c'(t)$ 采用负反馈形式反馈到输入端并与误差信号 $e(t)$ 比较，构成一个内反馈回路。简称速度反馈。



## (2) 误差的比例+微分控制

以误差信号 $e(t)$ 与误差信号的微分信号 $e'(t)$ 的和产生控制作用。简称PI控制。又称微分顺馈。



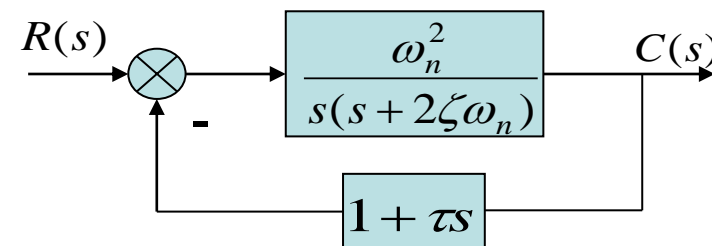
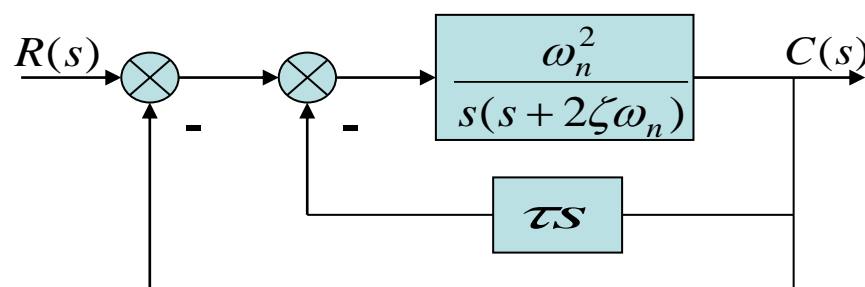
为了改善系统性能而改变系统的结构、参数或附加具有一定功能的环节的方法称为对系统进行校正，附加环节称为校正环节。速度反馈和速度顺馈是较常用的校正方法。



## 知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

### (1) 输出量的速度反馈控制



$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \bigg/ \left( 1 + \frac{\omega_n^2(1 + \tau s)}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \right) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n + \tau\omega_n^2)s + \omega_n^2}$$

与典型二阶系统的标准形式  $\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$  比较

1. 不改变无阻尼振荡频率  $\omega_n$

2. 等效阻尼系数为  $\zeta_t = \zeta + \frac{\tau}{2}\omega_n$

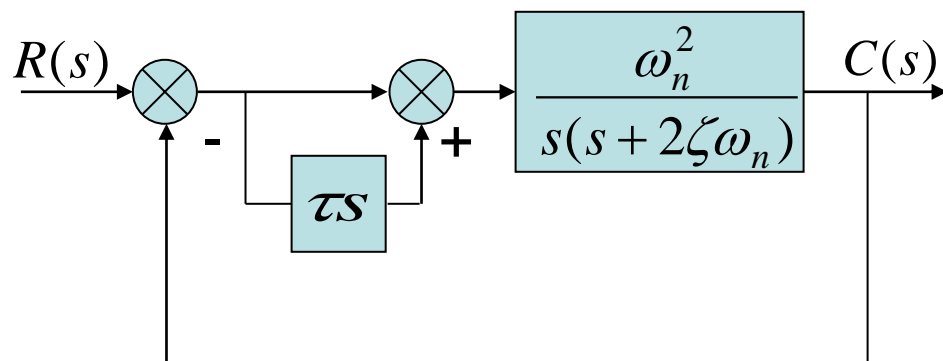
由于  $\zeta_t > \zeta$ ，即等效阻尼系数加大，将使超调量  $\delta\%$  和调节时间  $t_s$  变小。

## 知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

### (2) 误差的比例+微分控制

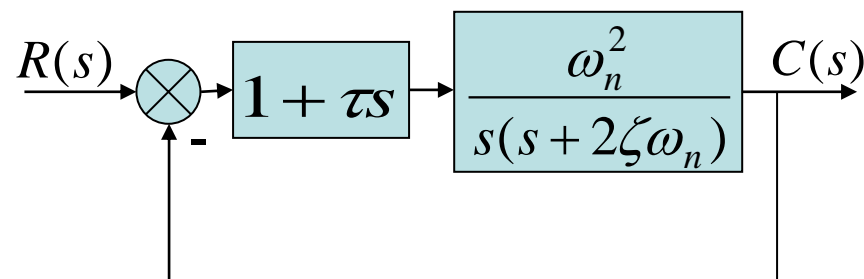
$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2 (1 + \tau s)}{s^2 + (2\zeta\omega_n + \tau\omega_n^2)s + \omega_n^2}$$



与典型二阶系统的标准形式

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

比较



1. 不改变无阻尼振荡频率  $\omega_n$

2. 等效阻尼系数为  $\zeta_d = \zeta + \frac{\tau}{2}\omega_n$

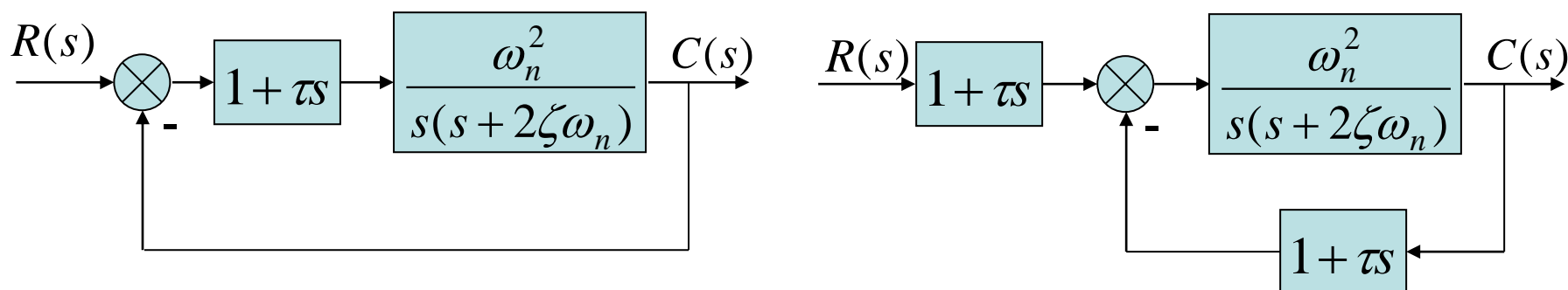
由于  $\zeta_d > \zeta$ , 即 等效阻尼系数加大, 将使超调量  $\delta\%$  和调节时间  $t_s$  变小。

3. 闭环传递函数有零点  $z = -\frac{1}{\tau}$ , 将会给系统带来影响。

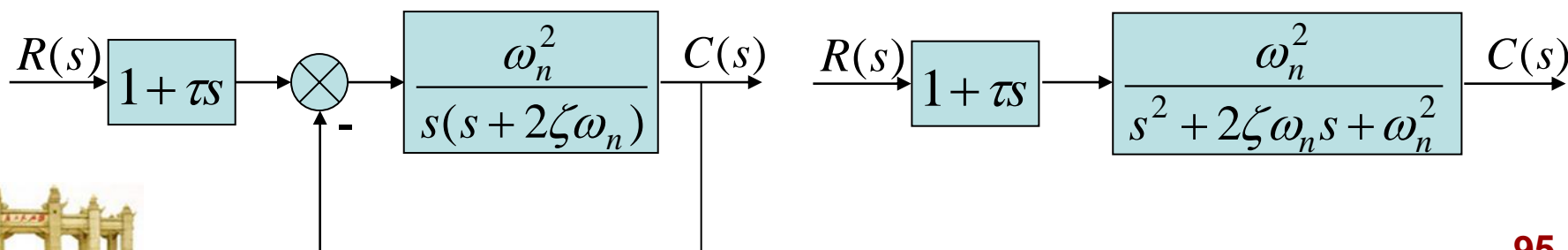
## 知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

### (3) 比例+微分控制与速度反馈控制的关系



**比例+微分控制**相当于分别对输入信号和反馈信号进行比例+微分。其中对反馈信号进行比例+微分相当于速度反馈。所以误差的比例+微分控制相当于输出的速度反馈构成的闭环系统再串联比例+微分环节。因此可以将其分别讨论。

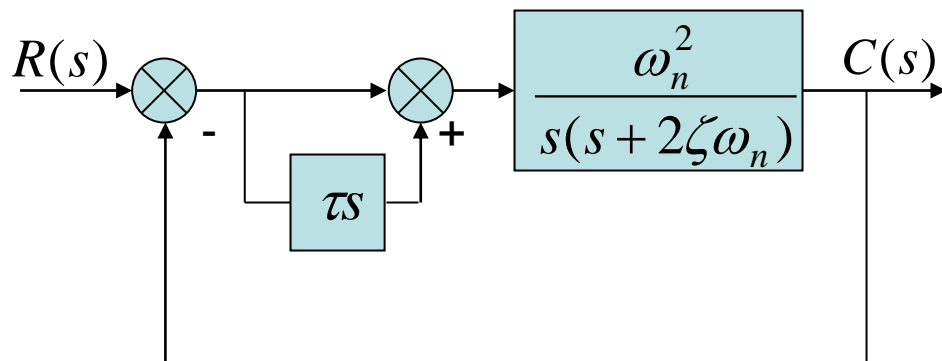




## 知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

### (4)比例+微分控制的性能



$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2(1 + \tau s)}{s^2 + (2\zeta\omega_n + \tau\omega_n^2)s + \omega_n^2}$$

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2(1 + \tau s)}{s^2 + 2\zeta_d\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\zeta_d = \zeta + \frac{\tau\omega_n}{2}$$

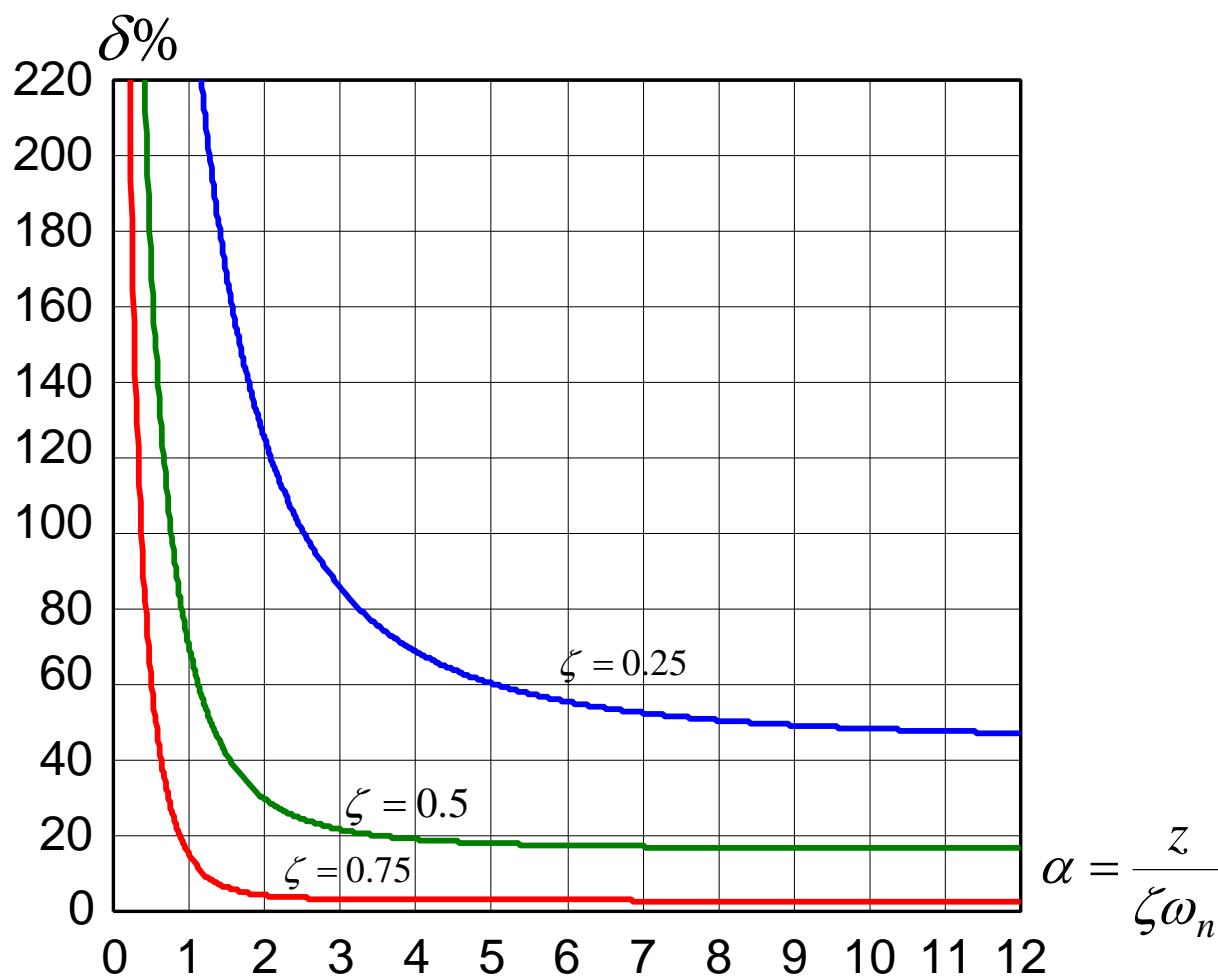
显然，这是一个典型二阶环节加微分顺馈。不同的是其原二阶环节的阻尼系数增加了，变为  $\zeta_d$ ，而无阻尼振荡频率不变。我们知道，当阻尼系数不变时，附加零点会使系统的超调量增大。但是，增加了顺馈环节虽然增加了一个零点，却使系统的阻尼系数增加了。一般来讲，超调量会下降。这样，就能改善系统的瞬态性能。





知识点4

二阶系统的瞬态响应





## 知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

我们可以不证明地给出 $c(t)$ 的紧凑形式:

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \frac{l}{z} \cdot [\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \theta) \cos \varphi + \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \theta) \sin \varphi]$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \frac{l}{z} \cdot \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \theta + \varphi)$$



式中,  $\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ ,  $\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{z - \zeta\omega_n}$ ,  $l = \sqrt{z^2 - 2z\zeta\omega_n + \omega_n^2}$

根据上式可以得出主要性能指标如下:

①  $t_s = (4 + \ln \frac{l}{z}) \cdot \frac{1}{\zeta\omega_n}$ ,  $(\Delta = 2)$  或  $(3 + \ln \frac{l}{z}) \cdot \frac{1}{\zeta\omega_n}$ ,  $(\Delta = 5)$

②  $\delta\% = \frac{\sqrt{(\zeta^2 - 2r\zeta^2 + r^2)}}{\zeta} e^{-\frac{\zeta(\pi-\varphi)}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$ , 式中,  $r = \frac{\zeta\omega_n}{z}$

③  $t_r = \frac{\pi - (\varphi + \theta)}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}$





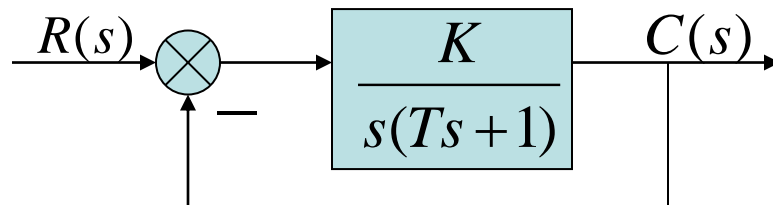
## 知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

[例3-8]: 如图所示系统,  $K = 16s^{-1}$ ,  $T = 0.25s$

试求: ①  $\zeta$  和  $\omega_n$ ; ②  $\delta\%$  和  $t_s$

③若要求  $\delta\% = 16\%$  时, 当  $T$  不变时  $K = ?$



[解]: 由图可得, 闭环系统传递函数为:  $\Phi = \frac{K/T}{s^2 + \frac{s}{T} + \frac{K}{T}}$

$$\textcircled{1} \begin{cases} \omega_n^2 = K/T \\ 2\zeta\omega_n = 1/T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}} = \sqrt{\frac{16}{0.25}} = 8s^{-1} \\ \zeta = \frac{1}{2\sqrt{KT}} = \frac{1}{2\sqrt{16 \times 0.25}} = 0.25 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} d\% \times 100\% = \exp(-\zeta p / \sqrt{1 - \zeta^2}) \times 100\% = 44\%$$

$$\text{当 } \Delta = 2, t_s = \frac{4}{\omega_n \zeta} = \frac{4}{8 \times 0.25} = 2s; \text{ 当 } \Delta = 5, \frac{3}{\omega_n \zeta} = \frac{3}{8 \times 0.25} = 1.5$$

$$\textcircled{3} \because \delta\% = 16\% \therefore 0.16 = \exp(-\zeta\pi / \sqrt{1 - \zeta^2}) \text{ 得: } \zeta = 0.5038$$

$$\text{当 } T \text{ 不变时, } T = 0.25, K = \frac{1}{4T\zeta^2} = \frac{1}{4 \times 0.25 \times 0.5038^2} \approx 3.9388$$

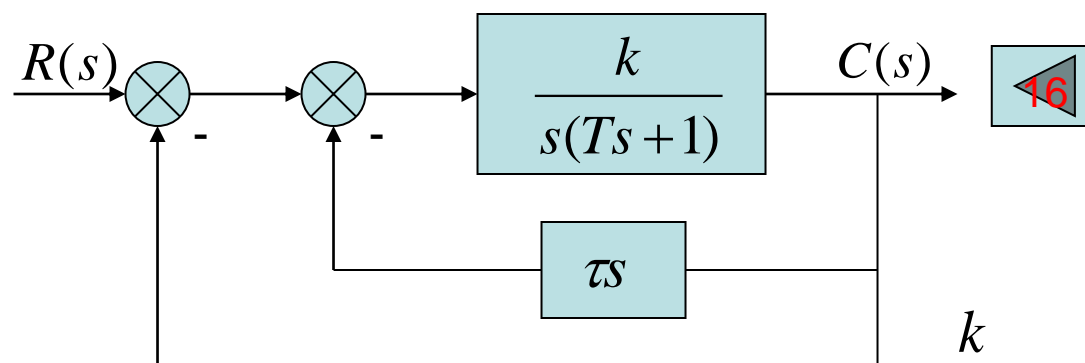




知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

[例3-9]: 上例中, 用速度反馈改善系统的性能。如下图所示。为使  $\zeta_1 = 0.5$  求  $k$  的值。并计算加入速度反馈后的瞬态指标。



[解]: 系统的闭环传递函数为: 
$$\Phi(s) = \frac{\frac{k}{T}}{s^2 + \frac{1+k\tau}{T}s + \frac{k}{T}}$$

$$\text{则: } \begin{cases} \omega_{n1}^2 = \frac{k}{T} \\ 2\zeta_1\omega_{n1} = \frac{1+k\tau}{T} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{n1} = \sqrt{\frac{k}{T}} \\ \zeta_1 = \frac{1+k\tau}{2\sqrt{kT}} \end{cases}$$







知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

显然，加入了速度反馈后， $\omega_n$  不变，而  $\zeta_1$  增加了  $1+k\tau$  倍。上例中  $\zeta = 0.25$ ，若要求  $\zeta_1 = 0.5$ ，则：

$$1+k\tau = 2, \text{求得: } \tau = \frac{1}{k} = \frac{1}{16} = 0.0625$$

这时的瞬态性能指标为：

$$\delta_1 \% = e^{-\frac{\pi\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}}} \times 100\% = 16\%$$

$$t_s = \frac{4}{\omega_{n1}\zeta_1} = \frac{4}{0.5 \times 8} = 1(s)$$





## 知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

[例3-10]对典型的二阶系统( $\zeta = 0.25, \omega_n = 8$ )采用微分顺馈校正。为使 $\zeta_1 = 0.5$ ，试确定顺馈系数 $\tau$ 和 $\delta_1\%$ ， $t_{s1}$ 。

[解]:  $\zeta_1 = \zeta + \frac{\tau\omega_n}{2}, \therefore \tau = \frac{2(\zeta_1 - \zeta)}{\omega_n} = \frac{2(0.5 - 0.25)}{8} = 0.0625(s), z = \frac{1}{\tau} = 16$



$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega_{n1} \sqrt{1 - \zeta_1^2}}{z - \zeta_1 \omega_{n1}} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{8 \times \sqrt{1 - 0.5^2}}{16 - 0.5 \times 8} = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$l = \sqrt{z^2 - 2z\zeta_1\omega_n + \omega_n^2} = \sqrt{16^2 - 2 \times 16 \times 0.5 \times 8 + 8^2} = 13.86$$

$$\delta_1\% = \frac{l}{z} e^{-\frac{\zeta_1(\pi - \varphi)}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \times 100\% = 19.1\%$$

$$t_{s1} = (4 + \ln \frac{l}{z}) \times \frac{1}{\zeta_1 \omega_n} = (4 + \ln \frac{13.86}{16}) \times \frac{1}{0.5 \times 8} = 0.964(s), (\text{当 } \Delta = 2)$$





知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

$$\delta_1 \% = 19.1\%$$

$$t_{s1} = 0.964(s), \quad (\text{当} \Delta = 2)$$

与未加微分顺馈时比较:

$$\delta \% = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = e^{-\frac{3.14 \times 0.25}{\sqrt{1-0.25^2}}} \times 100\% = 44.4\%$$

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.25 \times 8} = 2(s), (\text{当} \Delta = 2)$$

显然，加了微分顺馈后，瞬态品质提高了。

\*\*请自行列写典型二阶系统，附加速度反馈，附加微分顺馈后的性能指标。





## 知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

### (5)具有零点的二阶系统分析

具有零点的二阶系统比典型的二阶系统多一个零点( $\omega_n$ 和 $\zeta$ 不变)。

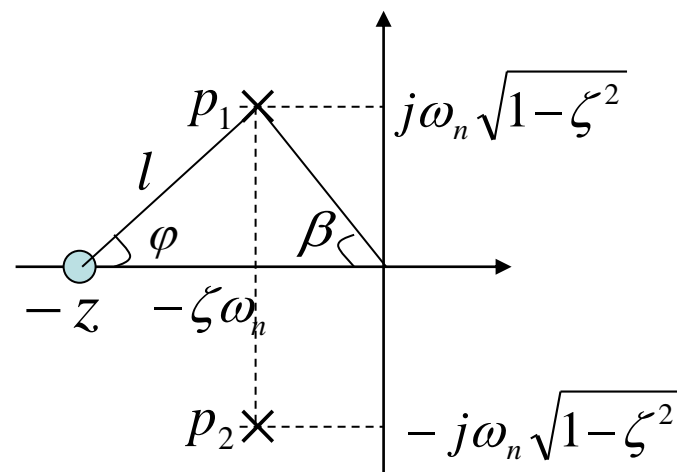
其闭环传递函数为： $\Phi(s) = \frac{\omega_n^2(1+\tau s)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ ，零点为： $-z = -\frac{1}{\tau}$

#### 1.零点对动态性能的影响：

具有零点的二阶系统 ( $0 < \zeta < 1$ ) 的单位阶跃响应为：

$$\begin{aligned} C(s) = \Phi(s)R(s) &= \frac{\omega_n^2(1+\tau s)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} \\ &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} + \frac{\omega_n^2\tau}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \end{aligned}$$

$$= C_1(s) + C_2(s)$$



零极点分布图



## 知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

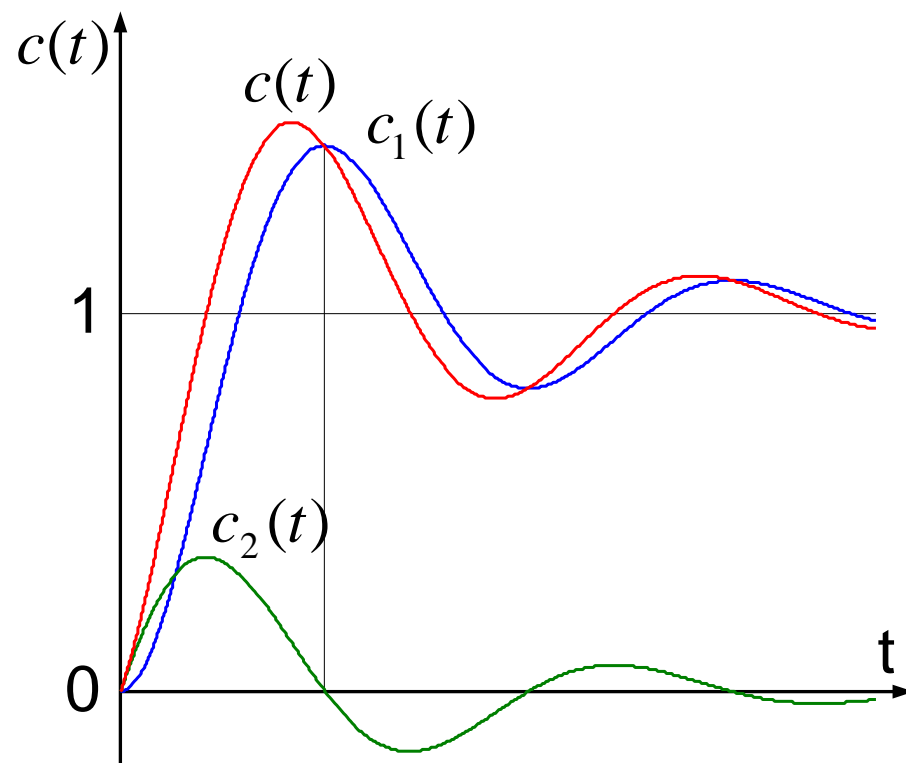
$$\text{由 } C_1(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s}$$

$$C_2(s) = \frac{\omega_n^2 \tau}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\Rightarrow C_2(s) = C_1(s) \cdot \tau s$$

$$c_2(t) = \tau \frac{dc_1(t)}{dt} = \frac{1}{z} \frac{dc_1(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow c(t) = c_1(t) + \frac{1}{z} \frac{dc_1(t)}{dt}$$



由上图可看出： $c_2(t)$  使得  $c(t)$  比  $c_1(t)$  响应迅速且有较大超调量。

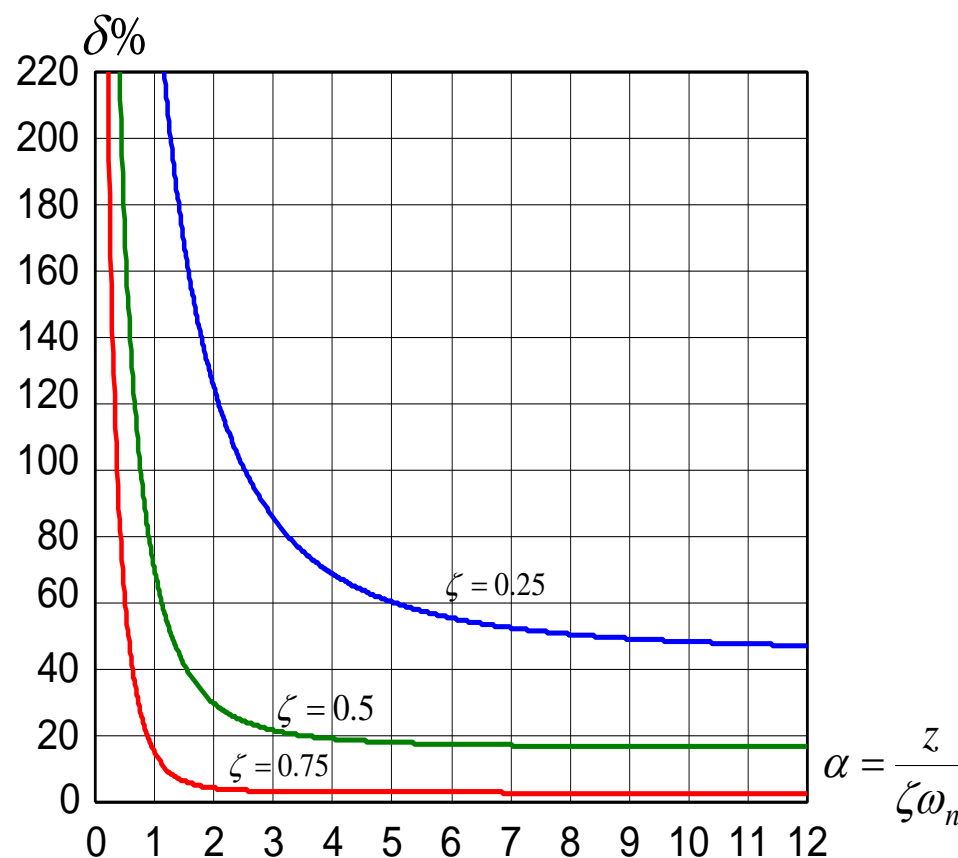
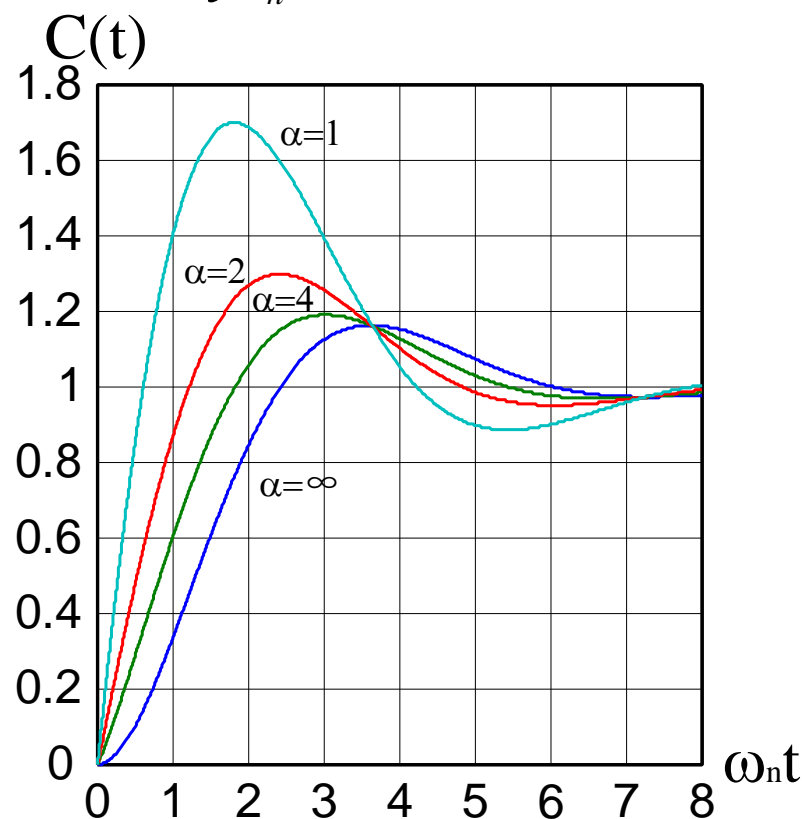




知识点4

二阶系统的瞬态响应

设  $\alpha = \frac{z}{\zeta\omega_n}$  为零点和极点实部之比



$\zeta = 0.5 \quad \alpha = \frac{z}{\zeta\omega_n}$



## 知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

具有零点的二阶系统阶跃响应为：

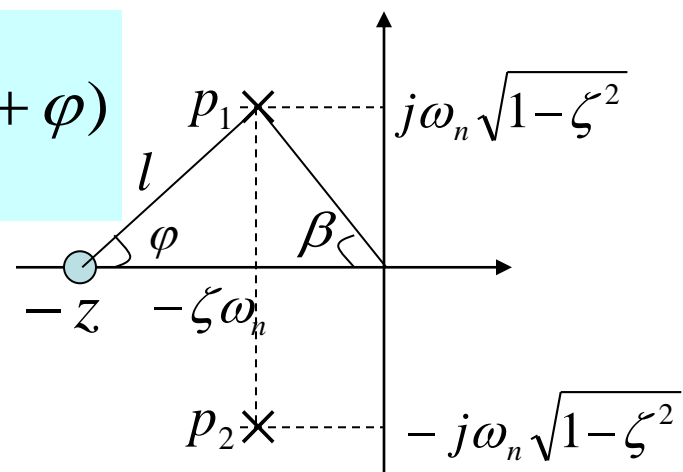
$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left[ \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t) \right] + \frac{\tau\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t)$$

$$c(t) = 1 - \sqrt{1 + \frac{(\zeta - \tau\omega_n)^2}{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t + \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta - \tau\omega_n}\right)$$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot \frac{l}{z} \cdot \sin(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t + \beta + \varphi)$$

式中：  $\beta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$        $\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}{z - \zeta\omega_n}$

$$l = \sqrt{z^2 - 2\zeta\omega_n z + \omega_n^2}$$

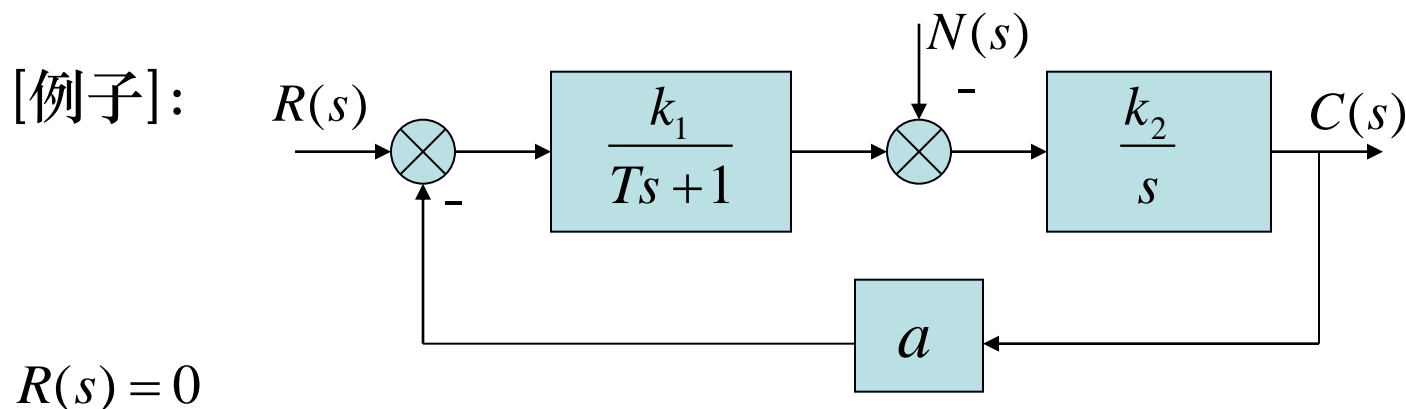


零极点分布图

知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

### (6) 扰动作用下的典型二阶系统分析



$$\Phi_N(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = -\frac{k_2(Ts+1)}{Ts^2 + s + k_1k_2a} = -\frac{1}{k_1a} \cdot \frac{\omega_n^2(s+z)}{z(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

式中:  $\omega_n = \sqrt{\frac{k_1k_2a}{T}}, \zeta = \frac{1}{2\sqrt{k_1k_2aT}}, z = \frac{1}{T}$

$N(s) = \frac{1}{s}$

$C(s) = \Phi_N(s) \cdot \frac{1}{s}$





## 知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

$$\therefore c(t) = -\frac{1}{k_1 a} \cdot \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} [\sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \theta) + \frac{\omega_n}{z} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t)] \right\}$$



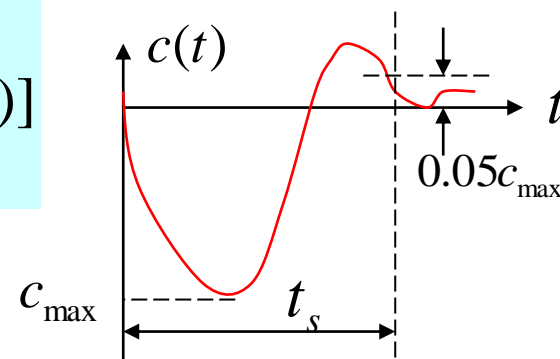
$$= -\frac{1}{k_1 a} \cdot \left[ 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \frac{l}{z} \cdot [\sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \theta + \varphi)] \right]$$

式中:  $\theta = \varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{z - \zeta \omega_n} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}, \frac{l}{z} = \frac{\sqrt{z^2 - 2z\zeta\omega_n + \omega_n^2}}{z}$

将  $\omega_n, \zeta, \frac{l}{z}$  代入  $c(t)$  中得:

$$c(t) = -\frac{1}{k_1 a} \cdot \left[ 1 - \frac{e^{-\frac{\zeta t}{2}}}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{2\zeta} zt + 2\theta\right) \right]$$

单位阶跃响应曲线如右:





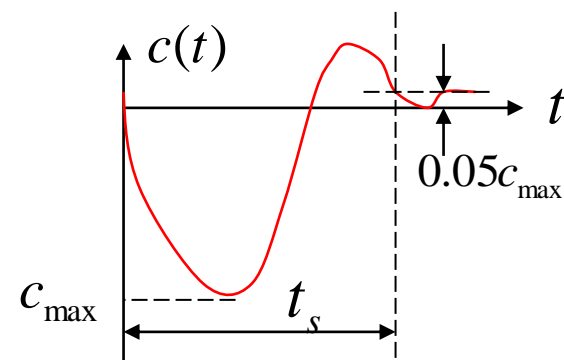
## 知识点4

## 二阶系统的瞬态响应

◆ 扰动作用下的瞬态性能指标与随动系统略有不同：

(1) 最大偏离  $c_{\max}$ ：瞬态过程中出现的  $c(t)$  的最大值。

(2) 调节时间 (恢复时间)  $t_s$ ：表示  $c(t)$  达到最大偏离的5%，且以后不再超出此值的时间。



稳态值： $c(\infty) = -\frac{N}{k_1 a}$ ，最大偏离值： $c_{\max} = -\frac{N}{k_1 a} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\zeta} e^{-\frac{\zeta(\pi-\theta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\right)$

式中： $N$ 为阶跃强度， $\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$





知识点4

二阶系统的瞬态响应

## 第七次作业

1、习题3-7

2、习题3-8

注：求系统动态性能指标时要分别写出 $\Delta=5$ ， $\Delta=2$ 时的结果。





知识点5

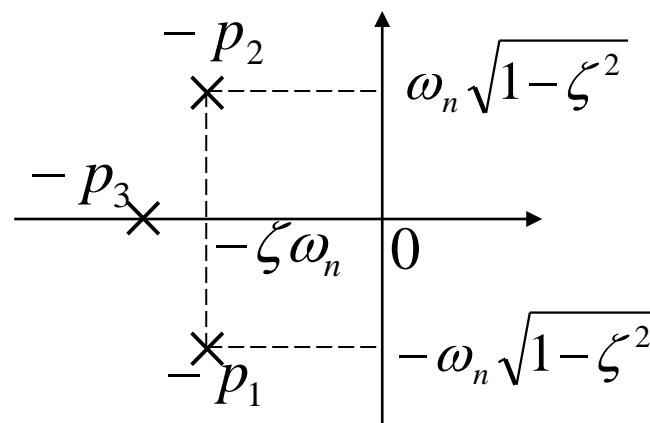
## 高阶系统分析

### (1) 典型三阶系统的瞬态响应

传递函数:  $\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(Ts + 1)}$ , 当  $0 < \zeta < 1$  时, 极

点分布如下:

$$-p_1 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}, -p_2 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}, -p_3 = -\frac{1}{T}$$





知识点5


高阶系统分析

(2) 三阶系统的单位阶跃响应

单位阶跃响应的表达式和曲线:

$$C(s) = \Phi(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{\omega_n^2 p_3}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + p_3)} \cdot \frac{1}{s}$$
$$= \frac{1}{s} + \frac{A_1 s + A_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{A_3}{s + p_3}$$

式中:  $A_1, A_2, A_3$  与  $\zeta, \omega_n, \beta = \frac{p_3}{\zeta\omega_n}$  (实极点与共轭极点的位置关系) 有关。


$$c(t) = 1 - \frac{A_1 e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \theta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{A_2 e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} + A_3 e^{-p_3 t}$$

式中:  $\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$



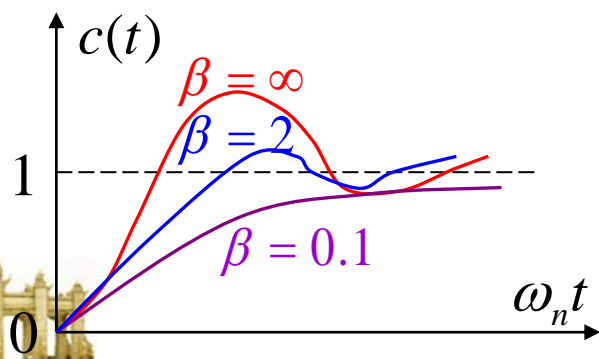


## 知识点5

## 高阶系统分析

**[分析]:** 三阶系统的单位阶跃响应由三部分组成: 稳态项, 共轭复极点形成的振荡分量, 实极点构成的衰减指数项分量。

影响瞬态特性的有**两个因素**: 第一是  $\beta = \frac{p_3}{\zeta \omega_n}$ , 它表示  $-p_3$  和  $-p_1, -p_2$  的相对位置。当  $\beta \gg 1$  时, 表示  $-p_3$  离虚轴远,  $-p_1, -p_2$  离虚轴近, 系统的瞬态特性主要由  $-p_1, -p_2$  决定, 呈二阶系统的特性。反之, 当  $\beta \ll 1$  时, 表示  $-p_3$  离虚轴近,  $-p_1, -p_2$  离虚轴远, 系统的瞬态特性主要由  $-p_3$  决定, 呈一阶系统的特性。第二个因素是阻尼系数  $\zeta$ , 同前。如下图所示:

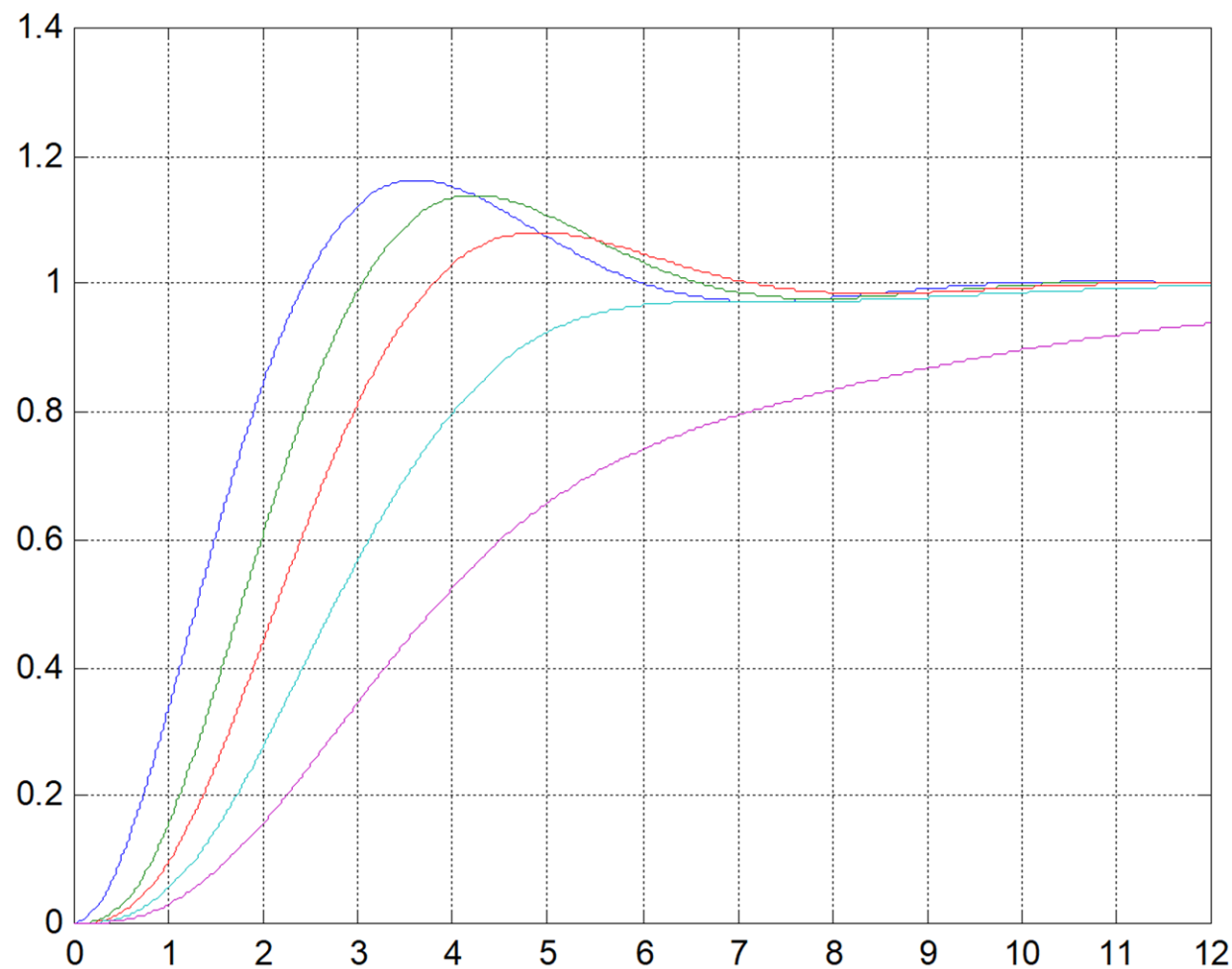


图中,  $\beta = \infty$  表示无  $-p_3$  极点, 由图可见, 加入极点  $-p_3$  后, 当  $\zeta$  不变时, 超调量下降了, 但调节时间增加了。



知识点5

高阶系统分析





## 知识点5

## 高阶系统分析

### (3) 高阶系统分析

高阶系统的传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}, m \leq n$$

写成零极点形式：

$$\Phi(s) = k_g \prod_{i=1}^m (s + z_i) \prod_{j=1}^n (s + p_j)$$

可见， $c(t)$  不仅与  $p_j, \zeta_l, \omega_{nl}$  (闭环极点) 有关，而且与系数  $a_j, \beta_l, \gamma_l$  有关(这些系数都与闭环零、极点有关)。所以，高阶系统的单位阶跃响应取决于闭环系统的零、极点分布。

$$C(s) = \Phi(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \prod_{j=1}^m \frac{s + z_j}{s + p_j} \prod_{l=1}^n \frac{s^2 + 2\zeta_l \omega_{nl} s + \omega_{nl}^2}{s^2 + 2\zeta_l \omega_{nl} s + \omega_{nl}^2}$$

$$c(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{n_1} a_j e^{-p_j t} + \sum_{l=1}^{n_2} \beta_l e^{-\zeta_l \omega_{nl} t} \cos \omega_{nl} \sqrt{1 - \zeta_l^2} t + \sum_{l=1}^{n_2} \gamma_l e^{-\zeta_l \omega_{nl} t} \sin \omega_{nl} \sqrt{1 - \zeta_l^2} t$$





知识点5

## 高阶系统分析

### (4)零、极点位置对高阶系统单位阶跃响应曲线影响

□ 对于闭环极点全部位于s左半平面的高阶系统(否则系统不稳定), 极点为实数(指数衰减项)和共轭复数(正弦衰减项)的衰减快慢取决于极点离虚轴的距离。离虚轴越远, 衰减得快; 离虚轴越近, 衰减得慢。所以, 近极点对瞬态响应影响大。

□ 系数  $a_j, \beta_l, \gamma_l$  取决于零、极点分布。有以下几种情况:

- ✚ 若极点远离原点, 则系数小;
- ✚ 极点靠近一个零点, 远离其他极点和零点, 系数小;
- ✚ 极点远离零点, 又接近原点或其他极点, 系数大。

衰减慢且系数大的项在瞬态过程中起主导作用。



知识点5

## 高阶系统分析

### (5)主导极点的概念

满足下列条件的极点称为主导极点:

- 存在一对离虚轴最近的共轭极点;
- 附近无零点;
- 其他极点距虚轴的距离是它的5倍以上。

◆主导极点在 $c(t)$ 中的对应项衰减最慢，系数最大，系统的瞬态性能指标主要由它决定。

◆具有主导极点的高阶系统可近似为二阶系统。





知识点5

高阶系统分析

[例如]:  $-p_{1,2} = -\zeta_1 \omega_{n1} \pm j \omega_{n1} \sqrt{1 - \zeta_1^2} = -\sigma \pm j \omega_d$  为某高阶系统的主导极点, 则单位阶跃响应近似为:

$$c(t) \approx a_0 + e^{-\sigma t} (\beta_1 \cos \omega_d t + \gamma_1 \sin \omega_d t)$$

利用主导极点的概念可以对高阶系统的特性做近似的估计分析。





知识点5

## 高阶系统分析

### (6)高阶系统的近似简化原则

- ❑ 在近似前后，确保输出稳态值不变；
- ❑ 在近似前后，瞬态过程基本相差不大。





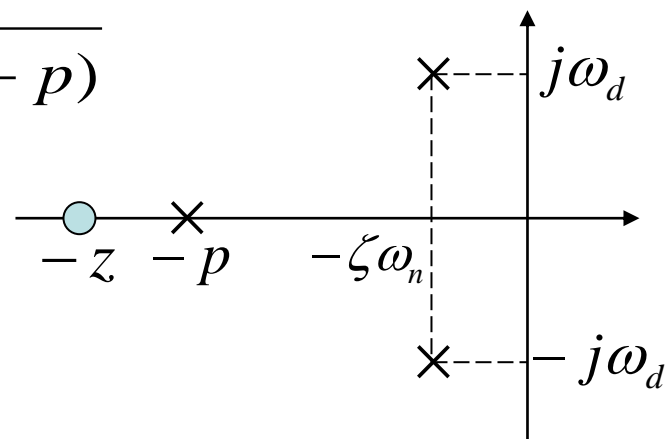
## 知识点5

## 高阶系统分析

例如:  $\Phi(s) = \frac{\omega_n^2 (s + z)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + p)}$

如果:  $\frac{z}{\zeta\omega_n} > 5$  以及  $\frac{p}{\zeta\omega_n} > 5$

则:  $\Phi(s) \approx \frac{z\omega_n^2}{p(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$



说明: 假设输入为单位阶跃函数, 则化简前后的稳态值如下

$$\therefore \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_n^2 (s + z)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + p)} = \frac{z}{p}$$

$$\text{而 } \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_n^2 z}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)p} = \frac{z}{p}$$





知识点5

高阶系统分析

## 第八次作业

1. 习题3-9
2. 习题3-10
3. 习题3-11

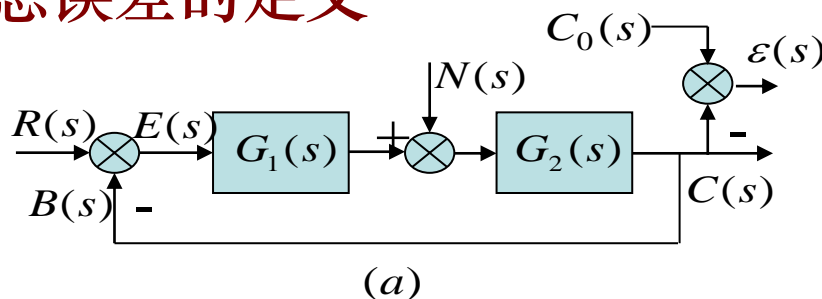




## 知识点6

## 稳态误差分析

### (1) 误差及稳态误差的定义



系统误差：输出量的希望值  $c_0(t)$  和实际值  $c(t)$  之差。即

$$e'(t) = c_0(t) - c(t)$$

系统稳态误差：当  $t \rightarrow \infty$  时的系统误差，用  $e'_{ss}$  表示。即

$$e'_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e'(t)$$

系统偏差：系统的输入  $r(t)$  和主反馈信号  $b(t)$  之差。即

$$e(t) = r(t) - b(t)$$

系统稳态偏差：当  $t \rightarrow \infty$  时的系统偏差，用  $e_{ss}$  表示。即

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$



## 知识点6

## 稳态误差分析

► 对单位反馈系统，给定作用  $r(t)$  即为输出量的希望值， $r(t) = c_0(t)$

偏差等于误差： $\varepsilon_{ss} = e_{ss}$

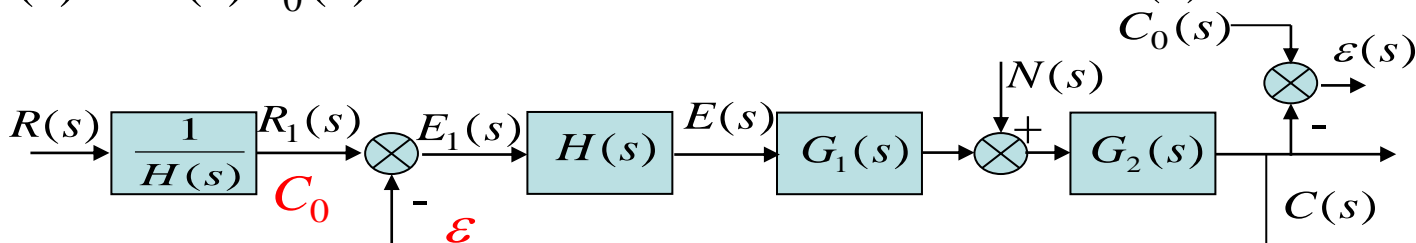
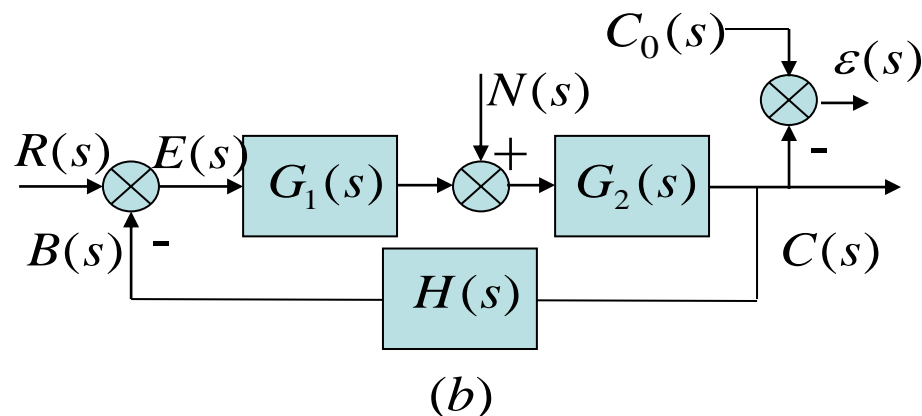
► 对非单位反馈系统，给定作用  $r(t)$  只是希望输出的代表值， $r(t) \neq c_0(t)$

偏差不等于误差： $\varepsilon_{ss} \neq e_{ss}$

偏差和误差之间存在一定的关系：

$$E(s) = R(s) - B(s) = H(s)C_0(s) - H(s)C(s) = H(s)\varepsilon(s)$$

这里  $R(s) = H(s)C_0(s)$  是基于控制系统在理想工作情况下  $E(s) = 0$  得到的。



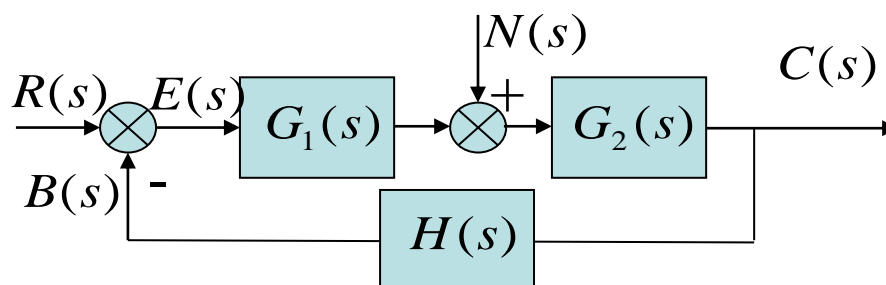
我们将偏差  $E(s)$  代替误差进行研究。除非特别说明，以后所说的**误差就是指偏差**；**稳态误差就是指稳态偏差**。



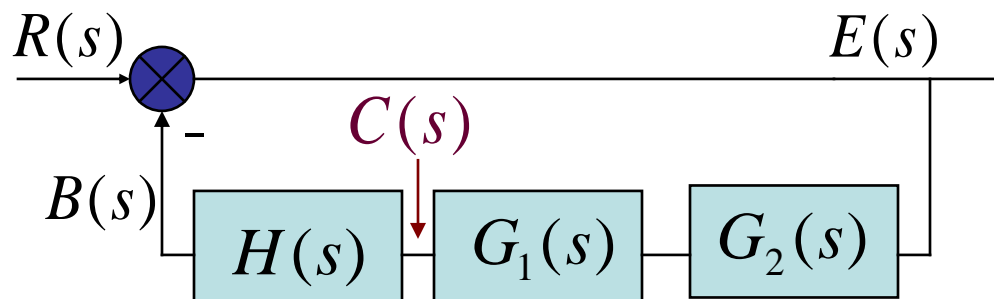
知识点6

# 稳态误差分析

## (2) 稳态误差的计算



① 给定作用下的偏差传递函数



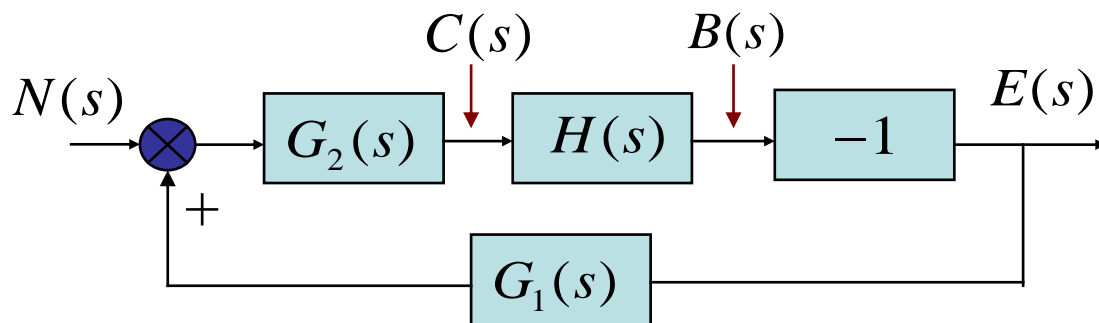
$$\Phi_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$



知识点6

## 稳态误差分析

### ② 扰动作用下的偏差传递函数



$$\Phi_{NE}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = -\frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

### ③ 给定和扰动同时作用下的偏差表达式

$$\begin{aligned} E(s) &= \Phi_E(s)R(s) + \Phi_{NE}(s)N(s) \\ &= \frac{R(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} + \frac{-G_2(s)H(s)N(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \end{aligned}$$





## 知识点6

## 稳态误差分析

④ 对稳定的系统，可利用拉氏变换的终值定理计算稳态误差

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-sG_2(s)H(s)N(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

### 终值定理要求：

- $f(t)$  和  $\frac{df}{dt}$  可拉氏变换；
- $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  存在；
- 并且除在原点处可以有极点外， $sF(s)$  的所有极点都在  $s$  平面的左半开平面。

即 只有稳定的系统，才可计算稳态误差。

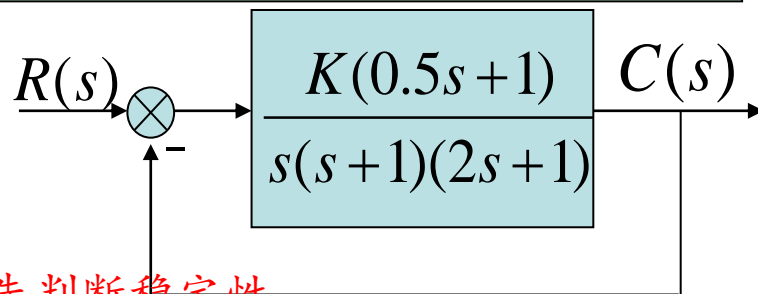




## 知识点6

## 稳态误差分析

[例6-1] 系统结构图如图所示，当输入信号为单位斜坡函数时，求系统在输入信号作用下的稳态误差；调整K值能使稳态误差小于0.1吗？



解：只有稳定的系统计算稳态误差才有意义，所以先判断稳定性。

系统特征方程为  $2s^3 + 3s^2 + (1 + 0.5K)s + K = 0$

由劳斯判据知稳定的条件为：  $0 < K < 6$

由  $\Phi_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} = \frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1) + K(0.5s+1)}$  ,  $R(s) = \frac{1}{s^2}$

$$\Rightarrow E(s) = \frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1) + K(0.5s+1)} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1) + K(0.5s+1)} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{K}$$

由稳定的条件知：  $e_{ss} > \frac{1}{6}$  不能满足  $e_{ss} < 0.1$  的要求



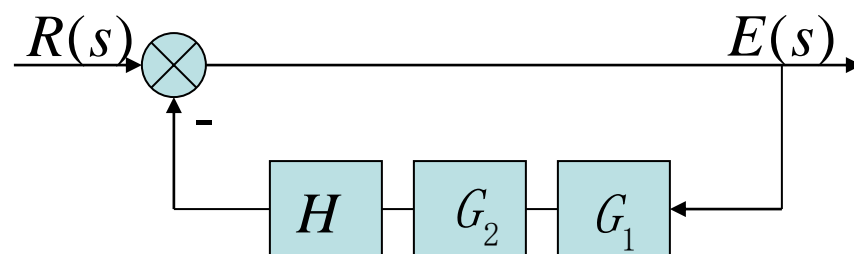
## 知识点6

## 稳态误差分析

### (3) 给定输入作用下系统的误差分析

这时，不考虑扰动的影响。可以写出随动系统的误差：

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_1 G_2 H} \cdot R(s) = \frac{1}{1 + G_k} \cdot R(s)$$



$$e_{ssr} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_k(s)}$$

显然， $e_{ssr}$  与输入  $R(s)$  和开环传递函数  $G_k(s)$  有关。

假设开环传递函数  $G_k(s)$  的形式如下：

$$G_k(s) = \frac{K}{s^\nu} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)} = \frac{K}{s^\nu} \cdot G_0(s)$$



知识点6

稳态误差分析

$$G_k(s) = \frac{K}{s^\nu} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)} = \frac{K}{s^\nu} \cdot G_0(s)$$

式中： $K$ —开环放大系数； $\nu$ —积分环节的个数；

$G_0(s)$ —开环传递函数去掉积分和比例环节；

$$G_0(0) = 1, \quad m_1 + 2m_2 = m, \quad \nu + n_1 + 2n_2 = n$$

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_k(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + \frac{K}{s^\nu} G_0(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{\nu+1} R(s)}{s^\nu + K}$$

可见，给定作用下的稳态误差与外作用有关；与时间常数形式的开环增益有关；与积分环节的个数有关。



知识点6

稳态误差分析

(4)系统的无差度阶数

通常称开环传递函数中积分的个数为系统的无差度阶数，并将系统按无差度阶数进行分类。

- 当 $\nu = 0$ ，无积分环节，称为0型系统；
- 当 $\nu = 1$ ，有一个积分环节，称为I型系统；
- 当 $\nu = 2$ ，有二个积分环节，称为II型系统。





知识点6

## 稳态误差分析

### (5)位置、加速度和加速度误差系数

□ 当输入为  $R(s) = \frac{1}{s}$  时 (单位阶跃函数)

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_k(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^\nu} \cdot G_0(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

式中:  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s)$  称为位置误差系数;

- 当  $\nu = 0$  时,  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} KG_0(s) = K$ ,  $\therefore e_{ssr} = \frac{1}{1 + K}$
- 当  $\nu \geq 1$  时,  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^\nu} G_0(s) = \infty$ ,  $\therefore e_{ssr} = 0$

$K_p$  的大小反映了系统在阶跃输入下的稳态精度。 $K_p$  越大,  $e_{ss}$  越小。所以说  $K_p$  反映了系统跟踪阶跃输入的能力。

稳态误差为零的系统称为无差系统, 为有限值的称为有差系统。在单位阶跃作用下,  $\nu = 0$  的系统为有差系统,  $\nu \geq 1$  的系统为无差系统。





## 知识点6

## 稳态误差分析

□ 当输入为  $R(s) = \frac{1}{s^2}$  时 (单位斜坡函数)

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_k(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_k(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\nu-1}} \cdot G_0(s)} = \frac{1}{K_v}$$

式中:  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_k(s)$  称为速度误差系数;

- 当  $\nu = 0$  时,  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sKG_0(s) = 0$ ,  $\therefore e_{ssr} = \infty$
- 当  $\nu = 1$  时,  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} KG_0(s) = K$ ,  $\therefore e_{ssr} = \frac{1}{K}$
- 当  $\nu \geq 2$  时,  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s} G_0(s) = \infty$ ,  $\therefore e_{ssr} = 0$

$K_v$  的大小反映了系统在斜坡输入下的稳态精度。 $K_v$  越大,  $e_{ss}$  越小。所以说  $K_v$  反映了系统跟踪斜坡输入的能力。

根据  $K_v$  计算的稳态误差是系统在跟踪速度阶跃输入时位置上的误差。



知识点6

稳态误差分析

□ 当输入为  $R(s) = \frac{1}{s^3}$  时 (单位加速度函数)

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_k(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G_k(s)} = \frac{1}{K_a}$$

式中:  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_k(s)$  称为加速度误差系数;

当  $\nu = 0, 1$  时,  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^{2-\nu} KG_0(s) = 0$ ,  $\therefore e_{ssr} = \infty$

当  $\nu = 2$  时,  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} KG_0(s) = K$ ,  $\therefore e_{ssr} = \frac{1}{K}$

当  $\nu \geq 3$  时,  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s} G_0(s) = \infty$ ,  $\therefore e_{ssr} = 0$

$K_a$  的大小反映了系统在抛物线输入下的稳态精度。 $K_a$  越大,  $K_a$  越小。所以说  $e_{ss}$  反映了系统跟踪抛物线输入的能力。

根据  $K_a$  计算的稳态误差是系统在跟踪加速度阶跃输入时位置上的误差。



知识点6

稳态误差分析

当系统的输入信号由位置、速度和加速度分量组成时，即

$$\text{当 } r(t) = A + Bt + \frac{Ct^2}{2} \text{ 时, 有 } e_{ssr} = \frac{A}{1 + K_p} + \frac{B}{K_v} + \frac{C}{K_a}$$

小结:

- ① 稳态误差与给定作用下的稳态误差与外作用有关。对同一系统加入不同的输入，稳态误差不同。
- ② 稳态误差与时间常数形式的开环增益有关；对有差系统， $K \uparrow$ ，稳态误差  $\downarrow$ ，但同时系统的稳定性和动态特性变差。
- ③ 稳态误差与积分环节的个数有关。积分环节的个数  $\uparrow$ ，稳态误差  $\downarrow$ ，但同时系统的稳定性和动态特性变差。

由此可见对稳态误差的要求往往与系统的稳定性和动态特性的要求是矛盾的。





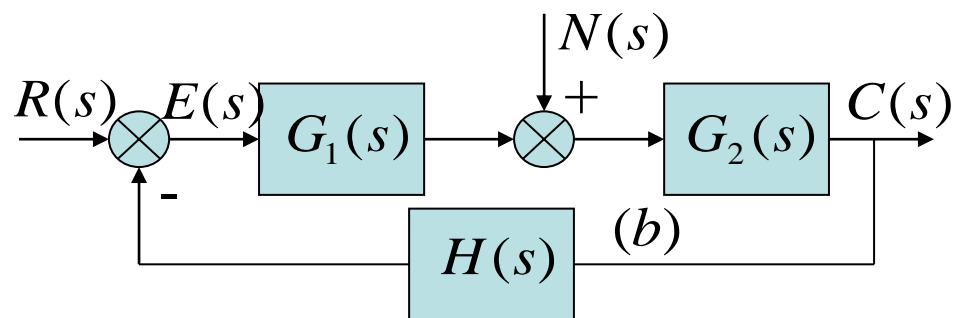
知识点6

稳态误差分析

(6) 扰动输入作用下系统的误差分析

通常，给定输入作用产生的误差为系统的给定误差，扰动作用产生的误差为扰动误差。

$R(s) = 0, N(s) \neq 0$  时产生的  $-C(s)H(s)$  称为扰动误差。



$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H}$$

$$C(s) = \frac{G_2 N(s)}{1 + G_1 G_2 H}$$

$$E(s) = -C(s)H(s) = -\frac{G_2 H}{1 + G_1 G_2 H} N(s)$$

$$e_{ssn} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{G_2 H}{1 + G_1 G_2 H} N(s)$$

牢记!



## 知识点6

## 稳态误差分析

可见,  $e_{ssn}$  不仅与  $G_k(s)$ ,  $N(s)$  有关, 还与  $G_2(s)$  和  $H(s)$  有关 (扰动点到偏差之间的那部分通道传递函数)。

$$\begin{aligned} e_{ssn} &= -\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{G_2 H}{1 + G_1 G_2 H} N(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s N(s)}{G_1} \cdot \frac{G_1 G_2 H}{1 + G_1 G_2 H} \\ &= -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s N(s)}{G_1} \cdot \frac{G_k}{1 + G_k} \end{aligned}$$

重要公式!

$$G_k(s) = \frac{K}{s^v} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)} = \frac{K}{s^v} \cdot G_0(s)$$

式中:  $G_0(0) = 1$ ,  $m_1 + 2m_2 = m$ ,  $v + n_1 + 2n_2 = n$



知识点6

稳态误差分析

$$\Rightarrow e_{ssn} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{sN(s)}{G_1} \cdot \frac{\frac{K}{s^v} G_0}{1 + \frac{K}{s^v} G_0} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{sN(s)}{G_1} \cdot \frac{K}{s^v + K}$$

上式中 $s^v$ 为开环传递函数所具有的积分环节个数。

1. 当  $v=0$ ，即开环传递函数中无积分环节，同时假设 $G_2(s)H(s)$ 无纯微分环节，因此 $G_1(s)$ 中也无积分环节。

$$e_{ssn} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{sN(s)}{G_1} \cdot \frac{K}{1 + K}$$

此时在阶跃扰动输入时是有差系统，设 $G_1(s) = K_1 G_{10}(s)$ ， $G_{10}(0) = 1$

$$e_{ssn} = -\frac{K}{K_1(1 + K)}$$





知识点6

稳态误差分析

2. 当  $v > 0$ ，即开环传递函数中有积分环节，但积分环节可在不同的地方。

$$e_{ssn} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{sN(s)}{G_1} \cdot \frac{K}{s^v + K} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{sN(s)}{G_1} \cdot \frac{K}{K} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{sN(s)}{G_1}$$

设  $G_1(s) = \frac{K_1}{s^u} G_{10}(s)$ ,  $G_{10}(0) = 1$

$$e_{ssn} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{u+1} N(s)}{K_1}$$

① 设  $v=0$  即  $G_1(s)$  无积分环节

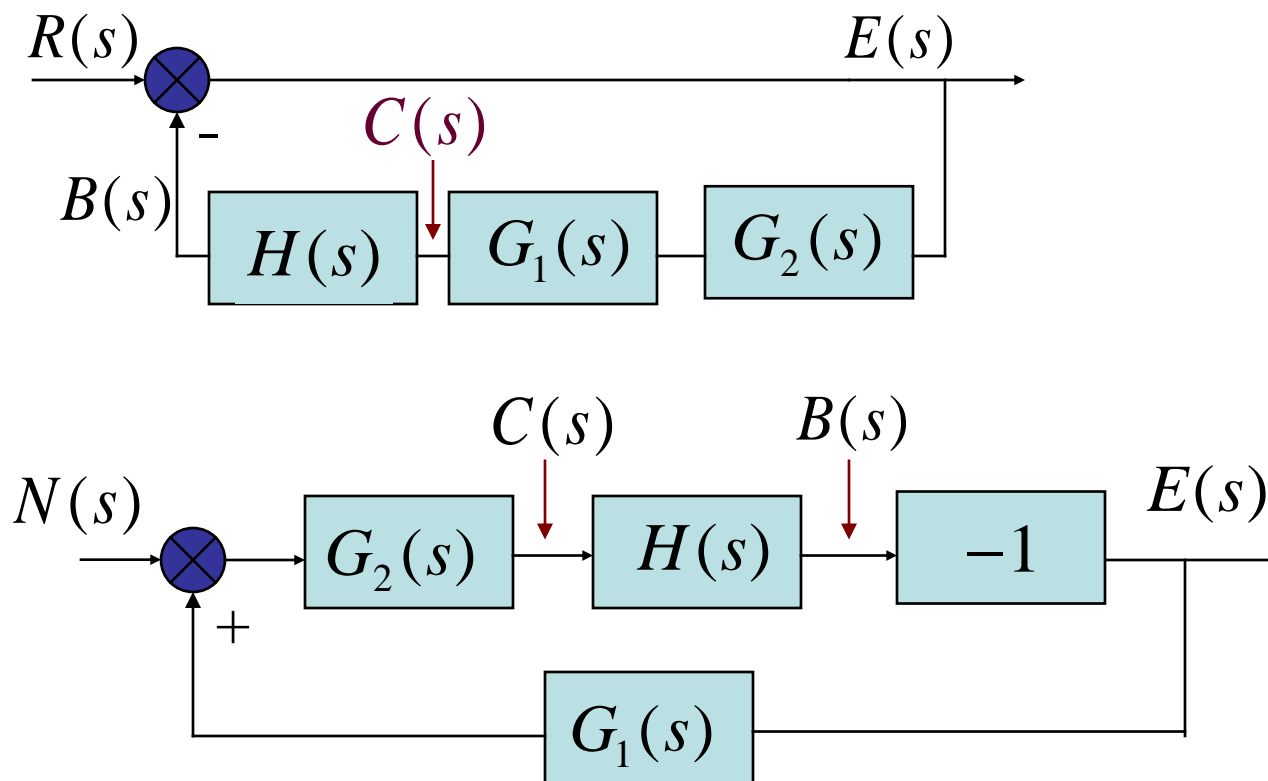
$$e_{ssn} = -\frac{1}{K_1}$$

若  $v=1$ ，在阶跃扰动作用下是无差的。若  $v=2$  在斜坡扰动作用下也是无差的。因此  $G_1(s)$  环节中的积分环节决定了扰动作用下的无差度。

## 知识点6

## 稳态误差分析

## (7) 误差分析与反馈调节的关系



由图可见，不管是给定还是扰动作用产生的稳态误差，都与图中反馈环节中的积分环节的个数有关。



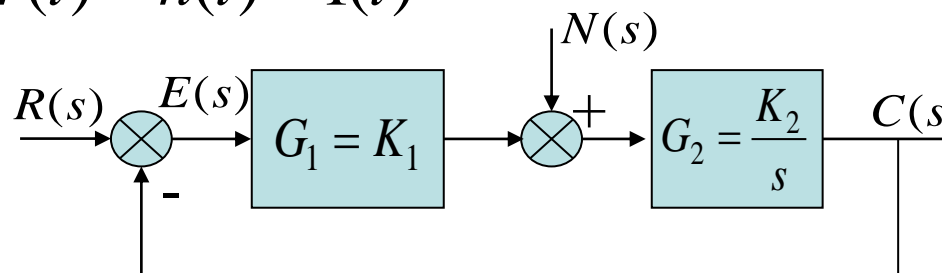




## 知识点6

## 稳态误差分析

[例6-2]: 系统结构图如图所示。当  $r(t) = n(t) = 1(t)$  时, 求系统的稳态误差  $e_{ss}$ ; 若要求稳态误差为零, 如何改变系统结构。



解: 该系统对给定输入而言属于I型系统。所以当给定输入为单位阶跃函数时的稳态误差  $e_{ssr} = 0$

但该系统对于扰动输入为单位阶跃函数时的稳态误差  $e_{ssn}$  并不等于零。根据前面的分析知, 稳态误差与  $G_1$  中的增益和积分环节的个数有关。此时因  $G_1$  无积分环节, 所以

$$e_{ssn} = -1/K_1$$

也可这样求

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_{NE} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-K_2}{s + K_1 K_2} = -\frac{1}{K_1}$$

$$e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssn} = -1/K_1$$

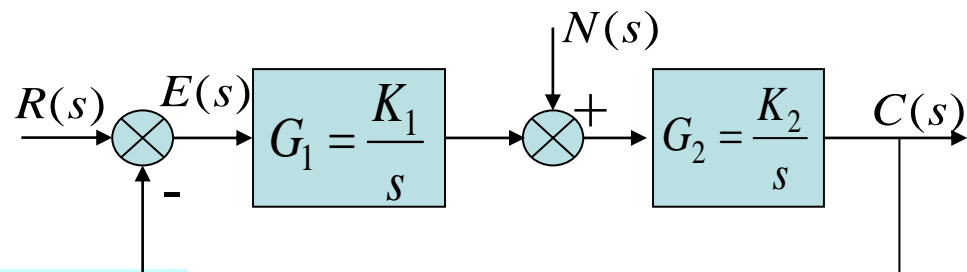


## 知识点6

## 稳态误差分析

若想使稳态误差为零，则要求 $G_1$ 中有积分环节，令

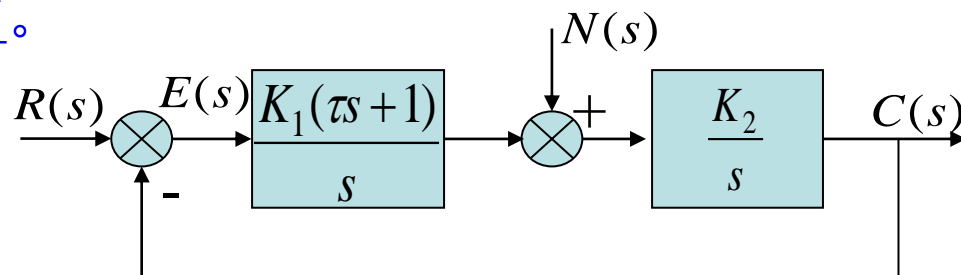
$$G_1 = \frac{K_1}{s}$$



此时

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_{NE} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-K_2 s}{s^2 + K_1 K_2} = 0$$

但此时系统的稳定性遭到破坏，成为结构不稳定系统。若要使系统稳定，还必须在原 $G_1$ 中引入比例+微分环节。



$$G_1 = \frac{K_1(\tau s + 1)}{s}$$

$$\Rightarrow e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s * \Phi_{NE} * \frac{1}{s} = \frac{-K_2 s}{s^2 + K_1 K_2 \tau s + K_1 K_2} = 0$$

$$\Rightarrow e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} s * \Phi_s * \frac{1}{s} = \frac{s^2}{s^2 + K_1 K_2 \tau s + K_1 K_2} = 0$$

当 $K_1 > 0$ ,  $K_2 > 0$ ,  $\tau > 0$ 时  
系统稳定。



知识点6

稳态误差分析

由此可见，当用  $G_1 = \frac{K_1(\tau s + 1)}{s}$  时，才能在保证稳定的前提下使系统在阶跃扰动作用下的稳态误差为零。

$$G_1 = \frac{K_1(\tau s + 1)}{s} = K_1\left(\tau + \frac{1}{s}\right) = K_1\tau + \frac{K_1}{s}$$

这个环节称为比例+积分环节或比例+积分控制器（PI控制器）。

$$G_1 = \frac{K_1(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{s} = \frac{K_1 + K_2 s + K_3 s^2}{s} = \frac{K_1}{s} + K_2 + K_3 s$$

这个环节称为比例+积分+微分环节或比例+积分+微分控制器（PID控制器）。

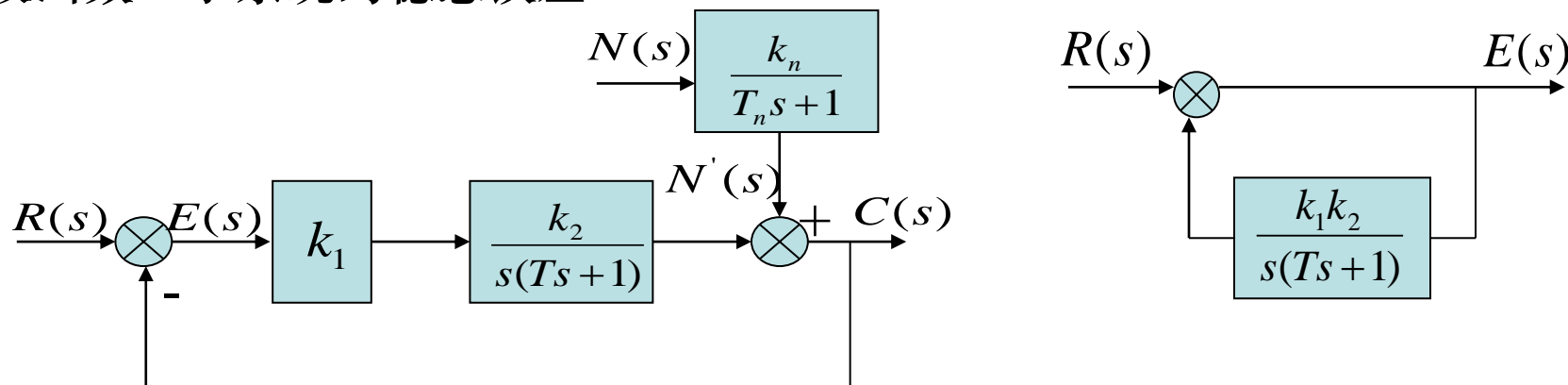




## 知识点6

## 稳态误差分析

[例6-3]速度控制系统的结构图如下图所示。给定输入和扰动作用均为单位斜坡函数。求系统的稳态误差。



[解]: 1、先令  $n(t) = 0$ ,  $r(t) = t$ , 即  $R(s) = \frac{1}{s^2}$ ,

$$\Phi_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + k_1k_2},$$

$$E(s) = \Phi_E(s) \cdot R(s) = \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + k_1k_2} \cdot \frac{1}{s^2}$$



$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Ts + 1}{Ts^2 + s + k_1k_2} = \frac{1}{k_1k_2}$$

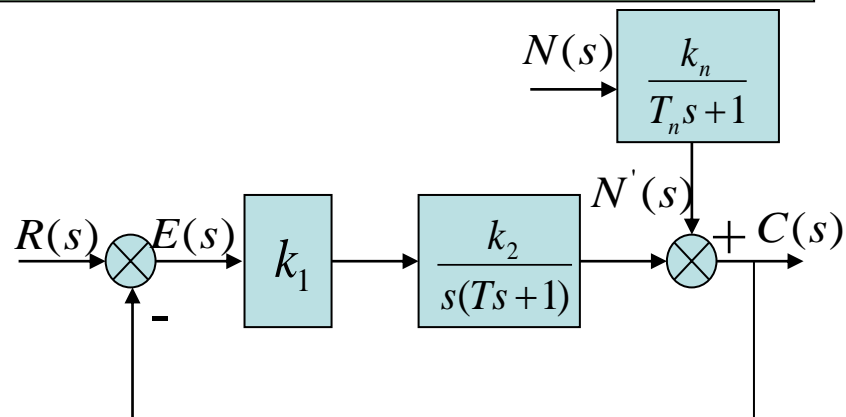


## 知识点6

## 稳态误差分析

2、再令  $R(s) = 0, N(t) = \frac{1}{s^2}$

$$\frac{C(s)}{N'(s)} = \frac{1}{1 + \frac{k_1 k_2}{s(Ts + 1)}} = \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + k_1 k_2}$$



$$C(s) = \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + k_1 k_2} N'(s) = \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + k_1 k_2} \cdot \frac{k_n}{T_n s + 1} \cdot N(s)$$

$$\Rightarrow e_{ssn} = -\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot C(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + k_1 k_2} \cdot \frac{k_n}{T_n s + 1} \cdot \frac{1}{s^2} = -\frac{k_n}{k_1 k_2}$$

3、总的稳态误差为：

$$e_{ss} = \frac{1}{k_1 k_2} - \frac{k_n}{k_1 k_2} = \frac{1 - k_n}{k_1 k_2}$$





知识点6

## 稳态误差分析

[结论]:

❑ 为了减少给定误差，可以增加前向通道上的积分环节个数或增大系统的开环放大系数。

❑ 为了减小扰动误差，可以增加偏差点到扰动作用点之间积分环节个数或放大系数。

❑ 放大系数不能任意放大，积分环节也不能太多（一般2个），否则系统将会不稳定。





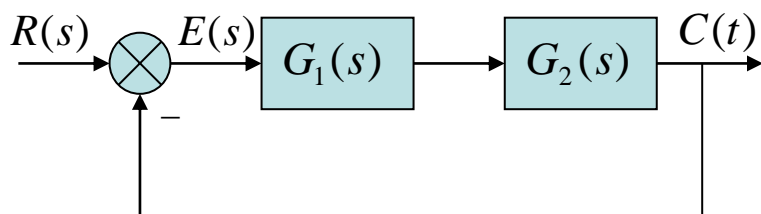
## 知识点6

## 稳态误差分析

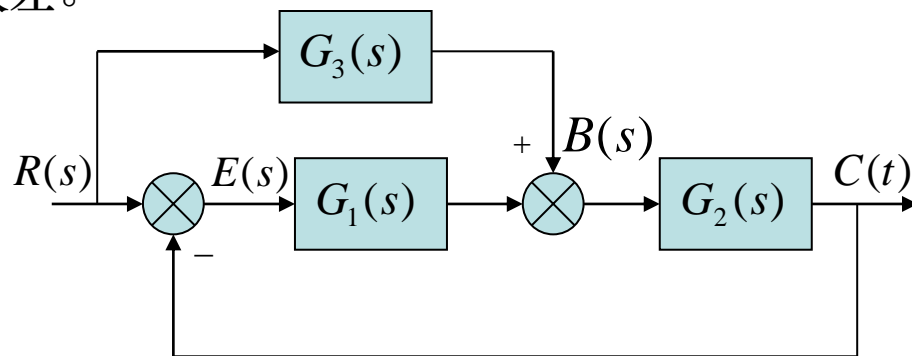
### (8) 复合控制系统的误差分析

**[复合控制系统]**：在控制系统中引入与给定作用和扰动作用有关的附加控制可构成复合控制，可进一步减小给定误差和扰动误差。

□ 顺馈控制系统：



图(a)



图(b)

在图(a)的基础上加上环节  $G_3(s)$ ，就构成了顺馈控制系统。即给定信号通过补偿装置  $G_3(s)$  对系统进行开环控制，补偿信号和误差信号一起对被控对象  $G_2(s)$  进行复合控制。相当于对给定输入进行补偿。

图(a)的误差：

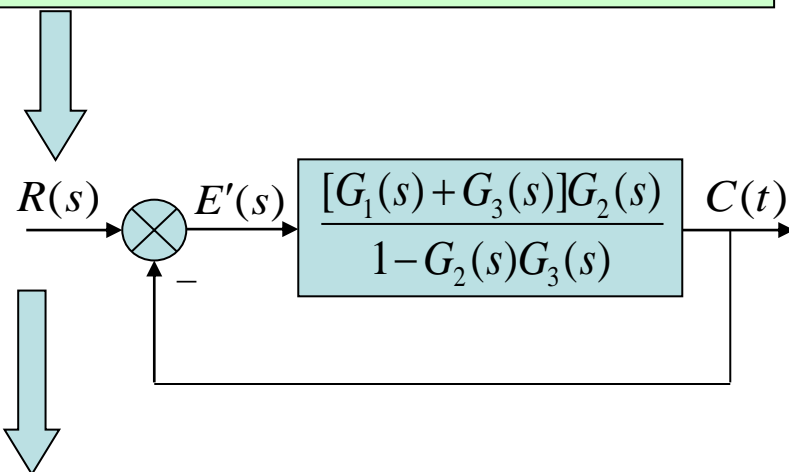
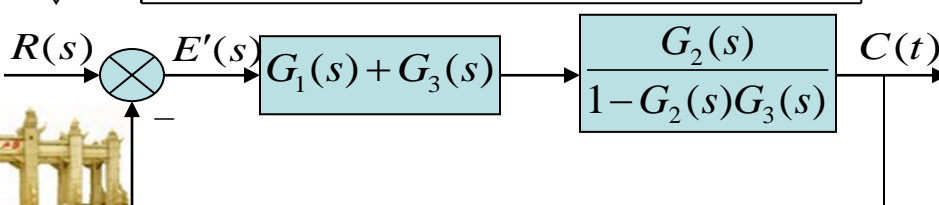
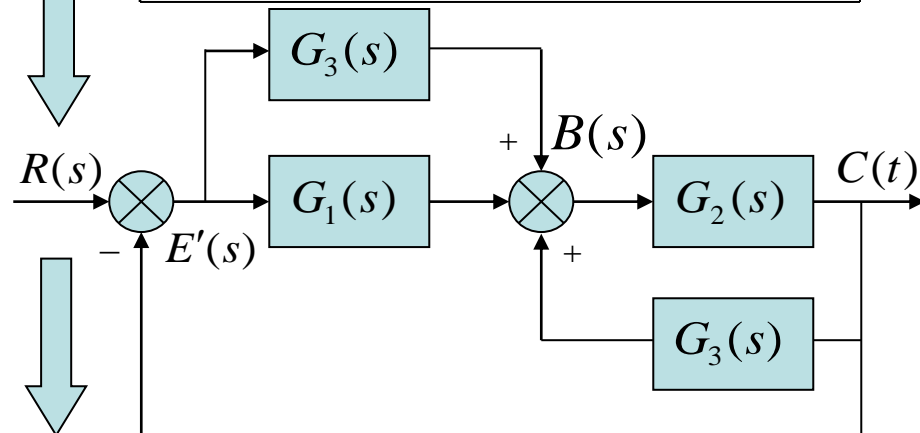
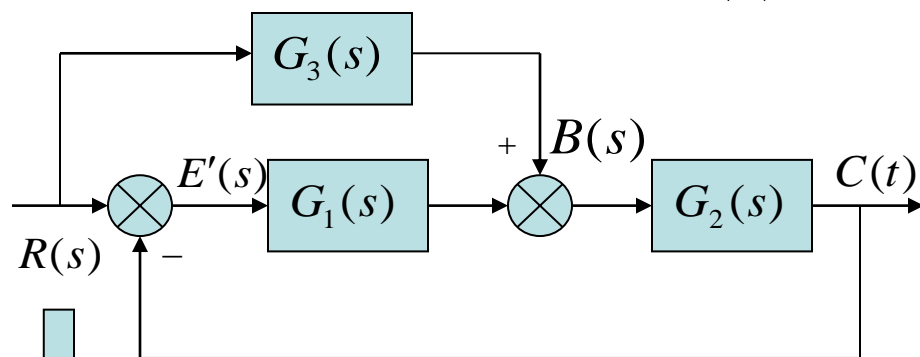
$$E(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cdot R(s)$$



## 知识点6

## 稳态误差分析

再来计算图(b)的误差函数  $E'(s)$ 。



$$\frac{E'(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + \frac{[G_1(s) + G_3(s)]G_2(s)}{1 - G_2(s)G_3(s)}} = \frac{1 - G_2(s)G_3(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

$$E'(s) = \frac{1 - G_2 G_3}{1 + G_1 G_2} \cdot R(s)$$



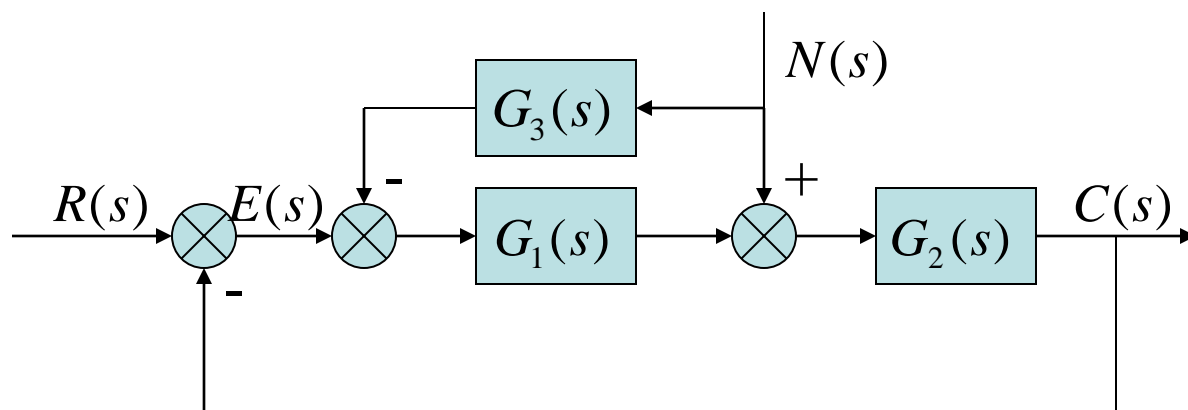


## 知识点6

## 稳态误差分析

若满足  $G_3 = \frac{1}{G_2}$ , 则  $E'(s) = 0$ , 即无输入稳态误差, 输出完全复现输入。该式称为给定作用实现完全不变性的条件。

□ 前馈系统 (按扰动作用的完全不变性条件设计)



令  $R(s) = 0$ , 由于是单位反馈系统, 所以误差  $E(s) = -C(s)$ 。

未加前馈时,

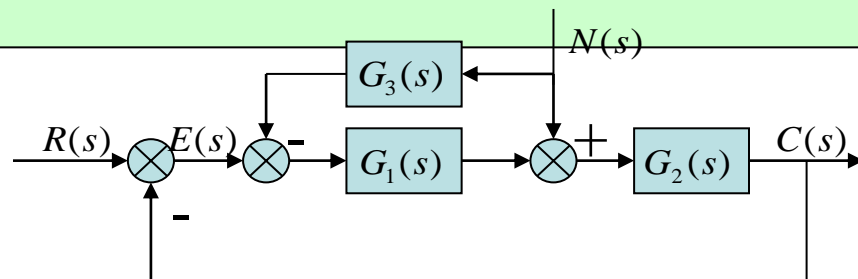
$$\Phi_N(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2}, \therefore E(s) = -C(s) = -\frac{G_2}{1 + G_1 G_2} \cdot N(s)$$



## 知识点6

## 稳态误差分析

加入前馈后，有：



$$C'(s) = N(s)G_2(s) - N(s)G_3(s)G_1(s)G_2(s) - C'(s)G_1(s)G_2(s)$$

$$\Rightarrow E'(s) = -C'(s) = -\frac{G_2(s) - G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cdot N(s)$$

显然， $E'(s) < E(s)$

若  $G_3(s) = \frac{1}{G_1(s)}$ ，则  $E'(s) = 0$ ，这个条件就是对扰变性的条件。

可以采取近似的补偿，以减小扰动稳态误差。

但在实际的系统中，有时  $G_3(s) = \frac{1}{G_1(s)}$  或  $\frac{1}{G_2(s)}$  是难以实现的，因为一般的控制系统传递函数分母总比分子阶数高。



## 知识点7

## PID原理

### (1)比例关系、积分关系和微分关系

冲热水淋浴，假定冷水龙头开度保持不变，只调节热水

#### ❖ 比例关系（P）

- 根据具体的龙头和水压，温度高一度，热水需要关小一定的量，比如说，关小一格。换句话说，控制量和控制偏差成比例关系，**偏差越大，控制量越大**
- 控制偏差就是实际测量值和设定值或目标值之差。在比例控制规律下，偏差反向，控制量也反向。也就是说，如果淋浴水温要求为四十度，实际水温高于四十度时，热水龙头向关闭的方向变化；实际水温低于四十度时，热水龙头向开启的方向变化。
- **控制量=比例控制增益\* 控制偏差**





## 知识点7

## PID原理

### ❖ 积分关系 (I)

- 但是比例控制规律并不能保证水温能够精确达所需控制的温度。人们这时对热水龙头作微调，只要水温还不合适，就一点一点地调节，直到水温合适为止。这种**只要控制偏差不消失就渐进微调**的控制规律，在控制里叫积分控制规律。
- 因为控制量和控制偏差在时间上的累积成正比，其比例因子就称为**积分控制增益**。工业上常用积分控制增益的倒数，称其为**积分时间常数**，其物理意义是偏差恒定时，控制量加倍所需的时间。
- 控制偏差有正有负，全看实际测量值是大于还是小于设定值，所以只要控制系统是稳定的，也就是实际测量值最终会稳定在设定值上，控制偏差的累积不会是无穷大的。
- 积分控制的基本作用是**消除控制偏差的余差**（也叫残差）。





## 知识点7

## PID原理

### ❖ 微分关系 (D)

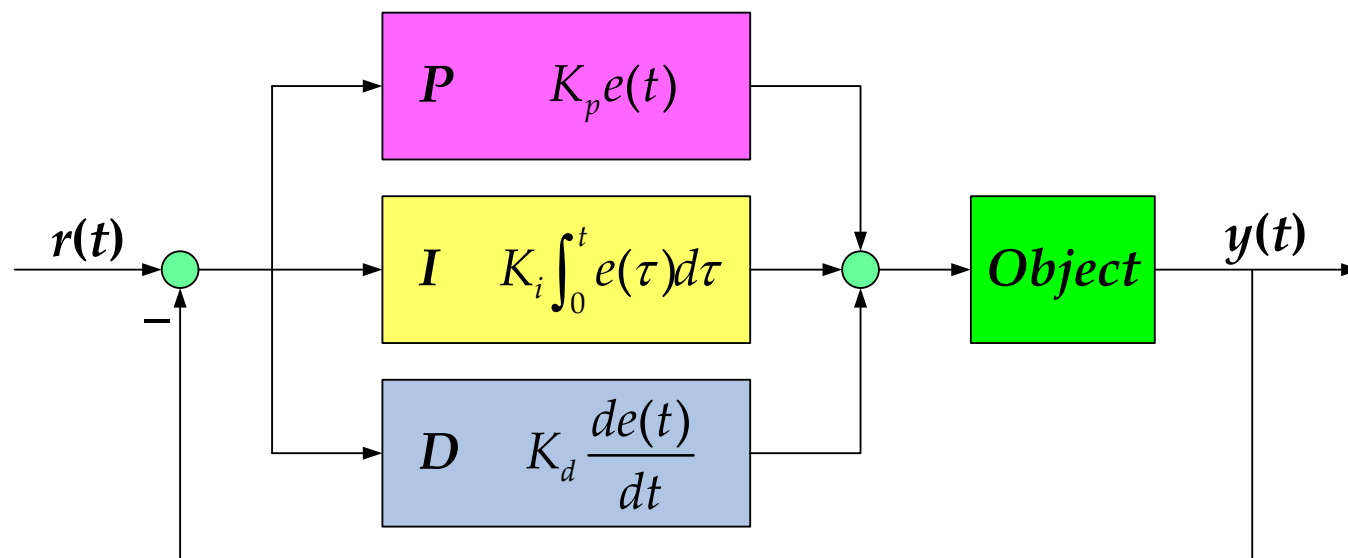
- 如果水管水温快速变化，人们会根据水温的变化调节热水龙头：水温升高，热水龙头向关闭方向变化，**升温越快，关闭越多**；水温降低，热水龙头向开启方向变化，**降温越快，开启越多**。这就是所谓的微分控制规律。
- 因为控制量和实际测量值的变化率成正比，其比例因子就称为**微分控制增益**，工业上也称**微分时间常数**。微分时间常数没有太特定的物理意义，只是类似积分时间常数的名称。
- 微分控制的重点不在实际测量值的具体数值，而在其**变化方向**和**变化速度**。
- 微分控制在理论上和实用中有很多优越性，但局限也是明显的。如果测量信号存在扰动，微分控制就会产生很多不必要甚至错误的控制信号。所以工业上对微分控制的使用是很谨慎的。



## 知识点7

## PID原理

## (2)什么是PID控制器



- ❖ **PID控制器（比例-积分-微分控制器）** 由比例单元  $P$ 、积分单元  $I$  和微分单元  $D$  组成。通过  $K_p$ 、 $K_i$  和  $K_d$  三个参数的设定完成控制律的设计。PID控制器主要适用于基本线性和动态特性不随时间变化的系统
- ❖ PID控制器的输入一般是系统输出与一个参考值的差值即控制偏差，然后把这个差别用于计算新的控制量，目的是可以让系统的输出达到或者保持在参考值

## 知识点7

## PID原理

## (2)PID控制器的时域表达式

- 如图1所示，连续PID控制器的一般表达式为

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt} = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

- 式中， $K_p$ 为比例控制增益、 $K_i$ 为积分控制增益， $K_d$ 为微分控制增益， $T_i$ 为积分时间常数， $T_d$ 为微分时间常数

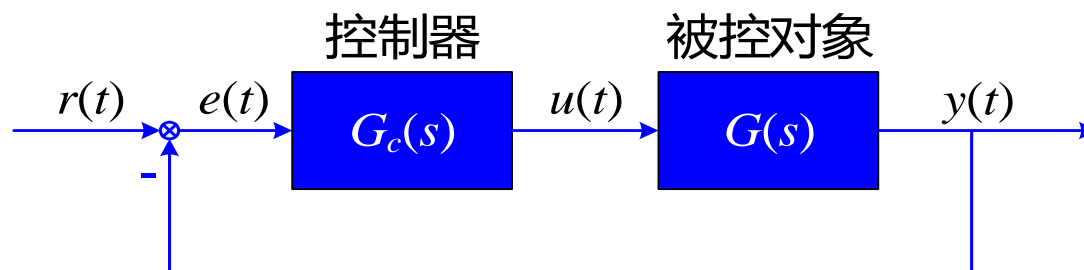


图1 单位负反馈控制系统示意图





## 知识点7

## PID原理

- PID控制器通过对误差信号 $e(t)$ 的加权计算，得到控制信号 $u(t)$ ，驱动受控对象，使得误差 $e(t)$ 按减少的方向变化，从而达到控制要求
  - 当 $T_i \rightarrow \infty$ ,  $T_d = 0$ 时，称为比例(P)控制器；
  - 当 $T_d = 0$ 时，称为比例积分(PI)控制器；
  - 当 $T_i \rightarrow \infty$ 时，称为比例微分(PD)控制器；
  - 当 $T_i \neq \infty$ ,  $T_d \neq 0$ 时，称为比例积分微分(PID)控制器
- $K_p, T_i, T_d$ 三个参数一旦确定，PID控制器的性能也随之确定







知识点7

## PID原理

### (3)PID控制器的传递函数

- 仍然参照图1，对PID的时域表达式进行拉普拉斯变换，可得

$$G_c(s) = \frac{E(s)}{U(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

于是可得几种控制方案的控制器传递函数分别为

- 比例(P)控制器  $G_c(s) = K_p$
- 比例积分(PI)控制器  $G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right)$
- 比例微分(PD)控制  $G_c(s) = K_p + K_d s = K_p (1 + T_d s)$
- 比例积分微分(PID)控制器  $G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$
- 为避免纯微分运算，常常用**一阶超前环节去近似纯微分环节**

$$G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1} \right)$$

式中， $N \rightarrow \infty$ 时，则为纯微分运算。实际中， $N$ 不必过大，一般 $N=10$ ，就可以逼近实际的微分效果。

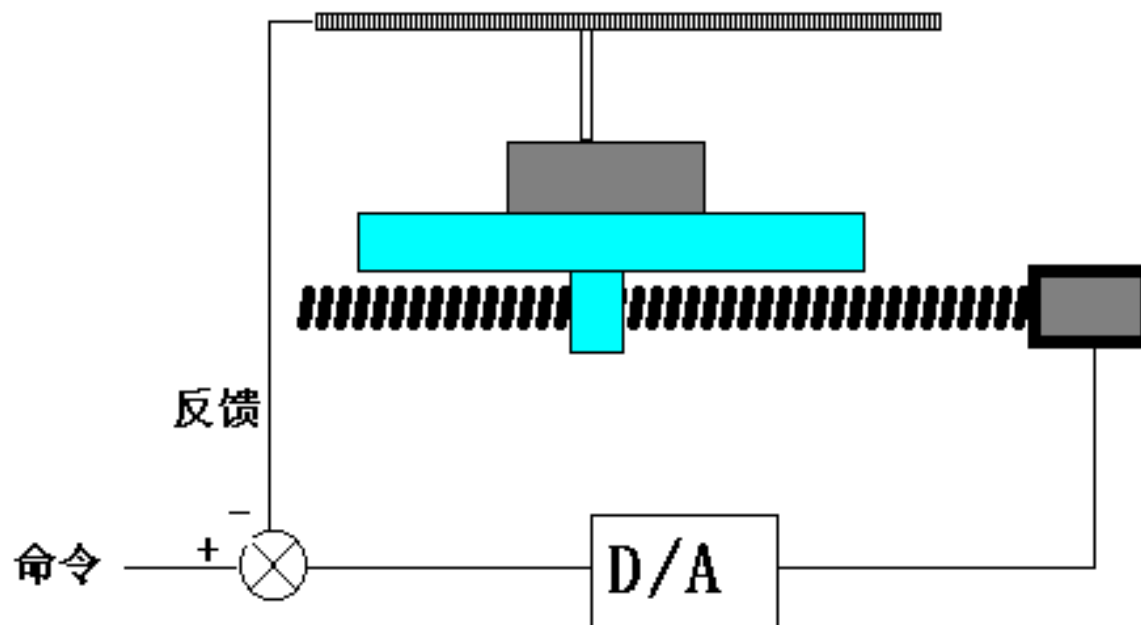
知识点7

## PID原理

### (4)全闭环伺服系统

位置检测安装在工作台上

工作原理：



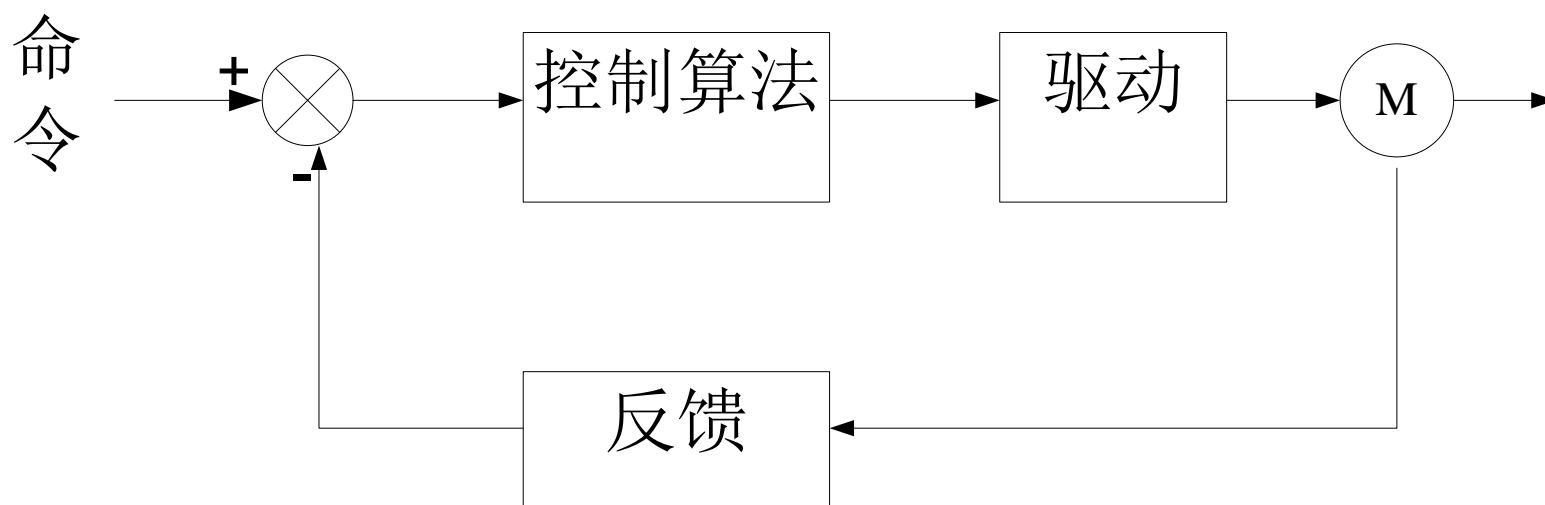
闭环系统的定位误差只取于位置检测单元的误差，与机床传动部分没有关系。



知识点7

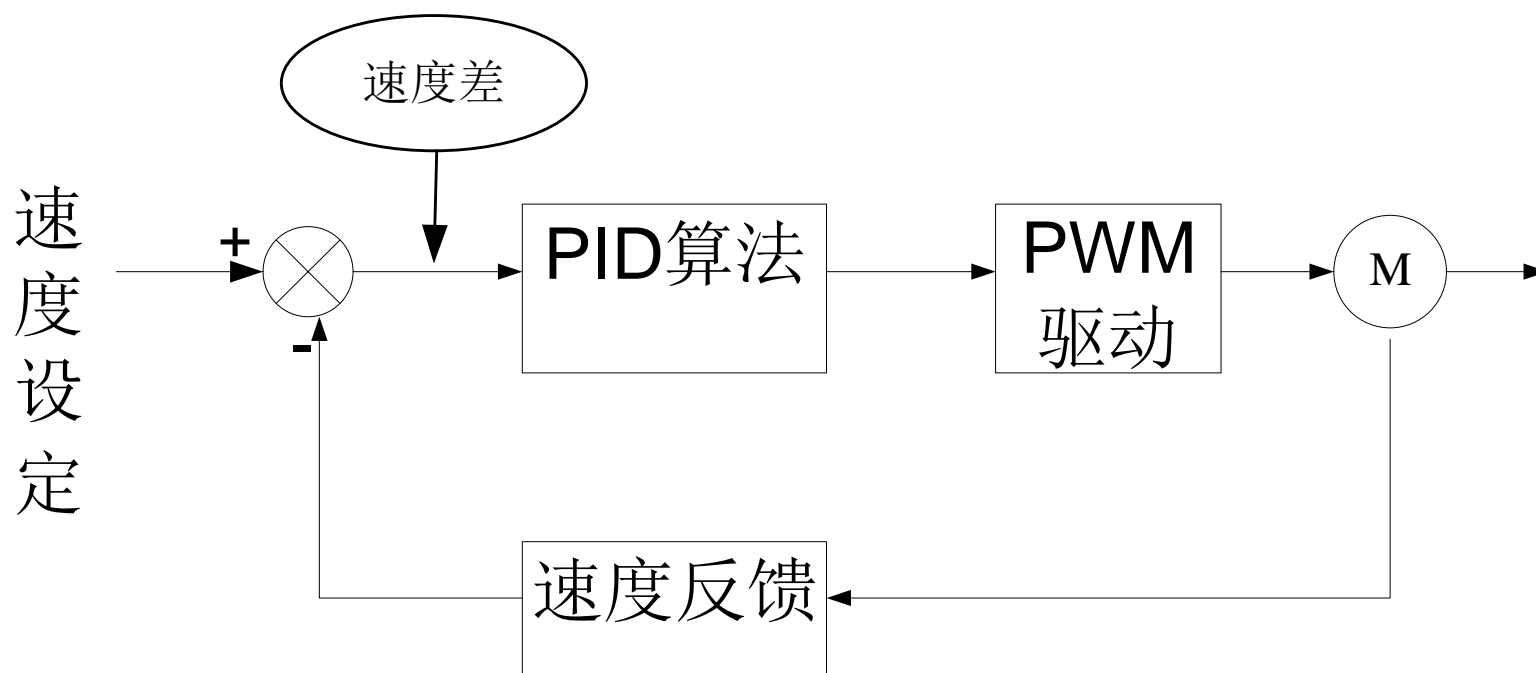
# PID原理

在控制理论中习惯画法



知识点7

# PID原理





## 知识点7

## PID原理

# 准备

2、问：供测量用的传感器如何选用？

答：在A500、F500L（55kw以上）、F500J、E500、S500中，只可选用电流型（4-20mA）传感器；F700中可选用电流（4-20mA）及电压型（0-5V、0-10V）传感器；在F500（0.75-55kW）中，若采用先进PID控制（多泵切换）功能的话，二种类型的传感器均可选用，区别是电压型传感器的输出接至变频器的1号端子；而在V500中只能选用电压型传感器。

我们以做了一个用变频器实现温度PID控制的模型：

- 1、传感器选用PT100（4-20MA）的温度变送器信号=>反馈值
- 2、温度设置是0—5V/10V（0-150度）模拟信号=>给定值
- 3、被控制元件三个灯泡=>模拟显示





知识点7

PID原理



# 动手操作

## 3、问：如何使变频器进入PID控制模式？

**答：**该过程中的具体操作方法对应各系列产品有所差异：除E500外，以上其它系列变频器中均可在未使用的输入端子中重新定义一个PID使能端，即该端子接通为PID控制方式，而断开为普通的V/F控制方式，例如：  
**RT输入端子未作他用时，可设其为X14，即P183=14**（用于A500、F500、F700和V500）或P60=14（用于F500J和S500）；而在E500中则通过设定参数**P128来确定运行模式**，P128=0为普通的V/F控制方式，P128=20或21为PID控制方式。因此对需要经常进行二种模式切换的场合，建议选用E500以外的产品。

### 参数设置

- 1、P183=14该端子接通为PID控制方式（注：也可选其他端子进行控制）
- 2、P128=20对加热，压力等等的控制

**我们选用RT端子为PID控制端子**





知识点7

## PID原理

4、问：在PID控制模式中，有些变频器既有检测信号输入，也有偏差值的输入，该如何区别和使用？

答：由变频器完成偏差值=设定值-测量值过程时应将测量传感器接于4号端子（A500、F500、F500J、F700、E500和S500）；若该运算过程（虚线框）由变频器以外的专用设备完成（设定值的设置和测量传感器的输入及偏差值运算结果）时，则只需将偏差值输出端接于1号端子（A500、F500和F700）。另外在V500中，无论测量信号还是偏差信号均接于1号端子，仅以参数内容予以区别。一般如无特别需要，为简化系统结构，用变频器完成偏差值运算的做法居多。

我们选择用变频器完成偏差值运算





知识点7

## PID原理

5、问：怎样确定PID动作方向，换言之在哪些场合用正动作或反动作？

答：这是整个调试过程的第一步，是非常关键的，必须根据所处行业的系统要求准确选定。一般来说，在供水、流量控制、加热时应为反作用，通俗讲，测量值（水压、液体流量、温度）升高时，应减小执行量，反之则应增大执行量。而在排水、降温时为正作用，测量值（水压、温度）升高时，应增大执行量，反之则应减小执行量。

我们选用测量值（水压、液体流量、温度）升高时，应减小执行量



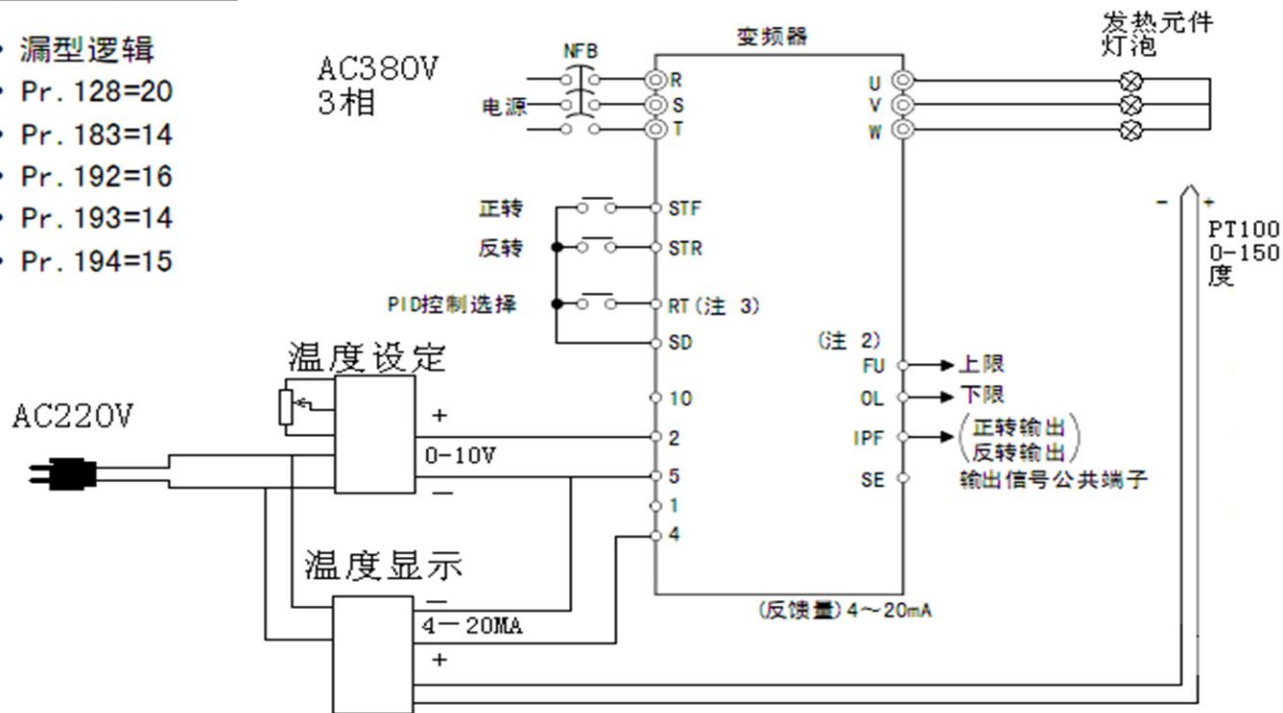


# 知识点7

## PID原理

### (3) 接线例子

- 漏型逻辑
- Pr. 128=20
- Pr. 183=14
- Pr. 192=16
- Pr. 193=14
- Pr. 194=15



- 注：
1. 按传感器规格选择电源。
  2. 输出信号端子由Pr. 191~Pr. 194设定。
  3. 输入信号端子由Pr. 180~Pr. 186设定。



知识点7

## PID原理

### (4)PID参数对控制性能的影响

- PID控制器的 $K_p, T_i, T_d$ 三个参数的大小决定了PID控制器的比例、积分、微分控制作用的强弱
- 下面举例分别分析 $K_p, T_i, T_d$ 三个参数中一个参数发生变化而另两个参数保持不变时，对系统控制性能的影响。



## 知识点7

## PID原理

**例1** 以电机转速控制系统为例，分析PID参数对控制性能的影响  
某电机转速控制系统如图2所示，采用PID控制器。试绘制系统单位阶跃响应曲线，分析 $K_p$ 、 $T_i$ 、 $T_d$ 三个参数对控制性能的影响。

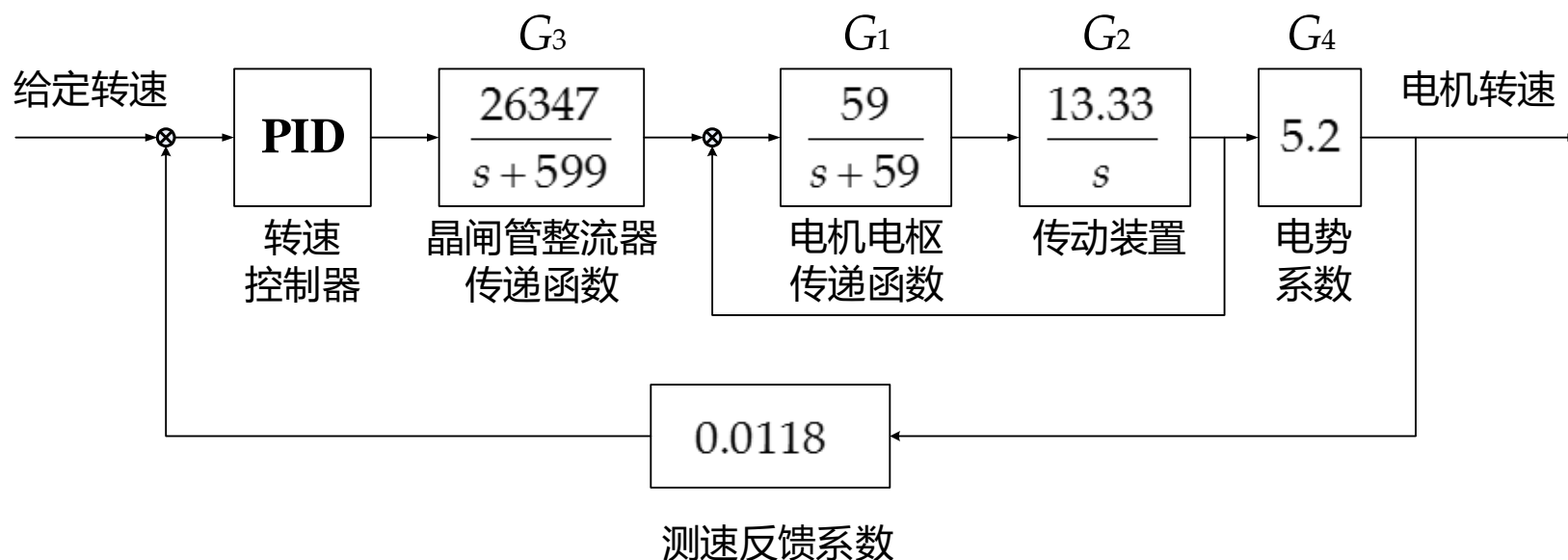


图2 某电机转速控制系统示意图





## 知识点7

## PID原理

### ❖ 比例系数 $K_p$ 对控制性能的影响

- 采用比例控制，令 $K_p$ 分别取1、2、3、4、5，且 $T_i \rightarrow \infty$ ， $T_d=0$ 时，绘制系统的阶跃响应曲线

```
s=tf('s');  
G1=59/(s+59);  
G2=13.33/s;  
G12=feedback(G1*G2,1);           %内环传递函数  
G3=26347/(s+599);  
G4=5.2;  
G=G12*G3*G4;  
for Kp=1:5  
    Gc=feedback(Kp*G,0.0118);    %比例控制的传递函数为常数Kp  
    step(Gc);  
    hold on;  
end  
legend('Kp=1','Kp=2','Kp=3','Kp=4','Kp=5');  
hold off;
```



知识点7

## PID原理

### ❖ 比例系数 $K_p$ 对控制性能的影响

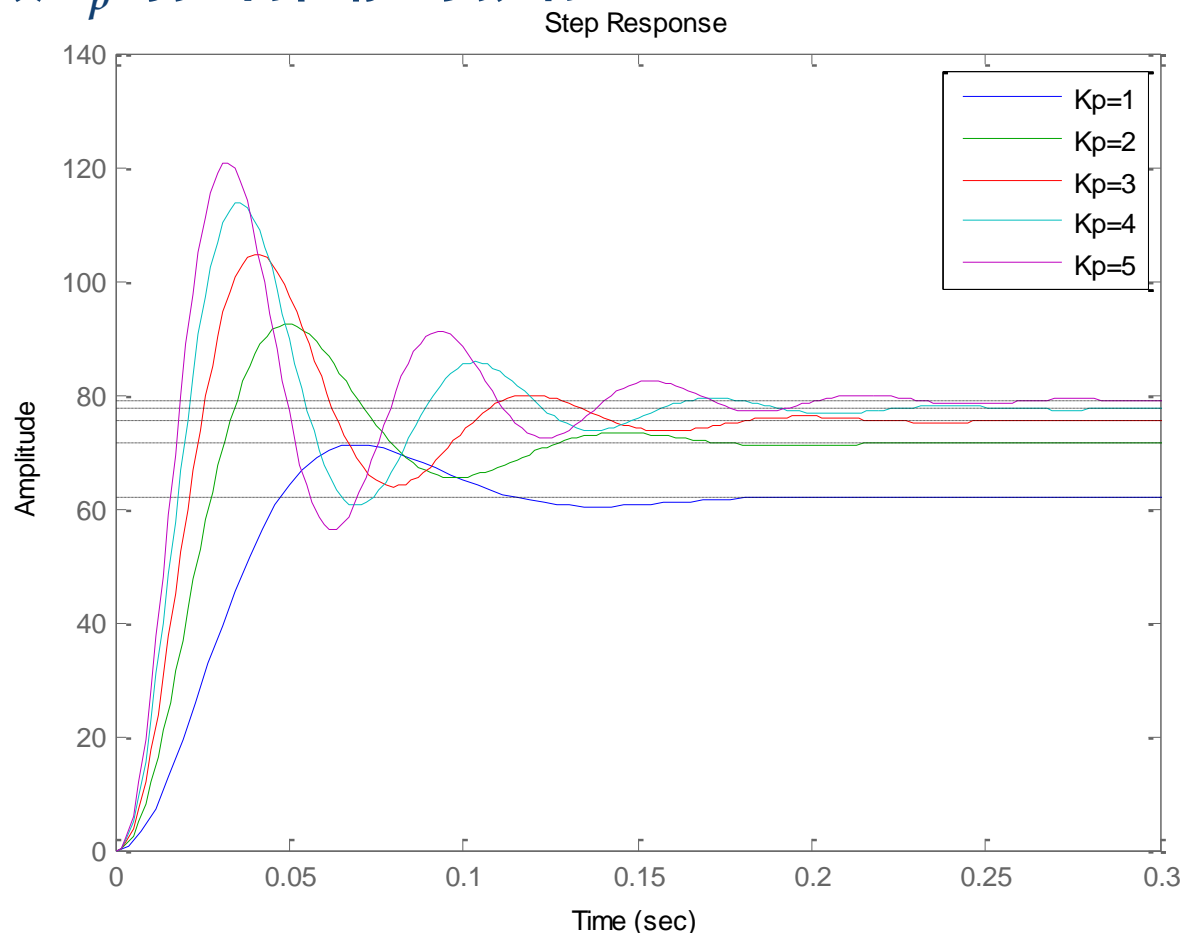
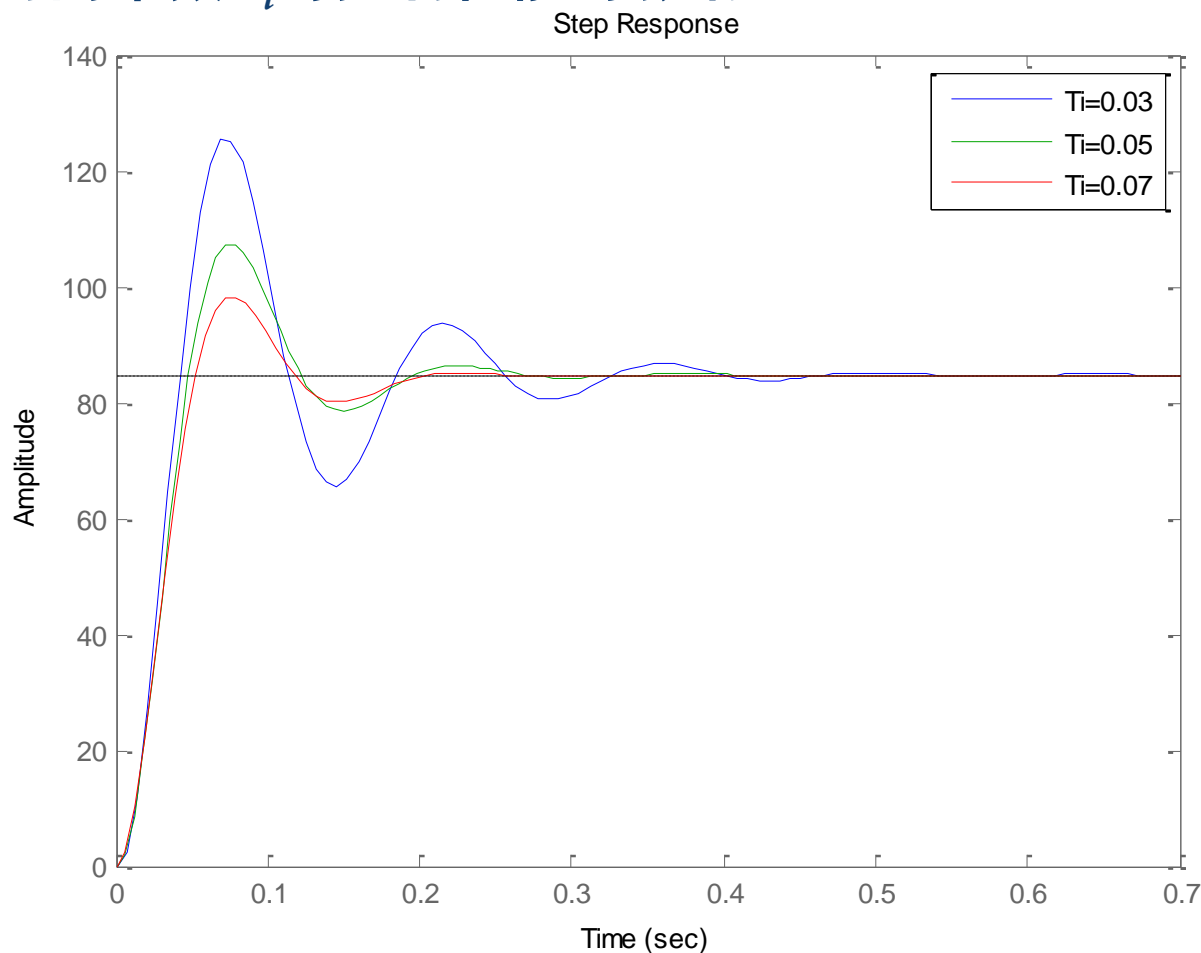


图3 在不同的比例系数 $K_p$ 下，比例控制对系统阶跃响应的影响

## 知识点7

## PID原理

❖ 积分时间常数 $T_i$ 对控制性能的影响图3 在不同的积分常数 $T_i$ 下，PI控制对系统阶跃响应的影响



知识点7

## PID原理

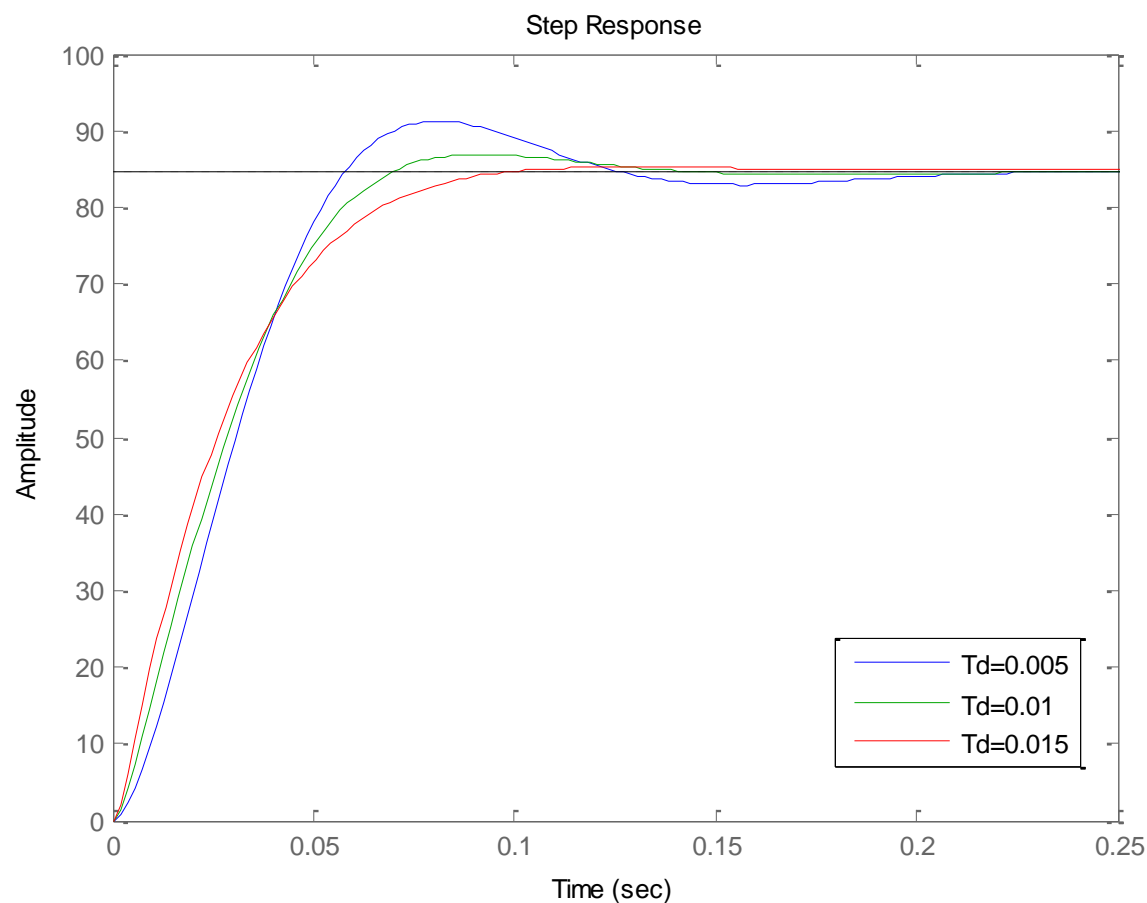
### ❖ 积分时间常数 $T_i$ 对控制性能的影响

- 积分作用的强弱取决于积分常数 $T_i$ 。 $T_i$ 越小，积分作用就越强，反之 $T_i$ 大则积分作用弱。
- 积分控制的主要作用是改善系统的稳态性能，消除系统的稳态误差。当系统存在控制误差时，积分控制就进行，直至无差，积分调节停止，积分控制输出一常值
- 加入积分控制可使得系统的相对稳定性变差
- $T_i$ 值的减小可能导致系统的超调量增大， $T_i$ 值的增大可能使得系统响应趋于稳态值的速度减慢



## 知识点7

## PID原理

❖ 微分时间常数 $T_d$ 对控制性能的影响图4 在不同的积分常数 $T_d$ 下，PID控制对系统阶跃响应的影响





知识点7

## PID原理

### ❖ 微分时间常数 $T_d$ 对控制性能的影响

- 随着微分时间常数 $T_d$ 的增加，闭环系统响应的响应速度加快，调节时间减小
- 微分环节的主要作用是提高系统的响应速度
- 由于该环节对误差的导数(即误差变化率发生作用)，它能在误差较大的变化趋势时施加合适的控制，但是过大的 $K_d$ 值会因为系统造成或者受控对象的大时间延迟而出现问题
- 微分环节对于信号无变化或变化缓慢的系统不起作用。





知识点7

PID原理

# 附录

## PID常用口诀:

参数整定找最佳，从小到大顺序查，  
先是比例后积分，最后再把微分加，  
曲线振荡很频繁，比例度盘要放大，  
曲线漂浮绕大湾，比例度盘往小扳，  
曲线偏离回复慢，积分时间往下降，  
曲线波动周期长，积分时间再加长，  
曲线振荡频率快，先把微分降下来，  
动差大来波动慢，微分时间应加长，  
理想曲线两个波，前高后低4比1，





知识点7

PID原理

## 第九次作业

1. 习题3-17
2. 习题3-18





本章结束

谢 谢!

