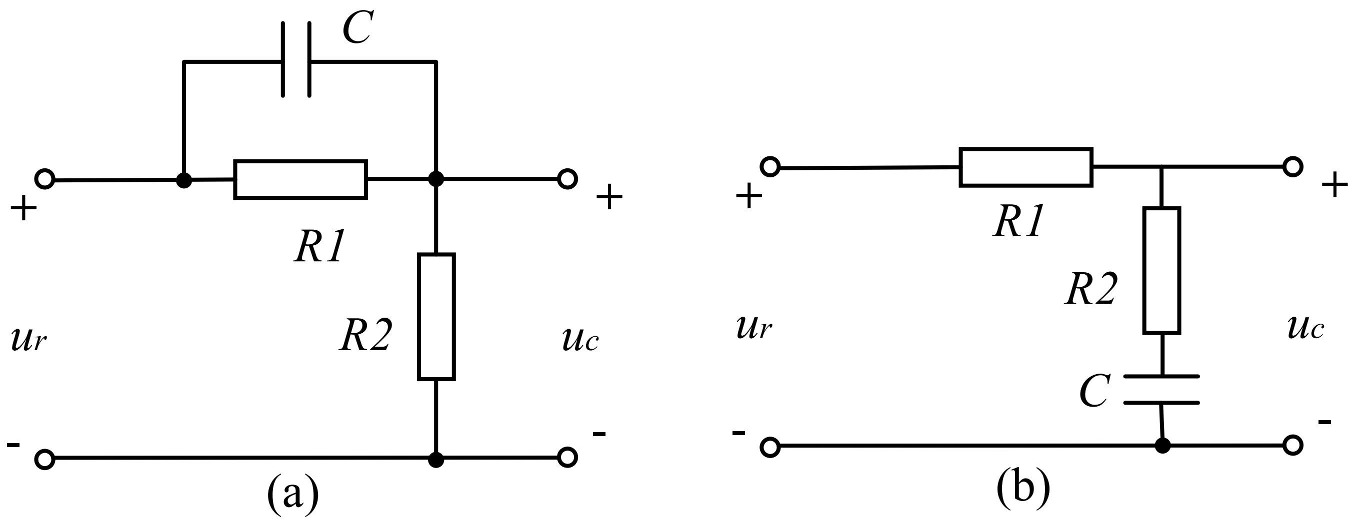
華南理工大學
South China University of Technology

自动控制原理第十次习题讲解

主讲人：宋家骏

5-1 试求题5-1图所示的RC网络的频率特性表达式。



5-3 设单位反馈系统的开环频率特性为 $G(j\omega)=\dfrac{2}{j\omega(j\omega+1)}$ ，试绘制：

(1) 对数频率特性 $L(\omega)$ 和 $\varphi(\omega)$；

(2) 对数幅相频率特性。

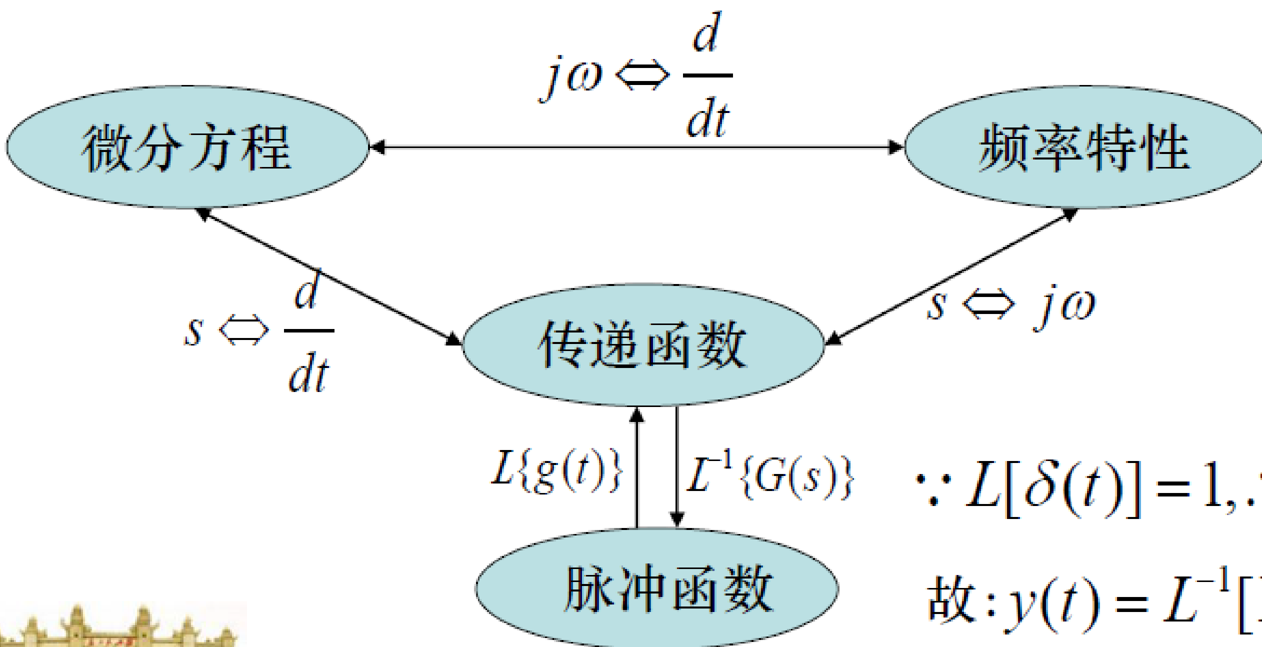
5-4 某个一阶不稳定环节的传递函数为 $G(s)=\dfrac{2}{Ts-1}$，试绘出其幅相频率特性和对数频率特性。

知识点1

频率特性的基本概念

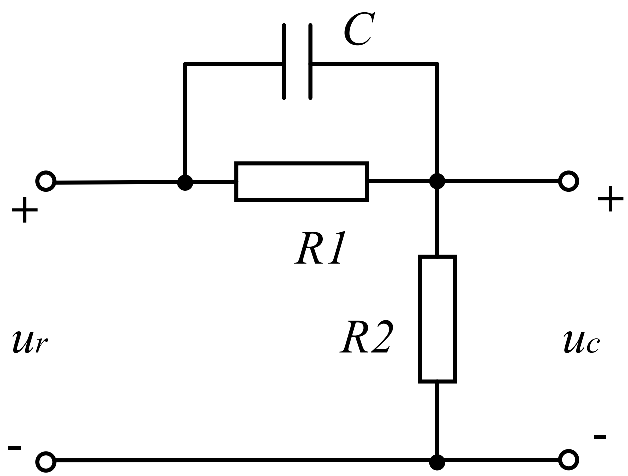
[结论]：当传递函数中的复变量s用 $j\omega$ 代替时，传递函数就转变为频率特性。反之亦然。

到目前为止，我们已学习过的线性系统的数学模型有以下几种：微分方程、传递函数、脉冲响应函数和频率特性。它们之间的关系如下：



$$\because L[\delta(t)] = 1, \therefore Y(s) = 1 \times G(s),$$

$$\text{故}: y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[G(s)] = g(t)$$



(a)

①根据基尔霍夫电流定律可得:

$$\left(\frac{u_r-u_c}{R_1}+\frac{d\left(u_r-u_c\right)}{dt}\bullet C\right)\bullet R_2=u_c$$

展开后有:

$$\frac{u_r}{R_1}+C\bullet\frac{du_r}{dt}=\frac{u_c}{R_2}+\frac{u_c}{R_1}+C\bullet\frac{du_c}{dt}$$

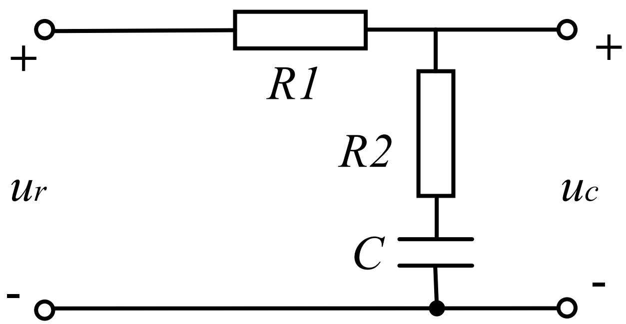
$$\frac{u_r}{R_1}+C\bullet u_r\bullet j\omega=\frac{u_c}{R_2}+\frac{u_c}{R_1}+C\bullet u_c\bullet j\omega$$

方程左右两边同除以u_r，令 $G\left(j\omega\right)=\dfrac{u_c}{u_r}$

$$\frac{1}{R_1}+C\bullet j\omega=\frac{G\left(j\omega\right)}{R_2}+\frac{G\left(j\omega\right)}{R_1}+G\left(j\omega\right)\bullet C\bullet j\omega$$

$$G\left(j\omega\right)=\frac{\dfrac{1}{R_1}+C\bullet j\omega}{\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_1}+C\bullet j\omega}$$

$$=\frac{R_2+R_1R_2C\bullet j\omega}{R_1+R_2+R_1R_2C\bullet j\omega}$$



(b)

$$\frac{u_r-u_c}{R_1}\bullet R_2+\frac{1}{C}\bullet\int\frac{u_r-u_c}{R_1}dt=u_c$$

$$u_r\bullet\frac{R_2}{R_1}+\frac{1}{C}\bullet\int\frac{u_r}{R_1}dt=u_c+u_c\bullet\frac{R_2}{R_1}+\frac{1}{C}\bullet\int\frac{u_c}{R_1}dt$$

两边同时乘以R_1，得到：

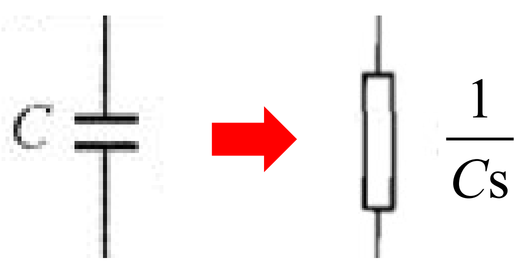
$$u_r\bullet R_2+\frac{1}{C}\bullet\int u_r dt=u_c\bullet R_1+u_c\bullet R_2+\frac{1}{C}\bullet\int u_c dt$$

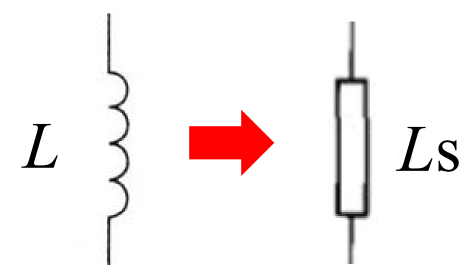
$$u_r\bullet R_2+\frac{u_r}{Cs}=u_c\bullet R_1+u_c\bullet R_2+\frac{u_c}{Cs}$$

$$G(j\omega)=\frac{1+R_2Cj\omega}{1+(R_1+R_2)Cj\omega}$$

$$G(s)=\frac{u_c}{u_r}=\frac{R_2+\frac{1}{Cs}}{R_1+R_2+\frac{1}{Cs}}=\frac{1+R_2Cs}{1+(R_1+R_2)Cs}$$

第二种方法：复阻抗法（等效电阻法） 高国燊书本P31





5-3 设单位反馈系统的开环频率特性为 $G(j\omega)=\dfrac{2}{j\omega(j\omega+1)}$，试绘制：

（1）对数频率特性 $L(\omega)$ 和 $\varphi(\omega)$；

（2）对数幅相频率特性。

解：

由 $j\omega=s$，可得 $G(s)=\dfrac{2}{s(s+1)}$ ⇒ $k=2$，$T=1$，$\nu=1$

转折频率：$\omega=\dfrac{1}{T}=1$

低频渐近线斜率为：$-20\nu=-20\ dB/dec$　且经过点 $(1,\ 20\lg k)$ 即 $(1,6)$

高频渐近线斜率为：$-20(n-m)=-40\ dB/dec$

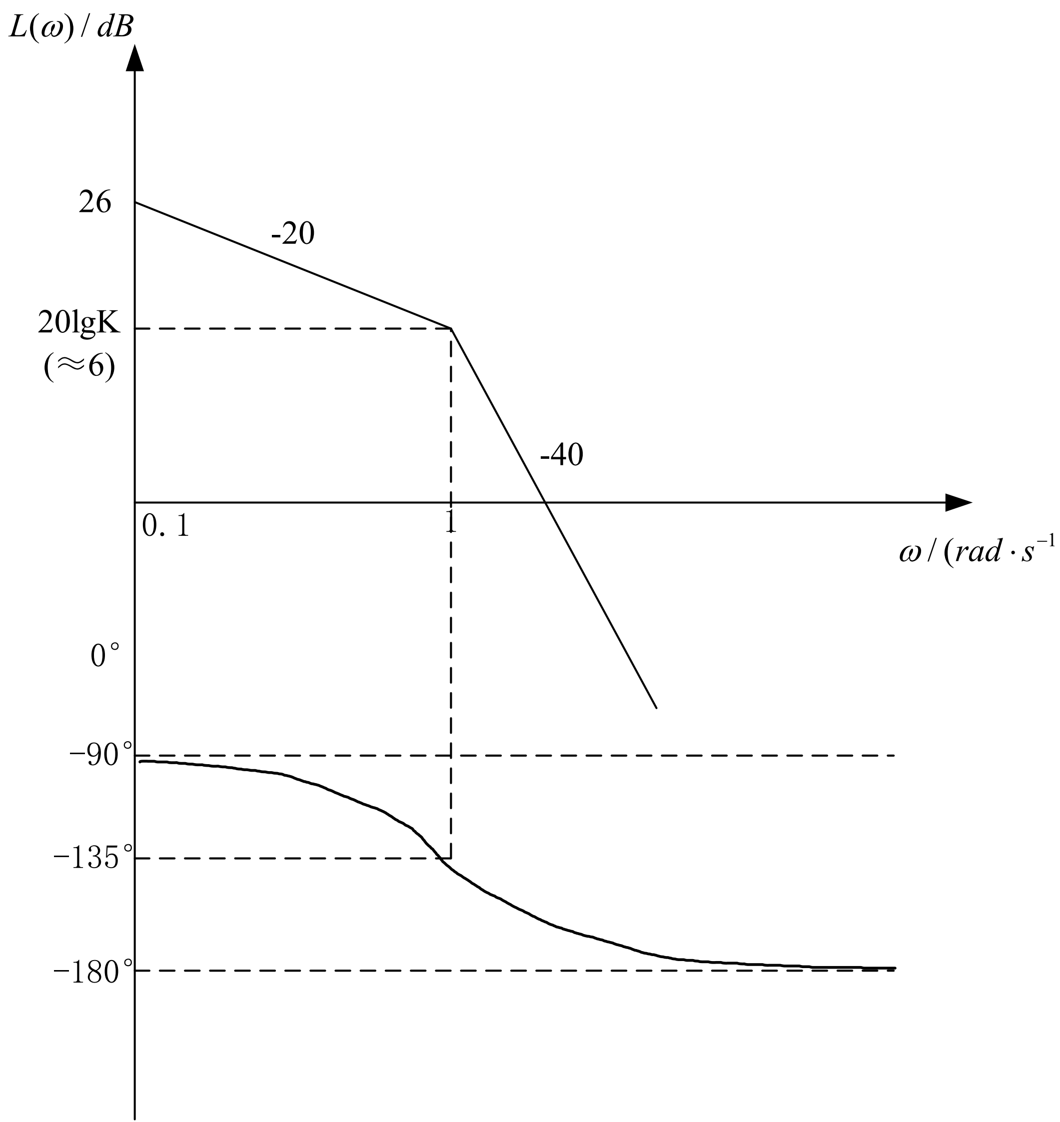
系统开环对数相频特性表达式为：$\varphi(\omega)=-90^\circ-\arctan\omega$

找到几个特殊点：$L(0.1)\approx 26$　$L(1)\approx 6$

$\varphi(0.1)\approx -90^\circ$　$\varphi(1)\approx -90^\circ-45^\circ=-135^\circ$

$\varphi(\infty)\approx -180^\circ$

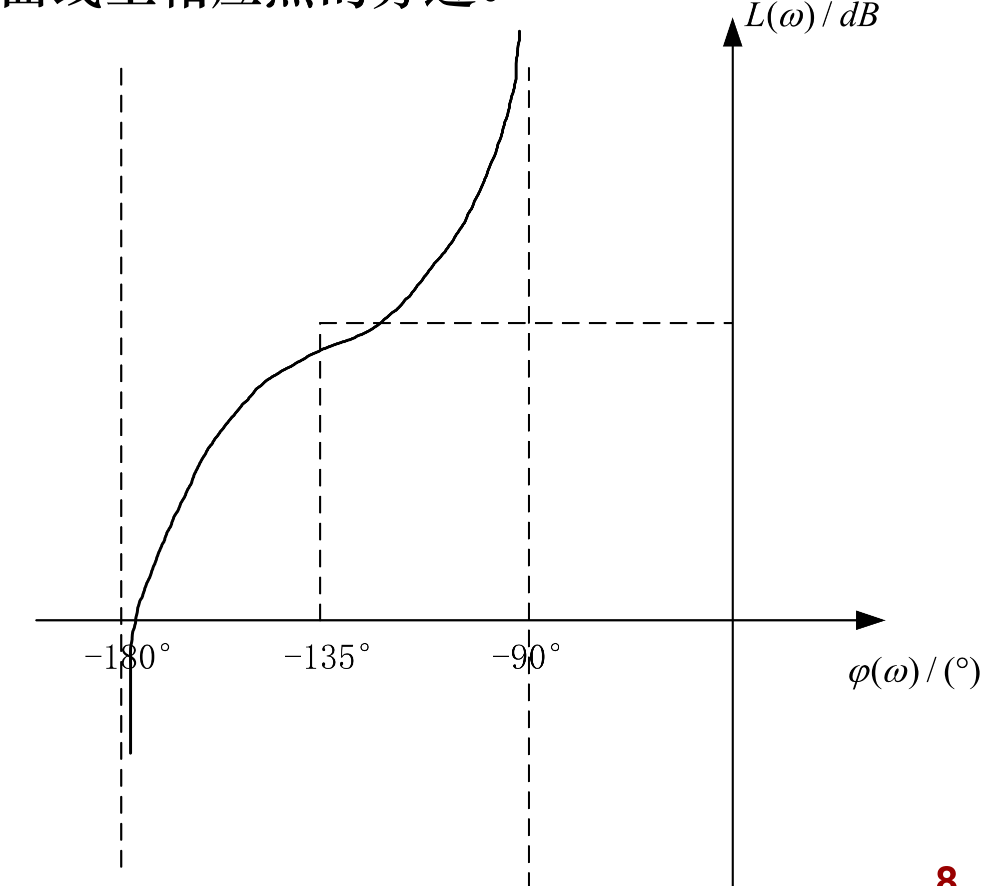
所以最终得到Bode图为：



（2）对数幅相曲线(尼克尔斯曲线)

对数幅相曲线(尼克尔斯曲线)是由对数幅频特性和对数相频特性合并而成的曲线。横轴为相频 $\varphi(\omega)$，纵轴为幅频 $L(\omega)$ ，横纵坐标均为线性分度。 ω为一个参变量标在曲线上相应点的旁边。

根据Bode图，可得到对数幅相曲线如右图：



5-4 某个一阶不稳定环节的传递函数为$G(s)=\dfrac{2}{Ts-1}$，试绘出其幅相频率特性和对数频率特性。

解：

$$G(j\omega)=\frac{1}{j\omega T-1}=-\frac{j\omega T+1}{(\omega T)^2+1} \quad ①$$

$$A(\omega)=|G(\omega)|=\frac{1}{|j\omega T-1|}=\frac{1}{\sqrt{(\omega T)^2+1}} \quad ②$$

(高国燊P217~P219，非最小相位系统)

$$\varphi(\omega)=\pi-\arctan(\omega T) \quad ③$$

奈奎斯特图绘制：

由①拆分实部虚部得到：$P(\omega)=-\dfrac{1}{(\omega T)^2+1}$　　$Q(\omega)=-\dfrac{\omega T}{(\omega T)^2+1}$

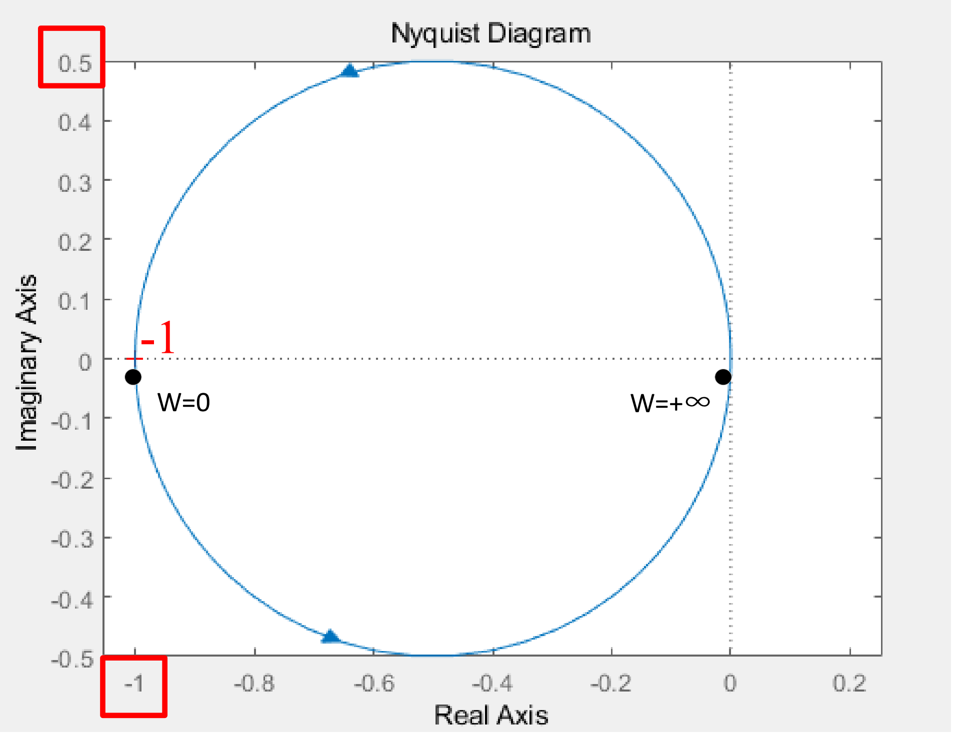
可以看出，P、Q之间存在如下关系：　$-P=P^2+Q^2$

即：$\dfrac{1}{4}=(P+\dfrac{1}{2})^2+Q^2$

圆心为(-0.5，0)，半径为0.5的圆

所以按照实部虚部绘制奈奎斯特图，ω从0到正无穷，图像为一个半圆且P、Q均小于0。

再通过对称作图将圆补齐，得到：



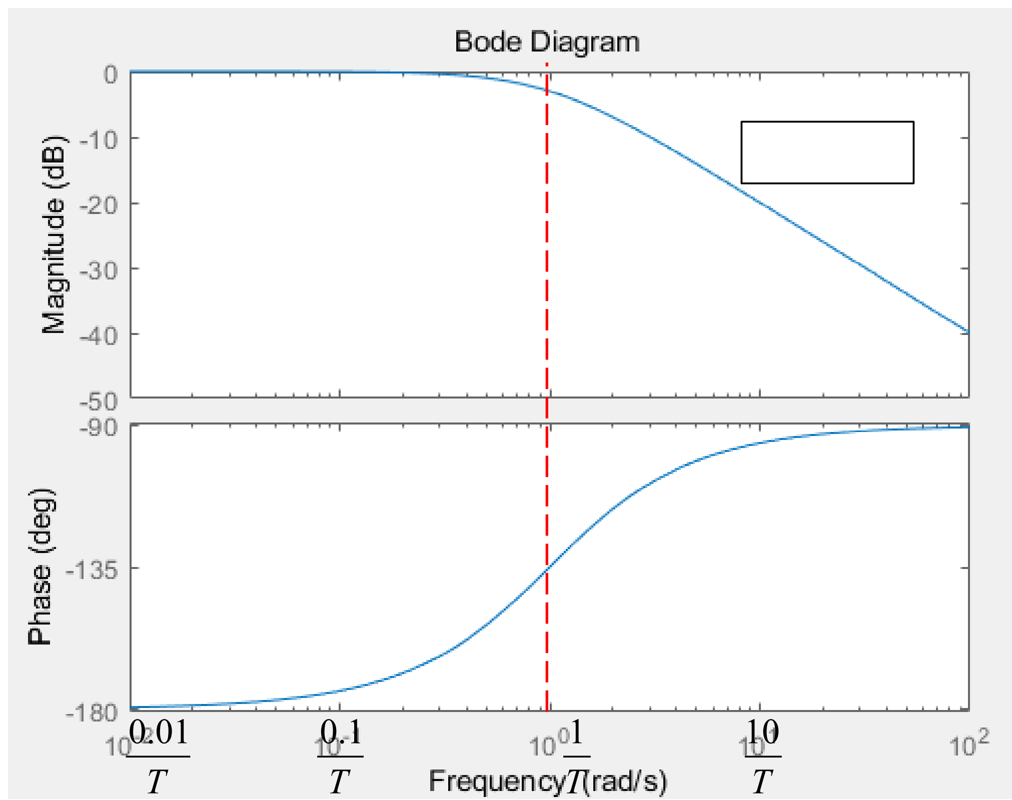
伯德图绘制:

由式子②可得: $L(\omega)=20\lg(\dfrac{1}{\sqrt{(\omega T)^2+1}})=-10\lg((\omega T)^2+1)$

与 $G(s)=\dfrac{1}{Ts+1}$ 相同，为0型系统，故其转折频率为1/T。

而相频特性图按照式③可绘制，显然其范围为：-180°~-90°

所以最终得到Bode图为:



讲解结束

谢　谢!