



华南理工大学
South China University of Technology

《自动控制原理》

主讲老师：刘桂雄 教授，博士生导师





第二章 自动控制系统的数学模型

需要掌握的知识点：

- 1、概述
- 2、控制系统的微分方程—建立和求解
- 3、线性方程的求解-拉氏变换法
- 4、控制系统的传递函数
- 5、控制系统的结构图—等效变换
- 6、控制系统的信号流图—梅逊公式





知识点1

概述

[数学模型]：

描述控制系统变量（物理量）之间动态关系的数学表达式。

常用的数学模型有微分方程、传递函数、结构图、信号流图、频率特性以及状态空间描述等。

例如对一个微分方程，若已知初值、输入值，对微分方程求解，就可以得出输出量的时域表达式。据此可对系统进行分析。所以**建立控制系统的数学模型**是对系统进行分析的第一步，也是最重要的一步。

控制系统如按照数学模型分类的话，可以分为线性和非线性系统，定常系统和时变系统。





知识点1

概述



没前途の万事屋



本科生、硕士生、博士生有什么区别？告诉你，区别大了。



吐槽君

3周 ago

- 本科生的论文：
- 第一章，红烧肉的定义和类型；
- 第二章，各种红烧肉的区别和特点；
- 第三章，东坡红烧肉的具体特点；
- 第四章，烹制东坡红烧肉的主要问题和对策；
- 结论：东坡红烧肉可以更好吃。





知识点1

概述

- 硕士生的论文：
- 第一章，关于猪肉做法的文献综述；
- 第二章，红烧肉做法的历史演变过程；
- 第三章，传统红烧肉制作和研究方式介绍和比较；
- 第四章，某理论对红烧肉做法的启示；
- 第五章，运用某理论做出红烧肉的具体方法；
- 第六章，某理论红烧肉的创新之处和进一步研究建议；
- 结论：红烧肉很好吃，但是吃的过程中注意区分，某理论指导下的红烧肉会做得更好吃。





知识点1

概述

■博士生的论文：

■序言：历史中猪肉食谱的文献综述、理论意义和现实价值、不足和问题。

■第一篇（第一章到第三章）：猪是怎样养成的；

■第二篇（第四章到第五章）：猪的各个部分肉质的区分和作用；

■第三篇（第六章到第七章）：理论的不同发展阶段对红烧肉发展的影响和启示；

■第四篇（第八章到第十章）：红烧肉制作的实证研究（变量选取、理论模型和计量分析）；

■结论：红烧肉是不是可以吃取决于很多复杂的因素，总体来看，在满足一定约束条件的情况下红烧肉是不错的营养、美容食品，但操作过程的障碍还需要通过真学、真懂、真用各种理论，有必要的情况下需要进行理论创新和政策支持，使红烧肉更好地实现增加营养、避免增肥和促进口感的作用。





知识点1

概述

[建模]:

深入了解元件及系统的动态特性，准确建立它们的数学模型——建模。

[物理模型]:

任何元件或系统实际上都是很复杂的，难以对它作出精确、全面的描述，必须进行简化或理想化。

简化后的元件或系统为该元件或系统的物理模型。

[简化]:

有条件的简化，要根据问题的性质和求解的精确要求，来确定出合理的物理模型。





知识点1

概述

(1) 求取性能指标的主要途径

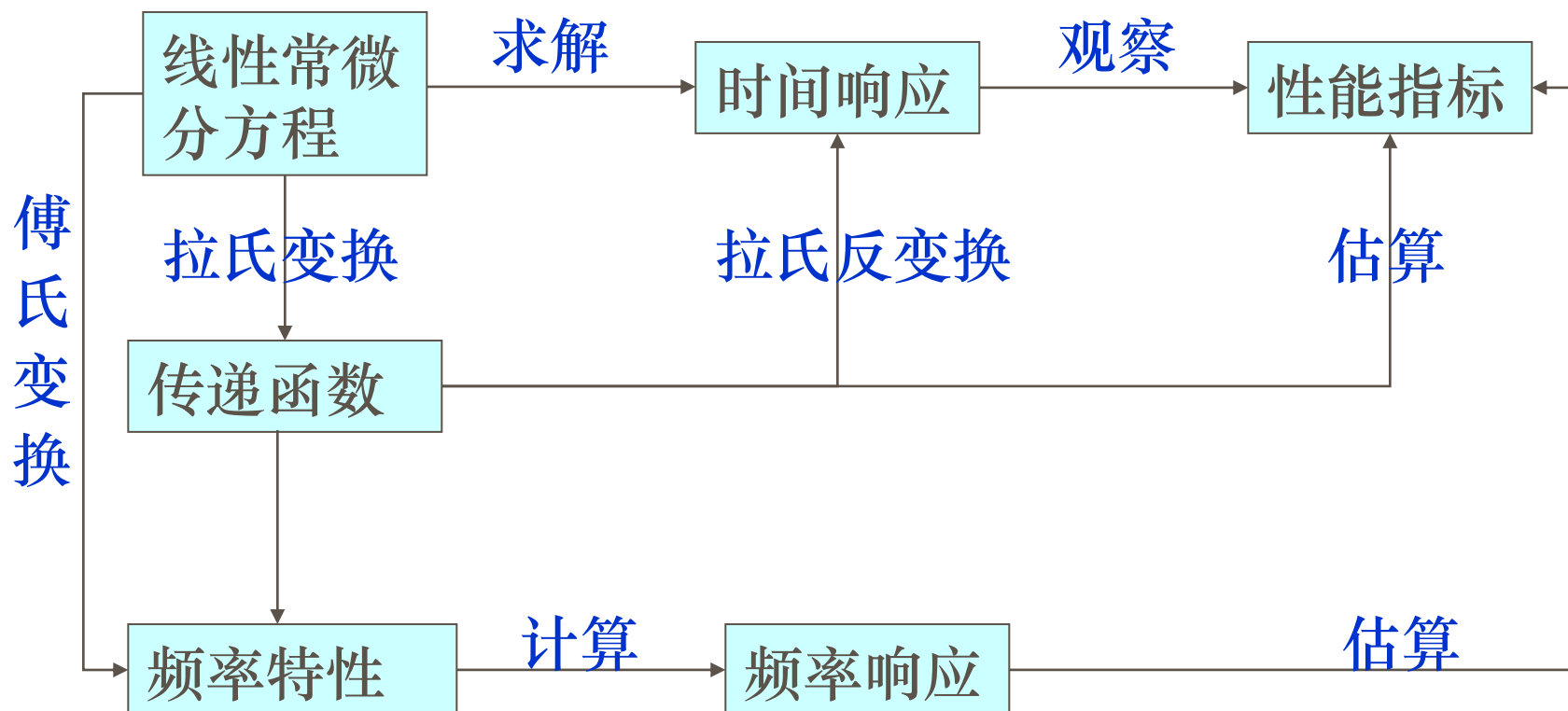


图2.1 求取性能指标的主要途径



知识点1

概述

(2)线性系统与非线性系统

①线性系统

如果系统满足叠加原理，则称其为线性系统。叠加原理说明，两个不同的作用函数同时作用于系统的响应，等于两个作用函数单独作用的响应之和。

线性系统对几个输入量同时作用的响应可以一个一个地处理，然后对每一个输入量响应的结果进行叠加。

若可以用线性定常（**常系数**）微分方程描述的系统称为**线性定常系统**。如果描述系统的微分方程的系数是**时间的函数**，则这类系统为**线性时变系统**。

如：宇宙飞船控制系统就是时变控制的一个例子（宇宙飞船的质量随着燃料的消耗而变化）。



知识点1

概述

(2)线性系统与非线性系统

②非线性系统

如果系统不能满足叠加原理，则称其为非线性系统。

下面是非线性系统的一些例子：
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x = A \sin \omega t,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x + x^3 = 0$$

古典控制理论中(我们所正在学习的)，采用的是单输入单输出 (Single Input Single Output)描述方法。主要是针对线性定常系统，对于非线性系统和时变系统，解决问题的能力是极其有限的。





知识点1

概述

(3)建立控制系统数学模型的方法

①分析法

对系统各部分的运动机理进行分析，**物理规律**、**化学规律**。

分析法建模的几个步骤如下：

- 建立物理模型。
- 列写原始方程。利用适当的物理定律—如牛顿定律、基尔霍夫电流和电压定律、能量守恒定律等；
- 选定系统的输入量、输出量及状态变量(仅在建立状态模型时要求)，消去中间变量，建立适当的输入输出模型或状态空间模型。



知识点1

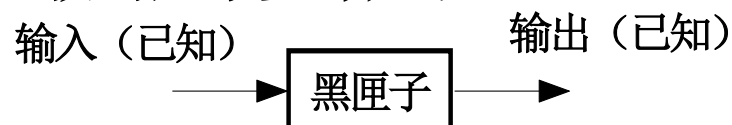
概述

(3)建立控制系统数学模型的方法

②实验法

人为施加某种测试信号，记录基本输出响应。

实验法建模的几个步骤如下：



- 已知知识和辨识目的
- 实验设计--选择实验条件
- 模型阶次--适合于应用的适当的阶次
- 参数估计--最小二乘法
- 模型验证—将实际输出与模型的计算输出进行比较，系统模型需保证两个输出之间在选定意义上的接近





知识点2

控制系统的微分方程—建立和求解

(1)系统微分方程的列写

微分方程的编写应根据组成系统各元件工作过程中所遵循的物理定理来进行。

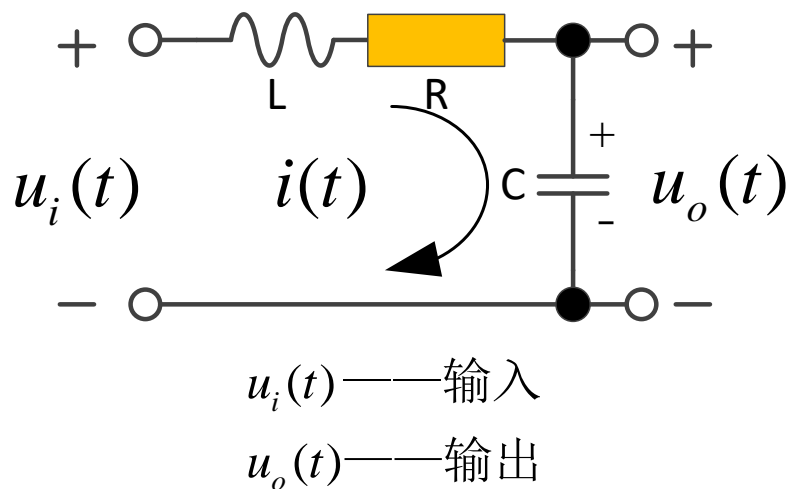
例如：

- ✓电路中的基尔霍夫电路定理
- ✓力学中的牛顿定理
- ✓热力学中的热力学定理等。
- ✓能量守恒定律





例2-1 写出RLC串联电路的微分方程。



[解]: 据基尔霍夫电路定理:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = u_i \quad ①$$

$$u_o = \frac{1}{C} \int i dt \quad ②$$

由②: $i = C \frac{du_o}{dt}$, 代入①得:

$$LC \frac{d^2 u_o}{dt^2} + RC \frac{du_o}{dt} + u_o = u_i$$

这是一个线性定常二阶微分方程。



例2-2

图2-1为由一RC组成的四端无源网络。试列写以 $U_1(t)$ 为输入量， $U_2(t)$ 为输出量的网络微分方程。

解：设回路电流 i_1 、 i_2 ，
根据基尔霍夫定律，列写方程如下：

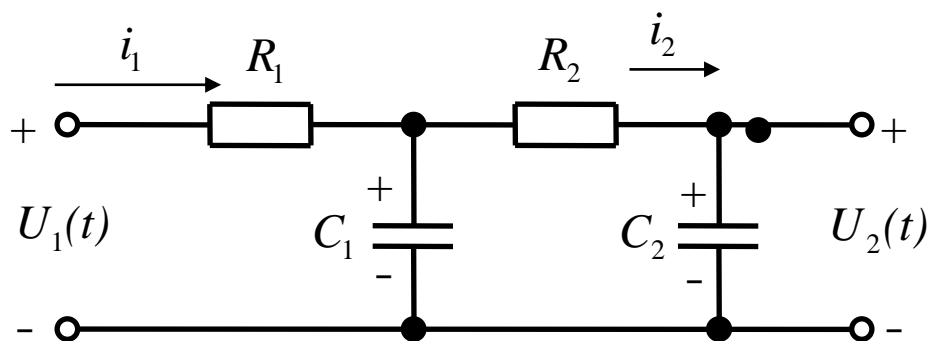


图2.2 RC组成的四端网络

$$U_1 = R_1 i_1 + U_{C_1} \quad ①$$

$$U_{C_1} = \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt \quad ②$$

$$U_{C_1} = R_2 i_2 + U_{C_2} \quad ③$$

$$U_{C_2} = \frac{1}{C_2} \int i_2 dt \quad ④$$

$$U_2 = U_{C_2} \quad ⑤$$





例2-2

由④、⑤得: $i_2 = C_2 \frac{dU_{C_2}}{dt} = C_2 \frac{dU_2}{dt}$

由②导出: $i_1 = C_1 \frac{dU_{C_1}}{dt} + i_2 = C_1 \frac{dU_{C_1}}{dt} + C_2 \frac{dU_2}{dt}$

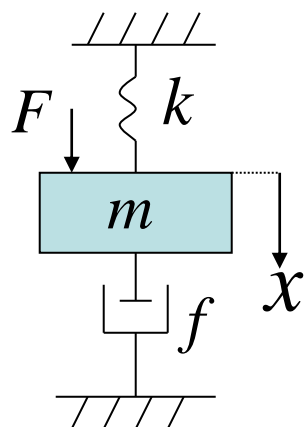
将 i_1 、 i_2 代入①、③, 则得:

$$\begin{aligned} U_1 &= R_1 + R_2 i_2 + U_{C_2} = R_1 (C_1 \frac{dU_{C_1}}{dt} + C_2 \frac{dU_2}{dt}) + R_2 C_2 \frac{dU_2}{dt} + U_2 \\ &= R_1 [C_1 \frac{d}{dt} (R_2 i_2 + U_2) + C_2 \frac{dU_2}{dt}] + R_2 C_2 \frac{dU_2}{dt} + U_2 \\ &= R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 U_2}{dt^2} + R_1 C_1 \frac{dU_2}{dt} + R_1 C_2 \frac{dU_2}{dt} + R_2 C_2 \frac{dU_2}{dt} + U_2 \\ &= R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 U_2}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) \frac{dU_2}{dt} + U_2 = U_1 \end{aligned}$$

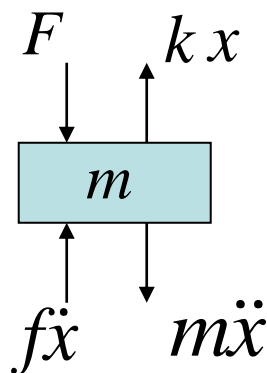
这就是RC组成的四端网络的数学模型, 是一个二阶线性微分方程。



例2-3 求弹簧-阻尼-质量的机械位移系统的微分方程。输入量为外力 F ，输出量为位移 x 。



图a



图b

[解]: 图a和图b分别为系统原理结构图和质量块受力分析图。图中, m 为质量, f 为粘性阻尼系数, k 为弹性系数。

根据牛顿定理, 可列出质量块的力和加速度之间关系如下:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F - f \frac{dx}{dt} - kx$$

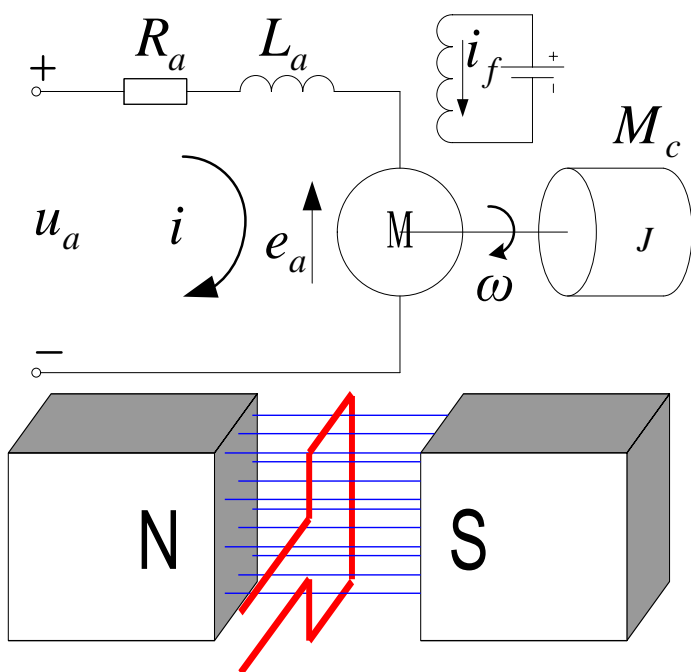
化成标准形式, 得:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = F$$

这也是一个两阶定常微分方程。 x 为输出量, F 为输入量。



例2-4 电枢控制式直流电动机。



这里输入是电枢电压 u_a 和等效到电机转轴上的负载转矩 M_c ，输出是转速 ω

电枢回路方程为: $L_a \frac{di}{dt} + R_a i + e_a = u_a$

其中 e_a 为反电势 $e_a = K_1 \psi \omega$

此时励磁电流为常数，所以

$$\psi = K_f i_f = \text{常数}$$

$$e_a = K_1 K_f i_f \omega = C_e \omega$$

C_e 称为电动机 **电势常数**

电机通电后产生转矩: $M = K_2 \psi i_a = K_2 K_f i_f i_a = C_M i_a$

C_M 称为 **电动机转矩常数**，再根据牛顿定律可得机械转动方程：

$$J \frac{d\omega}{dt} = M - M_c$$





例2-4

$$L_a \frac{di}{dt} + R_a i + e_a = u_a \quad e_a = C_e \omega \quad M = C_M i_a \quad J \frac{d\omega}{dt} = M - M_c$$

整理得：

$$\frac{L_a J}{C_e C_M} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{R_a J}{C_e C_M} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{u_a}{C_e} - \frac{L_a}{C_e C_M} \frac{dM_c}{dt} - \frac{R_a M_c}{C_e C_M}$$

$$T_a T_M \frac{d^2 \omega}{dt^2} + T_M \frac{d\omega}{dt} + \omega = K_u u_a - K_M \left(T_a \frac{dM_c}{dt} + M_c \right)$$

其中 $T_a = \frac{L_a}{R_a}$ 和 $T_M = \frac{R_a J}{C_e C_M}$ 分别称为 **电磁时间常数** 和 **机电时间常数**

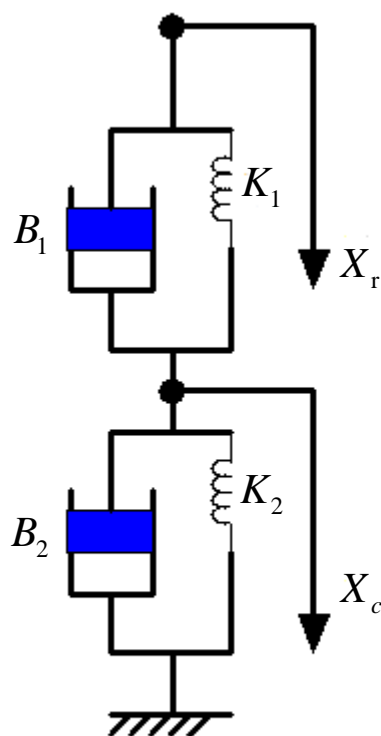
$K_u = \frac{1}{C_e}$ 和 $K_M = \frac{R_a}{C_e C_M}$ 分别是 **转速与电压传递系数** 和 **转速与负载**

传递系数。这里已略去摩擦力和扭转弹性力。

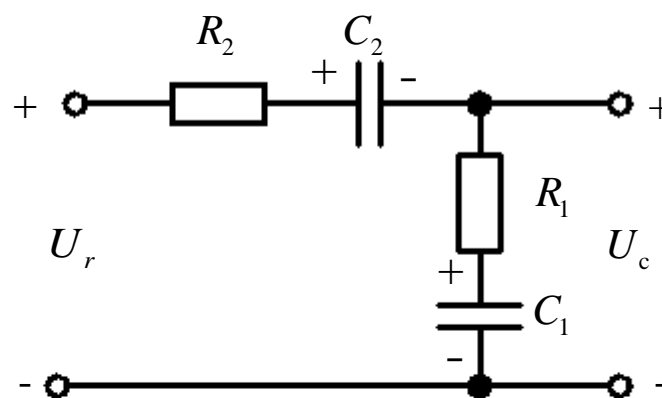


例2-5

试证明图(a)、(b)所示的机、电系统是相似系统(即两系统具有相同的数学模型)。



(a) 机械系统



(b) 电气系统





例2-5 解： 对机械网络：输入为 X_r ，输出为 X_c ，根据力平衡，可列出其运动方程式

$$K_1(X_r - X_c) + B_1(\dot{X}_r - \dot{X}_c) = K_2 X_c + B_2 \dot{X}_c \quad (1)$$

$$(B_1 + B_2) \dot{X}_c + (K_1 + K_2) X_c = B_1 \dot{X}_r + K_1 X_r \quad (2)$$

对电气网络(b)，列写电路方程如下：

$$R_2 i + \frac{1}{C_2} \int i dt + R_1 i + \frac{1}{C_1} \int i dt = U_r \quad (1)$$

$$C_1 U_{C_1} = C_2 U_{C_2} \quad (2)$$

$$U_c = R_1 i + U_{C_1} \quad (3)$$

$$(R_1 + R_2) i + U_{C_1} + U_{C_2} = U_r \quad (4)$$

利用②、③、④求出

$$i = \frac{U_r - (1 + \frac{C_1}{C_2}) U_c}{R_1 + R_2 - (1 + \frac{C_1}{C_2}) R_1} \quad (5)$$

代入⑤将①两边微分得

$$(R_1 + R_2) \dot{U}_c + (\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}) U_c = R_1 \dot{U}_r + \frac{1}{C_1} U_r$$

比较两个金色的公式，可得出如下机-电相似系统



例2-5思考延伸



机床利用凸轮实现自动化控制

采用更多的电控制
代替机械结构



可编程加工高级机床



齿轮箱



电子变速器

机械结构越来越简单，光机电一体化趋势越来越明显





知识点2

控制系统的微分方程—建立和求解

(2)非线性元件(环节)微分方程的线性化

- 在经典控制领域，主要研究的是线性定常控制系统。
- 如果描述系统的数学模型是线性常系数的微分方程，则称该系统为线性定常系统，其最重要的特性便是可以应用线性叠加原理。
- 系统的总输出可以由若干个输入引起的输出叠加得到。
- 若描述系统的数学模型是非线性(微分)方程，则相应的系统称为非线性系统，这种系统不能用线性叠加原理。
- 在经典控制领域对非线性环节的处理能力是很小的。



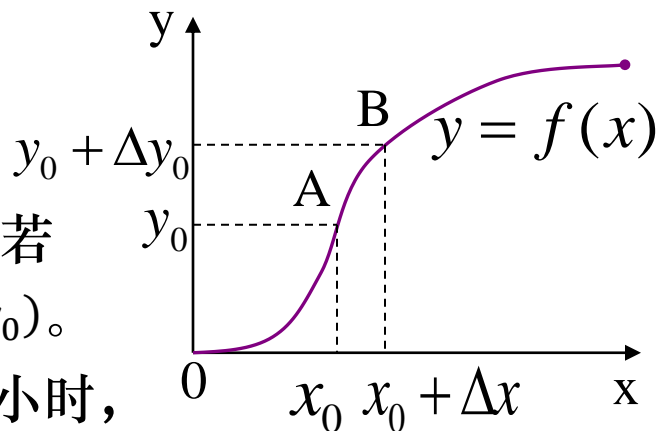
知识点2

控制系统的微分方程—建立和求解

(2)非线性元件(环节)微分方程的线性化

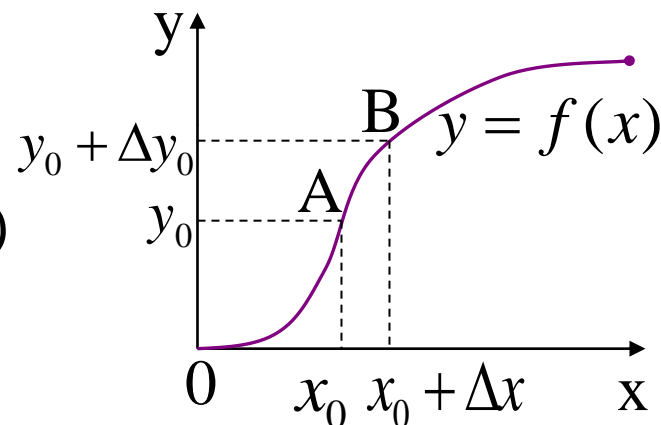
- ✓ 在工程应用中，除了含有强非线性环节或系统参数随时间变化较大的情况，一般采用近似的线性化方法。
- ✓ 对于非线性方程，可在**工作点附近**用泰勒级数展开，取前面的线性项。
- ✓ 可以得到等效的线性环节。

设具有连续变化的非线性函数为： $y=f(x)$ ，若取某一平衡状态为工作点，如下图中的 $A(x_0, y_0)$ 。A点附近有点为 $B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ ，当 Δx 很小时，AB段可近似看做线性的。



设 $f(x)$ 在 $A(x_0, y_0)$ 点连续可微，
则将函数在该点展开为泰勒级
数，得：

$$y = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$



若 Δx 很小，则 $y - y_0 \approx \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0)$ ，即 $\Delta y \approx \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x = K \Delta x$
式中， K 为与工作点有关的常数，显然，上式是线性方程，
是非线性方程的线性表示。

为了保证近似的精度，只能在工作点附近展开。



✦对于具有两个自变量的非线性方程，也可以在静态工作点附近展开。设双变量非线性方程为： $y = f(x_1, x_2)$ ，工作点为 $y_0 = f(x_{10}, x_{20})$ 。泰勒级数展开：

$$y = f(x_1, x_2) = f(x_{10}, x_{20}) + \left[\frac{\partial f(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1} (x_1 - x_{10}) + \frac{\partial f(x_{10}, x_{20})}{\partial x_2} (x_2 - x_{20}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1^2} (x_1 - x_{10})^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1 \partial x_2} (x_1 - x_{10})(x_2 - x_{20}) + \frac{\partial^2 f(x_{10}, x_{20})}{\partial x_2^2} (x_2 - x_{20})^2 \right] + \dots \right]$$

略去二级以上导数项，并令： $\Delta y = y - f(x_{10}, x_{20})$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_{20} \quad \Delta x_1 = x_1 - x_{10}$$

$$K_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} \Big|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}}, K_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} \Big|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}}$$





$$\Delta y = \frac{\partial f(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f(x_{10}, x_{20})}{\partial x_2} \Delta x_2 = K_1 \Delta x_1 + K_2 \Delta x_2$$

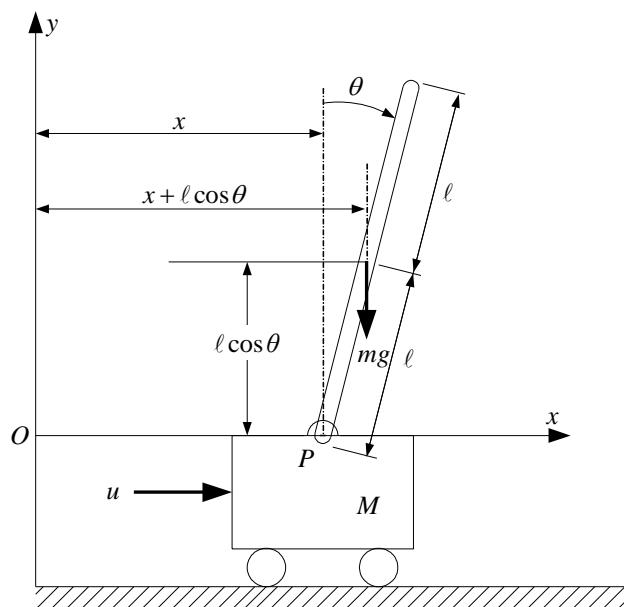
这种小偏差线性化方法对于控制系统大多数工作状态是可行的，平衡点附近，偏差一般不会很大，都是“小偏差点”。

[注意]:

- ✓ 非线性环节不是指典型的非线性特性(如间隙、库仑干摩擦、饱和特性等)，它是可以用泰勒级数展开的。
- ✓ 实际的工作情况在工作点附近。
- ✓ 变量的变化必须是小范围的。其近似程度与工作点附近的非线性情况及变量变化范围有关。



[例2-6]: 倒立摆系统



该系统由小车和安装在小车上的倒立摆构成。倒立摆是不稳定的，如果没有适当的控制力作用到它上面，它将随时可能向任何方向倾倒。

这里我们只考虑二维问题，即认为倒立摆只在图所在的平面内运动。

若有合适的控制力 u 作用于小车上可使摆杆维持直立不倒。

这实际是一个空间起飞助推器的姿态控制模型(姿态控制问题的目的是要把空间助推器保持在垂直位置)。

设小车和摆杆的质量分别为 M 和 m ，摆杆长为 2ℓ ，且重心位于几何中点处，小车距参考坐标的位置为 x ，摆杆与铅垂线的夹角为 θ ，摆杆重心的水平位置为 $x + \ell \sin \theta$ ，垂直位置为 $\ell \cos \theta$

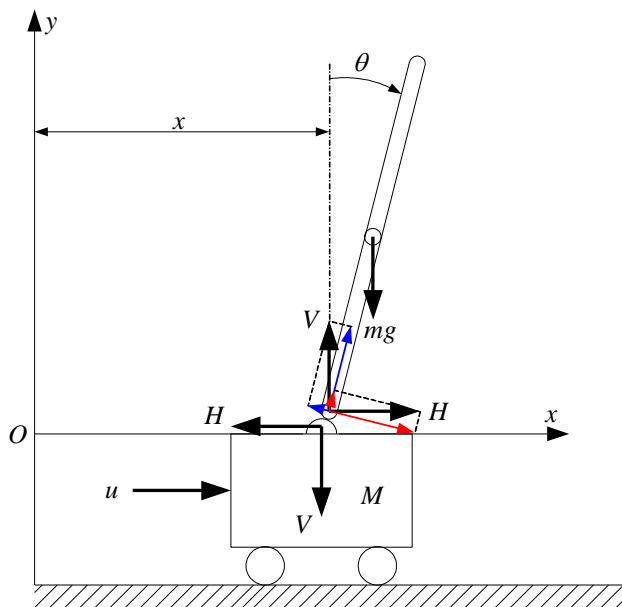


画出倒立摆系统隔离体受力图

设摆杆和小车结合部的水平反力和垂直反力为 H 和 V ，略去摆杆与小车、小车与地面的摩擦力。可得方程如下：

1. 摆杆围绕其重心的转动运动 $J \frac{d^2\theta}{dt^2} = V\ell \sin\theta - H\ell \cos\theta \quad (1)$

式中 J 为摆杆围绕其重心的转动惯量， $V\ell \sin\theta$ 为垂直力关于其重心的力矩， $H\ell \cos\theta$ 为水平力关于其重心的力矩。



2. 摆杆重心的水平运动

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x + \ell \sin\theta) = H \quad (2)$$

3. 摆杆重心的垂直运动

$$m \frac{d^2}{dt^2} (\ell \cos\theta) = V - mg \quad (3)$$

4. 小车的水平运动

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = u - H \quad (4)$$





因为在这些方程中包含 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ ，所以它们是非线性方程。
若假设角度 θ 很小，则 $\sin \theta \approx \theta$ 和 $\cos \theta \approx 1$ 。可得线性化方程：

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = V\ell \sin \theta - H\ell \cos \theta \quad (1)$$

$$J\ddot{\theta} = V\ell \theta - H\ell \quad (5)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x + \ell \sin \theta) = H \quad (2)$$

$$m(\ddot{x} + \ell \ddot{\theta}) = H \quad (6)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} (\ell \cos \theta) = V - mg \quad (3)$$

$$0 = V - mg \quad (7)$$

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = u - H \quad (4)$$

$$M\ddot{x} = u - H \quad (8)$$

由⑥和⑧可得

$$(M + m)\ddot{x} + m\ell \ddot{\theta} = u \quad (9)$$

由⑤、⑦和⑧得

$$(J + m\ell^2)\ddot{\theta} + m\ell \ddot{x} = mg\ell \theta \quad (10)$$

当忽略转动惯量 J 时

$$\ddot{\theta} - \frac{(M + m)g}{M\ell} \theta = -\frac{u}{M\ell}$$

当考虑转动惯量 $J = \frac{m\ell^2}{3}$ 时

$$\ddot{\theta} - \frac{3(M + m)g}{(4M + m)\ell} \theta = -\frac{3u}{(4M + m)\ell}$$





例2-7：试把非线性方程 $z=xy$ 在区域 $5 \leq x \leq 7$ 、 $10 \leq y \leq 12$ 上线性化。求用线性化方程来计算当 $x=5$ ， $y=10$ 时 z 值所产生的误差。

解： 由于研究的区域为 $5 \leq x \leq 7$ 、 $10 \leq y \leq 12$ ，故选择工作点 $x_0=6$ ， $y_0=11$ 。于是 $z_0=x_0y_0=6 \times 11=66$ 。求在点 $x_0=6$ ， $y_0=11$ ， $z_0=66$ 附近非线性方程的线性化表达式。将非线性方程在点 x_0, y_0, z_0 处展开成泰勒级数，并忽略其高阶项，则有

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) \quad a = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = y_0 = 11 \quad b = \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = x_0 = 6$$

因此，线性化方程式为： $z-66=11(x-6)+6(y-11)$

$$z=11x+6y-66$$

当 $x=5, y=10$ 时， z 的精确值为

$$z=xy=5 \times 10=50$$

由线性化方程求得的 z 值为

$$z=11x+6y=55+60-66=49$$

故误差为 $50-49=1$ ，表示成百分数 $\frac{1}{50}=2\%$





知识点2

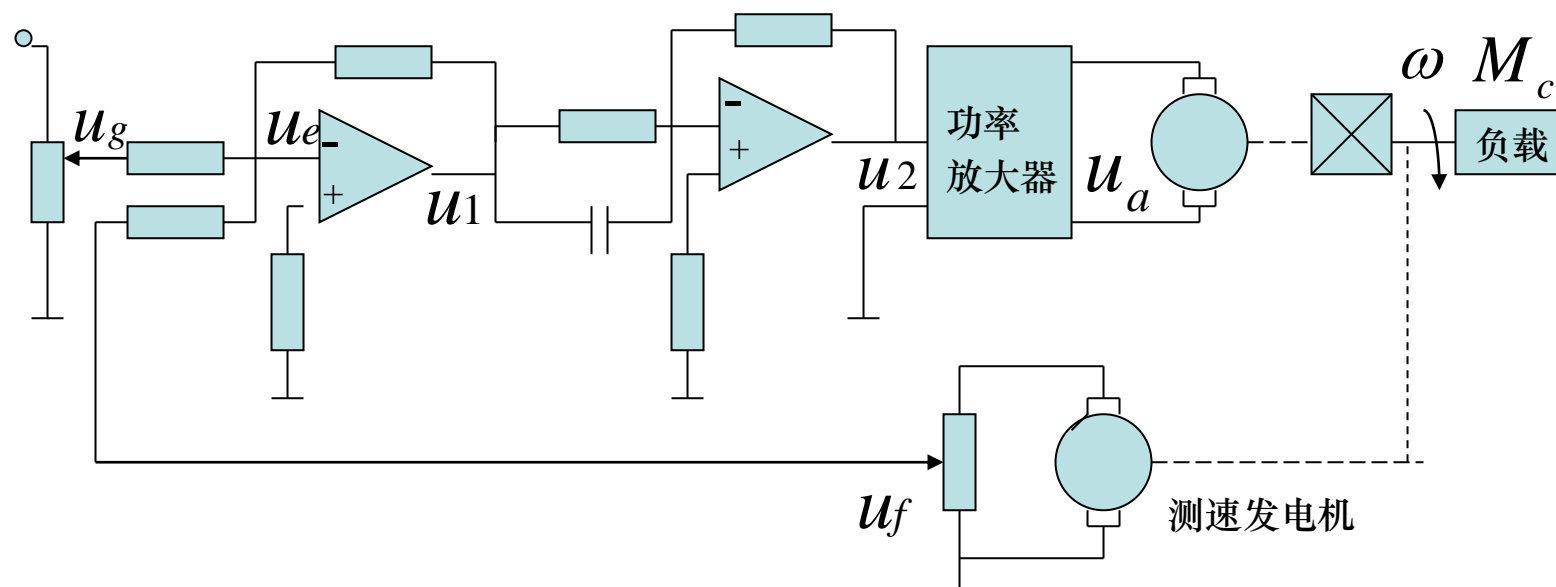
控制系统的微分方程—建立和求解

(3)线性系统微分方程的编写步骤

- ①确定系统和各元部件的输入量和输出量。
- ②对系统中每一个元件列写出与其输入、输出量有关的物理的方程。
- ③对上述方程进行适当的简化，比如略去一些对系统影响小的次要因素，对非线性元部件进行线性化等。
- ④从系统的输入端开始，按照信号的传递顺序，在所有元部件的方程中消去中间变量，最后得到描述系统输入和输出关系的微分方程。



[例2-8]: 编写下图所示的速度控制系统的微分方程。

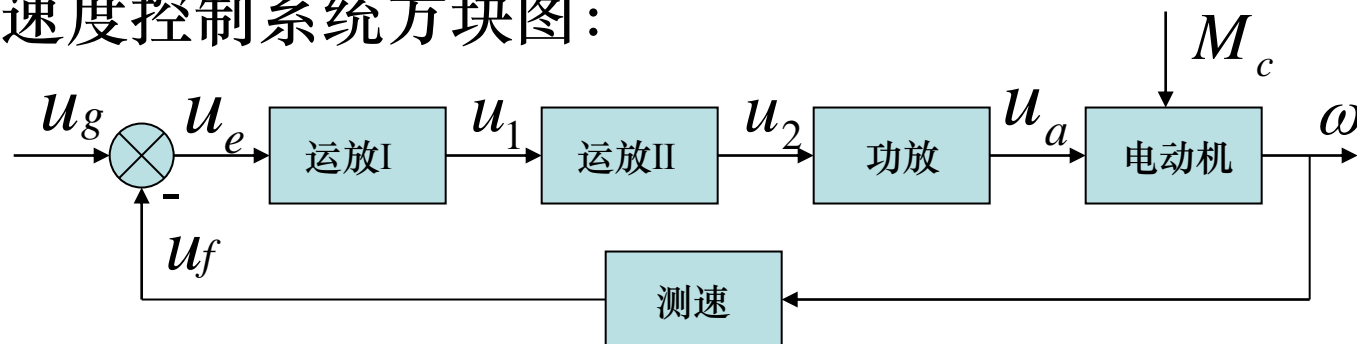


[解]: (1)该系统的组成和原理;

(2)该系统的输出量是 ω ，输入量是 u_g ，扰动量是 M_c



(3)速度控制系统方块图：



(4)各环节微分方程：

运放I: $u_1 = k_1(u_g - u_f) = k_1 u_e$, 运放II: $u_2 = k_2(\tau \dot{u}_1 + u_1)$

功率放大: $u_a = k_3 u_2$, 反馈环节: $u_f = k_f \omega$

电动机环节: $T_a T_m \ddot{\omega} + T_m \dot{\omega} + \omega = k_n u_a - k_m (T_a \dot{M}_c + M_c)$
见例2-4

(5)消去中间变量：推出 $\omega \sim u_g(M_c)$ 之间的关系：

$$\frac{T_a T_m}{1 + K_0} \ddot{\omega} + \frac{T_m + K_0 \tau}{1 + K_0} \dot{\omega} + \omega = \frac{K}{1 + K_0} (\tau \dot{u}_g + u_g) - K_m (T_a \dot{M}_c + M_c)$$

显然，转速 ω 既与输入量 u_g 有关，也与干扰 M_c 有关。



[增量式分析] (上式等号两端取增量):

(1)对于恒值调速系统, $u_g = \text{常量}$, 则 $\Delta u_g = 0, \Delta \dot{u}_g = 0$ 。
转速的变化仅由负载干扰引起。增量表达式如下:

$$\frac{T_a T_m}{1 + K_0} \ddot{\omega} + \frac{T_m + K_0 \tau}{1 + K_0} \dot{\omega} + \omega = -K_m (T_a \dot{M}_c + M_c)$$

(2)对于随动系统, 则 $M_c = \text{常数}$, $\Delta M_c = 0, \Delta \dot{M}_c = 0$, 故:

$$\frac{T_a T_m}{1 + K_0} \ddot{\omega} + \frac{T_m + K_0 \tau}{1 + K_0} \dot{\omega} + \omega = \frac{K}{1 + K_0} (\tau \dot{u}_g + u_g)$$

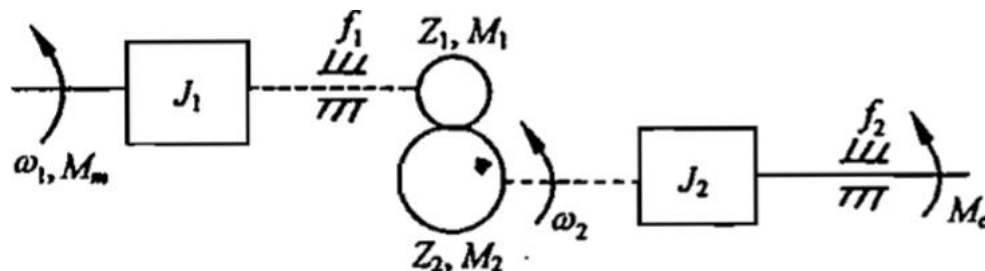
根据上式可以讨论输出转速跟随给定输入电压的变化情况。

(3)若 u_g 和 M_c 都是变化的, 则对于线性系统应用叠加原理分别讨论两种输入作用引起的转速变化, 然后相加。



第二次作业

1. 求习题2-1图(a)和图(c)的微分方程。
2. 求习题2-2图(a)和图(b)的微分方程。
3. 试将滑阀流量方程式 $Q = CWx_v \sqrt{\frac{2P}{\rho}}$ 线性化。其中流量 Q 是阀芯位移 x_v 和节流口压降 P 的函数。 C 和 W 分别为流量系数和滑阀面积梯度， ρ 为油液密度。
4. 如图，已知齿轮1和齿轮2的转速、齿数、半径分别为 ω_1, Z_1, r_1 和 ω_2, Z_2, r_2 表示，其粘性摩擦系数及转动惯量分别为 f_1, J_1 和 f_2, J_2 ；齿轮1和齿轮2的原动转矩及负载转矩分别为 M_m, M_1 和 M_2, M_c ，求图示的时域数学模型，以及系统的等效惯量和系统等效粘性摩擦系数。





知识点3

线性方程的求解-拉氏变换法

(1)拉氏变换

①**定义**：如果有一个以时间 t 为自变量的函数 $f(t)$ ，它的定义域 $t > 0$ ，那么下式即是拉氏变换式：

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \text{ 式中 } s \text{ 为复数。记作 } F(s) = L[f(t)]$$

一个函数可以进行拉氏变换的充分条件是：

- a. $t < 0$ 时， $f(t) = 0$ ；
- b. $t > 0$ 时， $f(t)$ 分段连续；
- c. $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt < \infty$ 。

$F(s)$ —象函数， $f(t)$ —原函数。

记 $f(t) = L^{-1}[F(s)]$ 为反拉氏变换。





②性质:

a. 线性性质: $L[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$

b. 微分定理: $L[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0)$

$$L[\ddot{f}(t)] = s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \dot{f}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

c. 积分定理: (设初值为零)

$$L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

d. 初值定理: $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$

初值为零则这些
项皆为零, 可消
去进行简化!

注意方程两边极限应同时存在!





e.终值定理: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

f.卷积定理: $L[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)$

同样的, 方程两边极限也应同时存在!

g.复域中的位移定理:

若 $L[f(t)] = F(s)$, 则 $L[e^{-\lambda t} f(t)] = F(s + \lambda)$ 。

h.时域中的位移定理:

若 $L[f(t)] = F(s)$, 则 $L[f(t-\tau)] = e^{-s\tau} F(s)$ 。

i.时间尺度定理:

若 $L[f(t)] = F(s)$, 则 $L[f(\frac{t}{\alpha})] = \alpha F(\alpha s)$ 。



③常用函数的拉氏变换：

单位阶跃函数： $f(t) = 1(t), F(s) = \frac{1}{s}$

单位脉冲函数： $F(s) = L[\delta(t)] = 1$

单位斜坡函数： $f(t) = t, F(s) = \frac{1}{s^2}$

单位抛物线函数： $f(t) = \frac{1}{2}t^2, F(s) = \frac{1}{s^3}$

正弦函数： $f(t) = \sin \omega t, F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

余弦函数： $f(t) = \cos \omega t, F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

其他函数可以查阅相关表格获得。





例：求 $e^{-\alpha t} (t > 0)$ 的拉式变换。

$$\because L[e^{-\alpha t}] = L[e^{-\alpha t} \square u(t)] = U(s + \alpha)$$

$$\text{已知 } U(s) = \frac{1}{s}$$

$$\text{那么 } L[e^{-\alpha t}] = U(s + \alpha) = \frac{1}{s + \alpha}$$

例：求 $e^{-\alpha t} \sin \omega t (t > 0)$ 的拉式变换。

$$\text{已知 } L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\therefore L[e^{-\alpha t} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

$$\text{同理也可以直接写出 } L[e^{-\alpha t} \cos \omega t] = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$





(2)拉氏反变换:

F(s)化成下列因式分解形式:
$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{k(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

a. F(s)中具有不同的极点时, 可展开为:

$$F(s) = \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n}$$

$$a_k = \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s + p_k) \right]_{s = -p_k}$$





b. $F(s)$ 含有共扼复数极点时，可展开为

$$F(s) = \frac{a_1 s + a_2}{(s + p_1)(s + p_2)} + \frac{a_3}{s + p_3} + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n}$$

$$[a_1 s + a_2]_{s=-p_1} = \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s + p_1)(s + p_2) \right]_{s=-p_1}$$

c. $F(s)$ 含有多重极点时，可展开为

$$F(s) = \frac{b_r}{(s + p_1)^r} + \frac{b_{r-1}}{(s + p_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{b_1}{(s + p_1)} + \frac{a_{r+1}}{(s + p_{r+1})} + \cdots + \frac{a_n}{(s + p_n)}$$

$$b_r = \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s + p_1)^r \right]_{s=-p_1} \quad b_{r-1} = \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s + p_1)^r \right] \right\}_{s=-p_1}$$

$$b_{r-j} = \frac{1}{j!} \left\{ \frac{d^j}{ds^j} \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s + p_1)^r \right] \right\}_{s=-p_1} \quad b_1 = \frac{1}{(r-1)!} \left\{ \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s + p_1)^r \right] \right\}_{s=-p_1}$$

其余各极点的留数确定方法与上同。





利用留数公式分解因式：

一般，象函数 $X(s)$ 是复变量 s 的有理代数公式，即：

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

通常 $m < n$, $a_1, \dots, a_n; b_0, \dots, b_m$ 均为实数。首先将 $X(s)$ 的分母因式分解，则有：

$$X(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

式中 p_1, \dots, p_n 都是 $D(s)=0$ 的根，称为 $X(s)$ 的极点。





分两种情况讨论：

(1): $D(s)=0$ 无重根

$$X(s) = \frac{c_1}{(s-p_1)} + \frac{c_2}{(s-p_2)} + \cdots \frac{c_n}{(s-p_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(s-p_i)}$$

式中 $c_{(i)}$ 是待定常数，称为 $X(s)$ 在极点 $s_{(i)}$ 处的留数。

$$c_i = \lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i) X(s)$$

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(s-p_i)} \right] = \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t}$$





(2): $D(s)=0$ 有重根 设有 r 个重根 p_1 , 则:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{N(s)}{(s-p_1)^r (s-p_{r+1}) \cdots (s-p_n)} \\ &= \frac{c_1}{(s-p_1)^r} + \frac{c_2}{(s-p_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{c_r}{(s-p_1)} + \sum_{i=r+1}^n \frac{c_i}{(s-p_i)} \end{aligned}$$

根据留数公式:

$$\text{Res}(f, c) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow c} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z-c)^n f(z))$$

其中 f 在 $z=c$ 的留数, 其中 c 是 n 阶极点





(2): $D(s)=0$ 有重根

$$c_1 = \lim_{s \rightarrow p_1} [(s-p_1)^r X(s)] \quad c_2 = \frac{d}{ds} \lim_{s \rightarrow p_1} [(s-p_1)^r X(s)]$$

$$c_3 = \frac{1}{2!} \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{d^{(2)}}{ds^{(2)}} [(s-p_1)^r X(s)]$$

$$c_i = \lim_{s \rightarrow p_i} [(s-p_i)^r X(s)] \quad i=r+1, \dots, n$$

$$c_r = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{d^{(r-1)}}{ds^{(r-1)}} [(s-p_1)^r X(s)]$$

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = \left[\frac{c_1}{(r-1)!} t^{r-1} + \frac{c_2}{(r-2)!} t^{r-2} + \dots + c_{r-1} t + c_r \right] e^{p_1 t} + \sum_{i=r+1}^n c_i e^{p_i t}$$





例题: $X(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3}$, 求原函数 $x(t)$

解: $s^2 + 4s + 3 = (s + 3)(s + 1)$

$$X(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s+1)} = \frac{c_1}{s+3} + \frac{c_2}{s+1}$$

$$c_1 = \lim_{s \rightarrow -3} [(s + 3)X(s)] = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{s+2}{s+1} = \frac{1}{2}$$

$$c_2 = \lim_{s \rightarrow -1} [(s + 1)X(s)] = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s+2}{s+3} = \frac{1}{2}$$

$$X(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1}$$

拉斯反变换, 查表法: $e^{-at} \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = \frac{1}{2} \cdot e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t}$$





知识点3

线性方程的求解-拉氏变换法

(3)线性方程的求解

研究控制系统在一定的输入作用下，输出量的变化情况。方法有经典法，拉氏变换法和数字求解。在自动系统理论中主要使用拉氏变换法。

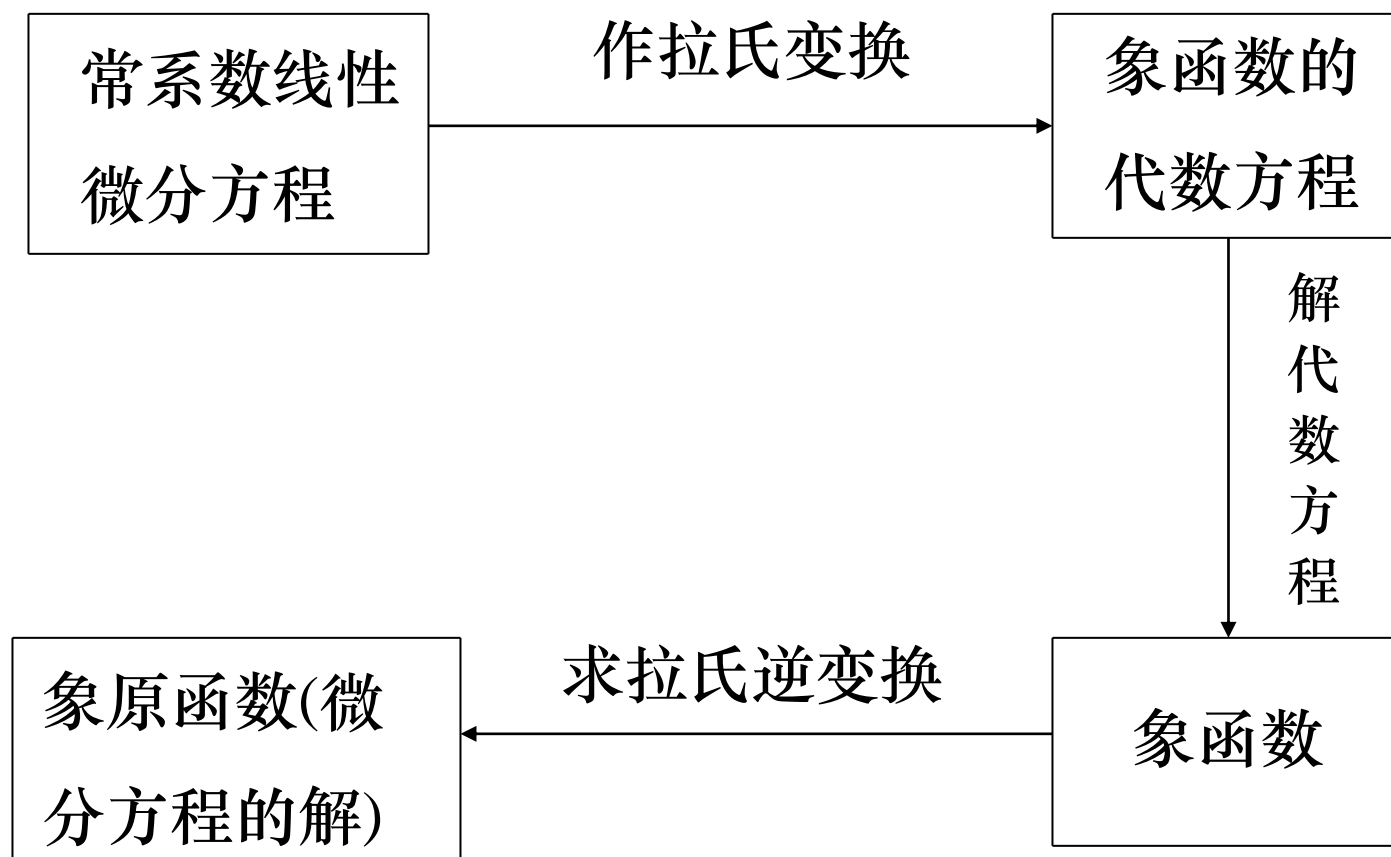
[拉氏变换求微分方程解的步骤]：

- ①对微分方程两端进行拉氏变换，将时域方程转换为 s 域的代数方程。
- ②求拉氏反变换，求得输出函数的时域解。





步骤总结:





L氏变换用于求解线性定常微分方程(将微分运算化为代数运算) 例:

$$\ddot{c}(t) + 5\dot{c}(t) + 6c(t) = r(t)$$

求: $c(t) = ?$ 初值 $c(0) = 2, \dot{c}(0) = 2$ 且 $r(t) = 6 \cdot 1(t)$

$$L[\ddot{c}(t) + 5\dot{c}(t) + 6c(t)] = L[r(t)]$$

$$L[\ddot{c}(t)] + L[5\dot{c}(t)] + L[6c(t)] = 6L[1(t)]$$

$$[S^2 C(s) - SC(0) - S^0 C'(0)] + 5[SC(s) - S^0 C'(0)] + 6C(s) = 6/s$$

$$[S^2 + 5S + 6]C(s) = \frac{6}{S} + (S + 5)C(0) + C'(0)$$

$$C(s) = \frac{\frac{6}{S} + (S + 5)C(0) + C'(0)}{S^2 + 5S + 6}$$

$$C(s) = \frac{\frac{6}{S}}{S^2 + 5S + 6} + \frac{(S + 5)C(0) + C'(0)}{S^2 + 5S + 6}$$

响应 = 零初值响应 + 零输入响应

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{6}{S(S^2 + 5S + 6)} + \frac{2S + 12}{S^2 + 5S + 6} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{-3}{s+2} + \frac{2}{s+3} + \frac{8}{s+2} + \frac{-6}{s+3} \end{aligned}$$

$$c(t) = 1 + 5e^{-2t} - 4e^{-3t}$$

注: 零初值响应与输入及内部结构、参数有关。对零初值响应的分析就是对系统内部结构、参数的分析。



[例子]求[例2-6]速度控制系统微分方程的解。假设没有负载干扰，并且各项初值均为零。

[解]速度控制系统微分方程为：

$$a_2\ddot{\omega} + a_1\dot{\omega} + a_0\omega = b_1\dot{u}_g + b_0u_g$$

由于上述各项初值均为0，对上式各项进行拉氏变换，得：

$$\Omega(s)(a_2s^2 + a_1s + a_0) = U_g(s)(b_1s + b_0)$$

即：

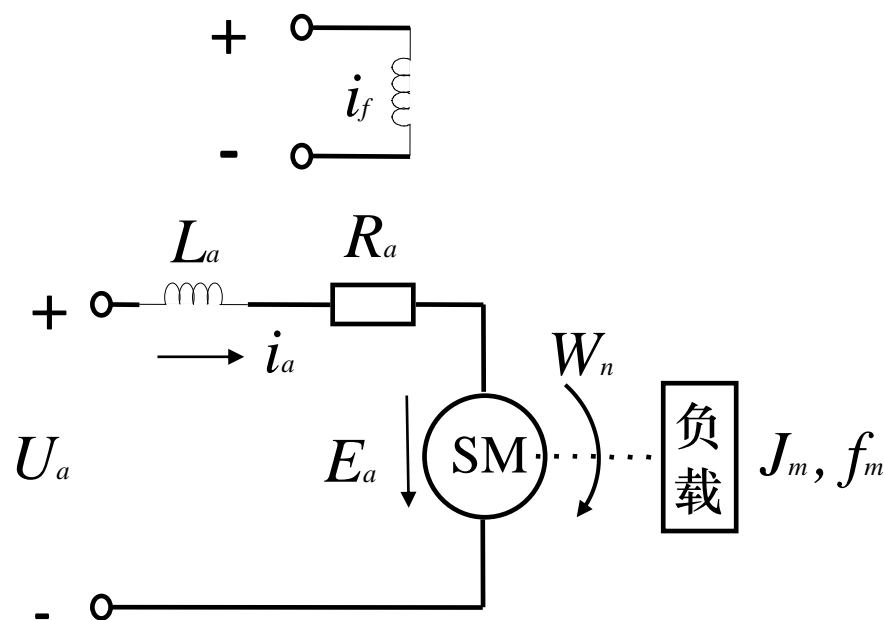
$$\Omega(s) = \frac{(b_1s + b_0)}{(a_2s^2 + a_1s + a_0)} U_g(s)$$

当输入已知时，求上式的拉氏反变换，即可求得输出的时域解。



例2-9

右图所示为电枢控制直流电动机的微分方程，要求取电枢电压 $U_a(t)$ (V)为输入量，电动机转速 $\omega_m(t)$ (rad/s)为输出量，列写微分方程。图中 $R_a(\Omega)$ 、 $L_a(\text{H})$ 分别是电枢电路的电阻和电感， $M_c(\text{N}\cdot\text{m})$ 是折合到电动机轴上的总负载转距。激励磁通为常值。



电枢控制直流电动机原理图





解：电枢控制直流电动机的工作实质是将输入的电能转换为机械能，也就是由输入的电枢电压 $U_a(t)$ 在电枢回路中产生电枢电流 $i_a(t)$ ，再由电流 $i_a(t)$ 与激磁磁通相互作用产生电磁转矩 $M_m(t)$ ，从而拖动负载运动。因此，直流电动机的运动方程可由以下三部分组成。

- 电枢回路电压平衡方程
- 电磁转矩方程
- 电动机轴上的转矩平衡方程

•电枢回路电压平衡方程：

$$U_a(t) = L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + E_a \quad \textcircled{1}$$

E_a 是电枢反电势，它是当电枢旋转时产生的反电势，其大小与激磁磁通及转速成正比，方向与电枢电压 $U_a(t)$ 相反，即

$$E_a = C_e \omega_m(t) \quad \textcircled{2}$$

C_e —反电势系数(V/rad/s)





•电磁转距方程:

$$M_m(t) = C_m i_a(t) \quad \textcircled{3}$$

C_m -电动机转距系数 (N·m/A) 是电动机转距系数

$M_m(t)$ -是由电枢电流产生的电磁转距(N·m)

•电动机轴上的转距平衡方程:

$$J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f_m \omega_m(t) = M_m(t) - M_c(t) \quad \textcircled{4}$$

J_m -转动惯量 (电动机和负载折合到电动机轴上的) kg·m

f_m -电动机和负载折合到电动机轴上的粘性摩擦系数(N·m/rad/s)





$$L_a J_m \frac{d^2 \omega_m(t)}{dt^2} + (L_a f_m + R_a J_m) \frac{d\omega_m(t)}{dt} + (R_a f_m + C_m C_e) \omega_m(t) \quad \textcircled{5}$$
$$= C_m U_a(t) - L_a \frac{dM_c(t)}{dt} - R_a M_c(t)$$

在工程应用中，由于电枢电路电感 L_a 较小，通常忽略不计，因而⑤可简化为

$$T_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) = K_1 U_a(t) - K_2 M_c(t) \quad \textcircled{6}$$

$$T_m = \frac{R_a J_m}{R_a f_m + C_m C_e}$$

电动机机电时间常数(s)

$$K_1 = \frac{C_m}{R_a f_m + C_m C_e}$$

$$K_2 = \frac{R_a}{R_a f_m + C_m C_e}$$





如果电枢电阻 R_a 和电动机的转动惯量 J_m 都很小而忽略不计时⑥还可进一步简化为

$$C_e \omega_m(t) = U_a(t) \quad \textcircled{7}$$

电动机的转速 $\omega_m(t)$ 与电枢电压 $U_a(t)$ 成正比，于是电动机可作为测速发电机使用。





系统最基本的数学模型是它的微分方程式。

步骤如下：

①确定系统的输入量和输出量；

②将系统划分为若干环节，从输入端开始，按信号传递的顺序，依据各变量所遵循的物理学定律，列出各环节的线性化原始方程；

③消去中间变量，写出仅包含输入、输出变量的微分方程式。





第三次作业

1. 求下列函数的拉氏变换

$$(1) f(t) = t^2 \quad (2) f(t) = \sin \frac{t}{2} \quad (3) f(t) = t^n \cdot e^{at}$$

$$(4) f(t) = 3 - 2 \cdot \delta(t) - 5 \cdot u(t-2) \quad \text{其中 } u(t) \text{ 为单位阶跃函数}$$

$$(5) f(t) = (t-1)^2 \cdot e^{2t} \quad (6) f(t) = 5 \sin 2t - 3 \cos 2t$$

2. 求下列函数的拉氏反变换。

$$(1) F(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad (2) F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} \quad (3) F(s) = \frac{e^{-s}}{s-1}$$

$$(4) F(s) = \frac{(s+3)(s+4)(s+5)}{(s+1)(s+2)} \quad (5) F(s) = \frac{3s+5}{s^2+2s+2}$$





3、某函数 $F(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$ ，应用初值定理求 $f(0)$ 、 $f'(0)$ 。

4、求解下列微分方程

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \\ x(0) = a \\ \dot{x}(0) = b \end{cases}$$

式中 ω_n 、 a 、 b 均为常量，且 $0 < \xi < 1$ 。





知识点4

控制系统的传递函数

传递函数是经典控制理论中最重要的数学模型之一。利用传递函数，可以：

- 不必求解微分方程就可以研究零初始条件系统在输入作用下的动态过程。
- 了解系统参数或结构变化时系统动态过程的影响--分析
- 可以对系统性能的要求转化为对传递函数的要求---综合





知识点4

控制系统的传递函数

(1) 传递函数的基本概念

传递函数的定义：线性定常系统在零初始条件下，输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比。

设系统或元件的微分方程为：

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \cdots + b_0 x(t)$$

式中： $x(t)$ —输入， $y(t)$ —输出， $a_i, b_j (i = 0 \sim n, j = 0 \sim m)$ 为常系数

将上式求拉氏变换，得(令初始值为零)

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) X(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0)}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)} \quad \text{称为环节的传递函数}$$

当传递函数和输入已知时 $Y(s) = G(s) X(s)$ 。通过反变换可求出时域表达式 $y(t)$ 。



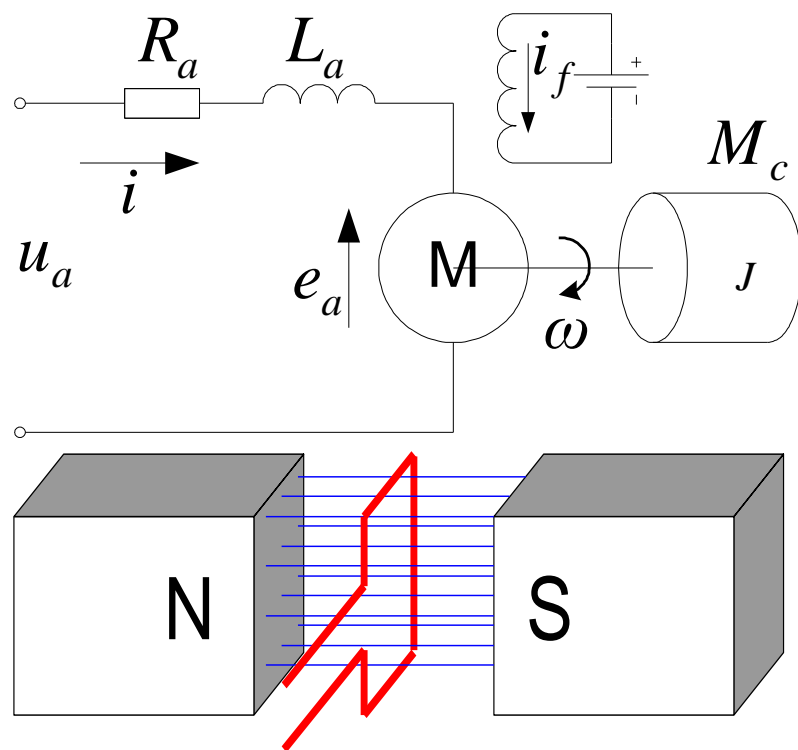


[关于传递函数的几点说明]

- 传递函数的概念适用于线性定常系统，它与线性常系数微分方程一一对应，且与系统的动态特性一一对应。
- 传递函数不能反映系统或元件的学科属性和物理性质。物理性质和学科类别截然不同的系统可能具有完全相同的传递函数。而研究某传递函数所得结论可适用于具有这种传递函数的各种系统。
- 传递函数仅与系统的结构和参数有关，与系统的输入无关。只反映了输入和输出之间的关系，不反映中间变量的关系。
- 传递函数的概念主要适用于单输入单输出系统。若系统有多个输入信号，在求传递函数时，除了一个有关的输入外，其它的输入量一概视为零。
- 传递函数忽略了初始条件的影响。
- 传递函数是 s 的有理分式，对实际系统而言分母的阶次 n 大于分子的阶次 m ，此时称为 n 阶系统。



[例 1]求电枢控制式直流电动机的传递函数。



这里输入是电枢电压 u_a 和等效到电机转轴上的负载转矩 M_c ，输出是转速 ω

电枢回路方程为 $L_a \frac{di}{dt} + R_a i + e_a = u_a$

其中 e_a 为反电势 $e_a = K_1 \psi \omega$

此时励磁电流为常数，所以

$$\psi = K_f i_f = \text{常数}$$

$$e_a = K_1 K_f i_f \omega = C_e \omega$$

C_e 称为电动机电势常数

电机通电后产生转矩 $M = K_2 \psi i_a = K_2 K_f i_f i_a = C_M i_a$

C_M 称为电动机转矩常数，再根据牛顿定律可得机械转动方程

$$J \frac{d\omega}{dt} = M - M_c$$



$$L_a \frac{di}{dt} + R_a i + e_a = u_a$$

$$e_a = C_e \omega$$

$$M = C_M i_a$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = M - M_c$$

整理得：

$$\frac{L_a J}{C_e C_M} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{R_a J}{C_e C_M} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{u_a}{C_e} - \frac{L_a}{C_e C_M} \frac{dM_c}{dt} - \frac{R_a M_c}{C_e C_M}$$

$$T_a T_M \frac{d^2 \omega}{dt^2} + T_M \frac{d\omega}{dt} + \omega = K_u u_a - K_M \left(T_a \frac{dM_c}{dt} + M_c \right)$$

其中 $T_a = \frac{L_a}{R_a}$ 和 $T_M = \frac{R_a J}{C_e C_M}$ 分别称为 **电磁时间常数** 和 **机电时间常数**

$K_u = \frac{1}{C_e}$ 和 $K_M = \frac{R_a}{C_e C_M}$ 分别是 **转速与电压传递系数** 和 **转速与负载的传递系数**。这里已略去摩擦力和扭转弹性力。





已知电枢控制式直流电动机的微分方程为：

$$T_a T_M \frac{d^2 \omega}{dt^2} + T_M \frac{d\omega}{dt} + \omega = K_u u_a - K_M (T_a \frac{dM_c}{dt} + M_c)$$

方程两边求拉氏变换为：

$$(T_a T_M s^2 + T_M s + 1)\Omega(s) = K_u U_a(s) - K_M (T_a s + 1)M_c(s)$$

■ 令 $M_c(s) = 0$ ，得转速对电枢电压的传递函数：

$$G_u(s) = \frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{K_u}{T_a T_M s^2 + T_M s + 1}$$

■ 令 $U_a(s) = 0$ ，得转速对负载力矩的传递函数：

$$G_M(s) = \frac{\Omega(s)}{M_c(s)} = \frac{-K_M (T_a s + 1)}{T_a T_M s^2 + T_M s + 1}$$

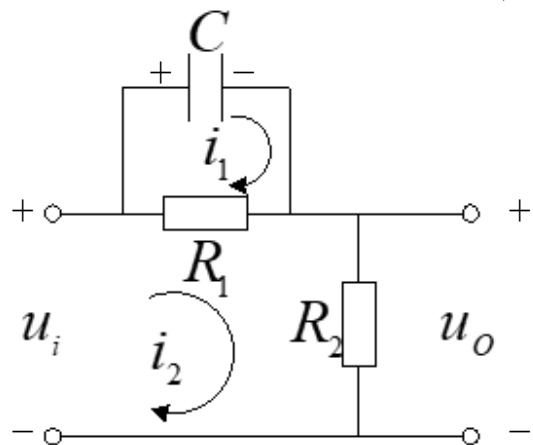
最后利用叠加原理得转速表示为：

$$\Omega(s) = G_u(s)U_a(s) + G_M(s)M_c(s)$$





[例 2] 求下图的传递函数：



$$\frac{1}{C} \int i_1 dt + R_1 i_1 - R_1 i_2 = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$R_1 i_2 - R_1 i_1 + R_2 i_2 = u_i \quad \textcircled{2}$$

$$R_2 i_2 = u_o \quad \textcircled{3}$$

式①②③经变换后可变为④⑤⑥：

$$\left(\frac{1}{Cs} + R_1\right) I_1(s) - R_1 I_2(s) = 0 \quad \textcircled{4}$$

$$-R_1 I_1(s) + (R_1 + R_2) I_2(s) = U_i(s) \quad \textcircled{5}$$

$$R_2 I_2(s) = U_o(s) \quad \textcircled{6}$$

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{\alpha} \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts} \quad \text{其中 } T = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}, \alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$





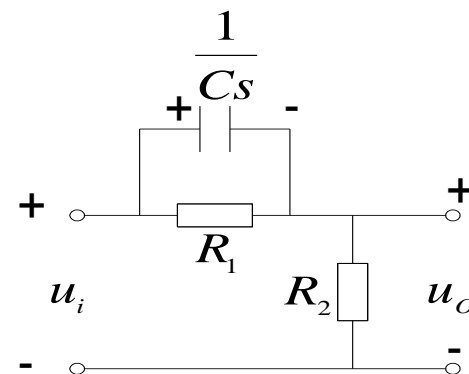
[例 3] 求下图的传递函数：

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{R_2}{\frac{1}{Cs + \frac{1}{R_1}} + R_2}$$

$$= \frac{R_2(R_1Cs + 1)}{R_1 + R_2(R_1Cs + 1)} = \frac{R_2(R_1Cs + 1)}{R_2R_1Cs + R_1 + R_2}$$

$$= \frac{\left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \frac{R_2R_1C}{R_1 + R_2} s + 1\right)}{\left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\right) \left(\frac{R_2R_1C}{R_1 + R_2} s + 1\right)} = \frac{1}{\alpha} \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}$$

$$\text{其中 } T = \frac{R_1R_2C}{R_1 + R_2}, \alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$





[传递函数的几种表达形式]:

①有理分式形式:
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

式中: a_i, b_j — 为实常数, 一般 $n \geq m$

上式称为 n 阶传递函数, 相应的系统为 n 阶系统。

②零点、极点形式:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m}{a_n} \times \frac{Q(s)}{P(s)} = K_g \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

式中: $-z_i$ 称为传递函数的零点, $-p_j$ 称为传递函数的极点。

$$K_g = \frac{b_m}{a_n} \quad \text{— 传递系数}$$



③时间常数形式: $G(s) = \frac{b_0}{a_0} \times \frac{Q(s)}{P(s)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{\prod_{j=1}^n (T_j s + 1)}$

显然: $K = K_g \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{j=1}^n p_j}$, $\tau_i = \frac{1}{z_i}$, $T_j = \frac{1}{p_j}$,

τ_i, T_j 分别称为时间常数, K 称为放大系数

若零点或极点为共轭复数, 则一般用2阶项来表示。若 $-p_1, -p_2$ 为共轭复极点, 则:

$$\frac{1}{(s + p_1)(s + p_2)} = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

或

$$\frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$$

其系数 ω 、 ξ 由 p_1 、 p_2 或 T_1 、 T_2 求得;



若有零值极点，则传递函数的通式可以写成：

$$G(s) = \frac{K_g}{s^\nu} \times \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (s + z_i) \prod_{k=1}^{m_2} (s^2 + 2\xi_k \omega_k s + \omega_k^2)}{\prod_{j=1}^{n_1} (s + p_j) \prod_{l=1}^{n_2} (s^2 + 2\xi_l \omega_l s + \omega_l^2)}$$

或：

$$G(s) = \frac{K}{s^\nu} \times \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\xi_k \tau_k s + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\xi_l T_l s + 1)}$$

式中：

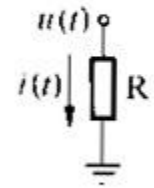
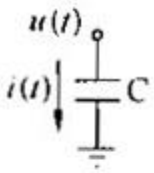
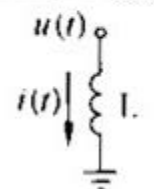
$$m_1 + 2m_2 = m,$$

$$\nu + n_1 + 2n_2 = n$$

从上式可以看出：传递函数是一些基本因子的乘积。这些基本因子就是典型环节所对应的传递函数，是一些最简单、最基本的一些形式。



表 2-1 R、L、C 负载的复数阻抗对照表

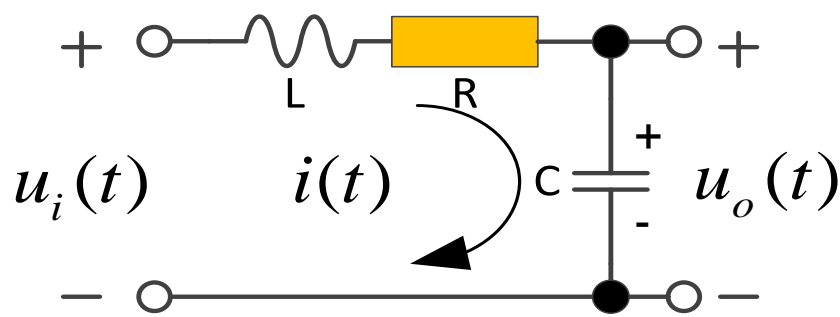
	典型电路	时域方程	拉氏变换式	传递函数	复数阻抗
电阻负载		$u(t) = i(t) R$	$U(s) = I(s) R$	$G_R(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = R$	$Z_R = R$
电容负载		$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$	$U(s) = I(s) \frac{1}{Cs}$	$G_C(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs}$	$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$
电感负载		$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$U(s) = I(s) Ls$	$G_L(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = Ls$	$Z_L = j\omega L$



[例]：求图所示的RLC的传递函数。（见例2-1，p19）

解：令 $Z_1 = R + Ls$ 为电阻和电感的复数阻抗之和； $Z_2 = \frac{1}{C_2s}$ 为电容的复数阻抗，则等效电路如图2-10所示。由此可求得传递函数为

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} = -\frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$



$u_i(t)$ ——输入

$u_o(t)$ ——输出

图2-1

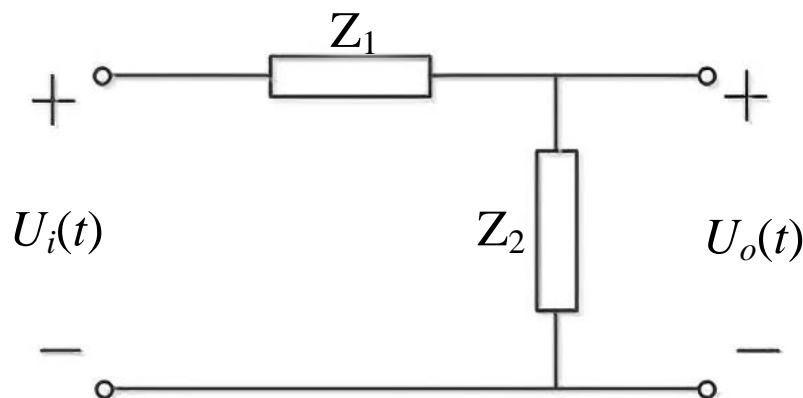


图2-10 RLC电路的复数阻抗





[例]：求图所示的比例积分控制器的传递函数。（见例2-8，p32）

解：该电路由运算放大器组成，属有源网络。运算放大器工作时，B点的电压 $u_B \approx 0$ ，称为虚地。故 $i_1 = i_2$ ，输入电路和输出电路的复数阻抗 Z_1 和 Z_2 分别为

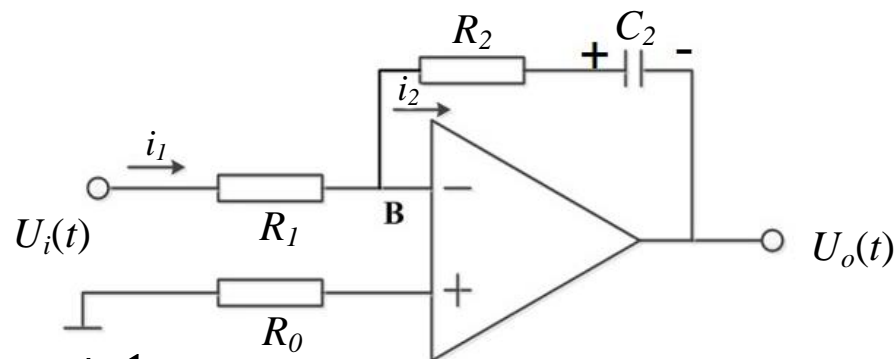
$$Z_1 = R_1; \quad Z_2 = R_2 + \frac{1}{C_2 s};$$

设 $U_i(s)$ 和 $U_o(s)$ 分别为输入信号和输出信号的拉氏变换，则有

$$\frac{U_i(s)}{Z_1} = -\frac{U_o(s)}{Z_2}$$

故有

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_2 C_2 s + 1}{R_1 C_2 s} = -\frac{\tau s + 1}{T s}$$



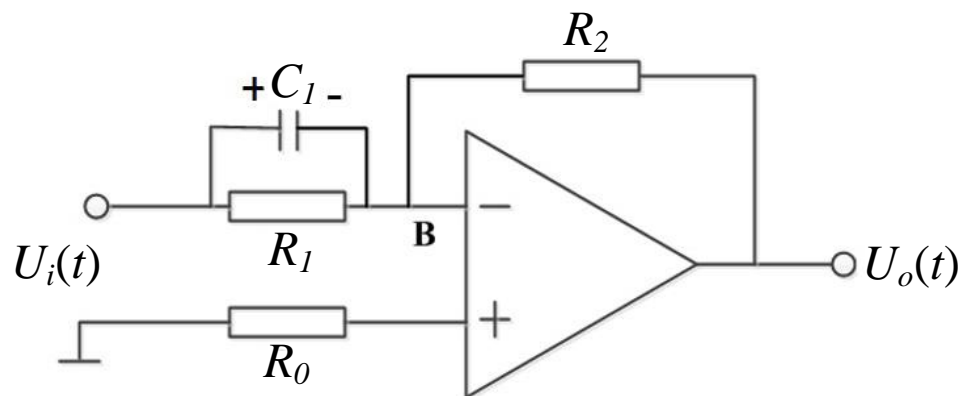
式中， $\tau = R_2 C_2$ ， $T = R_1 C_2$ 。



[例]：求比例微分控制器的传递函数。（见例2-9，p32）

解：输入阻抗由 C_1 、 R_1 并联组成。

$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1} \quad Z_2 = R_2$$



所以

$$G(s) = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{\frac{R_2}{R_1}}{R_1 C_1 s + 1} = -\frac{R_2}{R_1} (R_1 C_1 s + 1) = -K(\tau s + 1)$$

式中， $K = \frac{R_2}{R_1}$ ，为静态放大系数； $\tau = R_1 C_1$ ，为时间常数。





知识点4

控制系统的传递函数

(2)典型环节及其传递函数

典型环节有比例、积分、惯性、振荡、微分和延迟环节等多种。

以下讨论典型环节的时域特征和复域(s域)特征。

典型环节的时域特征包括微分方程和单位阶跃输入下的输出响应。

s域特性研究系统的零极点分布。

①比例环节：

$$\text{时域方程: } y(t) = kx(t), t \geq 0$$

$$\text{传递函数: } G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = k$$

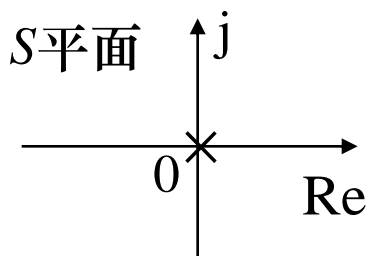
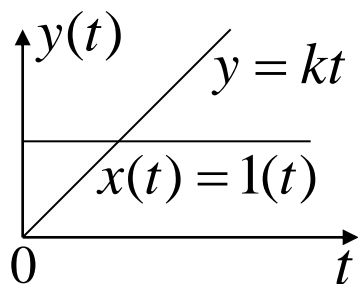
比例环节又称为放大环节。 k 为放大系数。实例：分压器，放大器，无间隙无变形齿轮传动等。



②积分环节:

时域方程: $y(t) = k \int_0^t x(t) dt, t \geq 0$

传递函数: $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{s} = \frac{1}{Ts}$

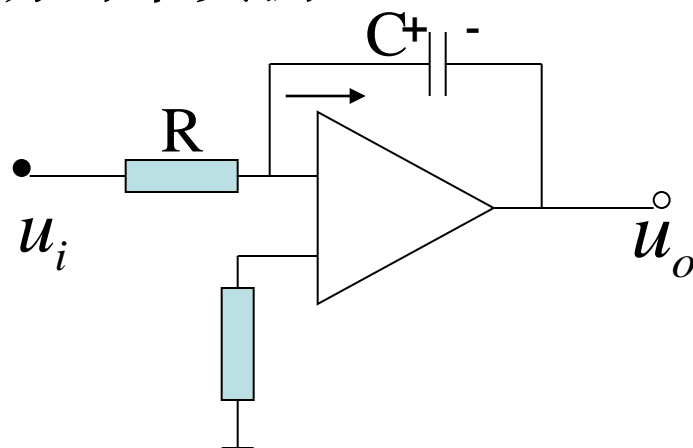


有一个0值极点。在图中极点用“×”表示，零点用“○”表示。 k 表示比例系数， T 称为时间常数。



积分环节实例：

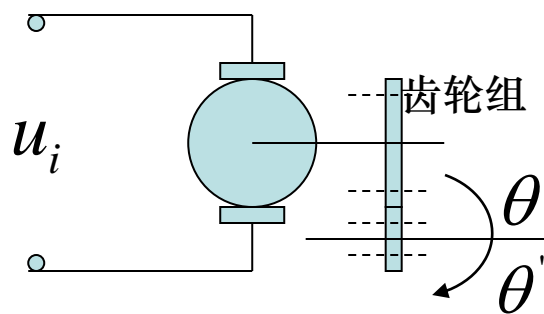
a.



$$\therefore \frac{u_i(s)}{R} = -\frac{u_o(s)}{1/Cs}$$

$$\therefore \frac{u_o(s)}{u_i(s)} = -\frac{1}{RCs}$$

b. 电动机(忽略惯性和摩擦)



图中, θ 为转角, θ' 为角速度。

$$\theta' = ku_i \quad \theta = \int_0^t ku_i(t)dt$$

可见, $\theta' \sim u_i$ 为比例环节,
 $\theta \sim u_i$ 为积分环节。



③惯性环节

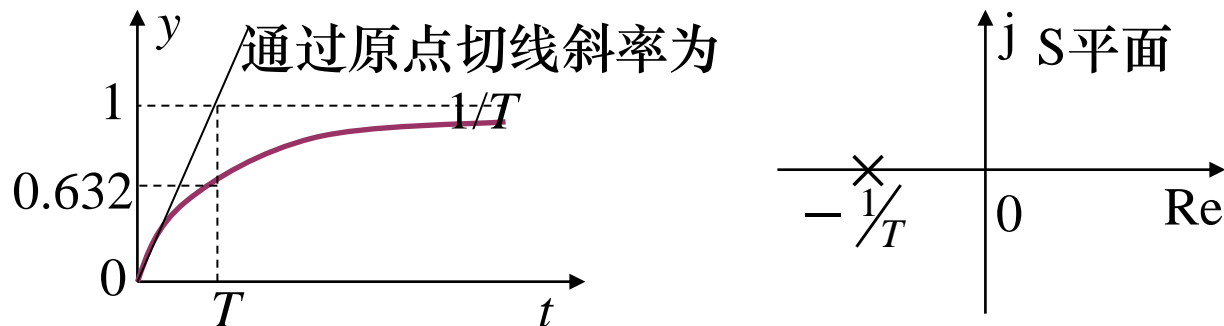
时域方程: $Ty'(t) + y(t) = kx(t), t \geq 0$

传递函数: $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{Ts + 1}$

■当输入为单位阶跃函数时,有 $Ty'(t) + y(t) = k$, 可解得:

$y(t) = k(1 - e^{-t/T})$, 式中: k 为放大系数, T 为时间常数。

■当 $k=1$ 时, 输入为单位阶跃函数时,时域响应曲线和零极点分布图如下:

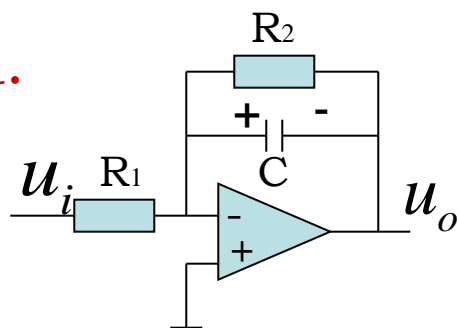


通过原点的斜率为 $1/T$, 且只有一个极点 ($-1/T$) 。



两个实例：

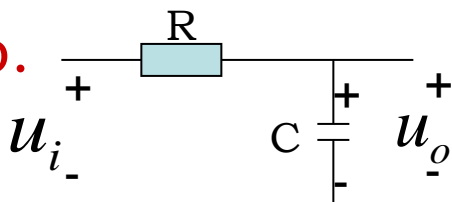
a.



$$\because Z_1 = R_1, \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_2} + Cs = \frac{1 + R_2Cs}{R_2}, \therefore Z_2 = \frac{R_2}{1 + R_2Cs}$$

$$\text{而 } \frac{U_i(s)}{Z_1(s)} = -\frac{U_o(s)}{Z_2}, \therefore \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{R_2/R_1}{1 + R_2Cs}$$

b.



$$\therefore \frac{u_i(s)}{R + 1/Cs} = \frac{u_o(s)}{1/Cs}, \therefore \frac{u_o(s)}{u_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$



④振荡环节:

时域方程:

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 x(t)$$

$$\text{传递函数: } G(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = k \frac{a_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = k \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$$

上述传递函数有两种情况:

◆当 $\zeta \geq 1$ 时, 可分为两个惯性环节相乘。

即:

$$G(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, T_{1,2} = T(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})$$

$$\text{传递函数有两个实数极点: } -p_{1,2} = -\frac{1}{T(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

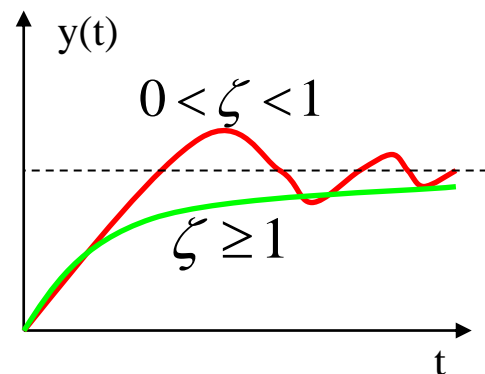


◆若 $0 < \zeta < 1$, 传递函数有一对共轭复数。还可以写成:

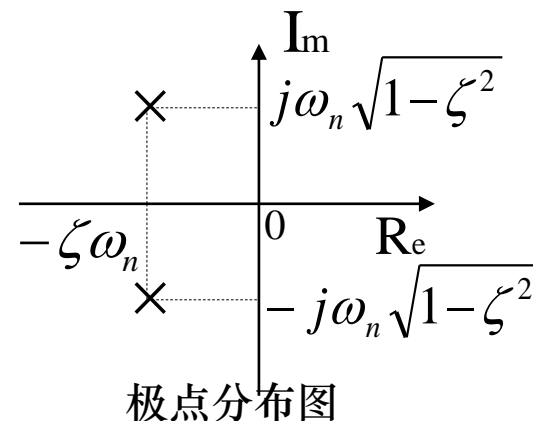
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{设输入为: } X(s) = 1/s$$

$$\text{则 } Y(s) = G(s)X(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + tg^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}), t \geq 0$$



单位阶跃响应曲线



极点分布图

[分析]: $y(t)$ 的上升过程是振幅按指数曲线衰减的正弦运动。与 ζ 有关。 ζ 反映系统的阻尼程度, 称为 **阻尼系数**, ω_n 称为 **无阻尼振荡圆频率**。当 $\zeta \geq 1$ 时, 曲线单调升, 无振荡。当 $0 < \zeta < 1$ 时, 曲线衰减振荡。 ζ 越小, 振荡越厉害。



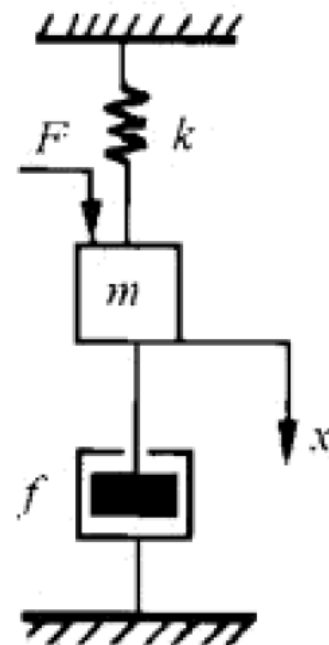
[例] 求质量-弹簧-阻尼系统的 ζ 和 ω_n 。（见例2-2，p20）

解: $mx'' + fx' + kx = F$, $G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + fs + k}$

当 $f^2 - 4mk < 0$ 时，有一对共轭复数极点。所以：

$$G(s) = \frac{1}{k} \times \frac{\frac{k}{m}}{s^2 + \frac{f}{m}s + \frac{k}{m}}, \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m}, 2\zeta\omega_n = \frac{f}{m},$$

$$\text{解得: } \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \zeta = \frac{f}{2\sqrt{mk}}$$



⑤微分环节：

微分环节的时域形式有三种形式：

相应的传递函数为：

$$y(t) = kx'(t)$$

$$G(s) = ks$$

$$y(t) = k(\tau x'(t) + x(t))$$

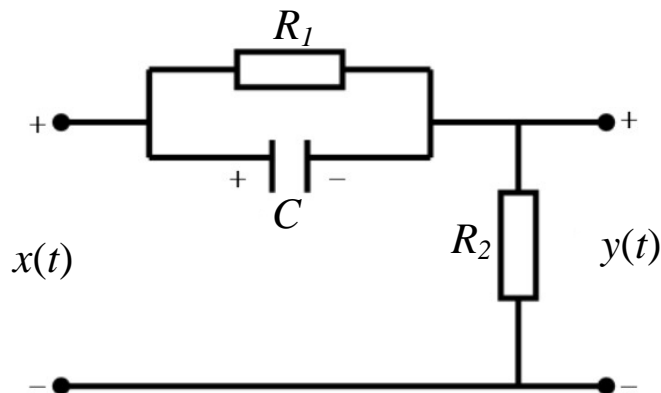
$$G(s) = k(\tau s + 1)$$

$$y(t) = k[\tau^2 x''(t) + 2\zeta \tau x'(t) + x(t)] \quad G(s) = k(\tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1)$$

分别称为：纯微分，一阶微分和二阶微分环节。微分环节没有极点，只有零点。分别是零、实数和一对共轭零点(若 $0 < \zeta < 1$)。在实际系统中，由于存在惯性，单纯的微分环节是不存在的，一般都是微分环节加惯性环节。



[实例]



$$\therefore \frac{X(s)}{Z_1(s)} = \frac{Y(s)}{Z_2(s)}, Z_2 = R_2, Z_1 = R_2 + \frac{R_1}{1 + R_1 C s}$$

$$\therefore G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{R_2 (1 + R_1 C s)}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 C s} = \frac{k(Ts + 1)}{kTs + 1}$$

$$\text{式中: } k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, T = R_1 C$$



⑥延迟环节:

又称时滞, 时延环节。它的输出是经过一个延迟时间后, 完全复现输入信号。 $y(t) = x(t - \tau)$ 如右图所示。其传递函数为:

$$G(s) = e^{-\tau s}$$

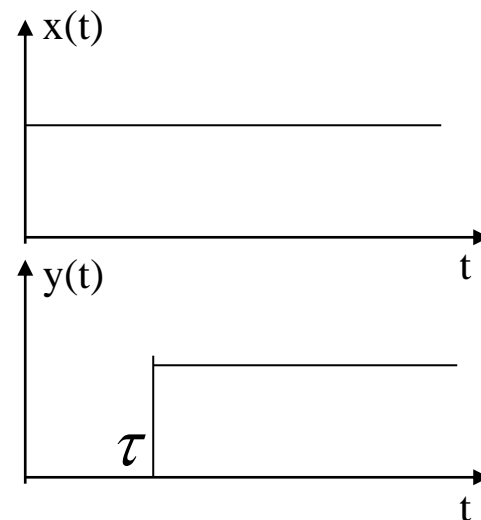
延迟环节是一个非线性的超越函数, 所以有延迟的系统是很难分析和控制的。为简单起见, 化简如下:

$$e^{-\tau s} = \frac{1}{e^{\tau s}} = \frac{1}{1 + \tau s + \dots} \approx \frac{1}{1 + \tau s} \quad \text{或} \quad e^{-\tau s} = 1 - \tau s$$

$$e^{-\tau s} = \frac{e^{-\tau s/2}}{e^{\tau s/2}} = \frac{1 - \tau s/2}{1 + \tau s/2}$$

⑦其他环节:

还有一些环节如 $\frac{1}{Ts-1}$, $\frac{1}{T^2s^2 - 2T\zeta s + 1}$ 等, 它们的极点在 s 平面的右半平面, 我们以后会看到, 这种环节是不稳定的, 称为不稳定环节。





知识点5

控制系统的结构图—等效变换

(1) 结构图的概念和绘制方法

① 结构图的基本概念

我们可以用结构图表示系统的组成和信号流向。在引入传递函数后，可以把环节的传递函数标在结构图的方块里，并把输入量和输出量用拉氏变换表示。这时 $Y(s)=G(s)X(s)$ 的关系可以在结构图中体现出来。

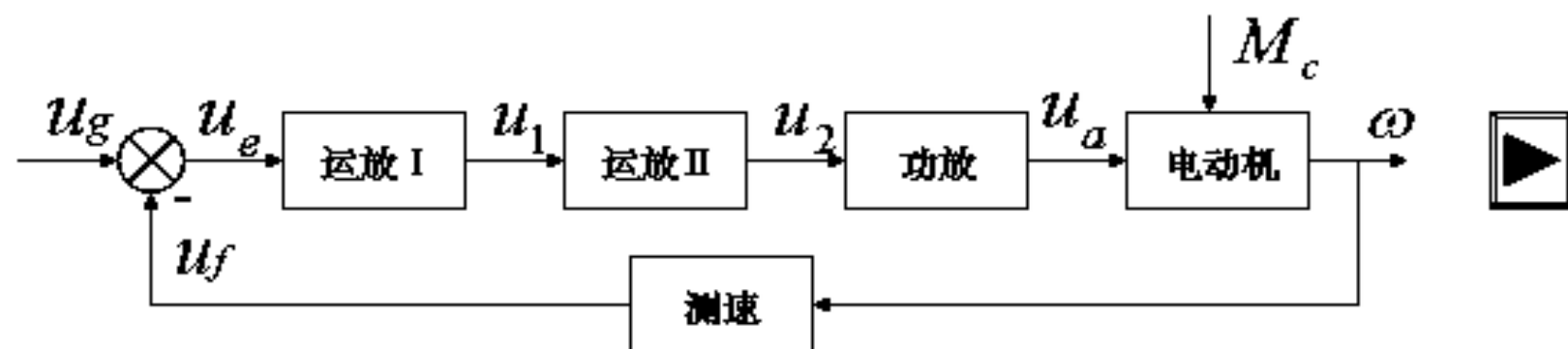
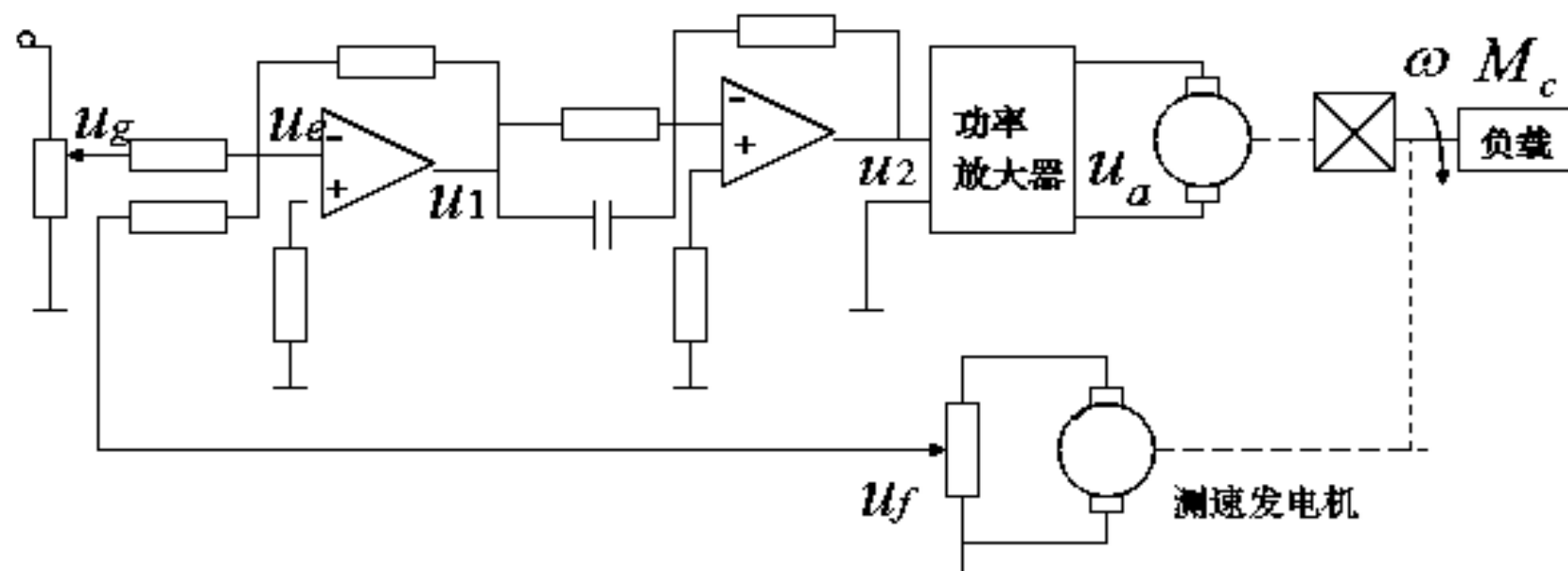
[定义]：表示变量之间数学关系的方块图称为函数结构图或方块图。

[例]：结构图： $\xrightarrow{X(s)}$ $\boxed{G(s)=K}$ $\xrightarrow{Y(s)}$ 结构： $\xrightarrow{X(s)}$ $\boxed{\text{电位器}}$ $\xrightarrow{Y(s)}$

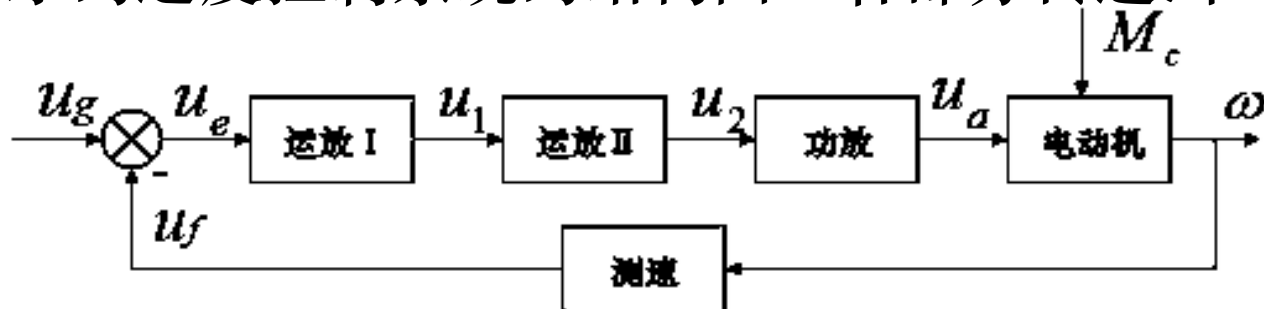
微分方程： $y(t)=k \cdot x(t)$

若已知系统的组成和各部分的传递函数，则可以画出各个部分的结构图并连成整个系统的结构图。



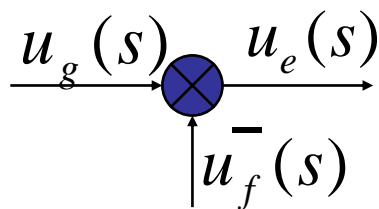


[例2-10].求图2-6所示的速度控制系统的结构图。各部分传递函数数罗列如下：



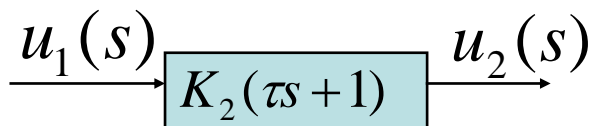
✧ 比较环节：

$$u_e(s) = u_g(s) - u_f(s)$$



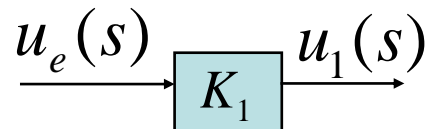
✧ 运放 II：

$$\frac{u_2(s)}{u_1(s)} = K_2(\tau s + 1)$$



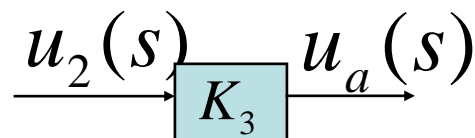
✧ 运放 I：

$$\frac{u_1(s)}{u_e(s)} = K_1,$$



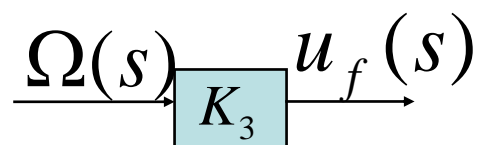
✧ 功放环节：

$$\frac{u_a(s)}{u_2(s)} = K_3$$



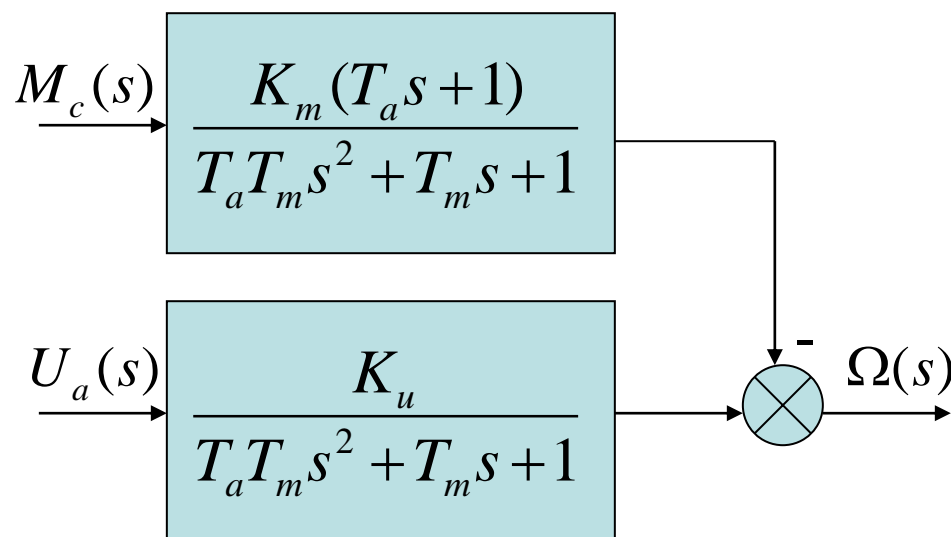
✧ 反馈环节：

$$\frac{u_f(s)}{\Omega(s)} = K_f$$



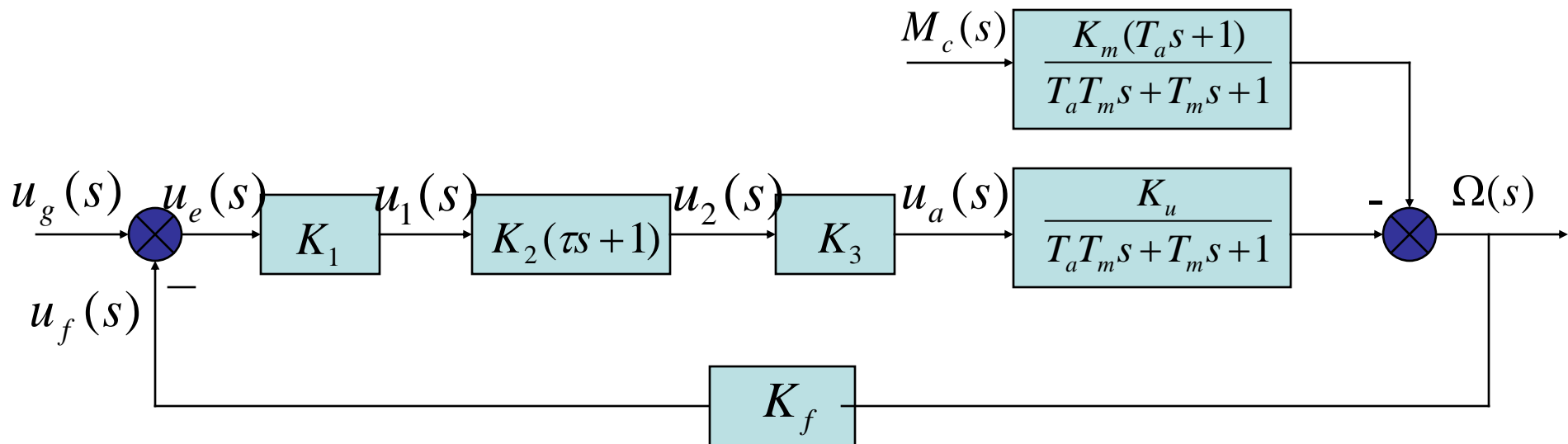
✧ 电动机环节： 返回例2-8

$$\begin{aligned} & (T_a T_m s^2 + T_m s + 1) \Omega(s) \\ &= K_u u_a(s) - K_m (T_a s + 1) M_c(s) \end{aligned}$$



将上面几部分按照逻辑连接起来，形成下页所示的完整结构图。





在结构图中，不仅能反映系统的组成和信号流向，还能表示信号传递过程中的数学关系。系统结构图也是系统的数学模型，是复域的数学模型。



②结构图的组成和建立

1. 结构图的组成

控制系统结构图由四种基本图形符号所组成，称为结构图的四要素。各图形符号代表的意义如下：

(1) 函数方块：表示元件或环节输入、输出变量之间的函数关系。方块内要填写元件或环节的传递函数，如图 2-22a 所示。

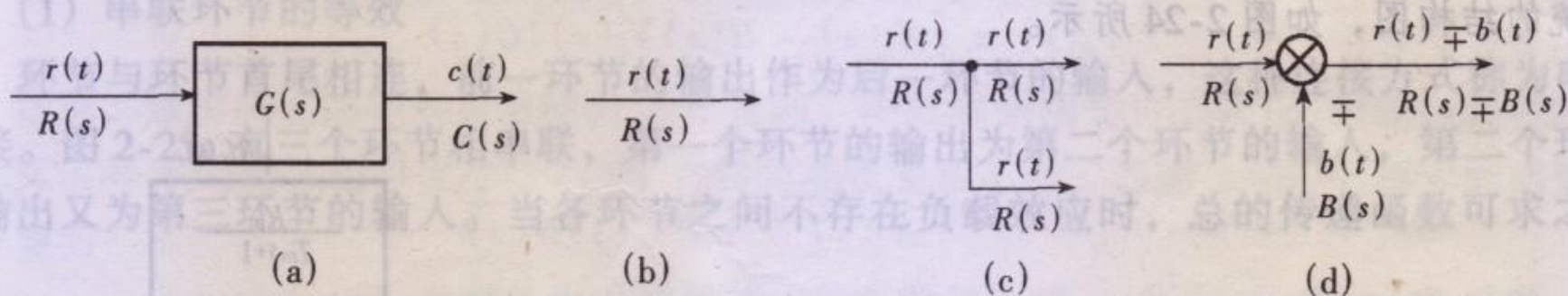


图 2-22 结构图四要素

(a) 函数方块；(b) 信号线；(c) 分支（引出）点；(d) 综合（相加）点





(2) 信号线：用带有箭头的有向直线表示。箭头方向表示信号的传递方向，在信号线旁要标明信号的像函数(拉氏变换)，如图 2-22b 所示。

(3) 分支点(引出点)：分支点表示把一个信号分成两路(或多路)输出。注意，在信号线上只传递信号，不传递功率，所以信号虽然分成多路输出，但是每一路的信号都与原信号相等，如图 2-22c 所示。

(4) 综合点(比较点或相加点)：对两个或两个以上性质相同的信号进行取代数和的运算。参与相加运算的信号应标明“+”号，相减运算的信号应标出“-”号。有时“+”号可以省略，但“-”号必须标明，如图 2-22d 所示。

2. 系统结构图的建立

建立控制系统结构图的步骤如下：

(1) 用典型环节取代系统中的具体元件，并将各环节的传递函数填入方块图内；将信号的拉氏变换标在信号线附近。

(2) 按照系统中信号传递的顺序，依次将各环节的动态结构图连接起来，便构成系统的结构图。



例 2-10 求图 2-6 所示转速控制系统的结构图。

解 该转速控制系统各组成环节的传递函数如式(2-43)~(2-49)所示。各传递函数所对应的环节结构图如图 2-23 所示。

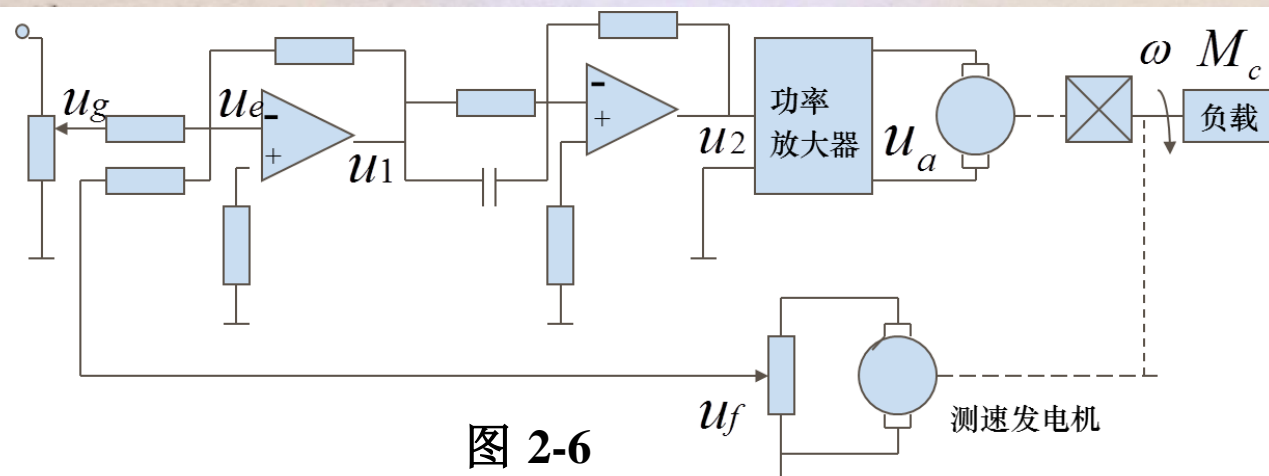


图 2-6

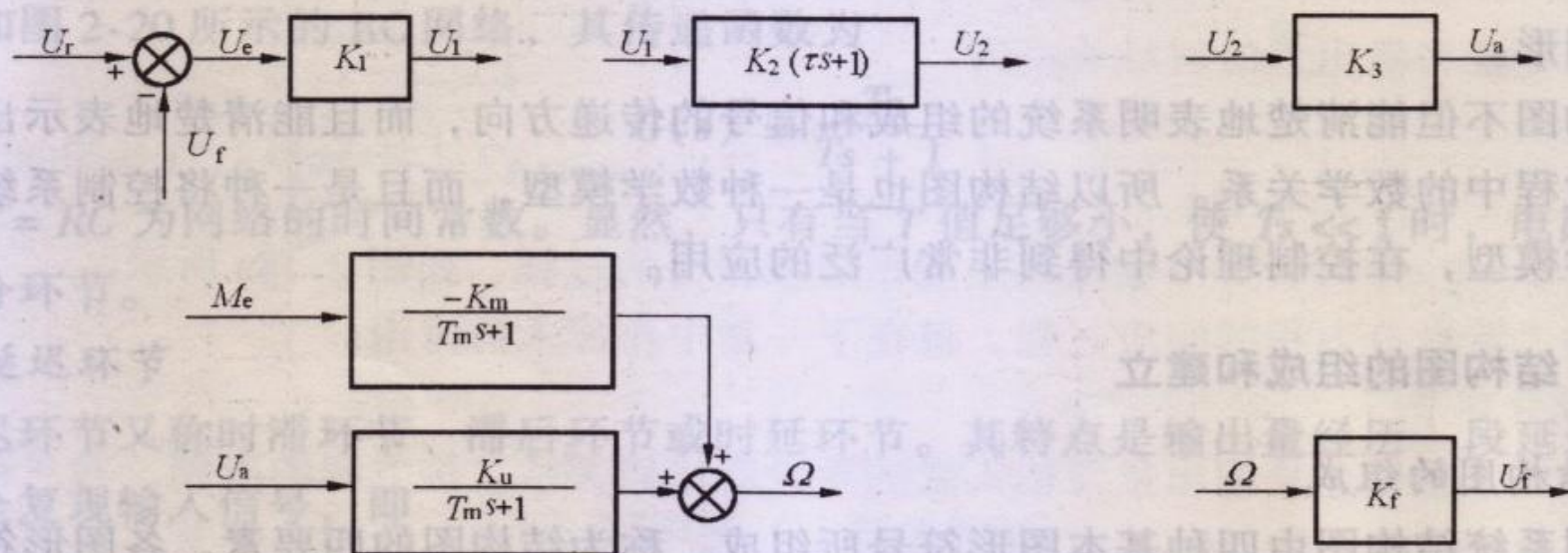


图 2-23 恒速系统的环节结构图



在这些环节结构图中，把具有相同变量的信号线连接起来，就可以得到整个速度控制系统的结构图，如图 2-24 所示。

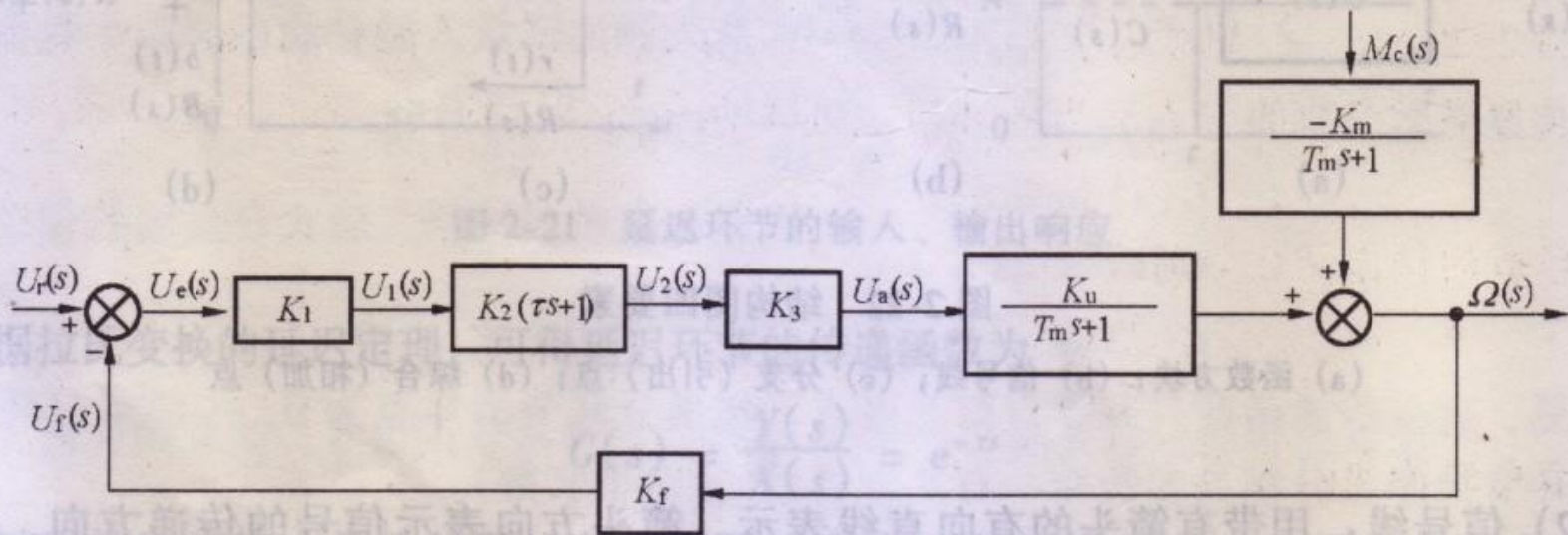


图 2-24 转速控制系统结构图的组成





知识点5

控制系统的结构图—等效变换

(2)结构图的等效转换

[定义]: 在结构图上进行数学方程的运算。

[类型]: ①环节的合并;

- --串联
- --并联
- --反馈连接

②信号分支点或相加点的移动。

[原则]: 变换前后环节的数学关系保持不变。

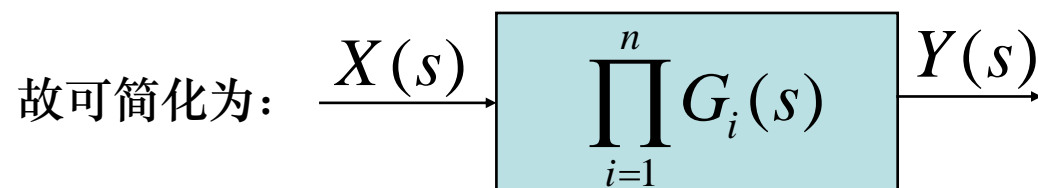
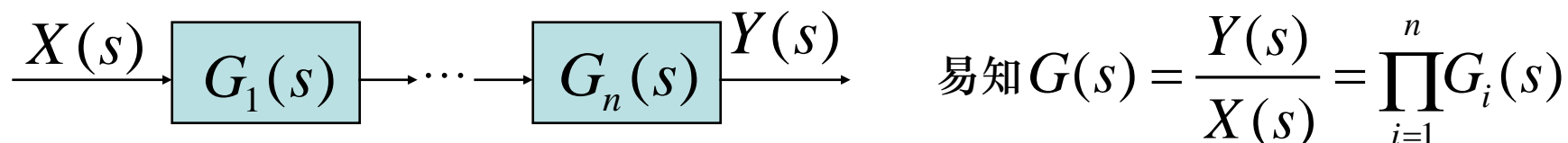




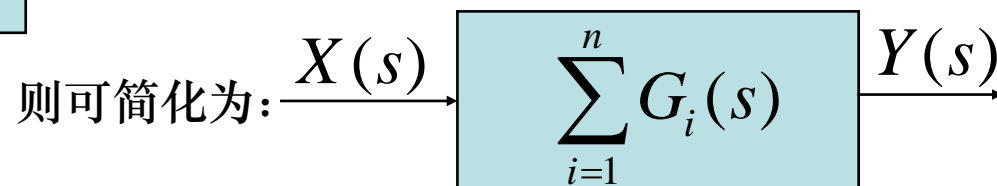
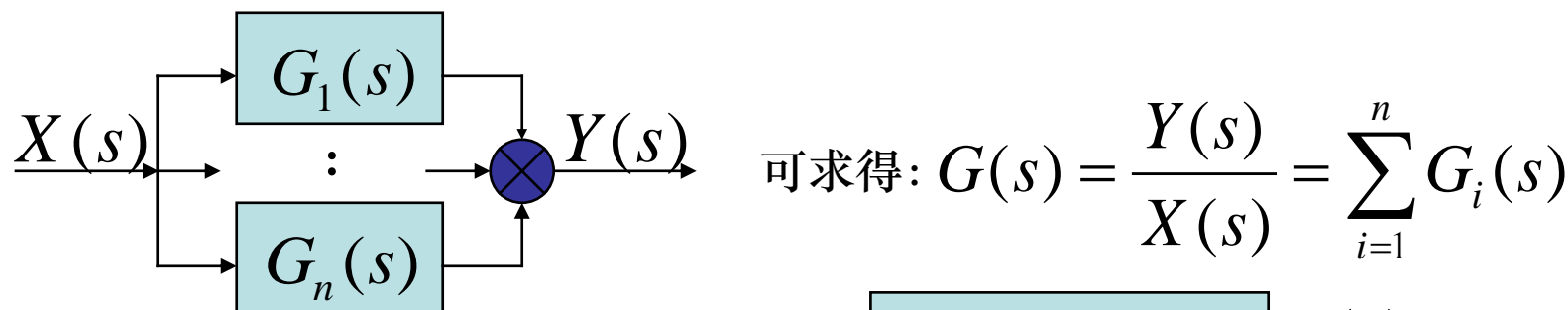
环节的合并

①环节的合并：有串联、并联和反馈三种形式。

● 环节的串联：



● 环节的并联：

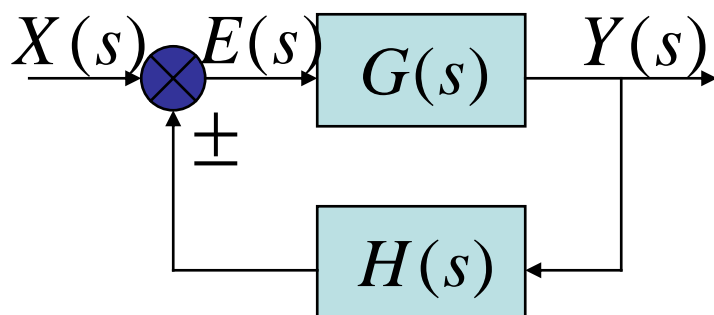




环节的合并

①环节的合并：有串联、并联和反馈三种形式。

● 反馈联接：

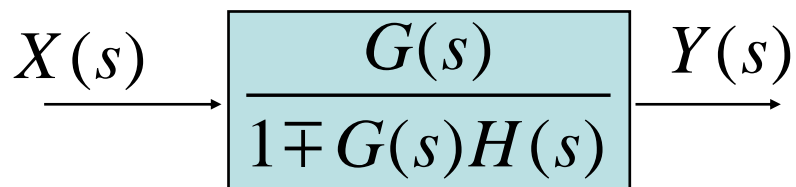


$$Y(s) = E(s)G(s)$$

$$E(s) = X(s) \pm H(s)Y(s)$$

$$\therefore G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)}$$

将环节合并，得：

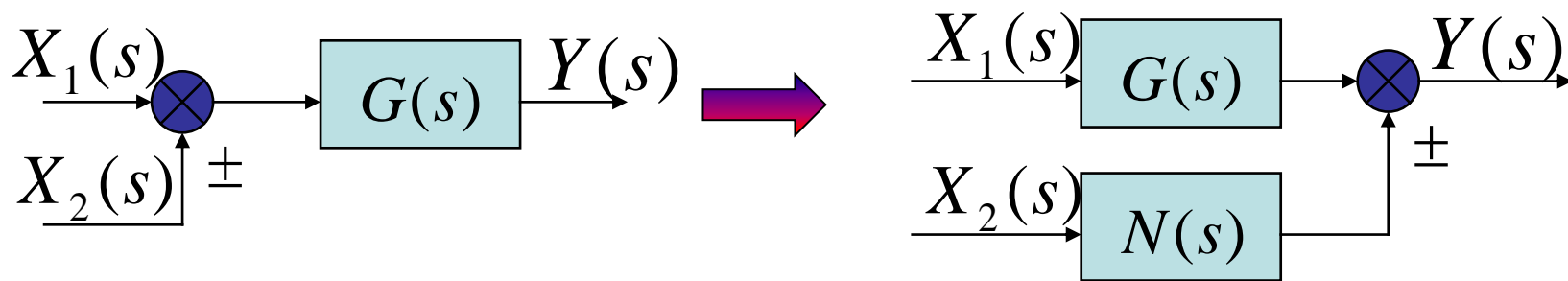


②信号相加点和分支点的移动和互换：

如果上述三种连接交叉在一起而无法化简，则要考虑移动某些信号的相加点和分支点。

a. 信号相加点的移动：

● 把相加点从环节的输入端移到输出端：

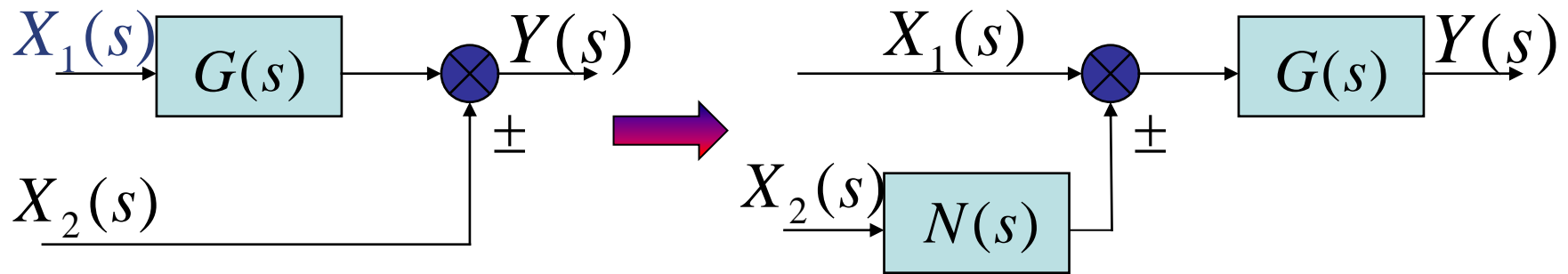


$$N(s) = ? \because Y(s) = [X_1(s) \pm X_2(s)]G(s),$$

$$\text{又} : Y(s) = X_1(s)G(s) \pm X_2(s)N(s), \therefore N(s) = G(s)$$



- 把相加点从环节的输出端移到输入端：



$$N(s) = ?$$

$$\because Y(s) = X_1(s)G(s) \pm X_2(s),$$

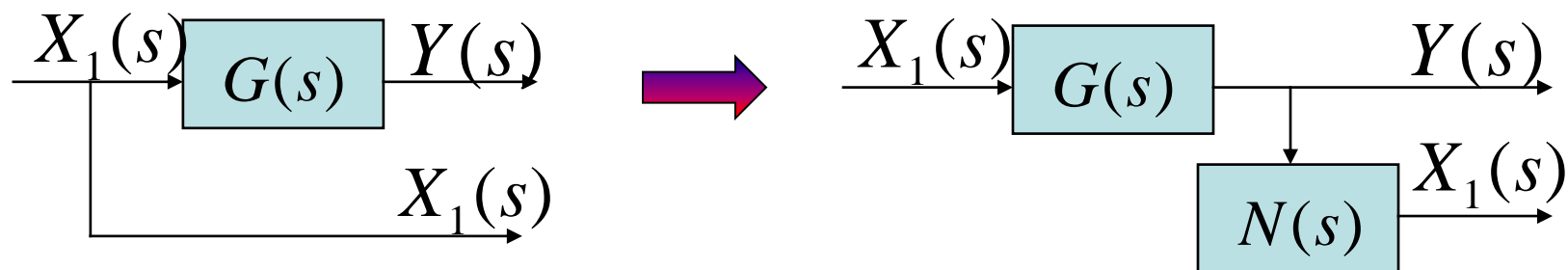
$$Y(s) = X_1(s)G(s) \pm X_2(s)N(s)G(s),$$

$$\therefore N(s) = \frac{1}{G(s)}$$



b. 信号分支点的移动:

◆ 分支点从环节的输入端移到输出端:

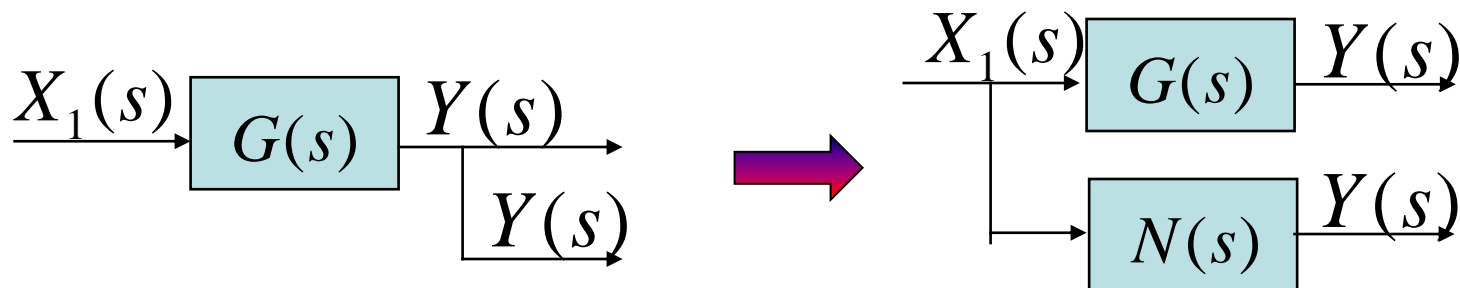


$$N(s) = ?$$

$$\because X_1(s)G(s)N(s) = X_1(s), \therefore N(s) = \frac{1}{G(s)}$$



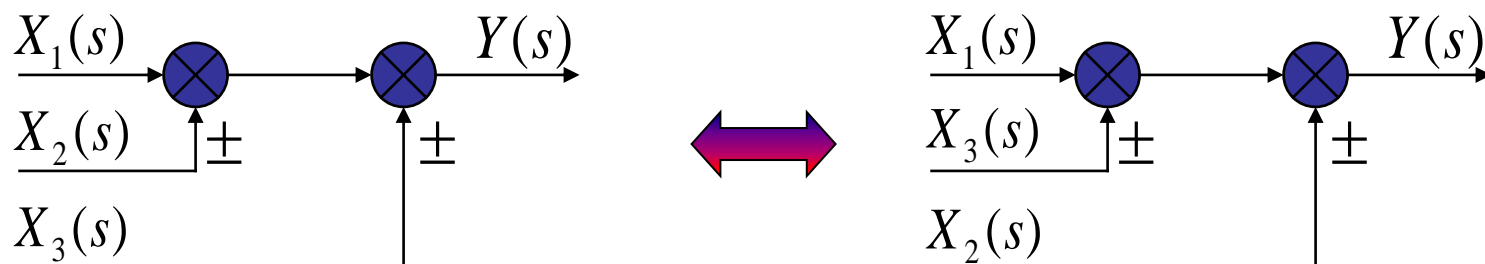
- ◆ 分支点从环节的输出端移到输入端：



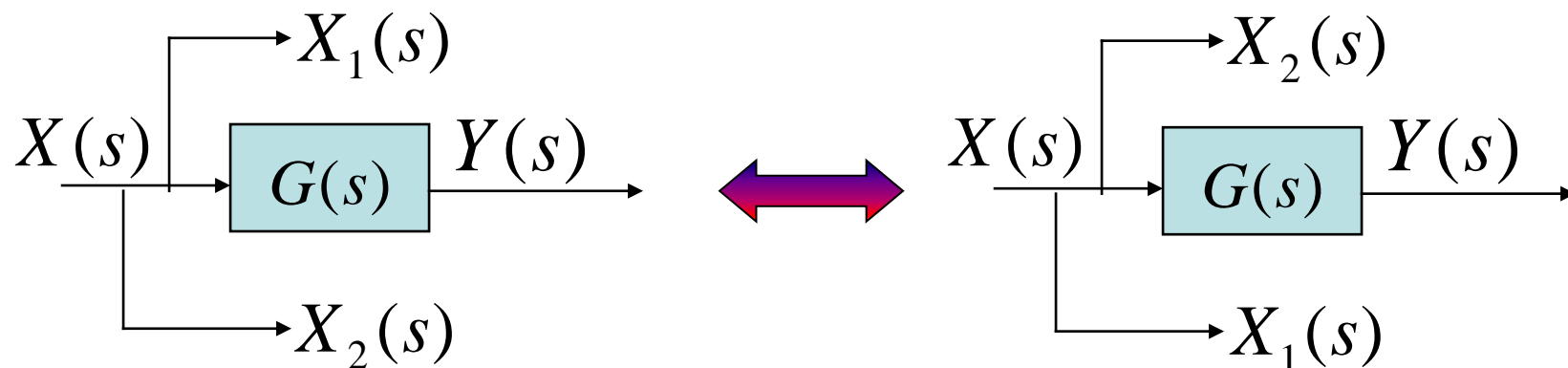
$$N(s) = ? \because X_1(s)G(s) = Y(s), X_1(s)N(s) = Y(s), \therefore N(s) = G(s)$$

[注意]:

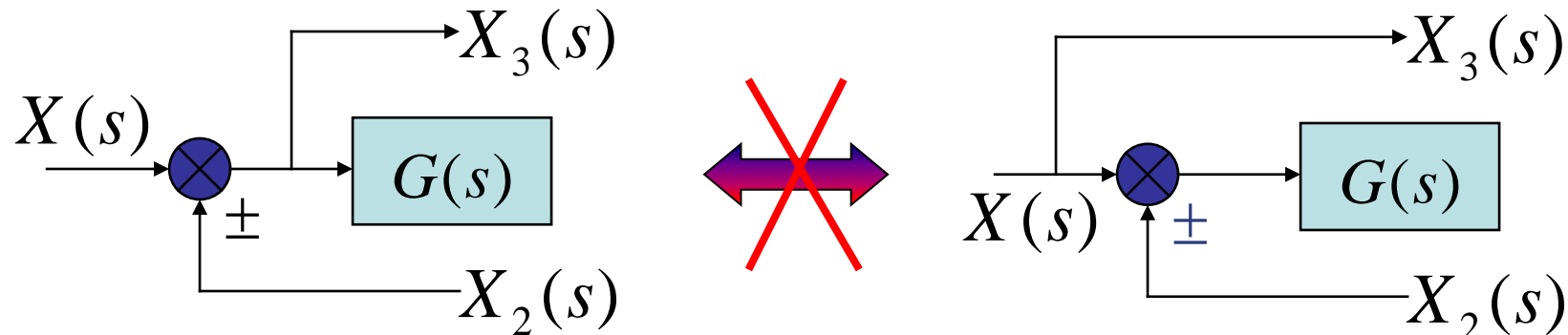
- 相邻的信号相加点位置可以互换；见下例



➤ 同一信号的分支点位置可以互换：见下例



➤ 相加点和分支点,在一般情况下均不能互换。

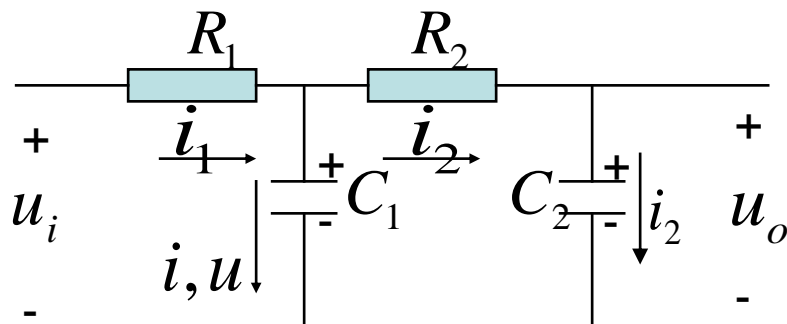


所以，一般情况下，相加点向相加点移动，分支点向分支点移动。

常用的结构图等效变换见表2-1



[例]利用结构图等效变换讨论两级RC串联电路的传递函数。



$$[u_i(s) - u(s)] \frac{1}{R_1} = I_1(s)$$

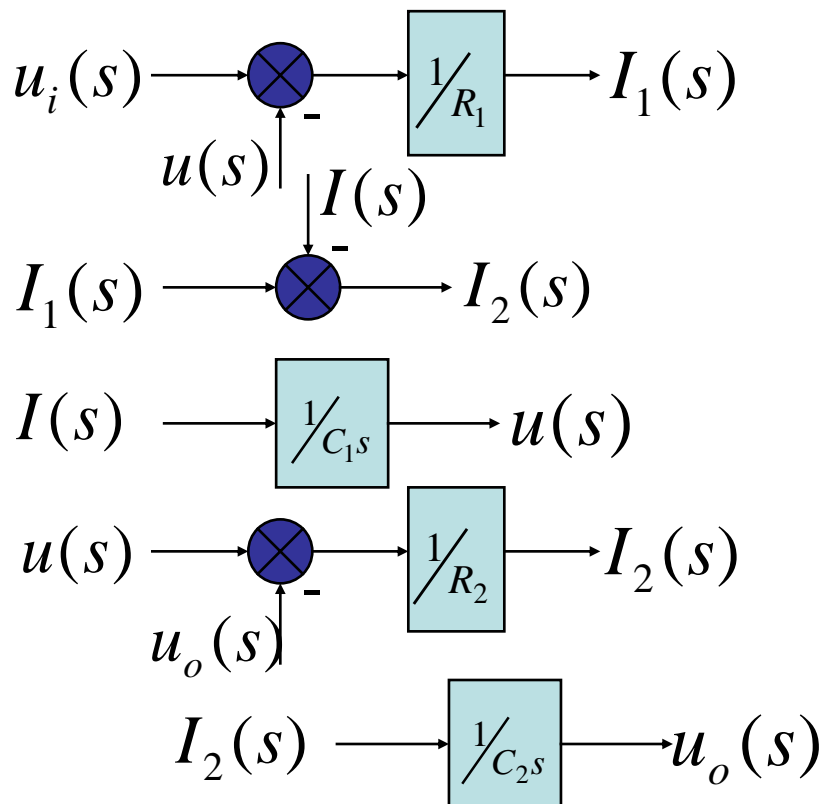
$$I_1(s) - I(s) = I_2(s)$$

$$I(s) \times \frac{1}{C_1 s} = u(s)$$

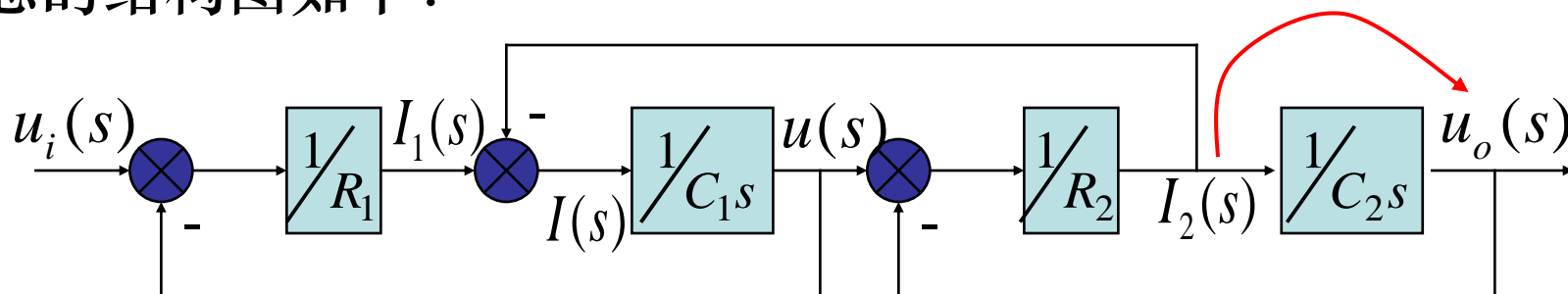
$$[u(s) - u_o(s)] \times \frac{1}{R_2} = I_2(s)$$

$$I_2(s) \times \frac{1}{C_2 s} = u_o(s)$$

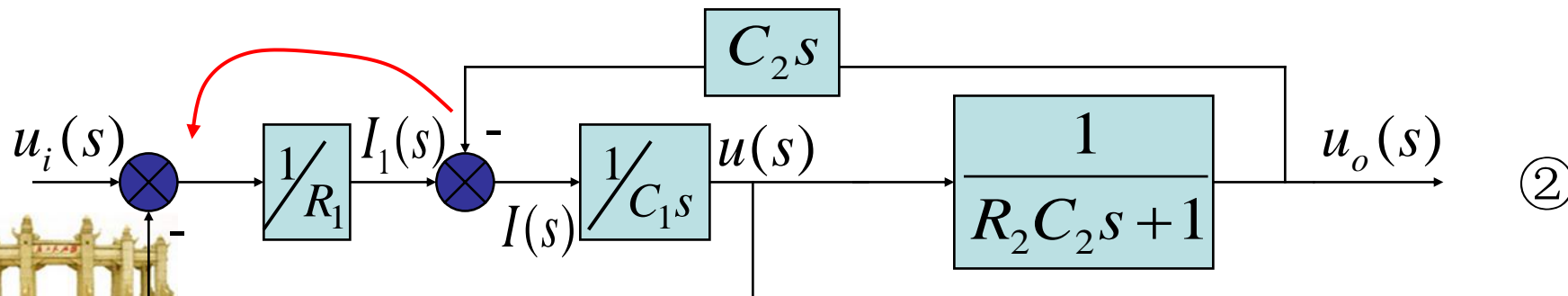
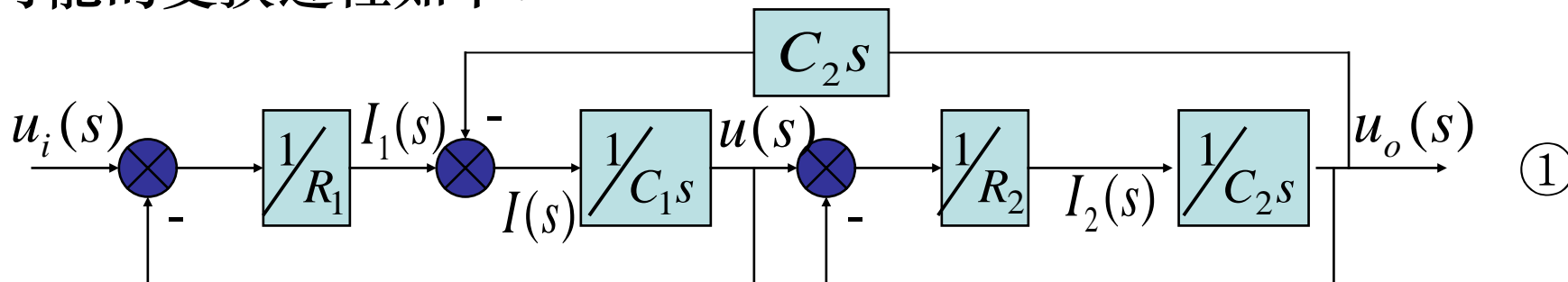
[解]: 不能把左图简单地看成两个RC电路的串联,有负载效应。根据电路定理,有以下式子:

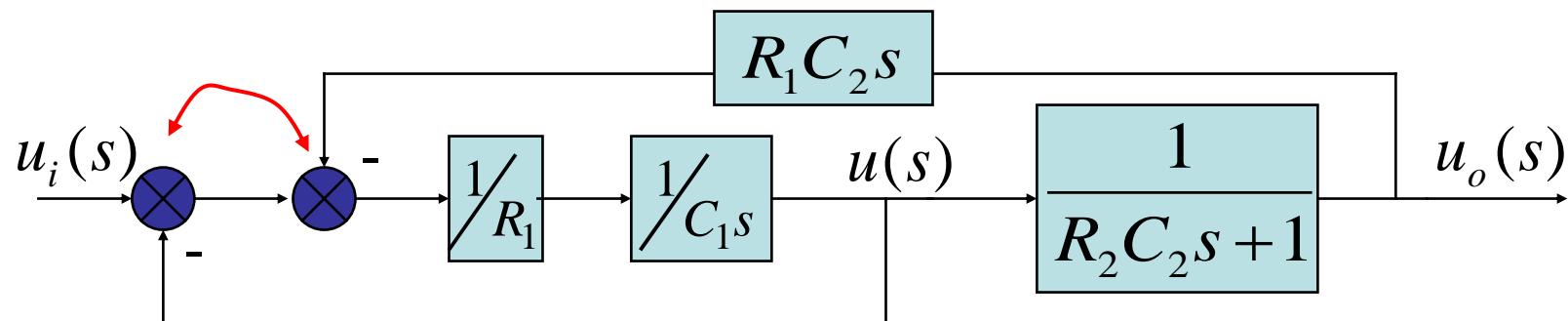


总的结构图如下：

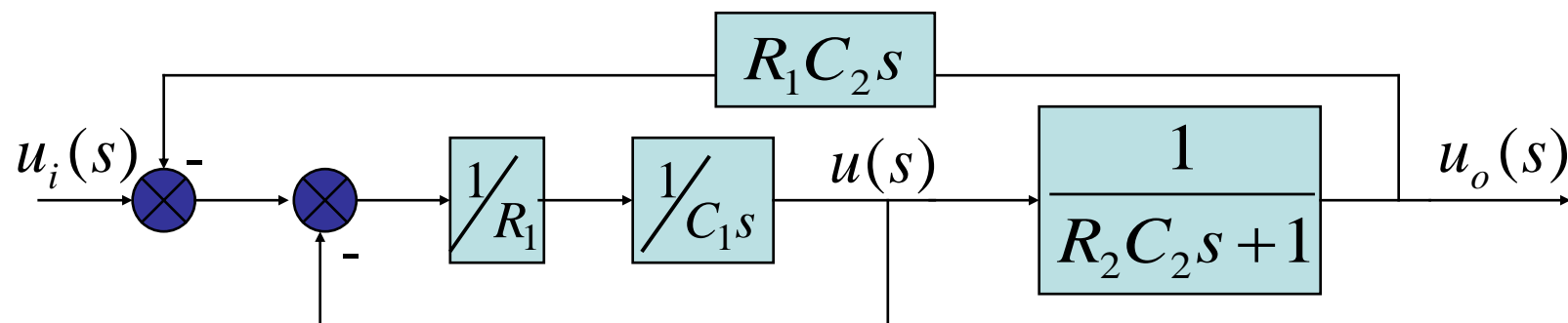


为了求出总的传递函数，需要进行适当的等效变换。一个可能的变换过程如下：

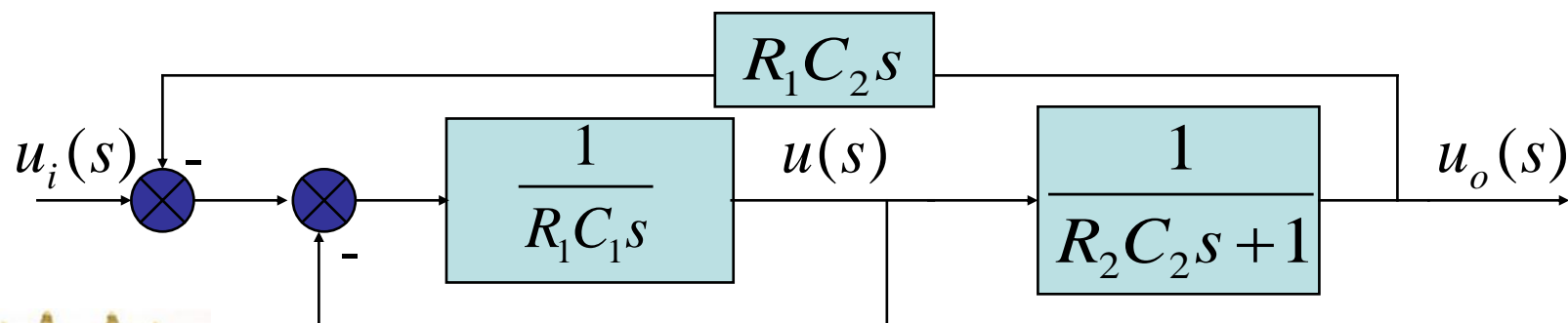




③



④

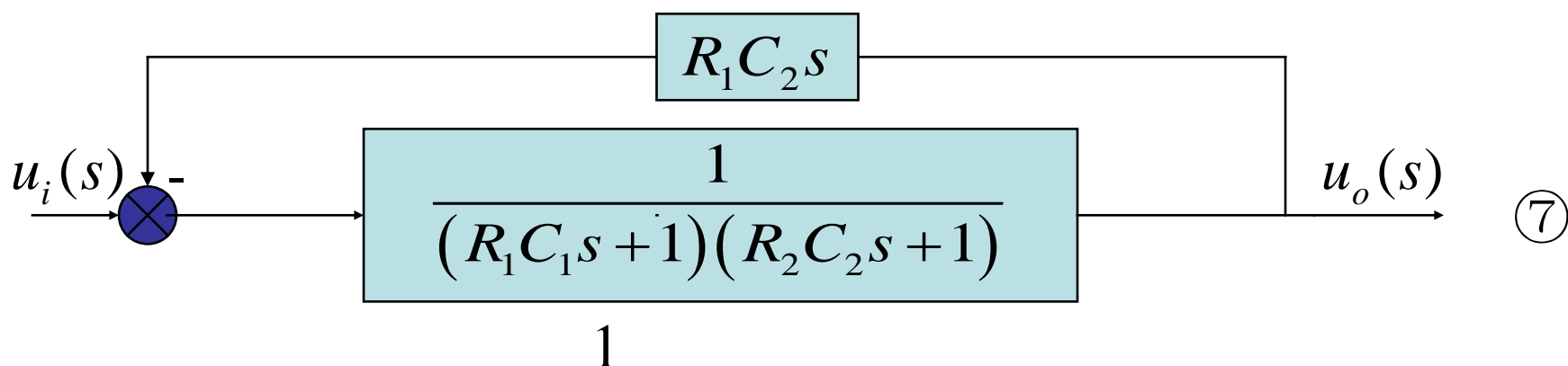
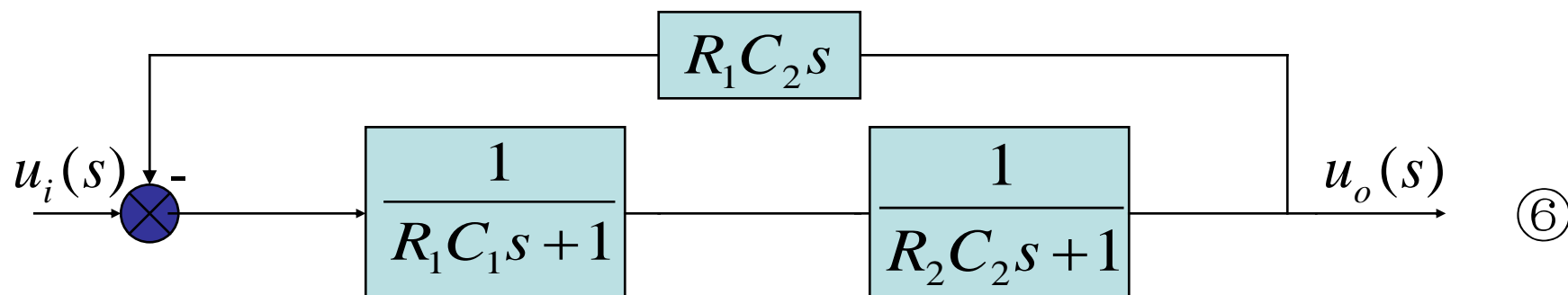


⑤





结构图等效变换例子

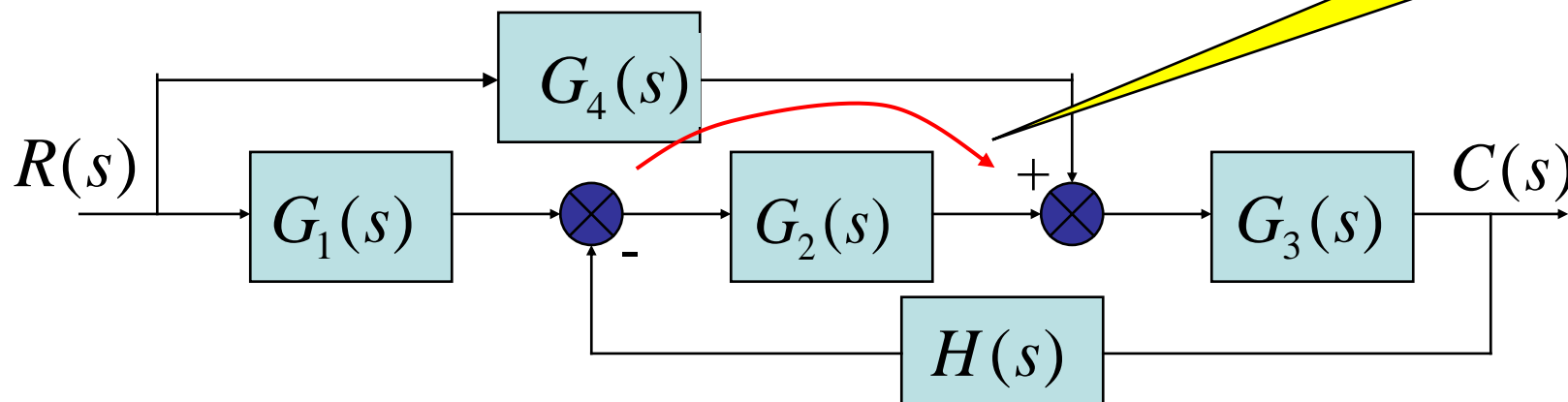


$$\therefore G(s) = \frac{u_o(s)}{u_i(s)} = \frac{1}{1 + \frac{R_1 C_2 s}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}} = \frac{1}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1) + R_1 C_2 s}$$

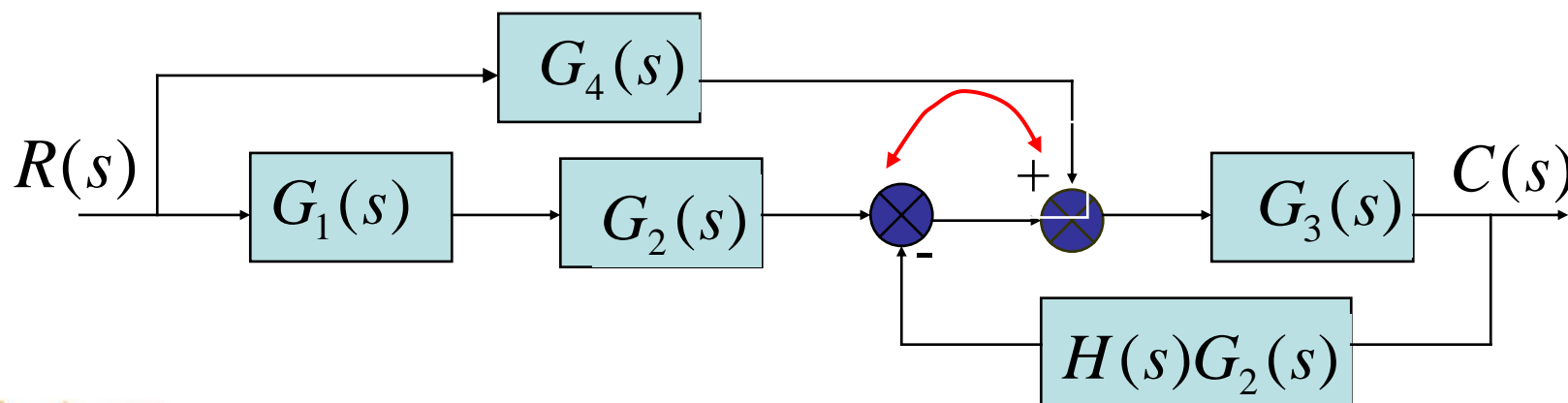


[例2-11]系统结构图如下，求传递函数 $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$ 。

相加点移动

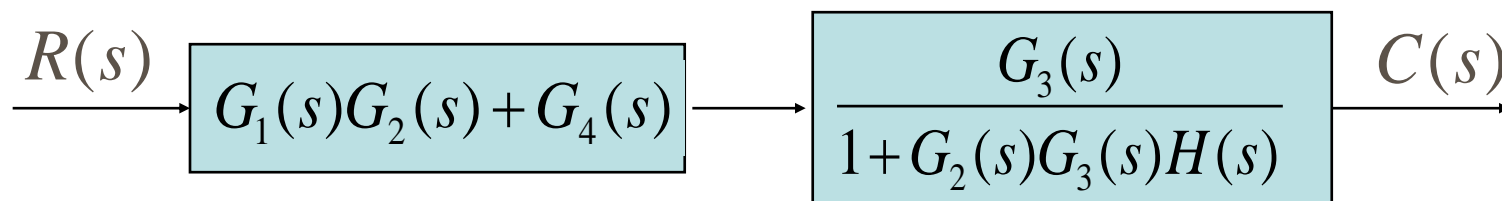
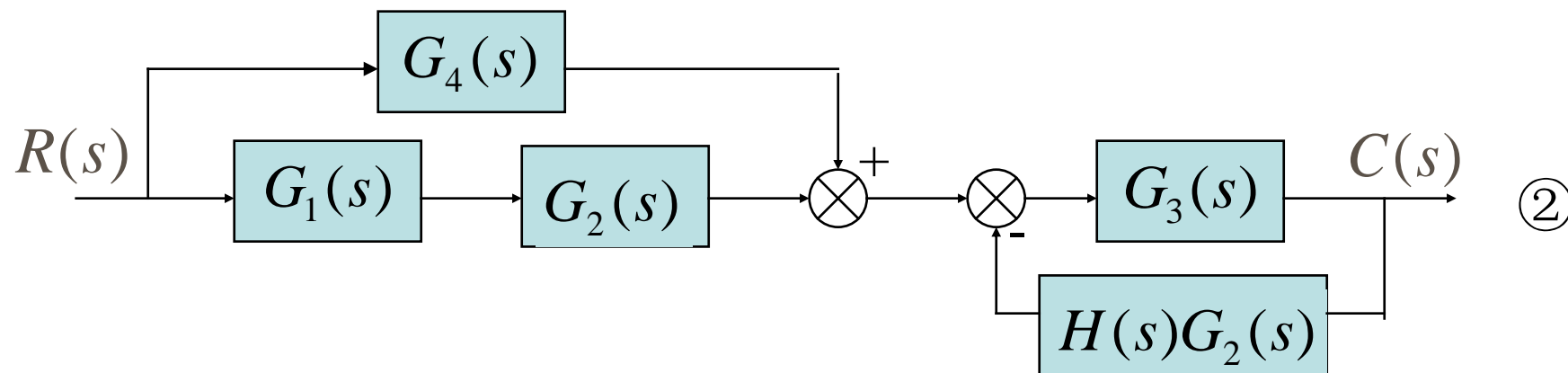


[解]: 结构图等效变换如下:



①





$$\therefore G(s) = \frac{G_3(s)(G_1(s)G_2(s) + G_4(s))}{1 + G_2(s)G_3(s)H(s)}$$



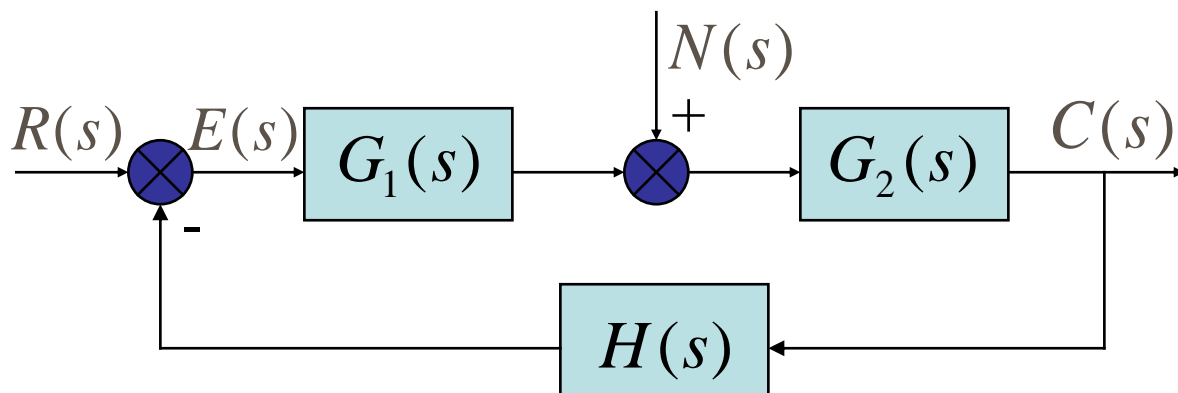


知识点5

控制系统的结构图—等效变换

(3) 闭环系统的传递函数

闭环控制系统(也称反馈控制系统)的典型结构图如下图所示:



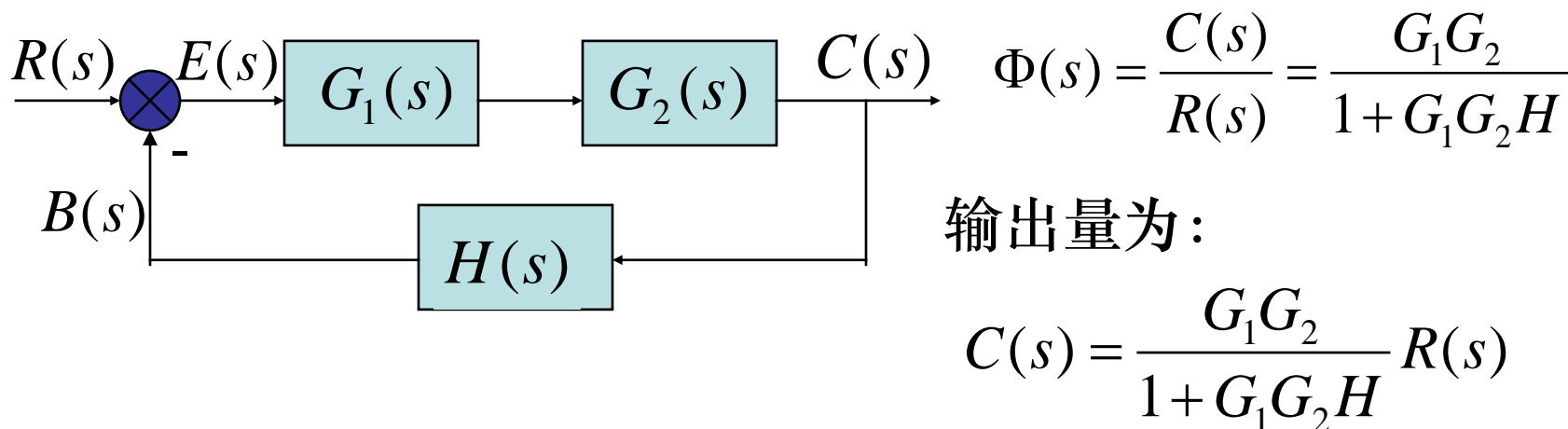
图中, $R(s)$, $C(s)$ 为输入、输出信号, $E(s)$ 为系统的偏差, $N(s)$ 为系统的扰动量, 这是不希望的输入量。

由于传递函数只能处理单输入、单输出系统, 因此, 我们分别求 $R(s)$ 对 $C(s)$ 和 $C(s)$ 对 $N(s)$ 的传递函数, 然后叠加得出总的输出量 $C(s)$ 。



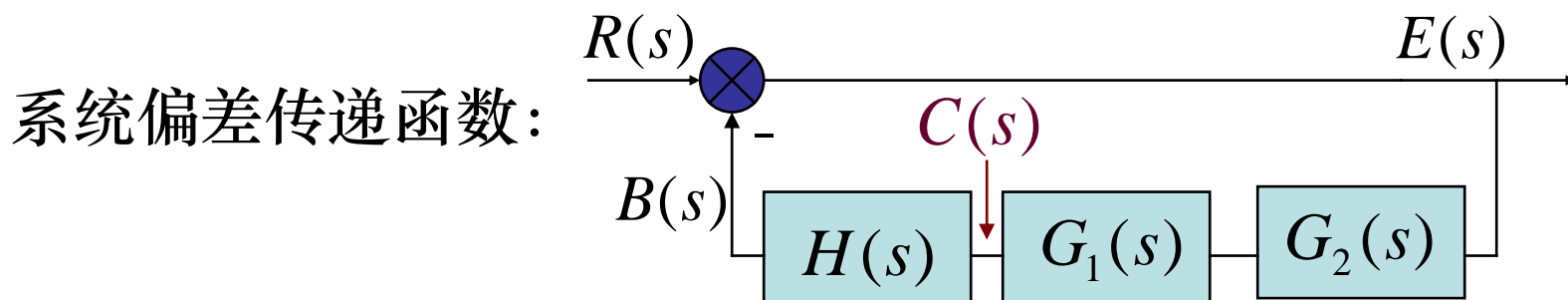
① 给定输入作用下的闭环系统：

令 $N(s) = 0$ ，则有：



上式中， $G_1(s)G_2(s)$ 称为前向通道传递函数，前向通道指从输入端到输出端沿信号传送方向的通道。前向通道和反馈通道的乘积称为开环传递函数 $G_1(s)G_2(s)H(s)$ ，含义是主反馈通道断开时从输入信号到反馈信号 $B(s)$ 之间的传递函数。





$$\Phi_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s) - C(s)H(s)}{R(s)}$$

$$= 1 - \Phi(s)H(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

又若单位反馈系统 $H(s)=1$,

则有: 开环传递函数=前向通道传递函数。

$$\Phi(s) = \frac{G_1G_2}{1 + G_1G_2}, \quad \Phi_E(s) = \frac{1}{1 + G_1G_2}, \quad \therefore \Phi(s) = 1 - \Phi_E(s)$$

系统的偏差 $E(s)=R(s)-B(s)=R(s)-C(s)$ 就是系统误差。

③给定输入和扰动输入同时作用下的闭环系统

根据线性迭加原理：

$$\text{输出:} \quad C(s) = \Phi(s)R(s) + \Phi_N(s)N(s)$$

$$\text{偏差:} \quad E(s) = \Phi_E(s)R(s) + \Phi_{NE}(s)N(s)$$

[提示]：各个传递函数 $\Phi, \Phi_N, \Phi_E, \Phi_{NE}$ 都具有相同的分母，分母称为控制系统的特征表达式。





第四次作业

- 1、习题2-7
- 2、习题2-8



知识点6

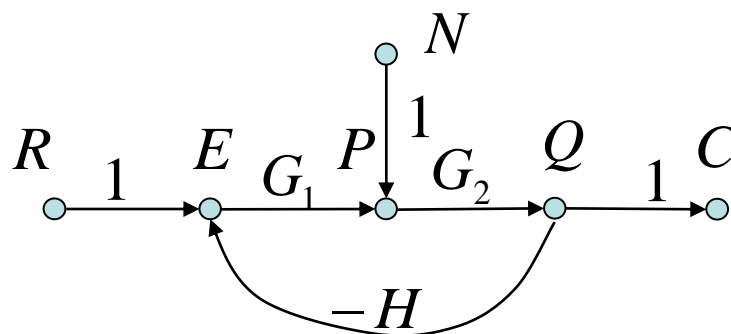
控制系统的信号流图—梅逊公式

(1)信号流图的组成以及术语

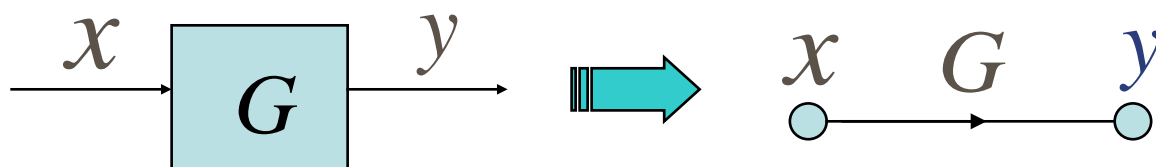
信号流图可以表示系统的结构和变量传送过程中的数学关系。它也是控制系统的一种数学模型。在求复杂系统的传递函数时较为方便。

①信号流图组成

组成：信号流图由节点和支路组成的信号传递网络。见下图：



- 节点：节点表示变量。以小圆圈表示。
- 支路：连接节点之间的有向线段。支路上箭头方向表示信号传送方向，传递函数标在支路上箭头的旁边，称支路传输。



上图中，两者都具有关系： $y(s) = G(s)x(s)$ 。支路对节点 x 来说是输出支路，对输出节点 y 来说是输入支路。



②信号流图的术语

◆ 输入节点(源点): 只有输出支路的节点。

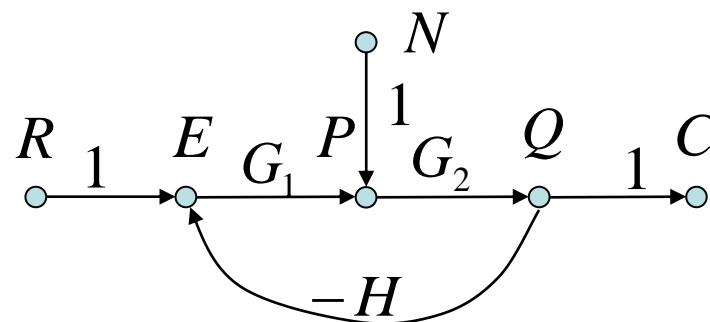
如: R , N 。

◆ 输出节点(阱点): 只有输入支路的节点。

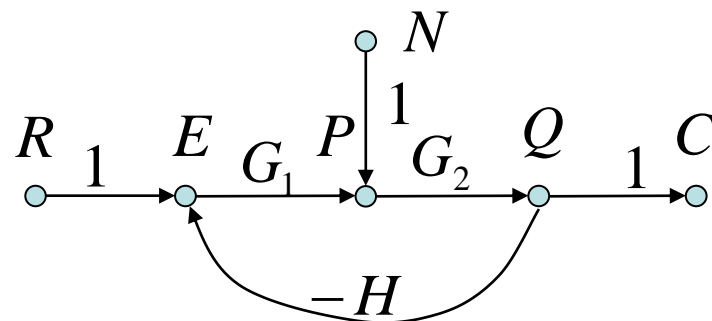
如: C 。

◆ 混合节点: 既有输入支路又有输出支路的节点。如: E , P , Q 。混合节点相当于结构图中的信号相加点和分支点。它上面的信号是所有输入支路引进信号的叠加。

◆ 通路: 沿支路箭头方向穿过各个相连支路的路线, 起始点和终点都在节点上。若通路与任一节点相交不多于一次, 且起点和终点不是同一节点称为开通路。起点在源点, 终点在阱点的开通路叫前向通路。



◆ 回路(闭通路): 通路与任一节点相交不多于一次, 但起点和终点为同一节点的通路称为回路。



◆ 互不接触回路: 回路之间没有公共节点时, 这种回路称为互不接触回路。

◆ 通路传输(增益): 通路中各支路传输的乘积称为通路传输或通路增益。前向通路中各支路传输的乘积称为前向通路传输或前向通路增益。

◆ 回路传输(增益): 回路上各支路传输的乘积称为回路传输或回路增益。

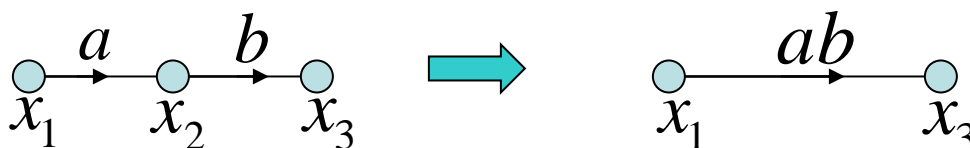


知识点6

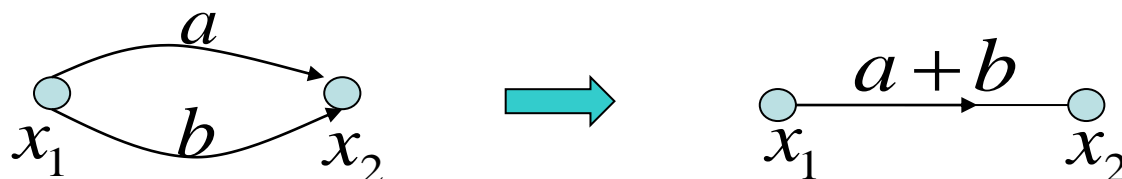
控制系统的信号流图—梅逊公式

(2)信号流图的等效变换

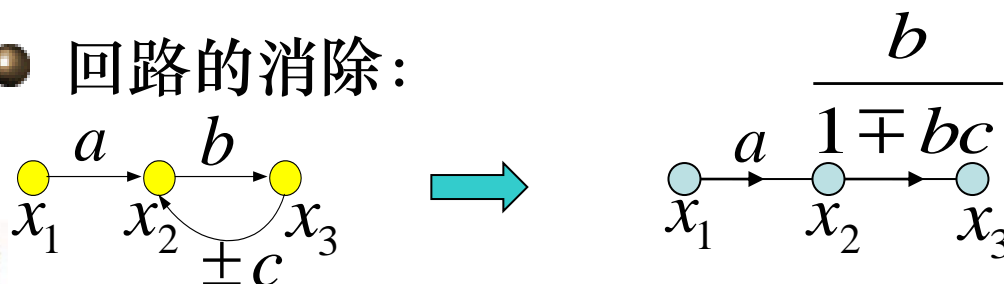
● 串联支路合并：



● 并联支路的合并：



● 回路的消除：





知识点6

控制系统的信号流图—梅逊公式

(3)信号流图的性质

- 节点表示系统的变量。一般节点自左向右顺序设置，每个节点标志的变量是所有流向该节点的信号之代数和，而从同一节点流向个支路的信号均用该节点的变量表示。
- 支路相当于乘法器，信号流经支路时，被乘以支路增益而变换为另一信号。
- 信号在支路上只能沿箭头单向传递，即只有前因后果的因果关系。
- 对于给定的系统，节点变量的设置是任意的，因此信号流图不是唯一的



知识点6

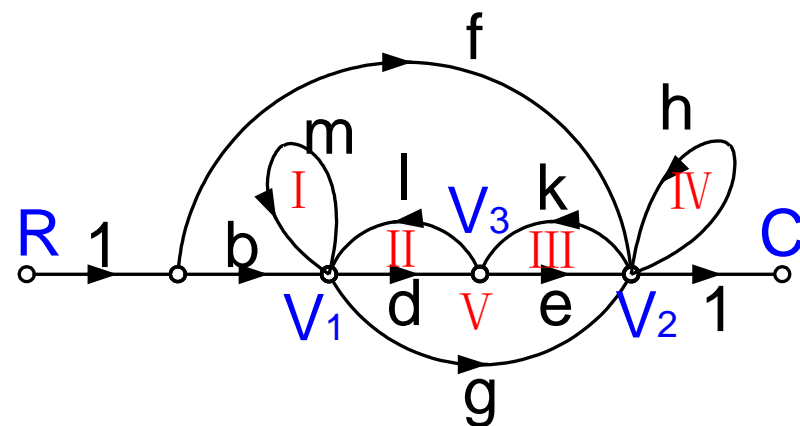
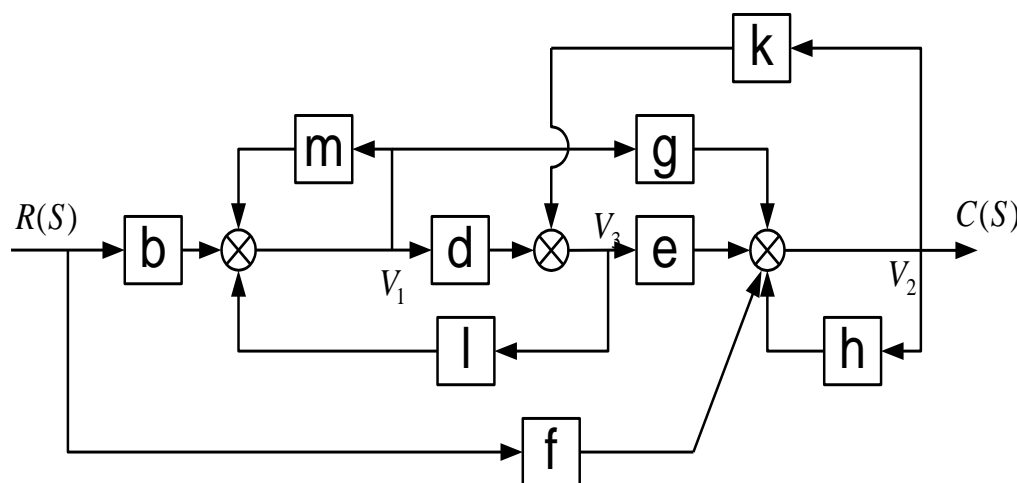
控制系统的信号流图—梅逊公式

(4)信号流图的绘制

①根据结构图

例1 已知结构图如下，可在结构图上标出节点，如上图所示。

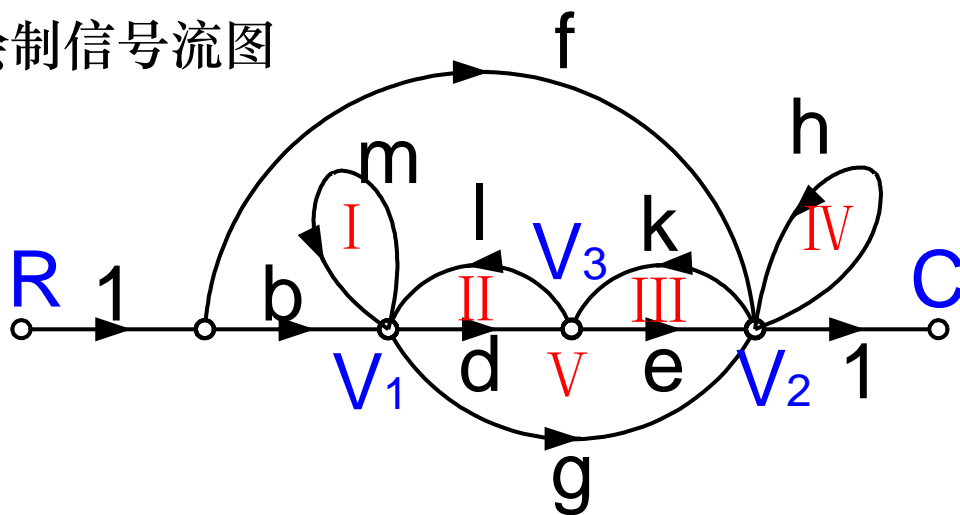
然后画出信号流图如下图所示。



②按微分方程拉氏变换后的代数方程所表示的变量间数学关系绘制。如前例所对应的代数方程为

$$\begin{aligned} V_1 &= mV_1 + lV_3 + bR \\ C = V_2 &= gV_1 + hV_2 + eV_3 + fR \\ V_3 &= dV_1 + kV_2 \end{aligned}$$

按方程可绘制信号流图





知识点6

控制系统的信号流图—梅逊公式

(5)梅逊公式

用梅逊公式可不必简化信号流图而直接求得从输入节点到输出节点之间的总传输。(即总传递函数)

$\sum L_a$ — 流图中所有不同回路的回路传输之和;

$\sum L_b L_c$ — 所有互不接触回路中, 每次取其中两个回路传输乘积之和;

$\sum L_d L_e L_f$ — 所有互不接触回路中, 每次取其中三个回路传输乘积之和;

流图特征式的计算公式为:

$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \dots \quad (\text{正负号间隔})$$



n – 从输入节点到输出节点的前向通道总数；

P_k – 第 k 个前向通道的总传输；

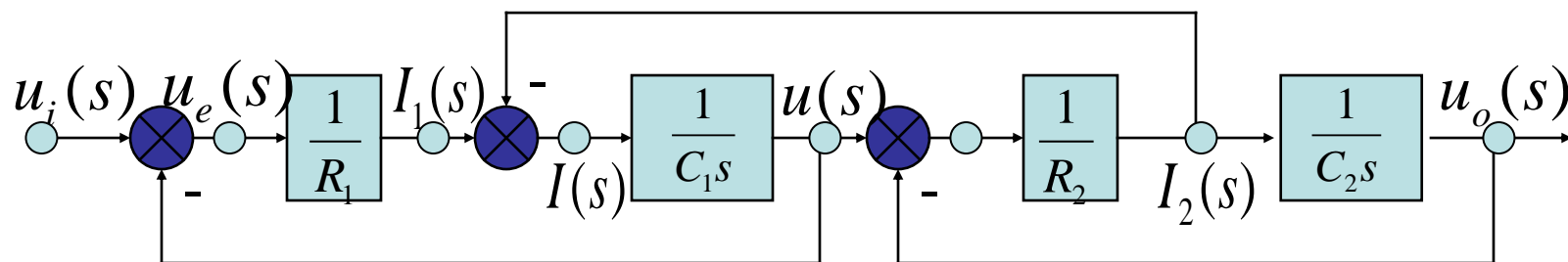
Δ_k – 第 k 个前向通道的特征式的余子式；其值为 Δ 中除去与第 k 个前向通道接触的回路后的剩余部分；

梅逊增益公式为：

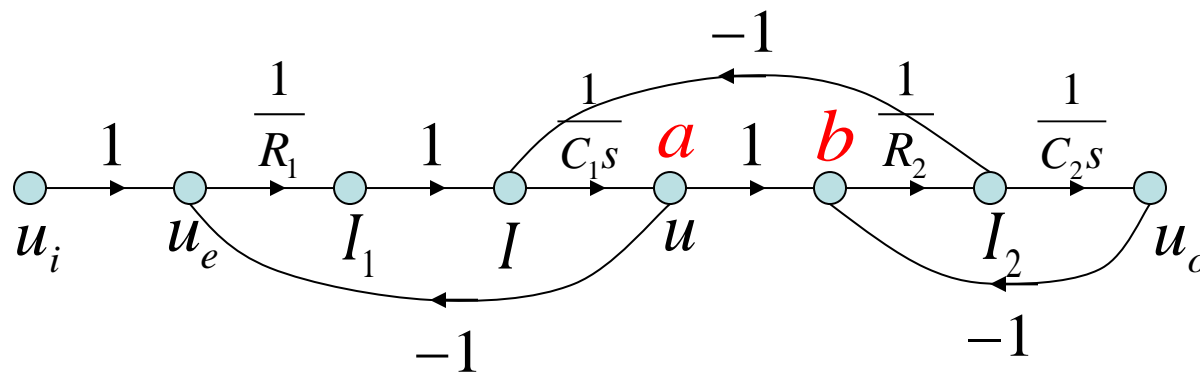
$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_k$$

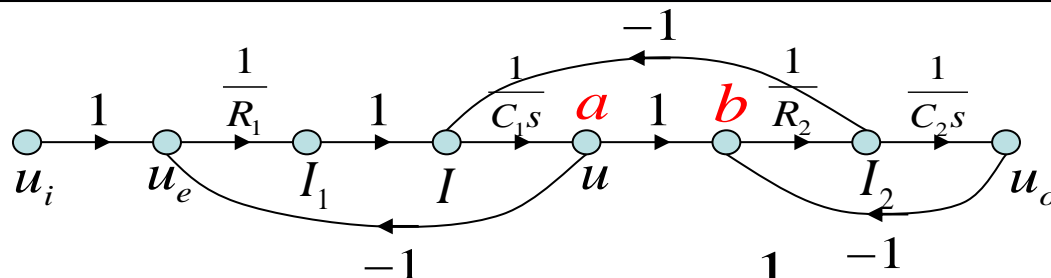


[例]：绘出两级串联RC电路的信号流图并用Mason公式计算总传递函数。



[解]：先在结构图上标出节点，再根据逻辑关系画出信号流图如下：





图中，有一个前向通道； $P_1 = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2}$

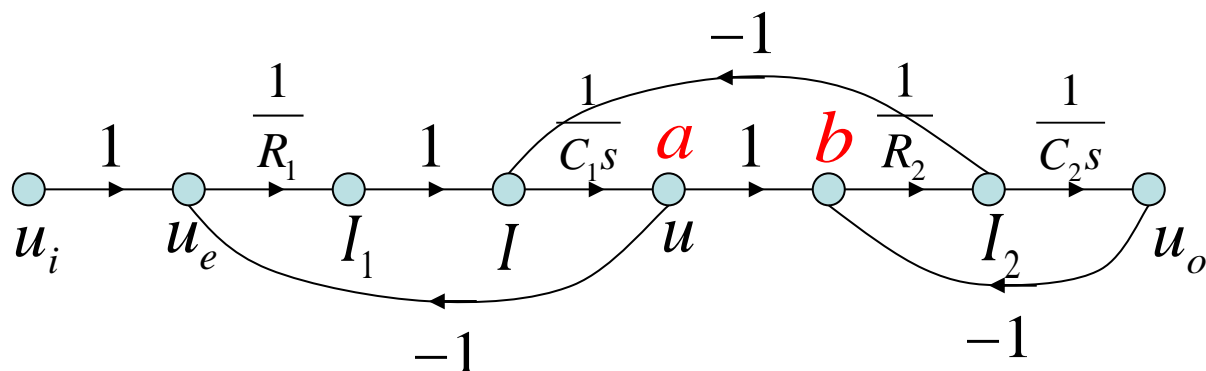
有三个回路； $\sum L_a = \frac{-1}{R_1 C_1 s} + \frac{-1}{R_2 C_2 s} + \frac{-1}{R_2 C_1 s}$

有两个互不接触回路； $\sum L_b L_c = \frac{-1}{R_1 C_1 s} \times \frac{-1}{R_2 C_2 s} = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}$

$$\therefore \Delta = 1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} + \frac{1}{R_2 C_2 s} + \frac{1}{R_2 C_1 s} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}$$

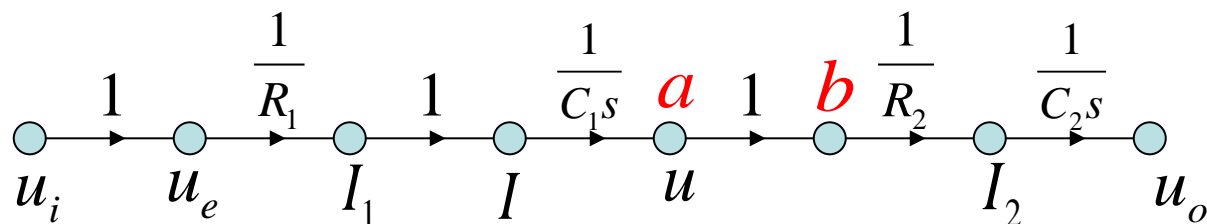
$\Delta_i = 1$ （因为三个回路都与前向通道接触。）

总传输为： $P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^1 P_k \Delta_k = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1}$



讨论：信号流图中，a点和b点之间的传输为1，是否可以将该两点合并。使得将两个不接触回路变为接触回路？如果可以的话，总传输将不一样。

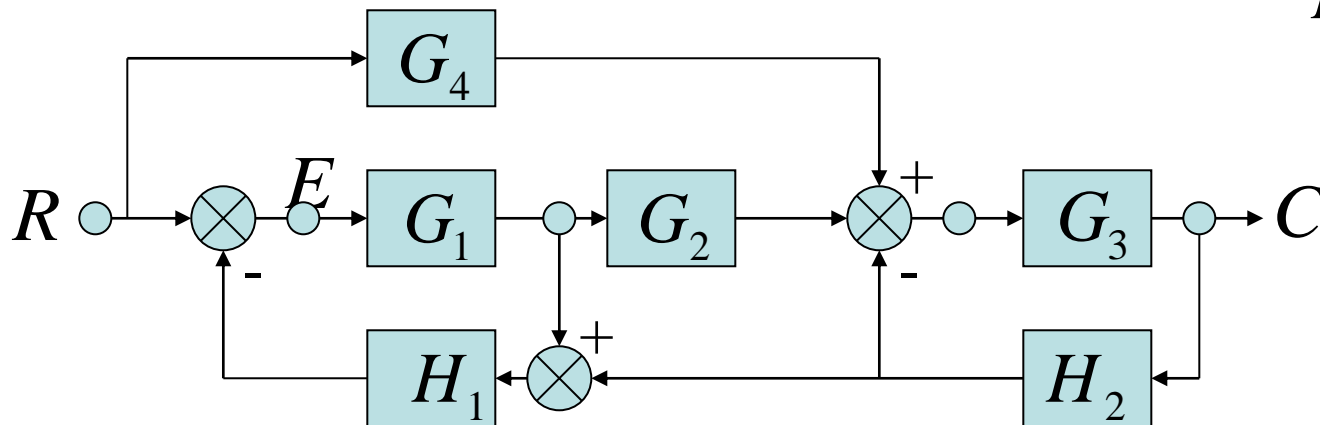
不能合并。因为a、b两点的信号值不一样。



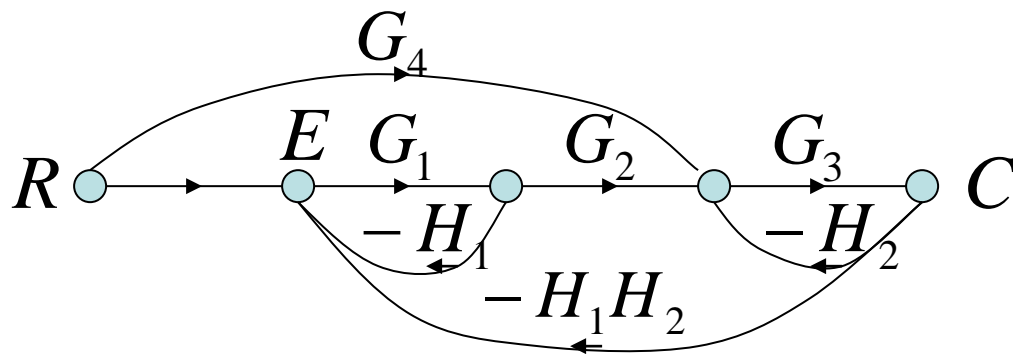
上图中， u_i 和 u_e ， I_1 和 I ，a和b可以合并。为什么？

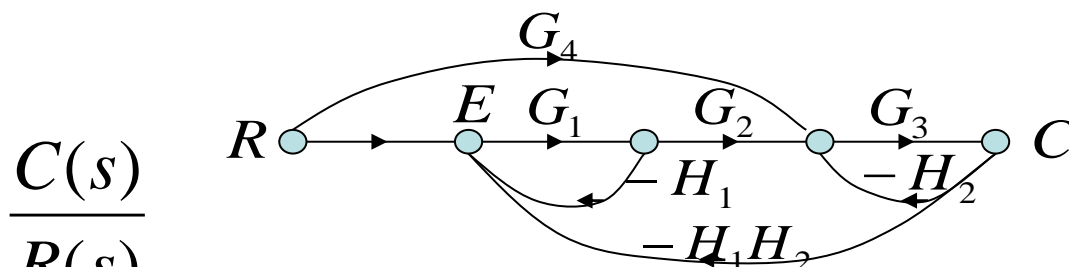


[例]: 使用Mason公式计算下述结构图的传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)}, \frac{E(s)}{R(s)}$



[解]: 在结构图上标出节点, 如上。然后画出信号流图, 如下:





◆ 求 $R(s)$:

前向通道有二, 分别为: $P_1 = G_1 G_2 G_3$, $P_2 = G_3 G_4$

回路有三, 分别为: $-G_1 H_1$, $-G_3 H_2$, $-G_1 G_2 G_3 H_1 H_2$

有两个不接触回路, 所以:

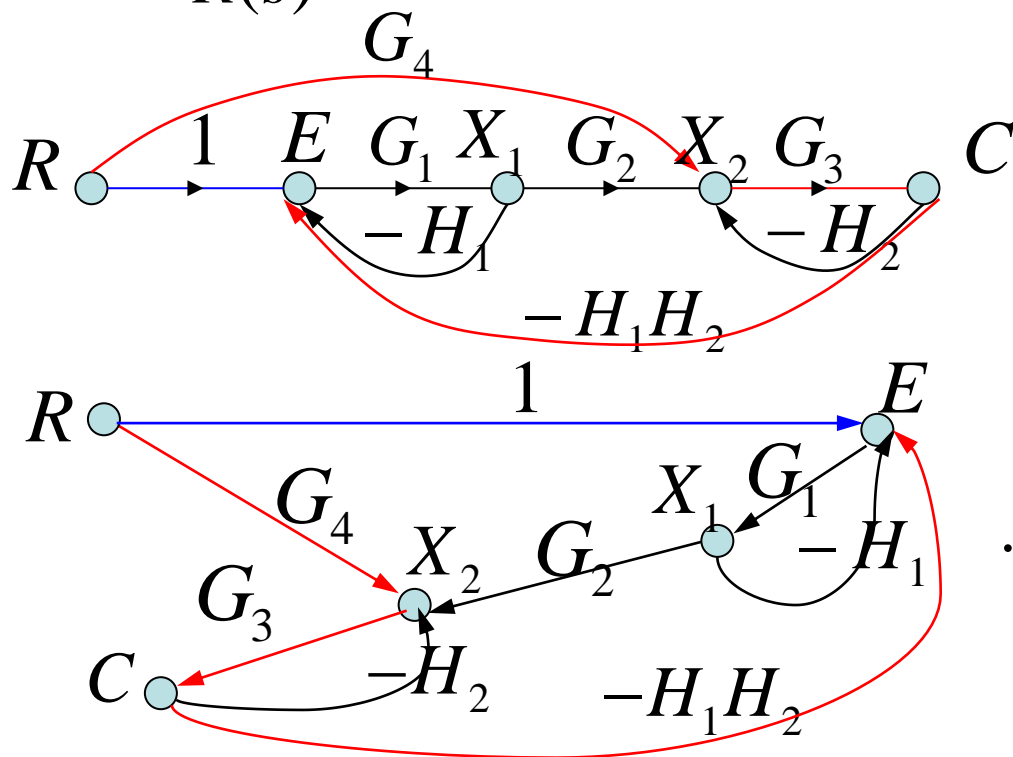
$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c = 1 + G_1 H_1 + G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_1 H_2 + G_1 G_3 H_1 H_2$$

$$\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 1 + G_1 H_1$$

$$\therefore P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^2 P_k \Delta_k = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_3 G_4 + G_1 G_3 G_4 H_1}{1 + G_1 H_1 + G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_1 H_2 + G_1 G_3 H_1 H_2}$$



◆ 求 $\frac{E(s)}{R(s)}$



Δ 不变。

$P_1 = 1, \Delta_1 = 1 + G_3 H_2$ (蓝线表示)

$P_2 = -G_3 G_4 H_1 H_2, \Delta_2 = 1$

(红线表示)

$$\therefore P = \frac{1 + G_3 H_2 - G_3 G_4 H_1 H_2}{\Delta}$$

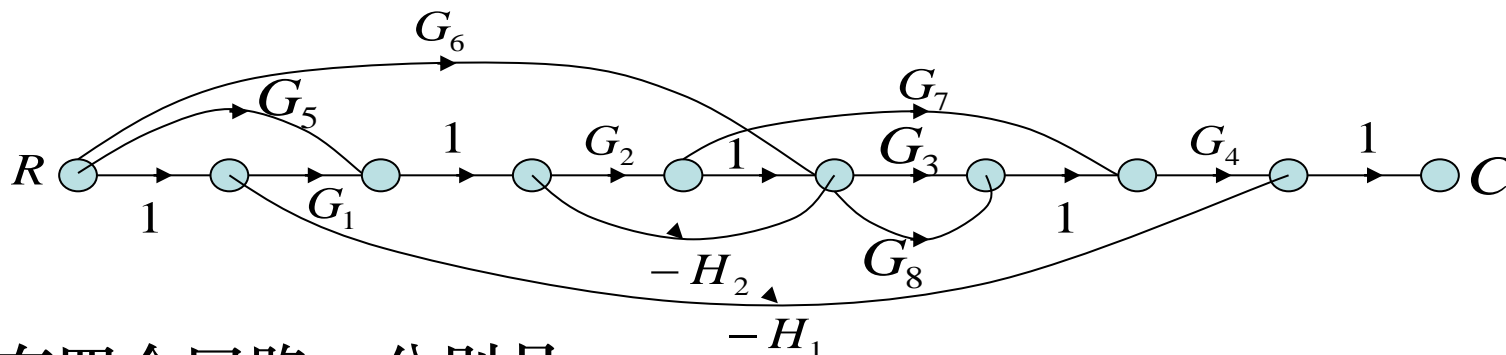
注意：上面讲 Δ 不变，为什么？ Δ 是流图特征式，也就是传递函数的特征表达式。对于一个给定的系统，特征表达式总是不变的，可以试着求一下。

注意：梅逊公式只能求系统的总增益，即输出对输入的增益。而输出对混合节点（中间变量）的增益就不能直接应用梅逊公式。也就是说对混合节点，不能简单地通过引出一条增益为一的支路，而把非输入节点变成输入节点。对此问题有两种方法求其传递函数：

- ①把该混合节点的所有输入支路去掉，然后再用梅逊公式；
- ②分别用梅逊公式求取输出节点及该节点对输入节点的传递函数，然后把它们的结果相比，即可得到输出对该混合节点的传递函数。



[例]数数有几个回路和前向通道。



✚ 有四个回路，分别是：

$$-G_2H_2, -G_1G_2G_3G_4H_1, -G_1G_2G_7G_4H_1, -G_1G_2G_8G_4H_1$$

它们都是互相接触的。

$$\therefore \Delta = 1 + G_2H_2 + G_1G_2G_3G_4H_1 + G_1G_2G_7G_4H_1 + G_1G_2G_8G_4H_1$$

✚ 有九条前向通道，分别是：

$$P_1 = G_1G_2G_3G_4$$

$$P_4 = G_5G_2G_3G_4$$

$$P_7 = G_6G_3G_4$$

$$P_2 = G_1G_2G_7G_4$$

$$P_5 = G_5G_2G_7G_4$$

$$P_8 = G_6G_8G_4$$

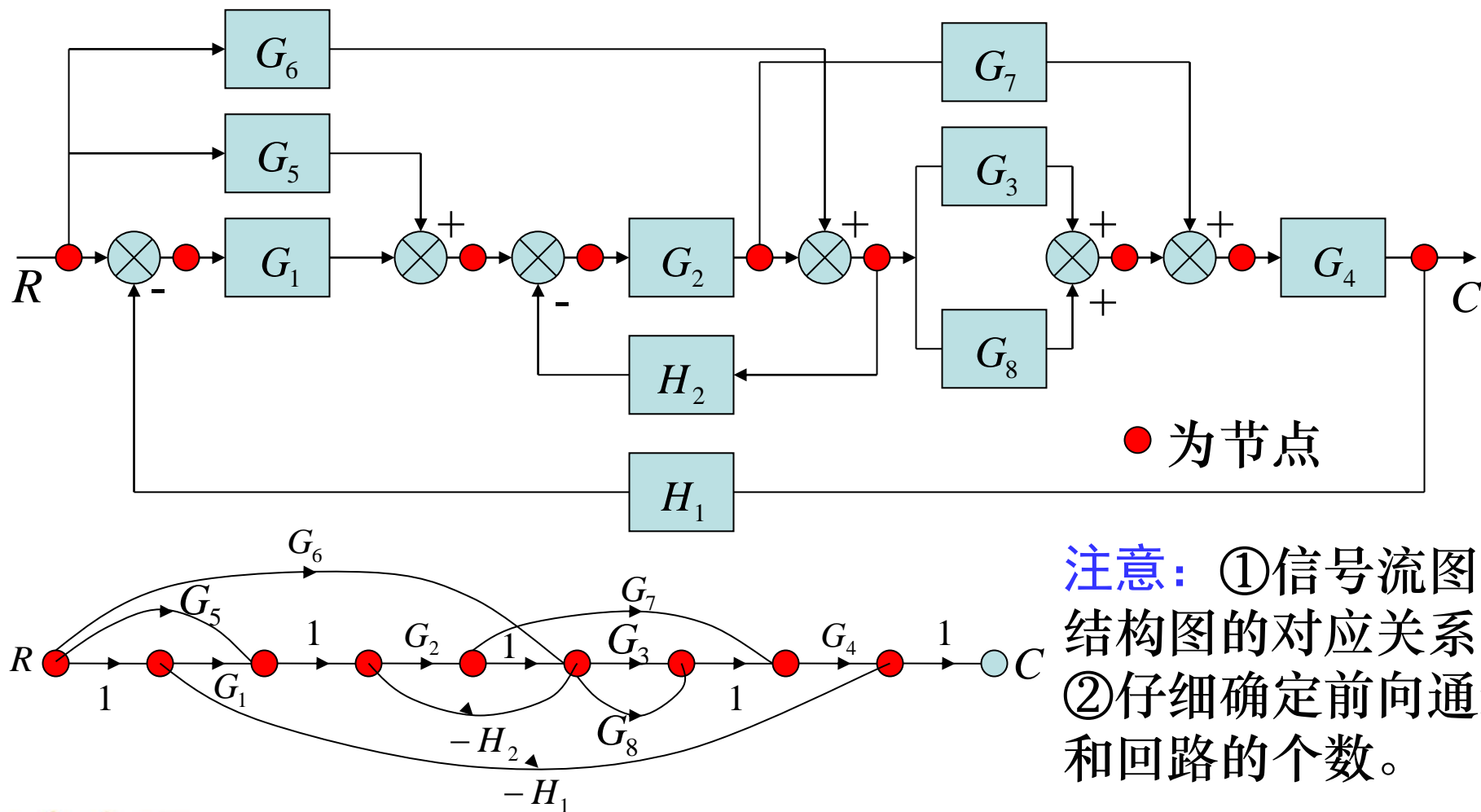
$$P_3 = G_1G_2G_8G_4$$

$$P_6 = G_5G_2G_8G_4$$

$$P_9 = -G_6H_2G_2G_7G_4$$



对应的结构图为：



注意：①信号流图与结构图的对应关系；
②仔细确定前向通道和回路的个数。





第五次作业

- 1、习题2-9
- 2、习题2-12





本章结束

谢 谢!

