疲劳断裂的特征

一、失效形式：疲劳断裂

二、疲劳破坏特征：

1、断裂过程：① 产生初始裂纹 （应力较大处）
② 裂纹尖端在切应力作用下，反复扩展，直至产生疲劳裂纹。

2 、断裂面：① 光滑区（疲劳发展区）
② 粗糙区（脆性断裂区）

3、 无明显塑性变形的脆性突然断裂

4 、破坏时的应力（疲劳极限）远小于材料的屈服极限

第7章 机械零件的疲劳强度计算

- **7.1** 变应力的种类和特征
- **7.2** 疲劳极限与极限应力线图
- **7.3** 影响机械零件疲劳强度的因素
- **7.4** 稳定变应力下机械零件的疲劳强度计算
- **7.5** 规律性不稳定变应力时机械零件的疲劳强度计算
- **7.6** 机械零件的接触疲劳强度

7.1 变应力的种类和特征

7.1.1 变载荷

变载荷又可以分为
- 循环变载荷
- 随机变载荷
- 动载荷

载荷循环变化时，称为循环变载荷。

每个工作循环内的载荷不变、各循环的载荷又相同时，称为稳定循环载荷。

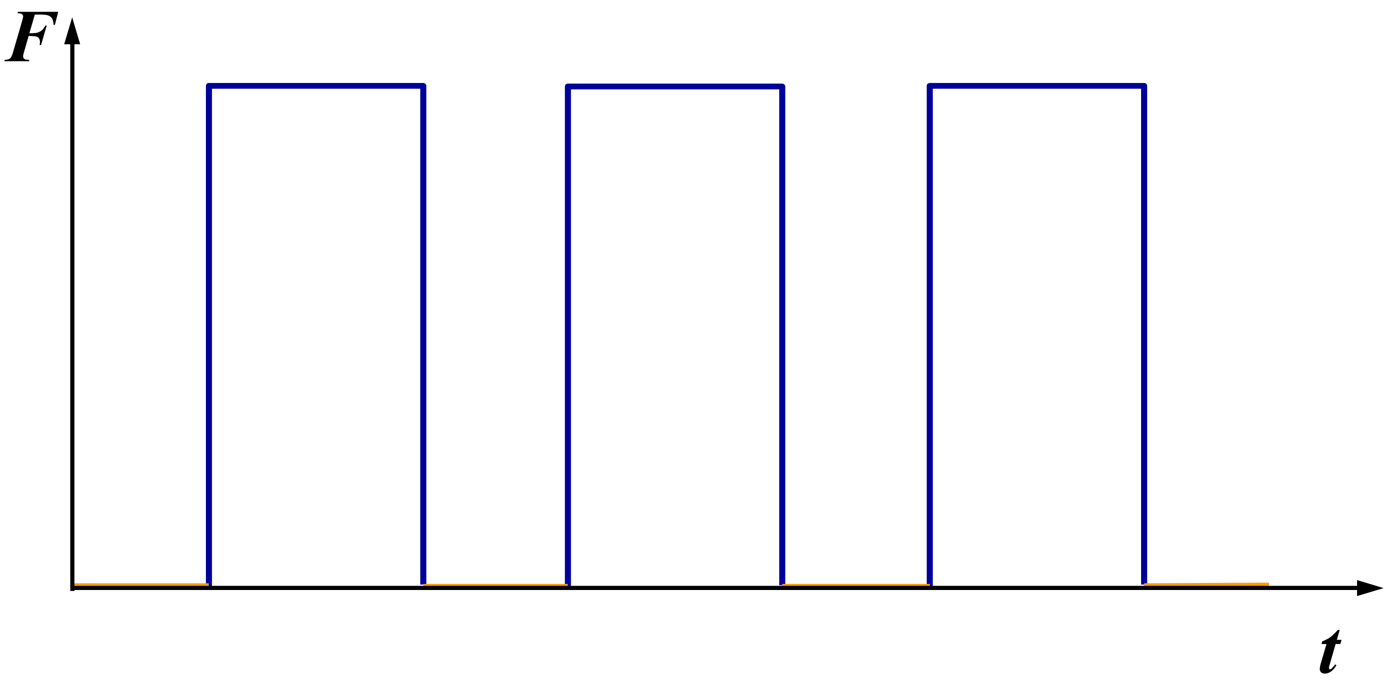


图7.1 稳定循环载荷

若每个工作循环内的载荷是变化时，则称为不稳定循环载荷。

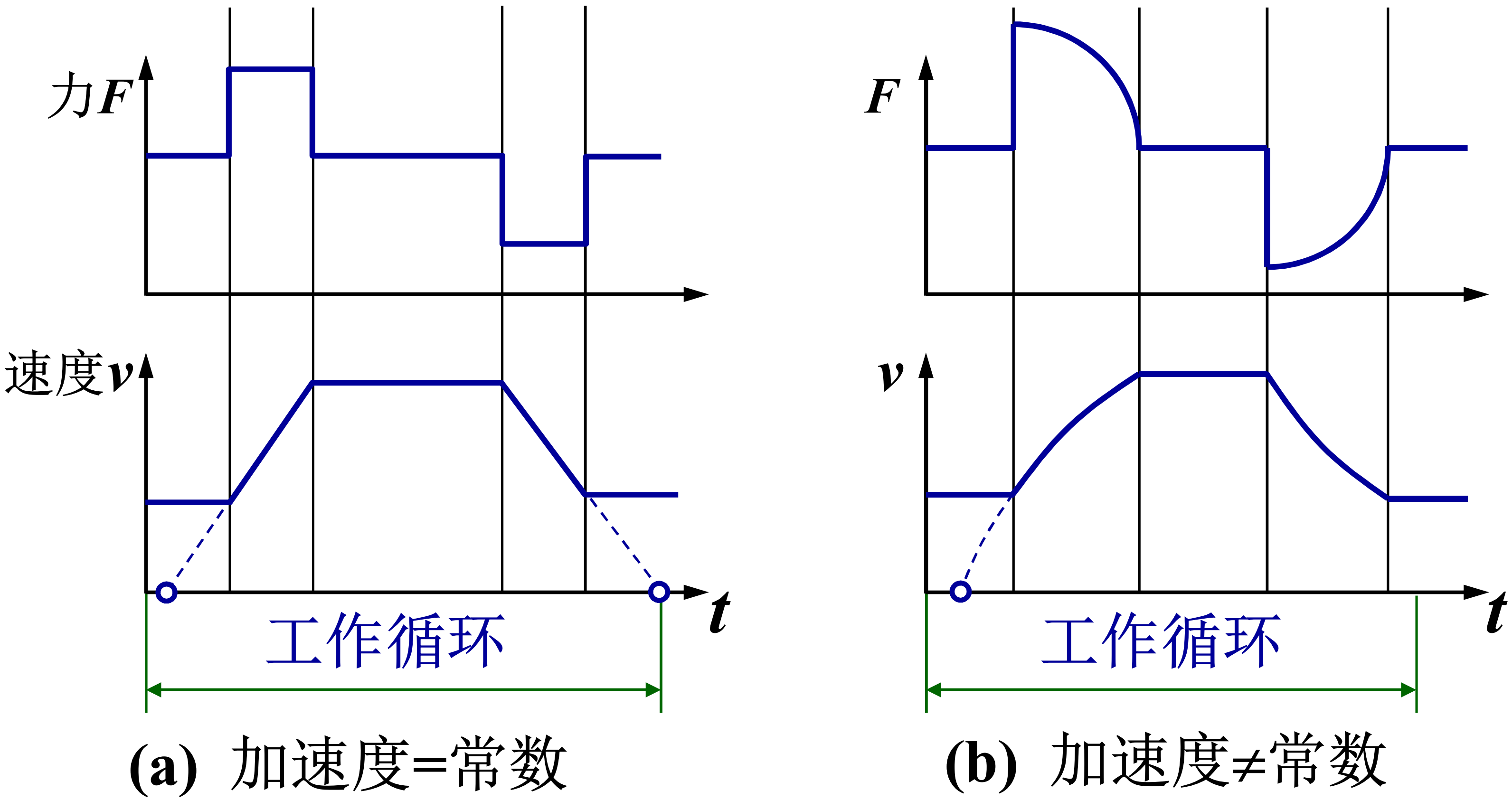


图7.2 不稳定循环载荷

在一个工作循环中，速度发生变化，载荷也随之不稳定变化。

很多机械，如汽车、飞机、农业机械等，由于工作阻力变动、冲击振动等的偶然性，载荷的频率和幅值随时间按随机曲线变化，这种载荷称为随机变载荷。

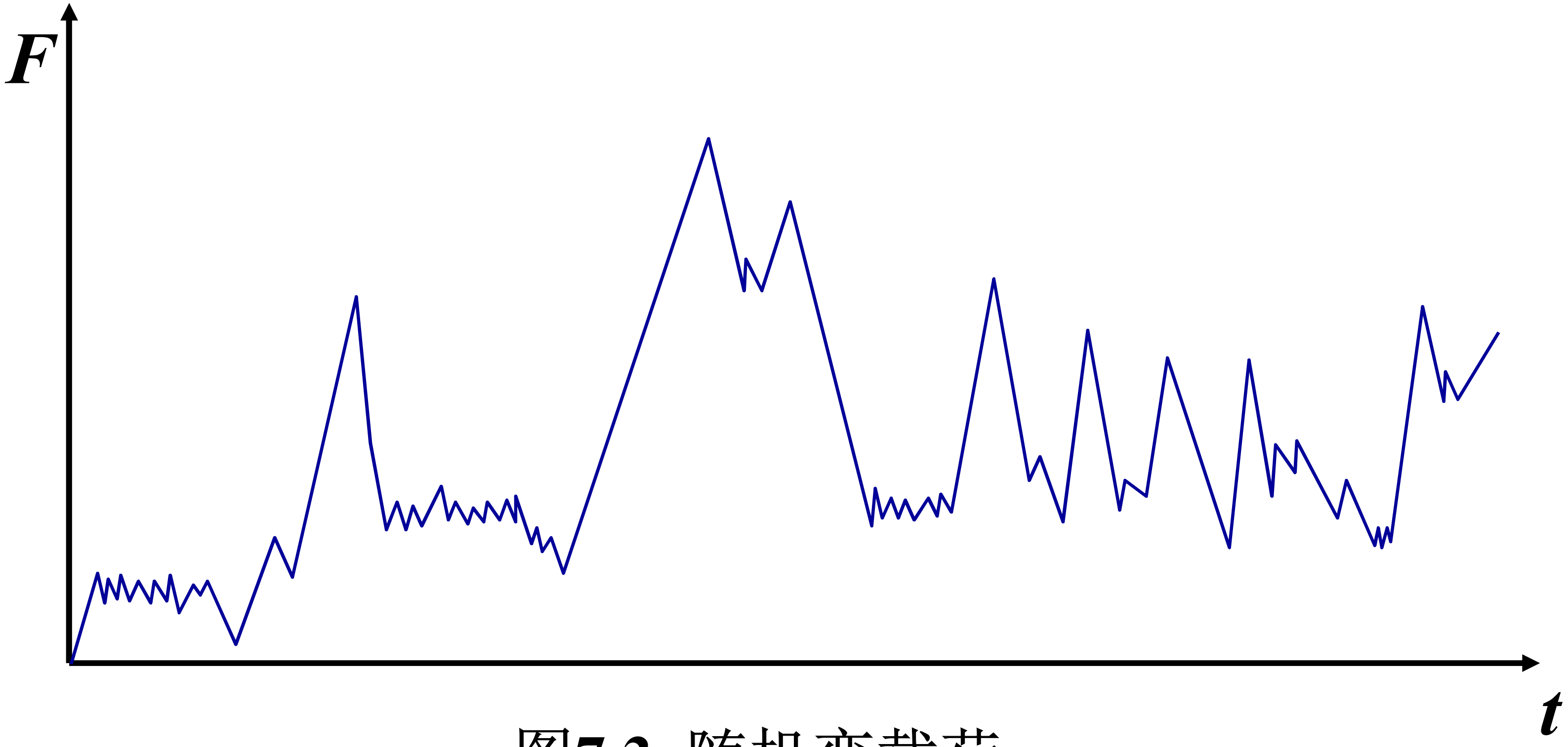
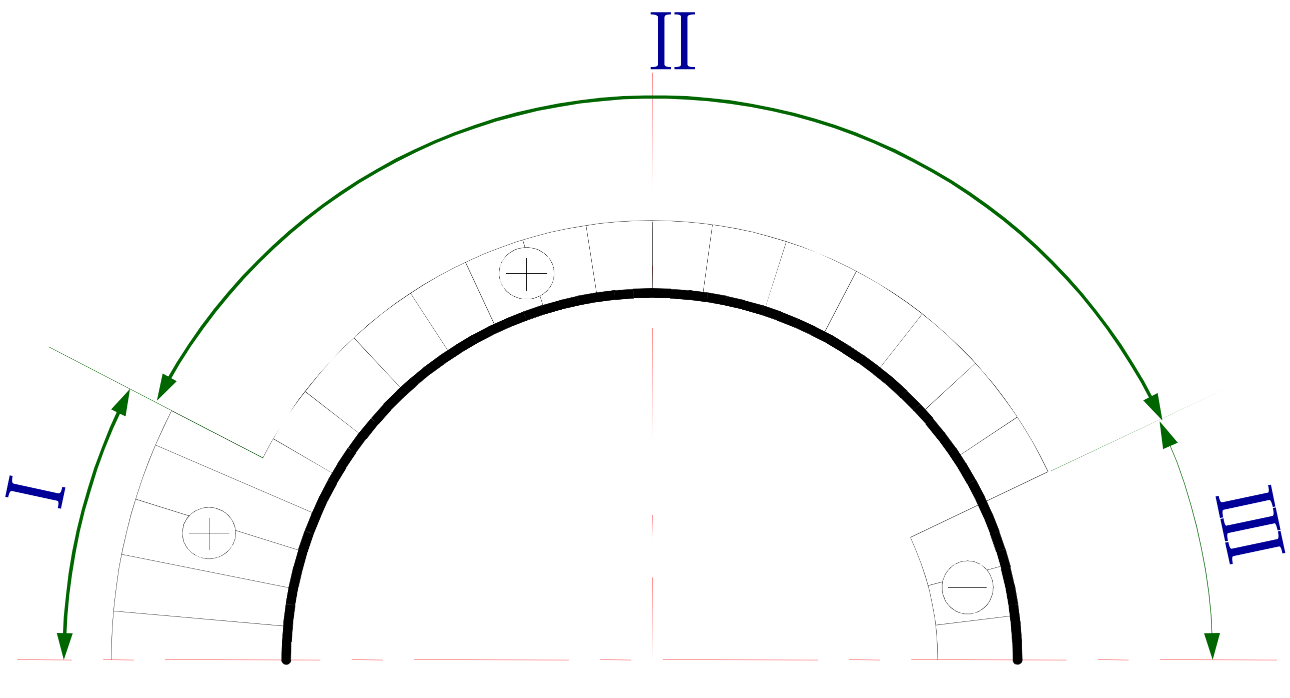


图7.3 随机变载荷

突然作用且作用时间很短的载荷称为动载荷，例如冲击载荷、机械起动和制动时的惯性载荷、振动载荷等。动载荷也可以是循环作用的，例如多次冲击载荷。

图7.1~图7.3的载荷与时间坐标图称为载荷谱，可以用分析法或实测法得出，在很多情况下，只能实测得出。为了计算方便，常将载荷谱简化为简单的阶梯形状。



I—起动；II—匀速运动； III—制动

图7.4　旋转起重机的载荷谱

设计时，如果有载荷谱资料，所设计的机械其可靠性可大大提高。

7.1.2 变应力的种类

由于载荷随时间的变化，应力也将随时间而变化。按随时间变化的情况，变应力大体可分为以下三种类型：

1．稳定循环变应力：应力随时间按一定规律周期性变化，且变化幅度保持稳定。

2．不稳定循环变应力:应力随时间按一定规律周期性变化，但变化幅度不稳定，其幅度的变化保持一定规律。

3．随机变应力:应力随时间变化没有规律，应力变化不呈周期性，带有很大的偶然性。

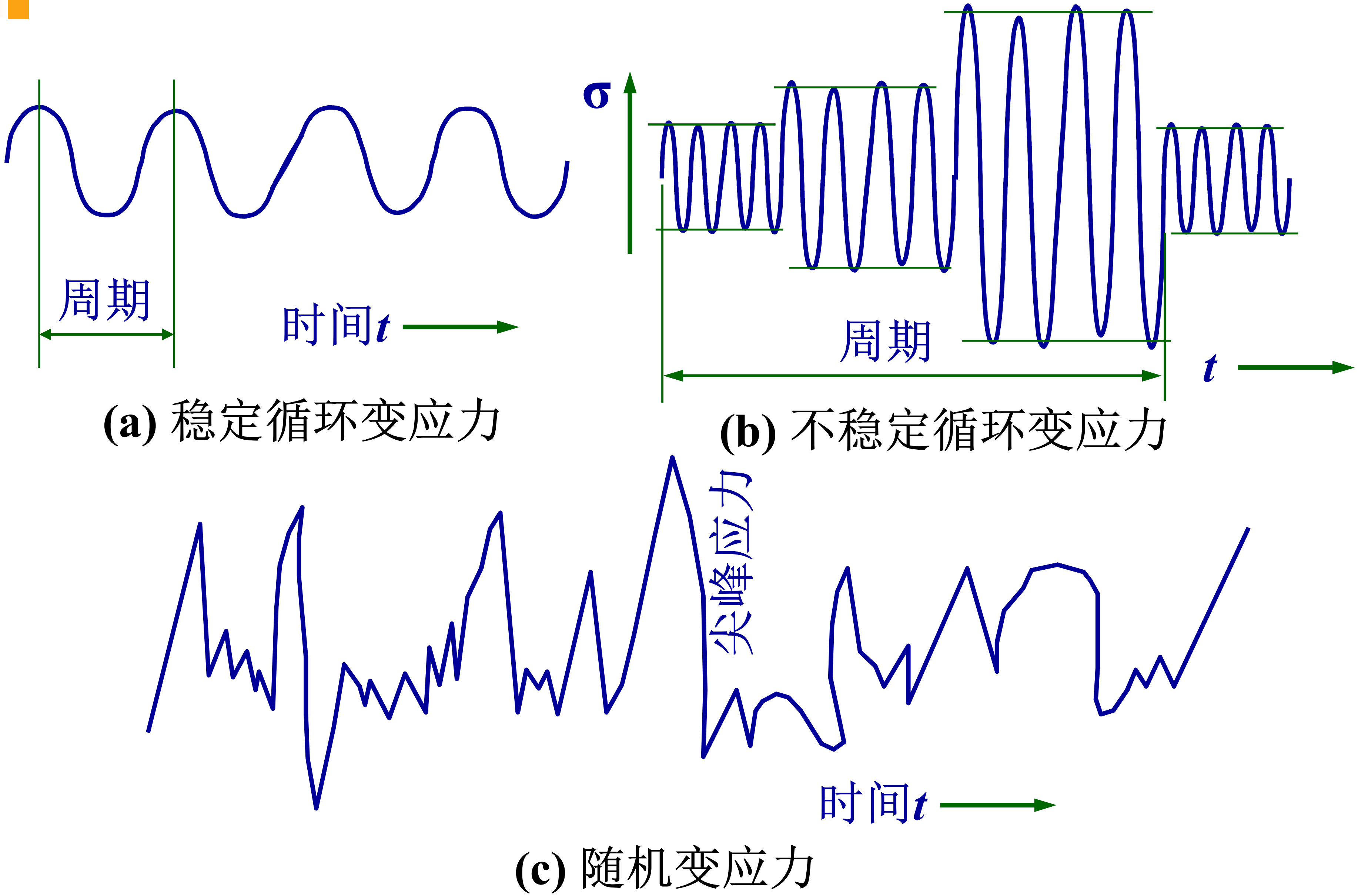
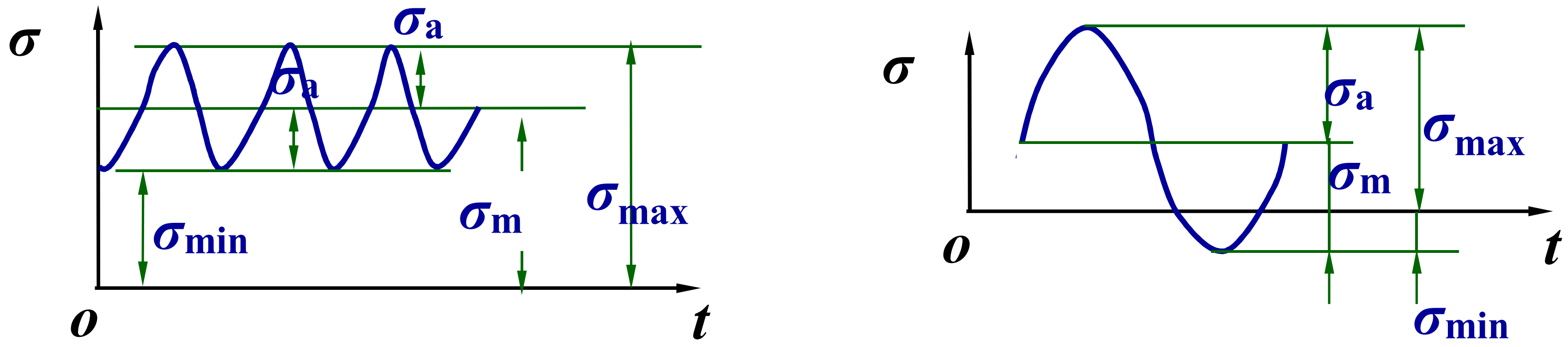


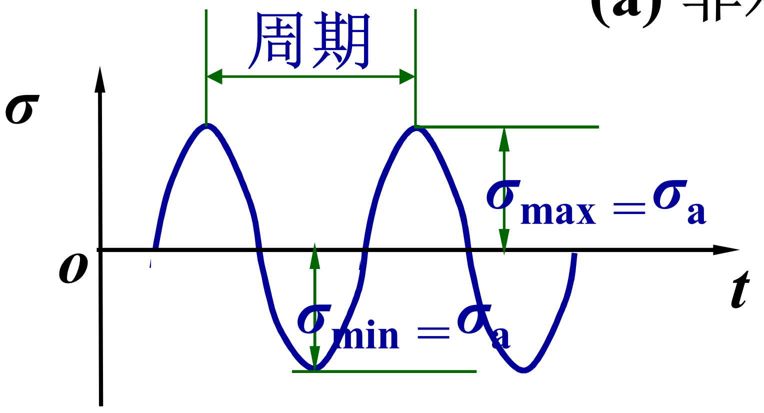
图7.5　变应力

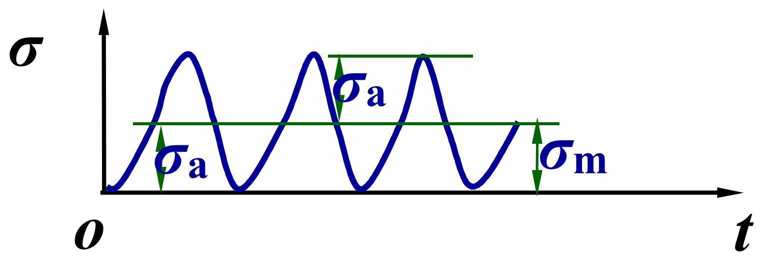
7.1.3 变应力的特性

一般的稳定循环变应力的变化情况：



(a) 非对称循环变应力





(b) 对称循环变应力　　　(c) 脉动循环变应力

图7.6　稳定循环应力谱

其中σ_{max}为最大应力，σ_{min}为最小应力，σ_m为平均应力，σ_a为应力幅 。

它们之间的关系为：

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

或

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a$$

循环特性r：　$r=\sigma_{\min}/\sigma_{\max}$

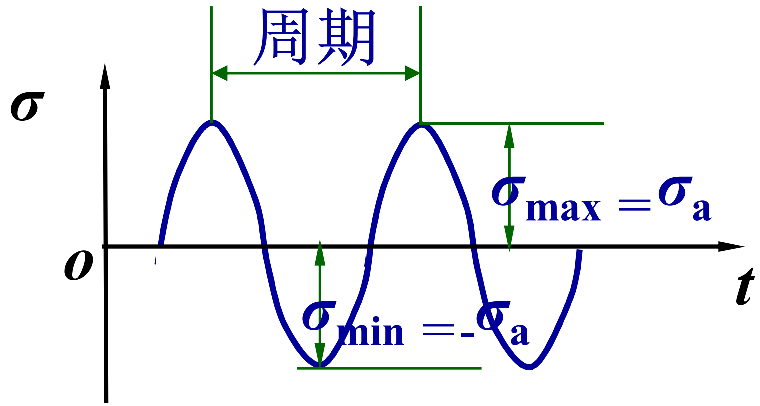
若规定用绝对值最大者作为$\sigma_{\max}$，则r的取值范围为 $-1 \le r \le +1$。实际上表示变应力的特性时无须用到所有上述五个参数，只需知道其中任意两个，即可求得其他参数。

•对称循环变应力

$\sigma_m=0$，$\sigma_{max}=-\sigma_{min}$

σ_{max} 与σ_{min}大小相等，方向相反，

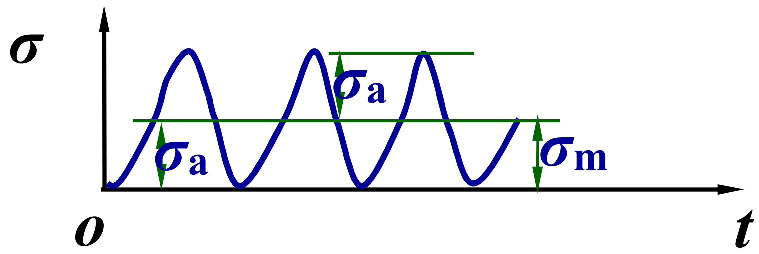
循环特性$r=-1$。



•脉动循环变应力

$\sigma_{min}=0$

$r=0$



•其他情形的稳定循环变应力称为非对称非脉动的循环变应力（简称非对称循环变应力）

•静应力也可看成是变应力的特例，其$\sigma_{max}=\sigma_{min}=\sigma_m$，$\sigma_a=0$，$r=+1$。

•同一零件在相同寿命期限内，σ_a越大，r值越小，越容易产生疲劳失效。

7.2 疲劳极限与极限应力线图

7.2.1 σ-N疲劳曲线与疲劳极限

由前可知，机械零件的强度准则为

$$\sigma_{ca} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\lim}}{[S]}$$

或:

$$S_{ca} = \frac{\sigma_{\lim}}{\sigma_{ca}} \geq [S]$$

只要$\sigma_{\lim}$能确定，则强度准则可以建立。若零件在静应力条件下工作，则$\sigma_{\lim}$为强度极限σ_B或屈服极限σ_s。

式中，$[S]$—安全系数， $\sigma_{\lim}$—极限应力。

变应力下零件的失效是疲劳失效，与静应力时不同，显然其极限应力也不相同，既不是σ_s，也不是σ_B，该极限应力称为疲劳极限。

疲劳极限是指在某循环特性r时的变应力，经过N次循环后，材料不发生破坏的应力极限值（一般指应力最大值σ_{max}），记为σ_{rN}。

σ_{rN}可通过材料试验测定，一般是在材料试件上加上$r = -1$的对称循环变应力或$r = 0$的脉动循环变应力。

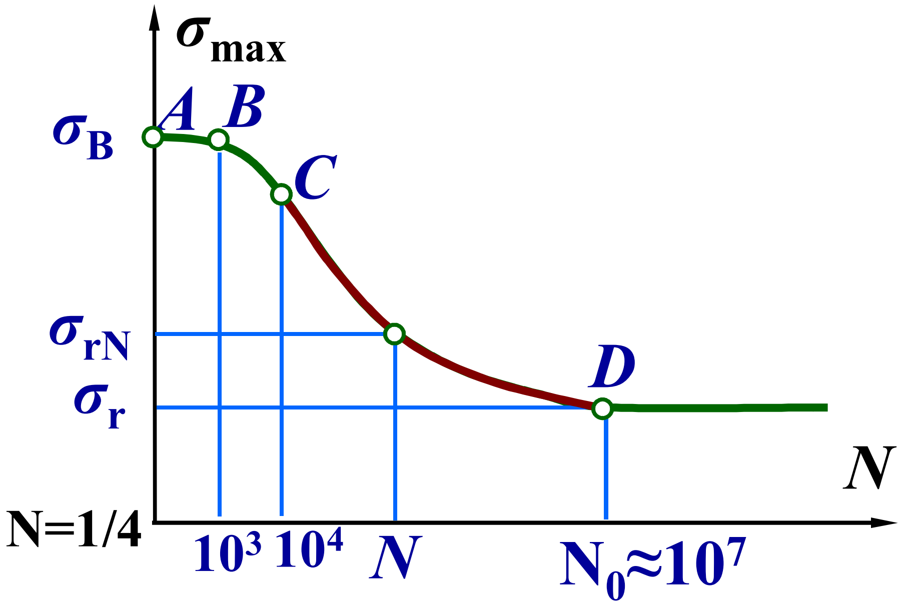
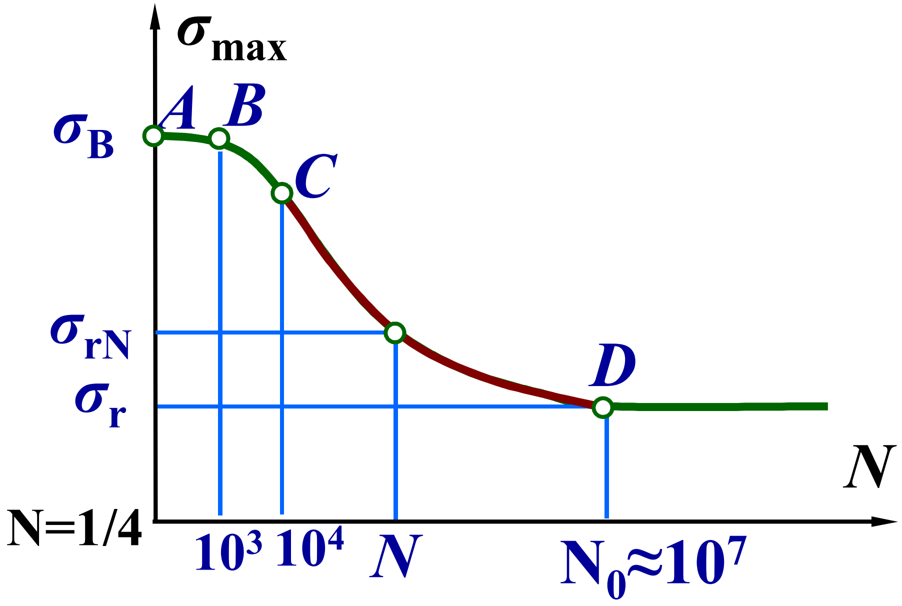


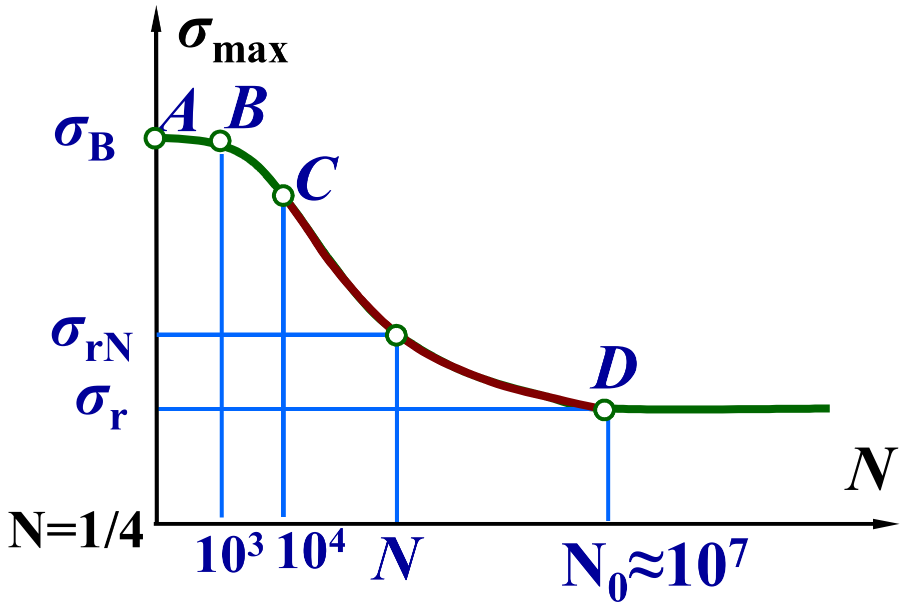
图7.7　材料疲劳曲线（σ-N疲劳曲线）

•***AB*段曲线**（$N\le 10^3$）应力极限值下降很小，所以一般把$N\le 10^3$的变应力强度当成**静应力强度**处理。



•***BC*段曲线**（$N=10^3\sim 10^4$），疲劳极限有明显的下降，经检测断口破坏情况，可见到材料产生塑性变形。这一阶段的疲劳，因整个寿命期**内应力循环次数**仍然**较少**，称"**低周疲劳**"，低周疲劳时的强度可用应变疲劳理论解释。

- *C*以右的线段应力循环次数很多，称高周疲劳，大多数机械零件都工作在这一阶段。



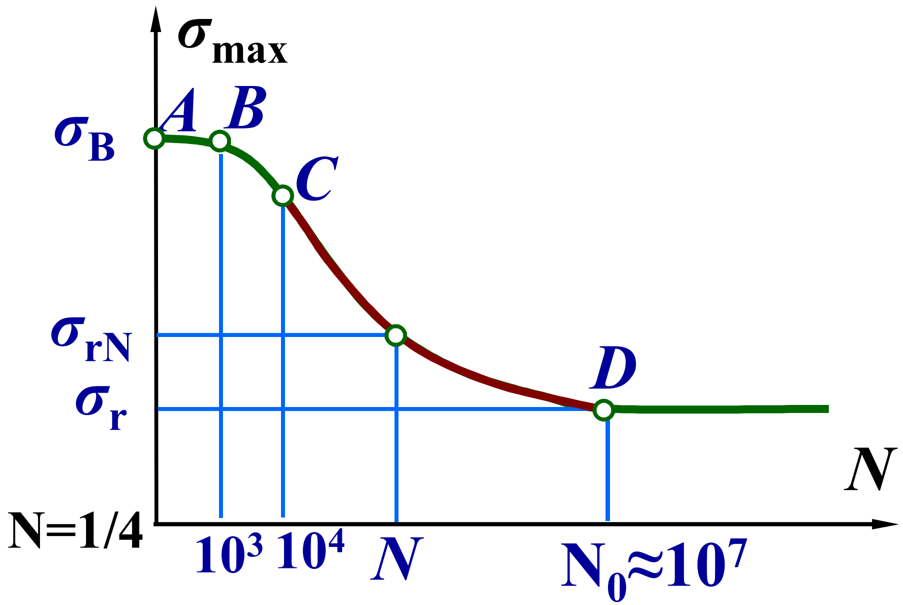
- 在*CD*段曲线上，随着应力水平σ的降低，发生疲劳破坏前的循环次数*N*增多。
- ***CD*段**称为试件的有限寿命疲劳阶段，曲线上任意一点所对应的应力值代表了该循环次数下的疲劳极限称为有限寿命疲劳极限（σ_{rN}）。

• 到达D点后，曲线趋于平缓。

• D点以后的线段表示试件无限寿命疲劳阶段，其疲劳极限称为持久疲劳极限，记为$\sigma_{r\infty}$。

• 持久疲劳极限$\sigma_{r\infty}$可通过疲劳试验测定。

• 在作试验时，常规定一个接近N_D的循环次数N_0，测得其疲劳极限σ_{rN0}（简记为σ_r）



N_0称为循环基数

如果在某一工况下，材料的持久疲劳极限σ_r已得到，则通过有限寿命疲劳区间给定的任一循环次数N可以求得对应有限疲劳极限σ_{rN}

$$\sigma^m{}_{rN}\bullet N=\text{常数} \qquad (7.3)$$

D点处的无限疲劳极限σ_r和N_0, 即得

$$\sigma^m{}_{rN}\cdot N=\sigma^m{}_r\cdot N_0$$

得

$$\sigma_{rN}=\sigma_r\left(N_0/N\right)^{1/m}=\sigma_r K_N \qquad (7.4)$$

式中，$K_N=(N_0/N)^{1/m}$，称为寿命系数 。

•N_0常取（1~10）×10^6

•若$N>N_0$，则取$N=N_0$，即取$K_N=1$

- m为指数，与材料及尺寸有关，其值由试验测定
- 钢材，在弯曲和拉压疲劳时，$m=6\sim20$。
- 若钢制零件受弯曲疲劳时
  - ✓中等尺寸零件：$m=9$，$N_0=5\times10^6$
  - ✓大尺寸零件取：$m=9$，$N_0=10^7$

7.2.2 极限应力线图

1. 材料的极限应力线图

- σ-N曲线表示了某一材料在特定循环特性r下疲劳极限σ_{rN}与应力循环次数N的关系
- 同样的材料，在不同的循环特性r下，可通过实验作出不同的σ-N曲线，从而确定不同的σ_r（如σ_{-1}，σ_0，$\sigma_{0.2}$……）

$$\sigma_{rN}=\sigma_r\left(N_0/N\right)^{1/m}=\sigma_r K_N \qquad (7.4)$$

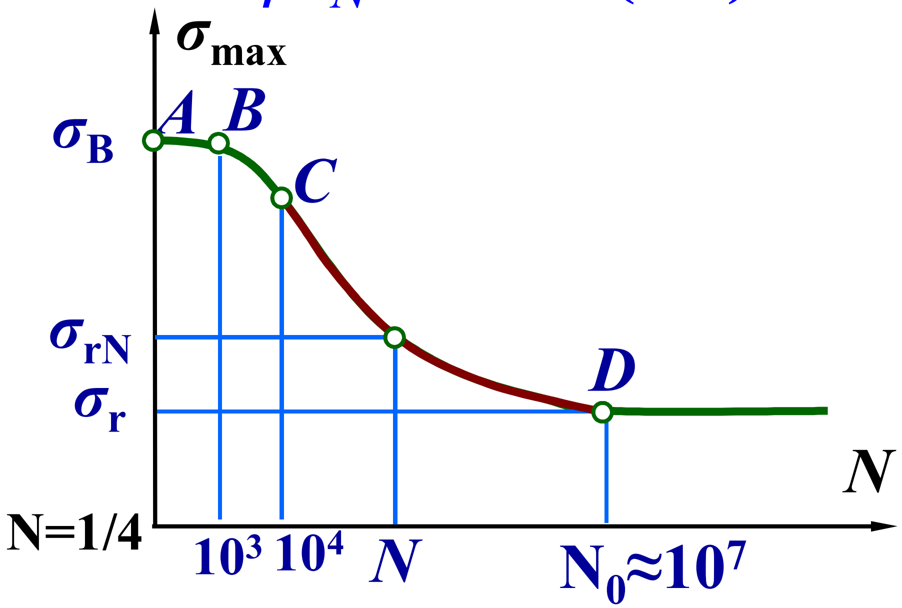


图7.7 材料疲劳曲线（σ-N疲劳曲线）

•同一种材料不可能通过实验确定所有的σ_r，因为循环特性r的变化范围为$-1 \le r \le +1$

•而同一材料的各个σ_r（$-1 \le r \le +1$）值存在着内在的关系。

•通过这种关系和测定若干个特定的σ_r值，就可求得任意循环特性r下的σ_r

•对称循环（r=-1）时的疲劳极限σ_{-1}

•脉动循环（r=0）时的疲劳极限σ_0

•静应力（r=1）时的极限应力σ_{+1}（σ_s或σ_B）

•只利用这三个极限应力，即可求出任意循环特性r时的σ_r。

常用的方法是测出各极限应力σ_r（指的是极限最大应力σ'_{max}），并求出其极限平均应力σ'_m和极限应力幅σ'_a，标在σ_m-σ_a坐标图上。

如图7.8所示，其上任意一点代表某一疲劳极限σ_r（$=\sigma'_{max}=\sigma'_m+\sigma'_a$）。

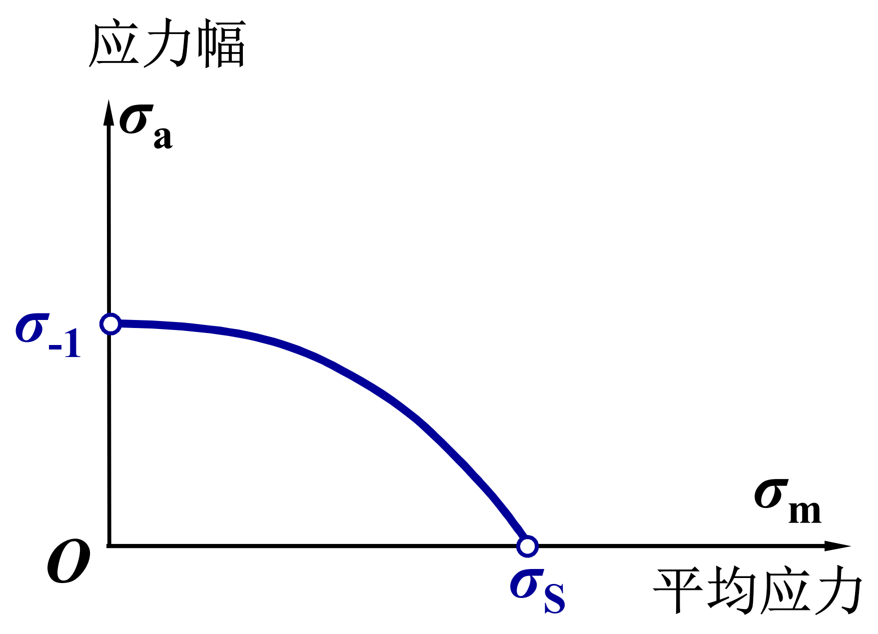
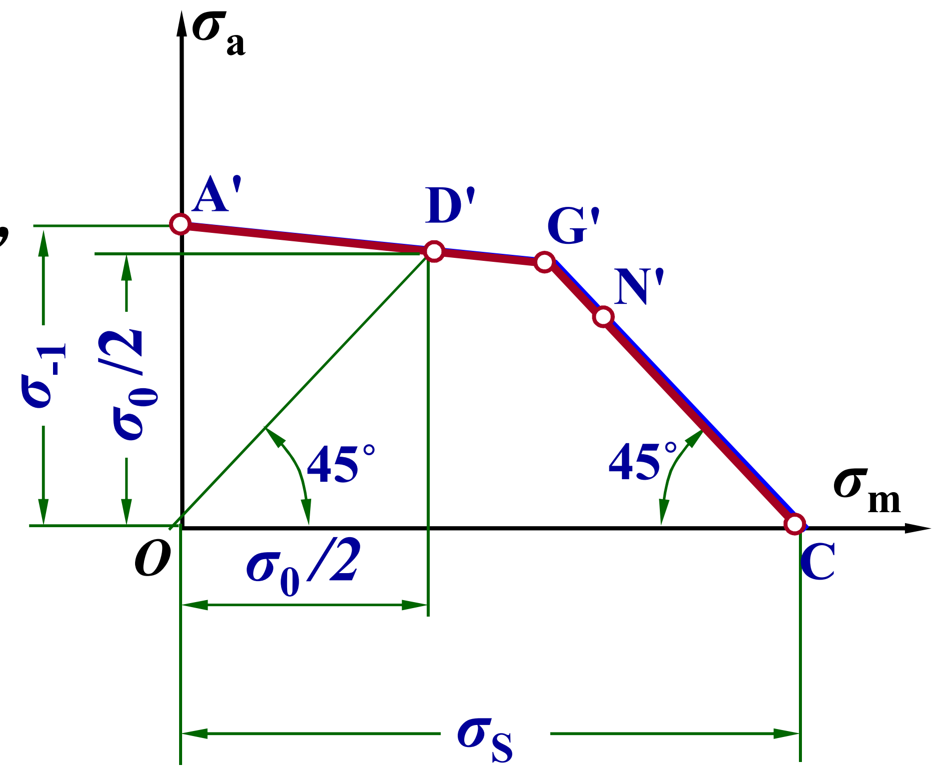


图7.8 材料疲劳寿命曲线(等寿命曲线)

图7.8所示为一条曲线，工程应用时，常把它简化处理成图7.9的分段直线*A’G’C*，



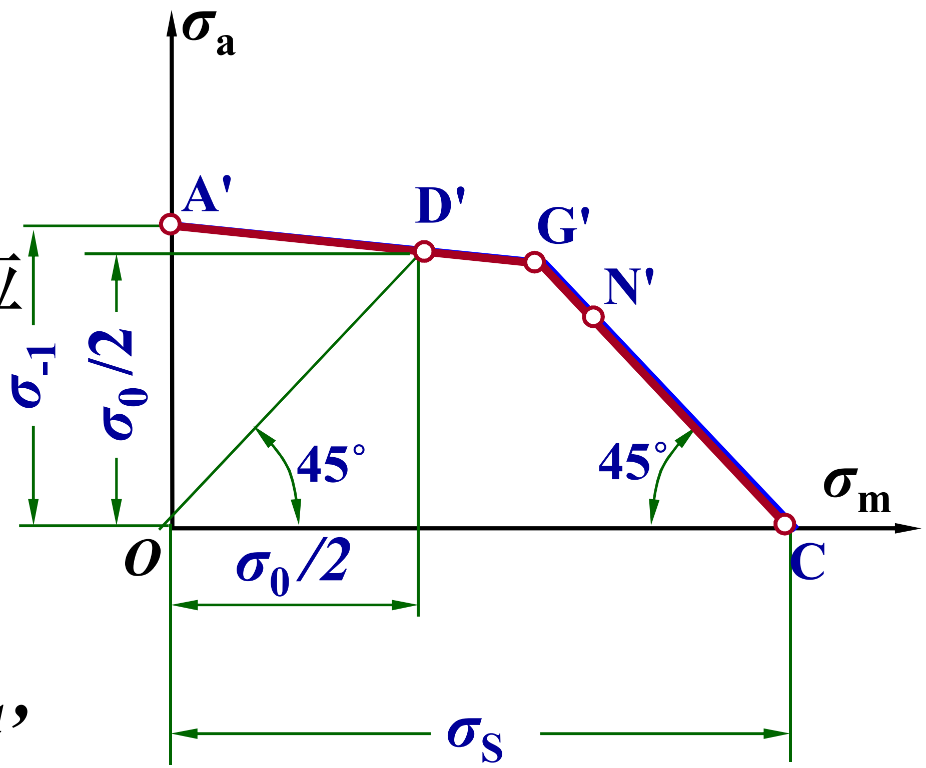
*A’*点表示对称循环变应力时的疲劳极限应力点，

因对称循环平均应力$\sigma'_m=0$，则应力幅σ'_a等于最大应力σ'_{max}（$=\sigma_{-1}$）；

•*D'*表示脉动循环变应力时的疲劳极限应力点，
因脉动循环时
$\sigma'_m=\sigma'_a=\sigma'_{max}/2$（$=\sigma_0/2$）；

•*C*点代表静应力时的极限应力点，因静应力时$\sigma'_a=0$，
$\sigma'_m=\sigma'_{+1}$（$=\sigma_s$或σ_B）。

•过*C*点作与横坐标轴成45°的直线，与直线*A'D'*交于*G'*点，则折线 *A'G'C*表示材料的极限应力线图。



- 若材料中的工作应力处于如图7.9所示$OA'G'C$区域内，则不会产生失效，称为疲劳安全区；
- 若工作应力点恰好落在$A'G'C$线上，则表示处于将发生疲劳的临界状态。

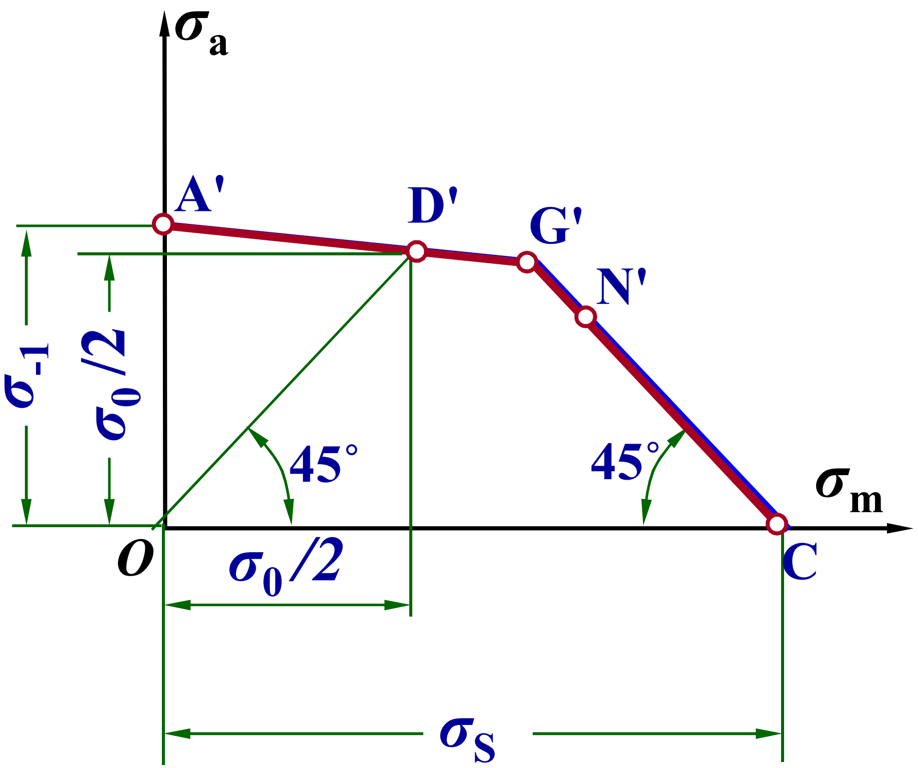


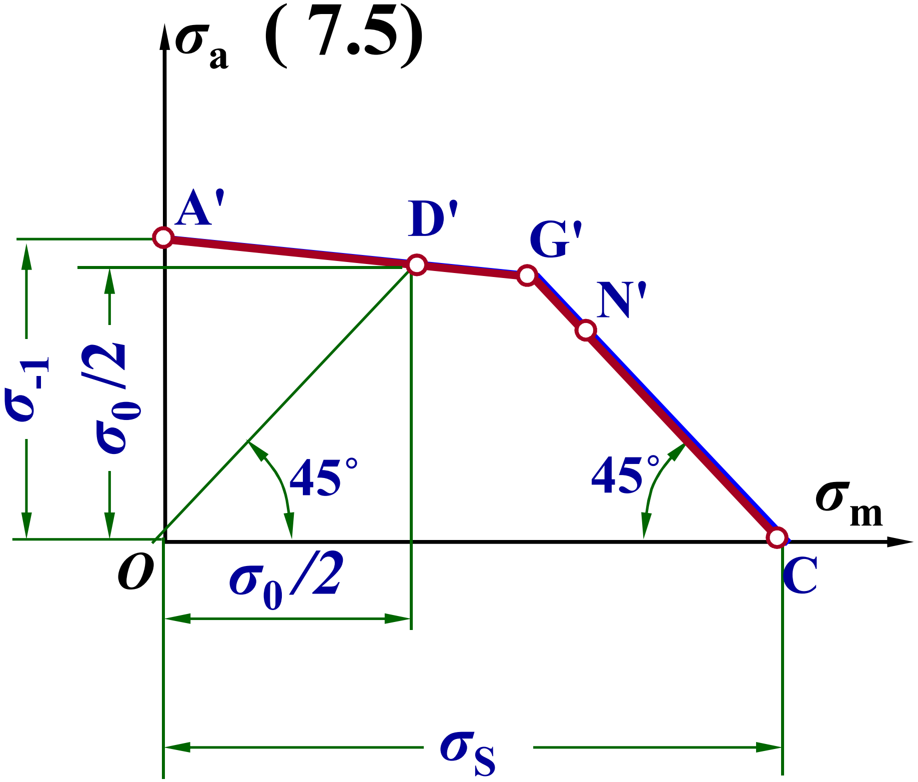
图7.9 材料的极限应力线图

折线$A'G'C$上任意一点表示某一循环特性下的极限应力点
若已知其坐标值（σ'_m，σ'_a），可求得其疲劳极限
$\sigma_r(=\sigma'_{max}=\sigma'_m+\sigma'_a)$

图7.9中直线$A'G'$及$G'C$分别可由两点坐标求得，如下所示：

$A'G'$段：$\psi_\sigma\sigma'_m+\sigma'_a=\sigma_{-1}$

$G'C$段：$\sigma'_m+\sigma'_a=\sigma_s$



• ψ_σ为与材料有关的常数，

$\psi_\sigma=(2\sigma_{-1}-\sigma_0)/\sigma_0$

✓对碳钢，$\psi_\sigma\approx0.1\sim0.2$；

✓对合金钢，$\psi_\sigma\approx0.2\sim0.3$。

2. 零件的极限应力线图

•实际零件的疲劳极限不同于材料试件的疲劳极限

•因素的综合影响使得零件的疲劳极限有所改变，改变的程度用综合影响系数K_σ或K_τ来考虑，K_σ定义为：

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1e}} \tag{7.6}$$

备注：脚标$_\sigma$（k_σ）表示在正应力条件下

脚标$_\tau$（k_τ）表示在切应力条件下

σ_{-1}：材料试件对称循环时的疲 劳极限

σ_{-1e}：实际零件对称循环时的疲 劳极限

•在不对称循环时，上述因素对零件疲劳极限的影响主要是影响疲劳极限的应力幅部分

•根据材料试件的极限应力线图，把直线*A'D'G'*按比例向下平移，变成*ADG*线段，其比例系数为$1/K_\sigma$或$1/K_\tau$

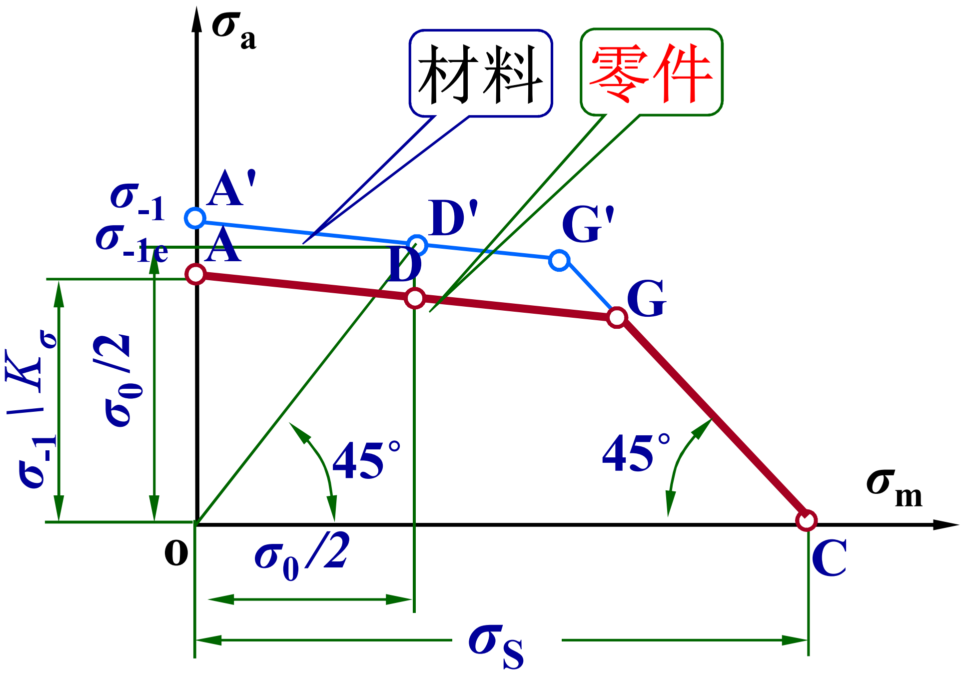


图7.10　零件的极限应力线图

- 折线AGC上任一点的坐标为（σ'_{me}，σ'_{ae}），
- σ'_{me}表示零件疲劳极限的平均应力部分，
- σ'_{ae}表示其应力幅部分
- 若能求出任一点的坐标值（σ'_{me}，σ'_{ae}），则该点所对应的零件疲劳极限为$\sigma'_{max}=\sigma'_{me}+\sigma'_{ae}$。折线AGC的方程分别为

*AG*段：$\psi_{\sigma e}\sigma'_{me}+\sigma'_{ae}=\sigma_{-1e}$

*GC*段：$\sigma'_{me}+\sigma'_{ae}=\sigma'_{s}$

- σ_{-1e}—零件的对称循环疲劳极限的应力幅，
- $\sigma_{-1e}=\sigma_{-1}/K_{\sigma}$；
- $\psi_{\sigma e}$—零件受循环应力时的材料常数。

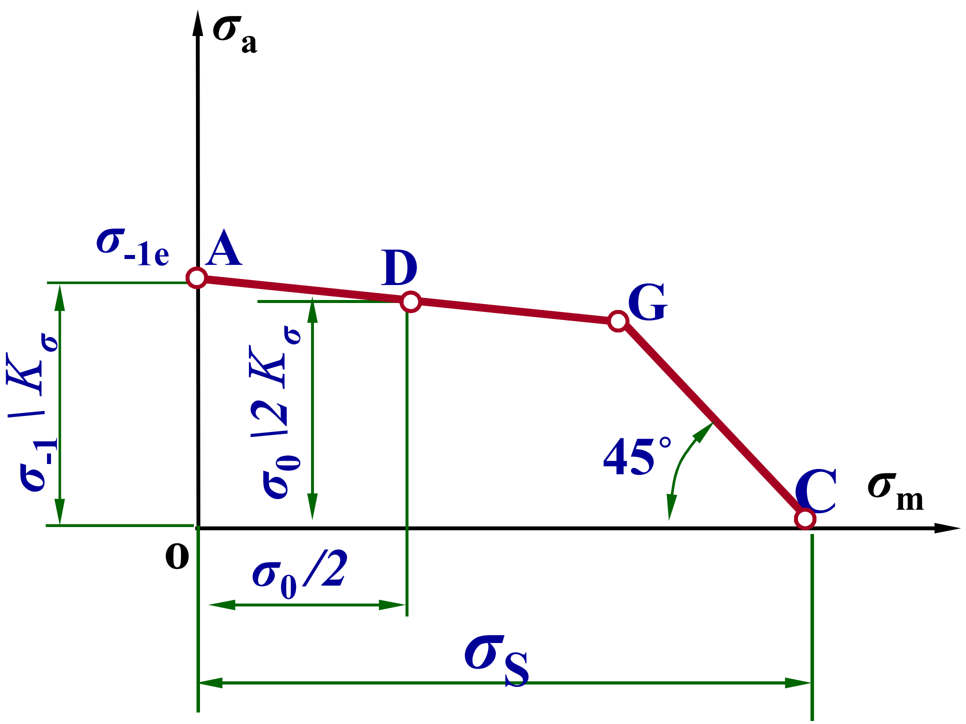


图7.10　零件的极限应力线图

$$\psi_{\sigma e}=\frac{\psi_\sigma}{K_\sigma}=\frac{2\sigma_{-1}-\sigma_0}{K_\sigma\sigma_0}$$

式中，K_σ—弯曲疲劳极限的综合影响系数。K_σ用下式计算：

$$K_\sigma=\left(\frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma}+\frac{1}{\beta_\sigma}-1\right)\frac{1}{\beta_q} \qquad (7.9)$$

式中，k_σ一零件的有效应力集中系数；

ε_σ一零件的尺寸系数；

β_σ一零件的表面质量系数；

β_q一强化系数。

小结：

➢ 变应力的特性

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

或

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a$$

$$\sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a$$

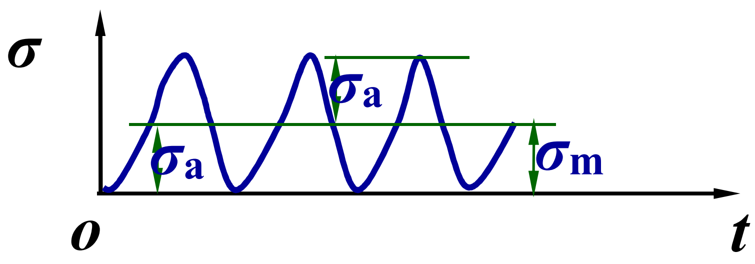
循环特性*r*： $r=\sigma_{min}/\sigma_{max}$

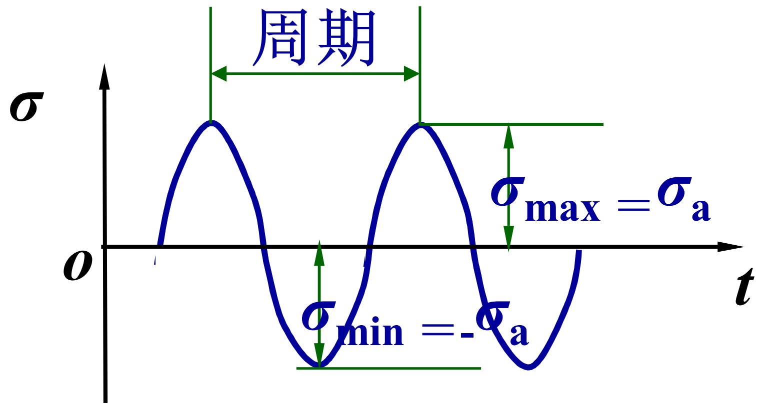
•脉动循环变应力

$\sigma_{min}=0$
r=0

•对称循环变应力

$\sigma_m=0$，$\sigma_{max}=-\sigma_{min}$
σ_{max}与σ_{min}大小相等，方向相反，
循环特性r=－1。





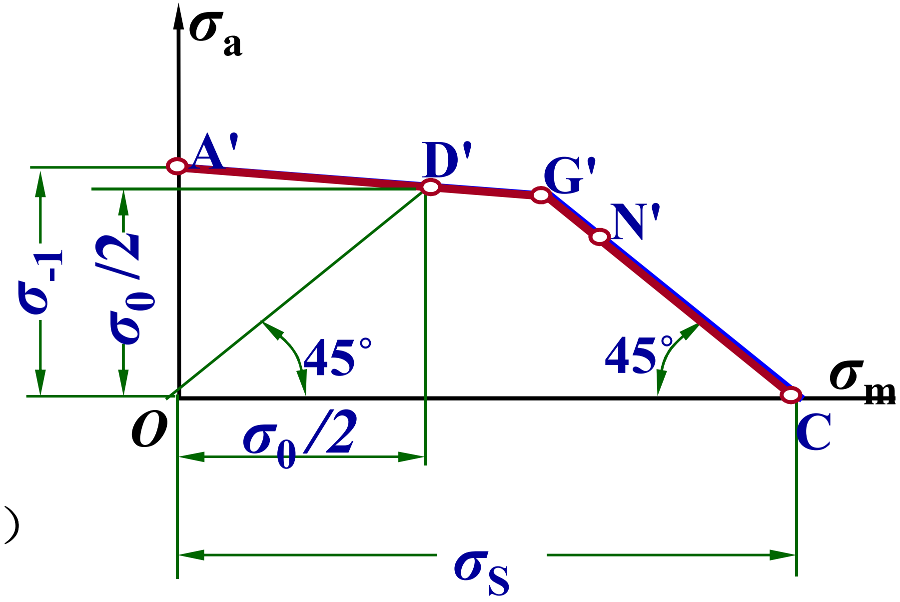
● 静应力：$\sigma_{max}=\sigma_{min}=\sigma_m$，$\sigma_a=0$，r=+1

➢ 材料的极限应力

任意一点代表某一疲劳极限

σ_r（$=\sigma'_{\max}=\sigma'_m+\sigma'_a$）

- 对称循环（r=-1）时的疲劳极限σ_{-1}
- 脉动循环（r=0）时的疲劳极限σ_0
- 静应力（r=1）时的极限应力σ_{+1}（σ_s或σ_B）



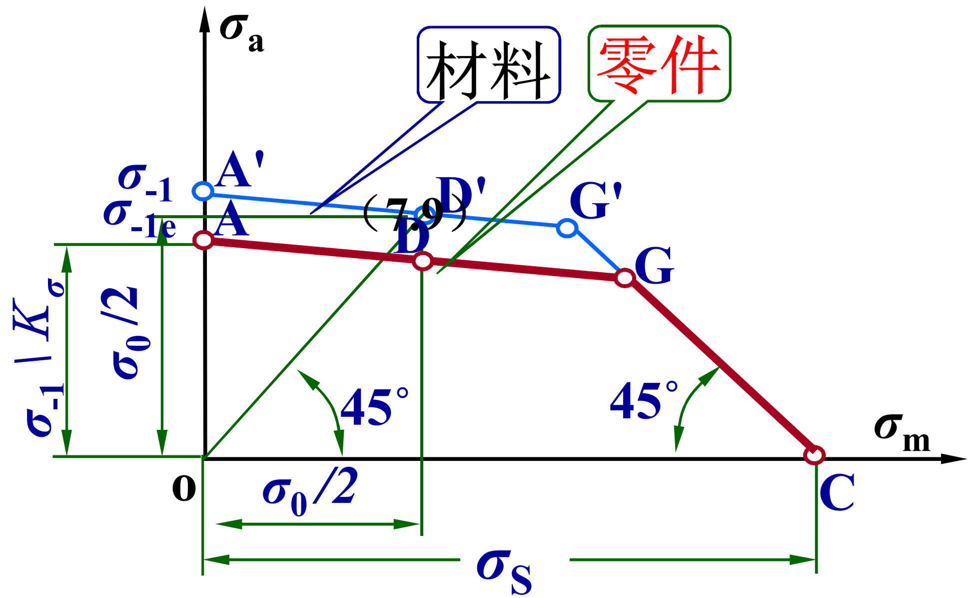
➢ 零件的极限应力

$$\sigma_{-1e}=\frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma}$$

$$K_\sigma=\left(\frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma}+\frac{1}{\beta_\sigma}-1\right)\frac{1}{\beta_q}$$

K_σ—弯曲疲劳极限的综合影响系数。

k_σ—零件的有效应力集中系数；
ε_σ—零件的尺寸系数；
β_σ—零件的表面质量系数；
β_q—强化系数。



7.3 影响机械零件疲劳强度的因素

7.3.1 静强度极限的影响

一般来说，材料的静强度极限越高，其疲劳极限值也越高，疲劳强度也就越好。要提高零件的疲劳强度，可相应采用静强度极限高的材料。

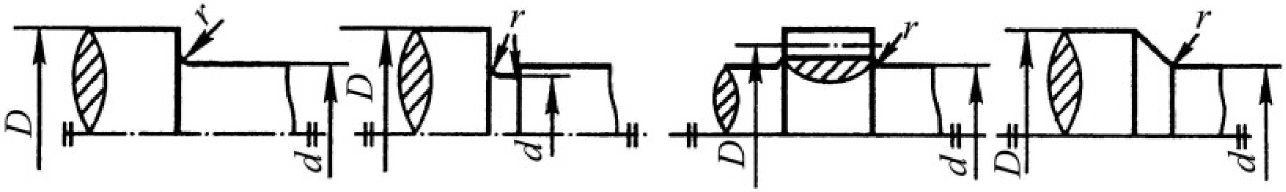
7.3.2 应力集中的影响

在零件上的尺寸突然变化处（如圆角、孔、凹槽等），会使零件受载时产生应力集中，用有效应力集中系数k_σ和k_τ来加以考虑。

备注：脚标$_\sigma$（k_σ）表示在正应力条件下
脚标$_\tau$（k_τ）表示在切应力条件下

•k_σ和k_τ不仅与应力集中源有关，还与零件的材料有关
•材料的强度极限越高，对应力集中的敏感性也越高
•在选用高强度钢材时，需特别注意减少应力集中的影响，否则就无法充分体现出高强度材料的优点

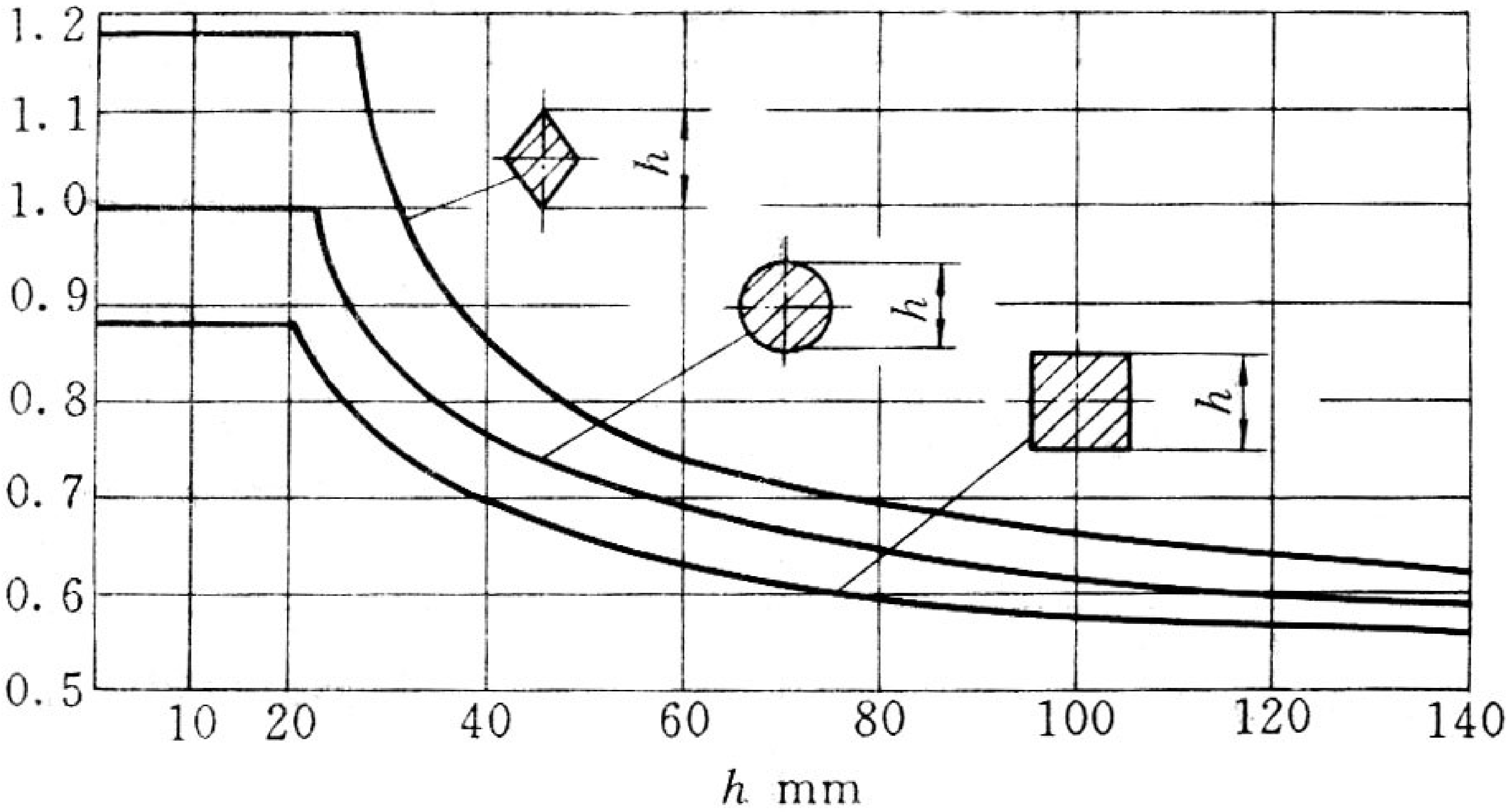
附录11.3 圆角处的有效应力集中系数k_σ和k_τ值



$\frac{D-d}{r}$	$\frac{r}{d}$	k_σ σ_B/MPa 400	500	600	700	800	900	1000	1200	k_τ σ_B/MPa 400	500	600	700	800	900	1000	1200
2	0.01	1.34	1.36	1.38	1.40	1.41	1.43	1.45	1.49	1.26	1.28	1.29	1.29	1.30	1.30	1.31	1.32
	0.02	1.41	1.44	1.47	1.49	1.52	1.54	1.57	1.62	1.33	1.35	1.36	1.37	1.37	1.38	1.39	1.42
	0.03	1.59	1.63	1.67	1.71	1.76	1.80	1.84	1.92	1.39	1.40	1.42	1.44	1.45	1.47	1.48	1.52
	0.05	1.54	1.59	1.64	1.69	1.73	1.78	1.83	1.93	1.42	1.43	1.44	1.46	1.47	1.50	1.51	1.54
	0.10	1.38	1.44	1.50	1.55	1.61	1.66	1.72	1.83	1.37	1.38	1.39	1.42	1.43	1.45	1.46	1.50
4	0.01	1.51	1.54	1.57	1.59	1.62	1.64	1.67	1.72	1.37	1.39	1.40	1.42	1.43	1.44	1.46	1.47
	0.02	1.76	1.81	1.86	1.91	1.96	2.01	2.06	2.16	1.53	1.55	1.58	1.59	1.61	1.62	1.65	1.68
	0.03	1.76	1.82	1.88	1.94	1.99	2.05	2.11	2.23	1.52	1.54	1.57	1.59	1.61	1.64	1.66	1.71
	0.05	1.70	1.76	1.82	1.88	1.95	2.01	2.07	2.19	1.50	1.53	1.57	1.59	1.62	1.65	1.68	1.74
6	0.01	1.86	1.90	1.94	1.99	2.03	2.08	2.12	2.21	1.54	1.57	1.59	1.61	1.64	1.66	1.68	1.73
	0.02	1.90	1.96	2.02	2.08	2.13	2.19	2.25	2.37	1.59	1.62	1.66	1.69	1.72	1.75	1.79	1.86
	0.03	1.89	1.96	2.03	2.10	2.16	2.23	2.30	2.44	1.61	1.65	1.68	1.72	1.74	1.77	1.81	1.88

7.3.3 尺寸大小的影响

其他条件相同时，零件的尺寸越大，其疲劳强度越低。因为加工零件时，尺寸越大，产生缺陷的可能性越大。用尺寸系数ε_σ或ε_τ来考虑尺寸大小的影响。



附图**11.1** 钢材的尺寸及截面形状系数 ε_σ

7.3.4 表面状态的影响

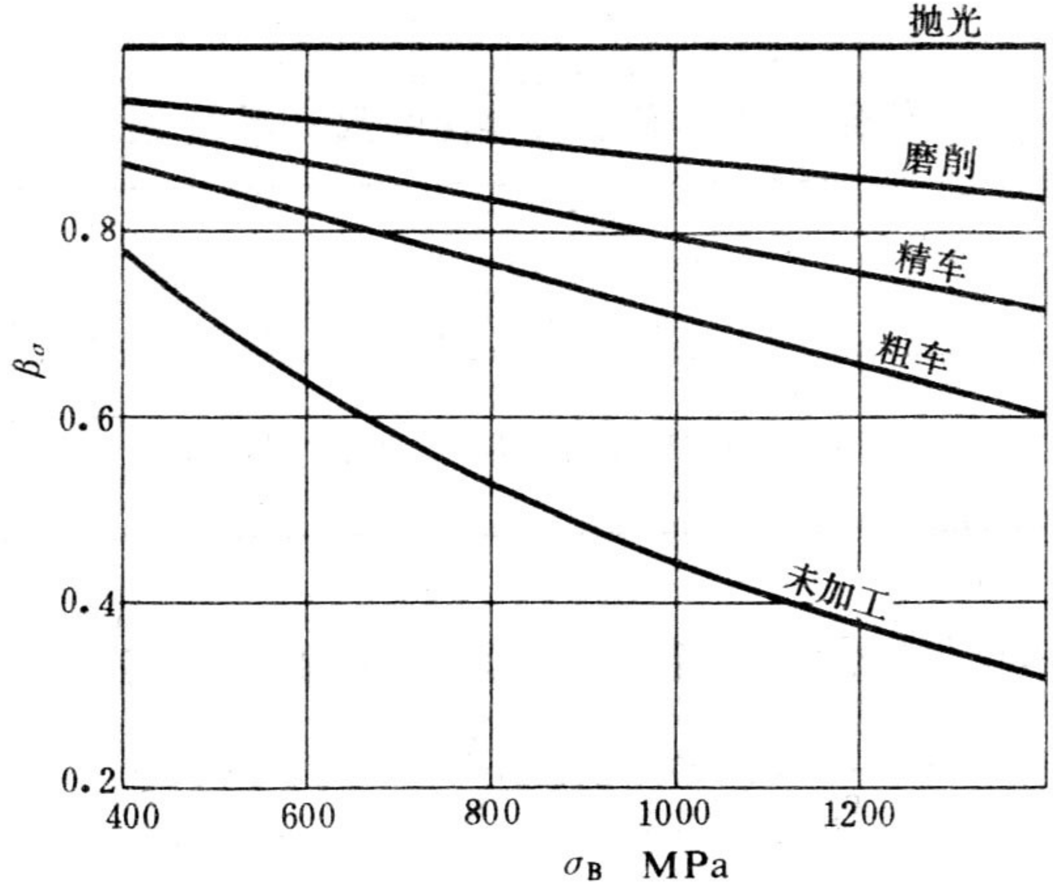
•零件的表面加工得越光滑，其疲劳强度就越高。

•用β_σ或β_τ来考虑表面状态对疲劳强度的影响。

•对钢材而言，表面状态越光滑，β_σ或β_τ值越大，强度极限越大，其K_σ越小。

•从提高疲劳强度的角度考虑，采用高强度钢材时应提高其表面加工质量，才能体现出高强度钢材的优点。

•铸铁对于加工后的表面状态不敏感，故取$\beta_\sigma=\beta_\tau=1$



钢材的表面质量系数β_σ

7.3.5 表面强化因素的影响

采用表面强化措施，如采用渗碳、渗氮、淬火等热处理方法，及采用表面喷丸、滚压等工艺方法，均可大幅度提高零件的疲劳强度，用强化系数β_q来考虑，若无强化措施，则取β_q =1。

7.4 稳定变应力下机械零件的疲劳强度计算

作疲劳强度计算时，常用的方法是安全系数法：即计算零件危险截面处的安全系数，判断该安全系数值是否大于许用安全系数。

计算安全系数有两种方法，一种是以极限最大应力与工作最大应力之比作为安全系数，则强度条件为：

$$S_{ca}=\frac{\sigma'_{\max}}{\sigma_{\max}}\geq[S]$$

安全系数的另一种求法是以极限应力幅与工作应力幅之比作为安全系数，则强度条件为：

$$S_a=\frac{\sigma'_{ae}}{\sigma_a}\geq[S]$$

7.4.1 单向应力状态下的疲劳强度计算

如前所述，可作出零件的极限应力线图*AGC*

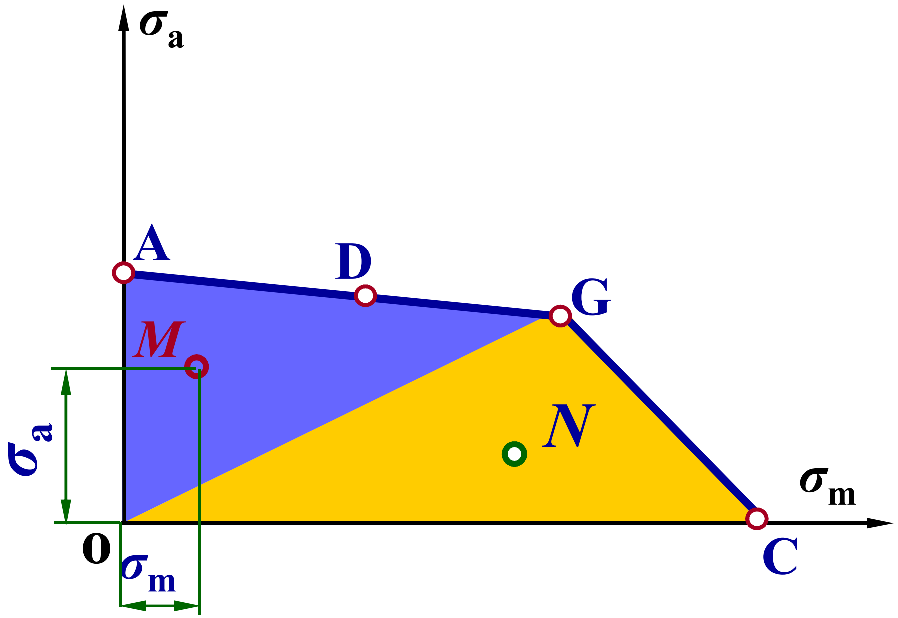


图7.11　零件的应力在极限应力线图坐标的位置

根据零件的受载求得其最大应力σ_{max}，最小应力σ_{min}，据此计算出平均应力σ_m，应力幅σ_a，标在图中，即为工作应力点*M*（σ_m，σ_a），如图示工作应力点落在安全区内。

常见的应力变化规律有三种情形：

a）循环特性保持不变，即r=C，如转轴的弯曲应力；

b)平均应力保持不变，即σ_m=C，如车辆的减震弹簧的应力状态；

c) 最小应力保持不变，即$\sigma_{\min}$=C，如受轴向变载荷的紧螺栓连接中螺栓的应力。

以下分别讨论这三种情况下安全系数的计算方法。

1. r=C的情况

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_m}=\frac{(\sigma_{\max}-\sigma_{\min})/2}{(\sigma_{\max}+\sigma_{\min})/2}=\frac{1-r}{1+r}=C'$$

式中，C'—另一常数。

从坐标原点引射线通过工作应力点M，交极限应力线于M'_1点，M'_1点为所求的极限应力点。

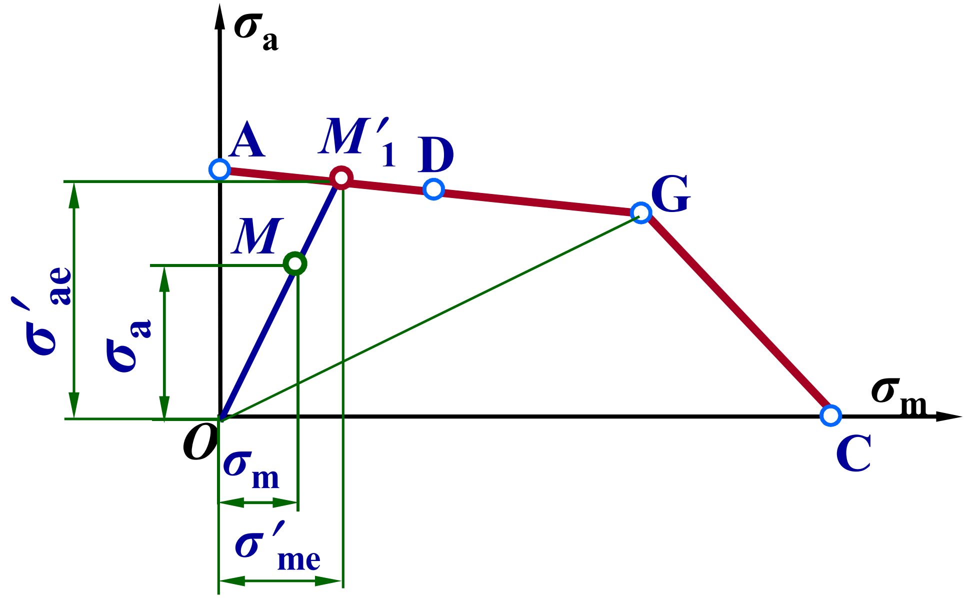


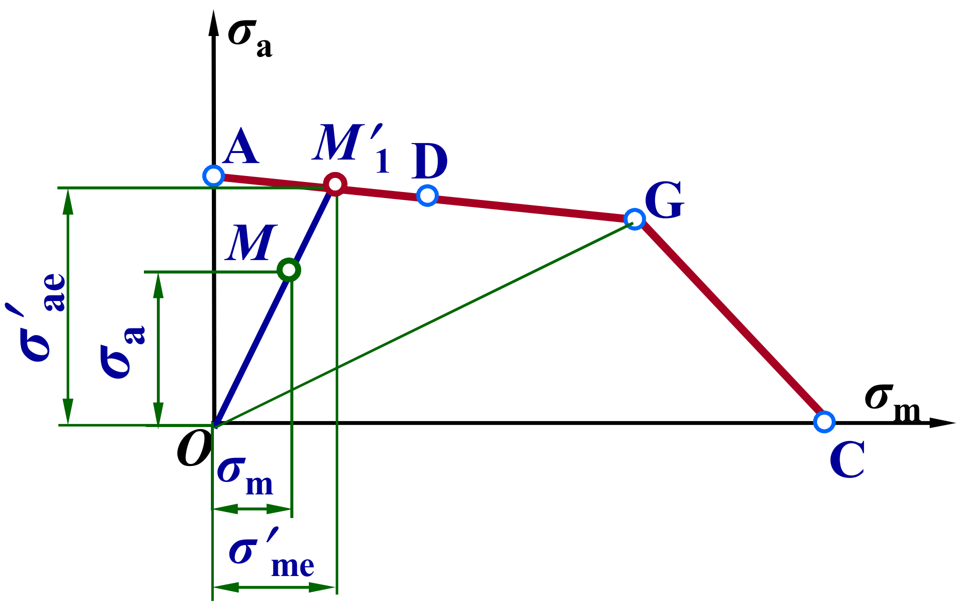
图7.12　r=C时的极限应力

根据直线*OM*和直线*AG*的方程式，可求出M'_1 (σ'_{me}，σ'_{ae})，则零件的疲劳极限：

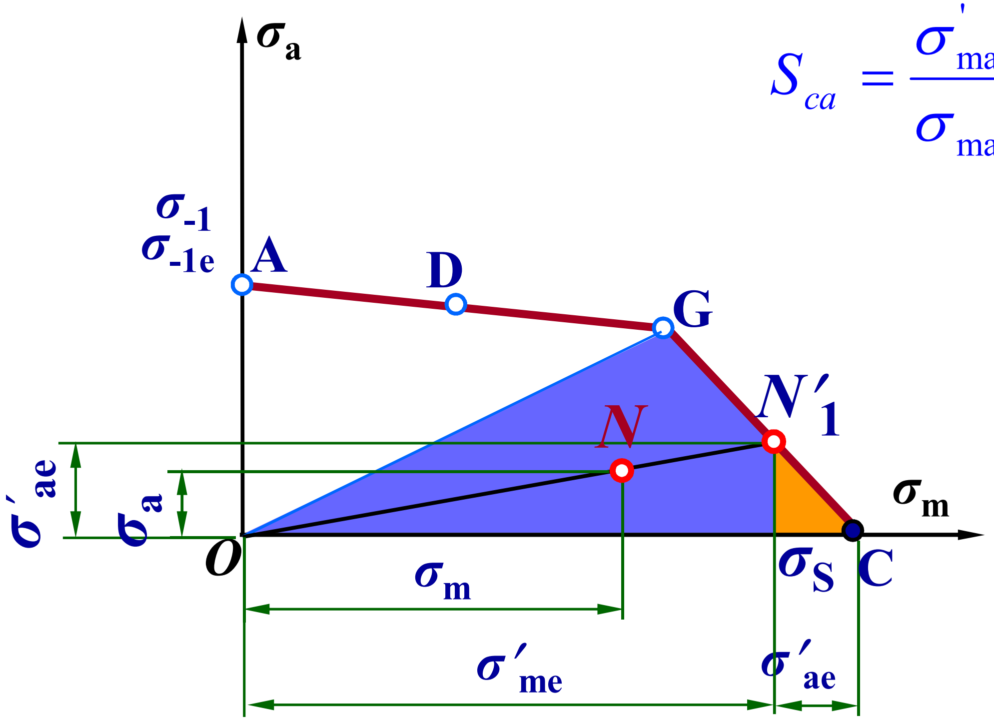
$$\sigma'_{max} = \sigma'_{me} + \sigma'_{ae} = \frac{\sigma_{-1}(\sigma_m + \sigma_a)}{K_\sigma \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m} = \frac{\sigma_{-1}\sigma_{max}}{K_\sigma \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m} \qquad (7.12)$$

安全系数计算值及强度条件为

$$S_{ca} = \frac{\sigma'_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m} \geq [S] \qquad (7.13)$$



若工作应力点位于N点，同理可得其极限应力点N'_1，疲劳极限$\sigma'_{\max}=\sigma'_{me}+\sigma'_{ma}=\sigma_s$，则强度公式为



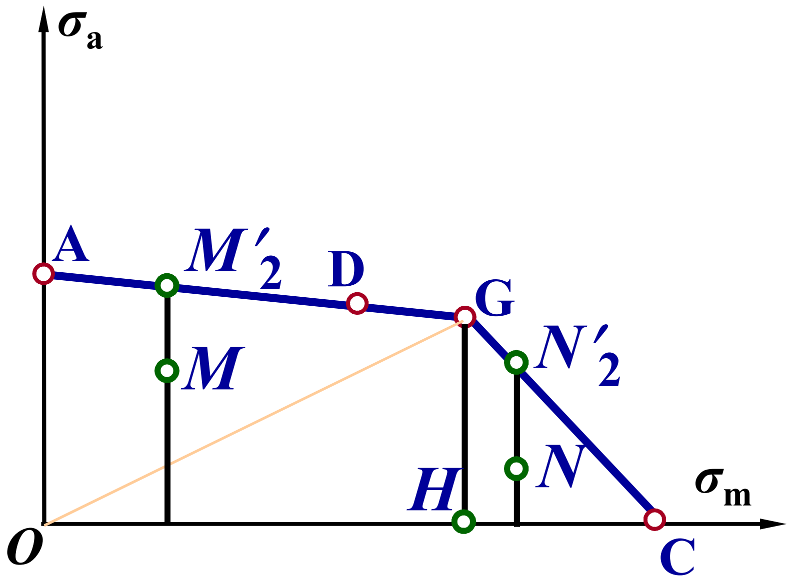
$$S_{ca}=\frac{\sigma'_{\max}}{\sigma_{\max}}=\frac{\sigma_S}{\sigma_{\max}}\geq[S] \quad \textbf{(7.14)}$$

- ***OAG*为疲劳安全区**
- ***OGC*为塑性安全区**

2．σ_m=C的情况

过M点作与纵坐标轴平行的直线，与AG之交点M'_2即为极限应力点。

可求出其坐标值$M'_2\,(\sigma'_{me},\ \sigma'_{ae})$为



a) σ_m=C

图7.13 极限应力线图

$$\sigma'_{ae}=\frac{\sigma_{-1}-\psi_{\sigma}\sigma_m}{K_{\sigma}}$$

$$\sigma'_{me}=\sigma_m$$

则最大应力为

$$\sigma'_{\max}=\sigma'_{me}+\sigma'_{ae}=\frac{\sigma_{-1}+(K_{\sigma}-\psi_{\sigma})\sigma_m}{K_{\sigma}}$$

根据最大应力求得的安全系数计算值及强度条件为

$$S_{ca}=\frac{\sigma'_{\max}}{\sigma_{\max}}=\frac{\sigma_{-1}+(K_\sigma-\psi_\sigma)\sigma_m}{K_\sigma(\sigma_m+\sigma_a)}\geq[S] \quad (7.15)$$

根据应力幅求得的安全系数计算值及强度条件为

$$S_a=\frac{\sigma'_{ae}}{\sigma_a}=\frac{\sigma_{-1}-\psi_\sigma\sigma_m}{K_\sigma\sigma_a}\geq[S] \quad (7.16)$$

3. $\sigma_{\min}=C$的情况

$\sigma_{\min}=C$，即$\sigma_m-\sigma_a=C$

过工作应力点M作与横坐标轴成45°的直线，交AG线于M'_3点，M'_3点即为所求的极限应力点。

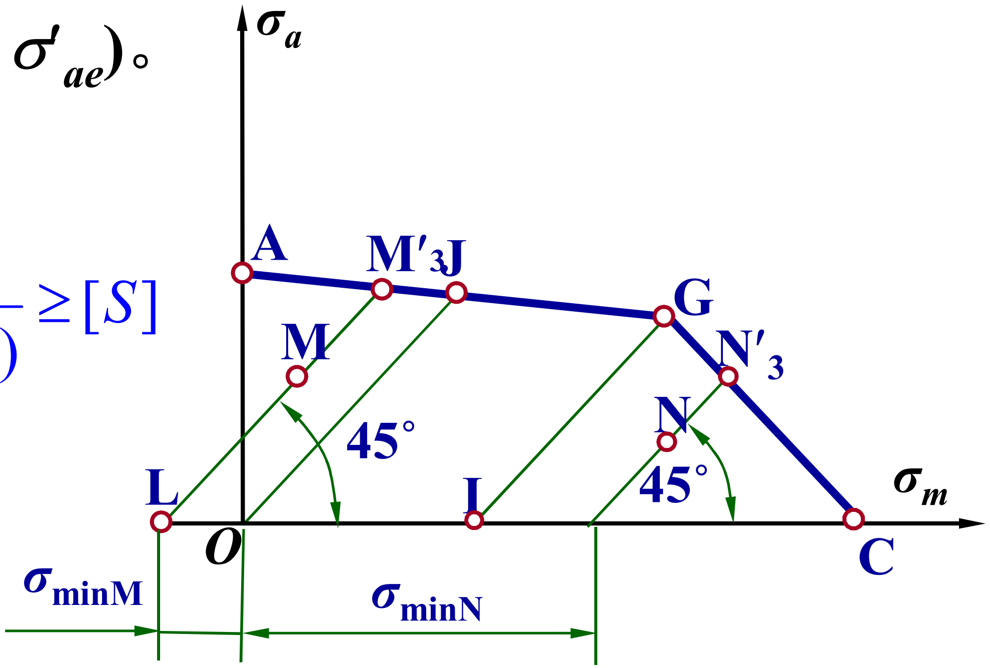
可求出其坐标值$M'_3(\sigma'_{me},\ \sigma'_{ae})$。

强度条件为：

$$S_{ca}=\frac{\sigma'_{\max}}{\sigma_{\max}}=\frac{2\sigma_{-1}+(K_\sigma-\psi_\sigma)\sigma_{\min}}{(K_\sigma+\psi_\sigma)(\sigma_a+2\sigma_{\min})}\geq[S]$$

或

$$S_a=\frac{\sigma'_{ae}}{\sigma_a}=\frac{\sigma_{-1}-\psi_\sigma\sigma_{\min}}{(K_\sigma+\psi_\sigma)\sigma_a}\geq[S]$$



b) $\sigma_{\min}=C$

图7.13 极限应力线图

上述三种情况下的公式也同样适用于切应力的情况，只需用τ代替各式中的σ即可。

注意：

- 若零件所受应力变化规律不能肯定，一般采用 **r =C**的情计算

- 对切应力上述公式同样适用，只需将**σ**改为**τ**即可。

7.4.2 复合应力状态下的疲劳强度计算

零件工作时其危险截面上既有正应力（σ）作用，又有切应力（τ）作用，则零件危险截面处于复合应力状态。多数零件（如转轴）工作在复合应力状态。复合应力的变化规律是多种多样的。

经理论分析和试验研究，目前只有对称循环时的计算方法，且σ和τ是同相位同周期变化的。

下面就介绍这种情形时的安全系数计算方法。若实际情形与其不同（如为非对称循环）。一般暂采用对称循环的计算方法。

在零件上同时作用有同周期同相位的对称循环正应力（σ）和切应力（τ）时，根据试验及理论分析，有如下关系式：

$$\left(\frac{\sigma_a^{'}}{\sigma_{-1e}}\right)^2+\left(\frac{\tau_a^{'}}{\tau_{-1e}}\right)^2=1 \qquad (7.19)$$

σ_{-1e}和τ_{-1e}:零件的正应力和切应力时的疲劳极限；

σ'_a和τ'_a :同时作用的正应力和切应力的极限应力幅。

因为是对称循环，应力幅等于最大应力。

在σ_a/σ_{-1e}—τ_a/τ_{-1e}坐标系上为一单位圆

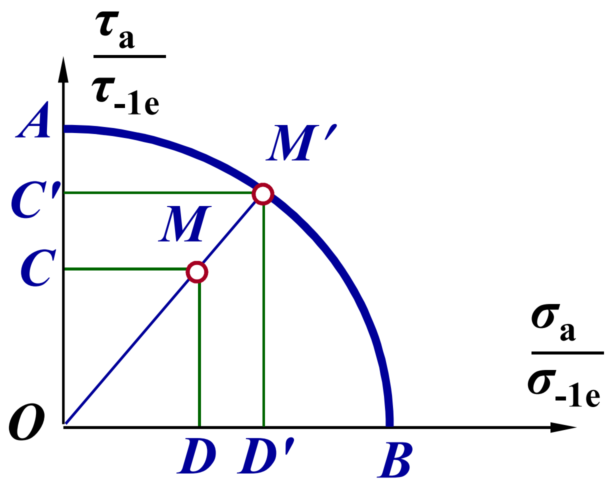


图5.14 双向应力时的极限应力线图

求出作用于零件上的应力幅σ_a和τ_a，标在图中，若M点在极限圆内，则零件是安全的，但安全系数S_{ca}等于多少还需要进一步计算。

连接M与坐标原点O，直线OM交圆于M'点，M'点即为极限应力点。

$$S_{ca} = \frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OD'}}{\overline{OD}}$$

计算得

$$S_{ca} = \frac{S_\sigma S_\tau}{\sqrt{S_\sigma^2 + S_\tau^2}}$$

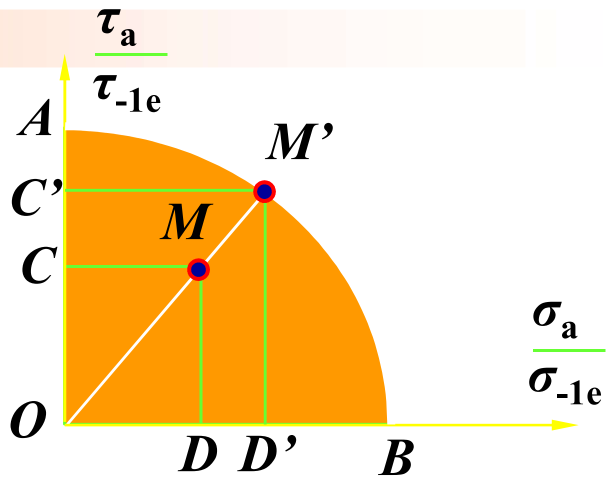
计算安全系数：$S_{\mathrm{ca}} = \dfrac{OM'}{OM} = \dfrac{OC'}{OC} = \dfrac{OD'}{OD}$

因为：$OC' = \dfrac{\tau'_a}{\tau_{-1e}}$ $OC = \dfrac{\tau_a}{\tau_{-1e}}$ $OD' = \dfrac{\sigma'_a}{\sigma_{-1e}}$ $OD = \dfrac{\sigma_a}{\sigma_{-1e}}$

于是有：$\tau'_a = S_{ca}\tau_a$　　　$\sigma'_a = S_{ca}\sigma_a$

将τ_a'及σ_a'代入到极限应力关系可得：

$$\left(\frac{S_{ca}\tau_a}{\tau_{-1e}}\right)^2+\left(\frac{S_{ca}\sigma_a}{\sigma_{-1e}}\right)^2=1$$



$$\left(\frac{\tau_{-1e}}{\tau_a}\right)=S_\tau \qquad 和\left(\frac{\sigma_{-1e}}{\sigma_a}\right)=S_\sigma$$

而是只承受切向应力或只承受法向应力时的计算安全系数。

于是求得计算安全系数：

$$S_{ca}=\frac{OM'}{OM}=\frac{S_\sigma S_\tau}{\sqrt{S_\sigma^2+S_\tau^2}}$$

说明只要工作应力点M落在极限区域以内，就不会达到极限条件，因而总是安全的。

当零件上所承受的两个变应力均为不对称循环时，有：

$$S_\sigma=\frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma\sigma_a+\psi_\sigma\sigma_m} \qquad S_\tau=\frac{\tau_{-1}}{K_\tau\tau_a+\psi_\tau\tau_m}$$

7.5 规律性不稳定变应力时机械零件的疲劳强度计算

7.5.1 疲劳损伤累积假说

疲劳损伤累积假说认为：在每一次应力作用下，零件就会造成一定的疲劳损伤，当疲劳损伤累积到一定程度，便发生疲劳破坏。

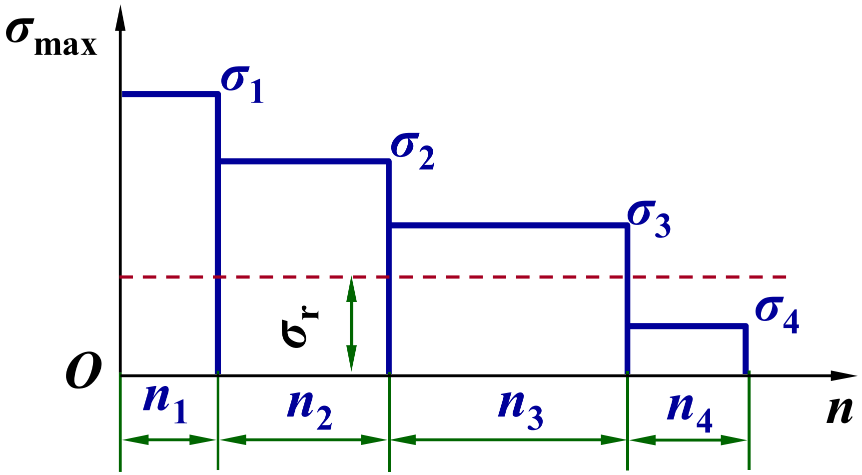
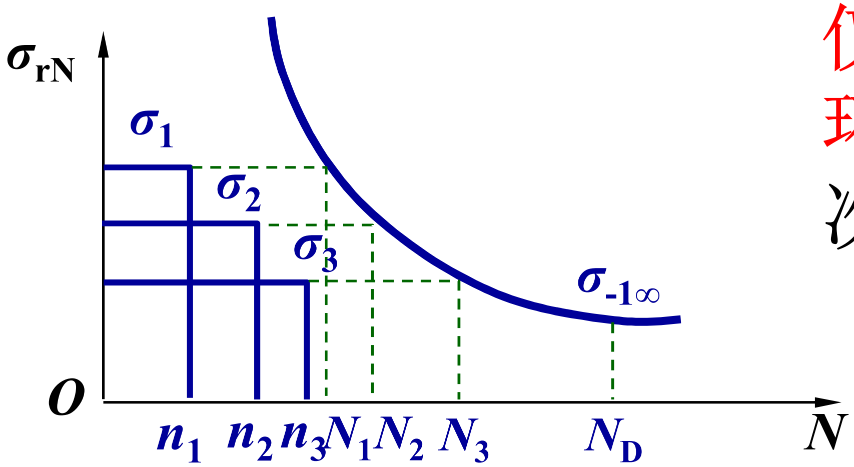


图7.15　规律不稳定变应力

采用线性疲劳累积计算方法：

$$\sum 疲劳损伤率=100\% \qquad (7.21)$$

需求出在各应力作用下的疲劳损伤率。



仅有σ_1作用时的极限应力循环次数N_1，现实际作用了n_1次，则其损伤率为n_1/N_1

图7.16 不稳定变应力在σ_{rN}-N坐标上

- σ_1作用了n_1次，损伤率为n_1/N_1
- σ_2作用了n_2次，损伤率为n_2/N_2
- σ_3作用了n_3次，损伤率为n_3/N_3
- σ_4因为小于持久疲劳极限，可以无限次地作用下去，而不会引起疲劳损伤

线性疲劳损伤累积计算式为：

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{n_i}{N_i}=\frac{n_1}{N_1}+\frac{n_2}{N_2}+\frac{n_3}{N_3}=1 \qquad (7.22)$$

- 理论上损伤率达到1时，零件就会发生疲劳破坏
- 试验结果是，许可的损伤率在0.7~2.2间。

7.5.2 疲劳强度计算

根据（7.4）式$\sigma_{rN}=\sigma_r$（N_0/N）$^{1/m}$ $=\sigma_r K_N$可得：

$$N_1=N_0\left(\frac{\sigma_r}{\sigma_1}\right)^m,\quad N_2=N_0\left(\frac{\sigma_r}{\sigma_2}\right)^m,\quad \ldots,\quad N_i=N_0\left(\frac{\sigma_r}{\sigma_i}\right)^m,\quad \ldots$$

疲劳极限条件为：

$$\frac{1}{N_0\sigma_r^m}(\sigma_1^m n_1+\sigma_2^m n_2+\cdots+\sigma_i^m n_i+\cdots\sigma_z^m n_z)=\frac{1}{N_0\sigma_r^m}\sum_{i=1}^{z}\sigma_i^m n_i=1$$

则强度条件为：

$$\frac{1}{N_0\sigma_r^m}\sum_{i=1}^{z}\sigma_i^m n_i\le 1\quad 或\quad \sum_{i=1}^{z}\sigma_i^m n_i\le N_0\sigma_r^m\qquad（7.23）$$

令 $\sigma_{ca}=\sqrt[m]{\dfrac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{z}\sigma_i^m n_i}$ ，则强度条件为 $\sigma_{ca}\le\sigma_r$

若把许用安全系数考虑进去，则强度条件为

$$\sigma_{ca}\le[\sigma]=\frac{\sigma_r}{[S]} \qquad (7.24)$$

或

$$S_{ca}=\frac{\sigma_r}{\sigma_{ca}}\ge[S] \qquad (7.25)$$

上述为零件材料在规律性不稳定变应力下疲劳强度的计算方法。

例题7.1 某试件材料用45号钢，调质，σ_{-1}=300MPa，m=9，N_0=5×10^6，该试件工作在对称循环变应力下，以最大应力σ_1=500MPa作用10^4次，σ_2=400MPa作用10^5次，σ_3=200MPa作用10^6次，试求安全系数计算值S_{ca}。若要求其再工作10^6次，求其能承受的最大应力。

解：

（1）求安全系数计算值S_{ca}

因$\sigma_3<\sigma_r$，理论上不会造成疲劳损伤，故不计入。

$$\sigma_{ca}=\sqrt[m]{\frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{z}\sigma_i^m n_i}=\sqrt[9]{\frac{1}{5\times10^6}(500^9\times10^4+400^9\times10^5)}=275.52 \quad \text{MPa}$$

$$S_{ca}=\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{ca}}=\frac{300}{275.52}=1.089$$

（2）求$n_3=10^6$时的σ_3大小

$$N_1=N_0\left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_1}\right)^m=5\times10^6\times\left(\frac{300}{500}\right)^9=0.050388\times10^6$$

$$N_2=N_0\left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_2}\right)^m=5\times10^6\times\left(\frac{300}{400}\right)^9=0.375423\times10^6$$

极限条件为

$$\frac{n_1}{N_1}+\frac{n_2}{N_2}+\frac{n_3}{N_3}=1$$

$$N_3=n_3\cdot\frac{1}{1-\frac{n_1}{N_1}-\frac{n_2}{N_2}}=10^6\times\frac{1}{1-\frac{10^4}{0.050388\times10^6}-\frac{10^5}{0.375423\times10^6}}=1.868551\times10^6$$

$$\sigma_3=\sigma_{-1}\sqrt[m]{\frac{N_0}{N_3}}=300\times\sqrt[9]{\frac{5\times10^6}{1.868551\times10^6}}=334.67\quad \mathbf{MPa}$$

即要求再作用10^6次，其最大应力为334.67MPa。

需要指出，若求得的$N_3\geq N_0$，则表示可无限循环下去，则$\sigma_3\leq\sigma_r=300$MPa

7.6 机械零件的接触疲劳强度

高副零件工作时理论上是点接触（如滚动轴承）或线接触（如齿轮）。实际上由于弹性变形，接触处为一微小面积。在接触处零件表层微小的面积内承受很大的压力，所产生的应力称为接触应力，用σ_H表示。

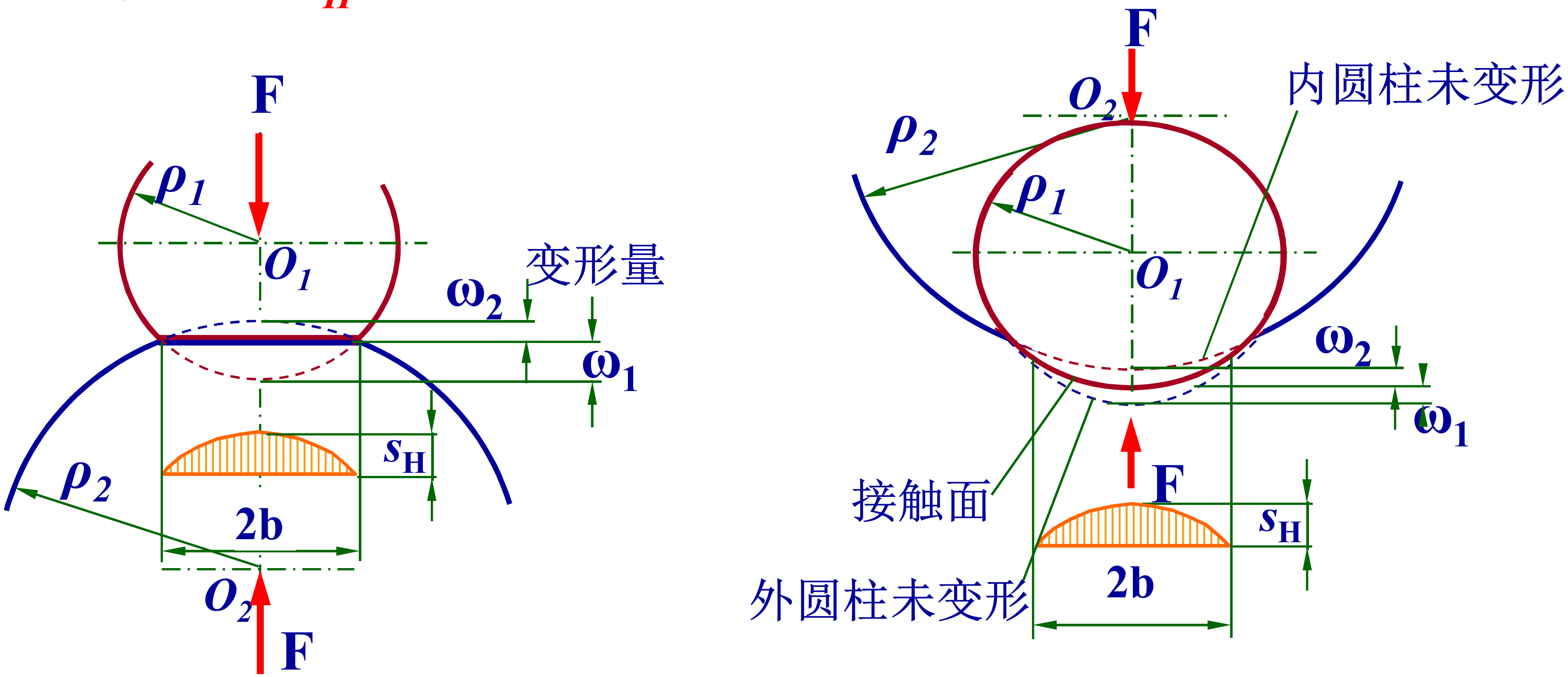


图7.17 两圆柱体接触受力后的变形与应力分布

由图可见在载荷作用线上σ_H最大，
其计算公式（赫兹公式）如下：

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{F}{\pi b}\left(\frac{\frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{\rho_2}}{\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}}\right)} \qquad (7.26)$$

式中，**F**—作用于接触线上的载荷(N)；

b—接触线长度(mm)；

ρ_1、ρ_2—为两零件接触处的曲率半径(mm)；

μ_1、μ_2—分别为两零件材料的泊松比；

E_1、E_2—分别为两零件材料的弹性模量（MPa）。

•若取***p*=*F*/*b***，表示单位接触线长度上的载荷**N/mm**；

•取 $\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_1}\pm\frac{1}{\rho_2}$ ，ρ 称为综合曲率半径，其中正号用于外接触，负号用于内接触。

•取 $Z_E=\sqrt{\frac{1}{\pi\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1}+\frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)}}$ ，称为弹性影响系数。

则式（7.26）可简化为：

$$\sigma_H = Z_E \sqrt{\frac{p}{\rho}} \qquad (7.27)$$

零件工作时，接触应力实际上是接触处表层微小面积内的压应力。 接触处是变化的，故接触应力是变应力，其应力变化规律必为脉动循环。在计算齿轮传动、蜗杆传动等工作能力时需建立其接触疲劳强度条件

$$\sigma_H \le [\sigma_H] \qquad (7.28)$$

滚动轴承进行寿命计算，实质上也是反映了接触疲劳强度，采用“接触疲劳寿命”的计算方法。

小结：

- 单向应力状态下的疲劳强度计算

a）循环特性保持不变，即***r*=*C***

b)平均应力保持不变，即$\sigma_m=C$

c) 最小应力保持不变，即$\sigma_{\min}=C$

- 线性疲劳损伤累积计算式为：

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{n_i}{N_i}=\frac{n_1}{N_1}+\frac{n_2}{N_2}+\frac{n_3}{N_3}=1 \qquad (7.22)$$

- 疲劳强度条件：

$$\frac{1}{N_0\sigma_r^m}\sum_{i=1}^{z}\sigma_i^m n_i\le 1 \quad \text{或} \quad \sum_{i=1}^{z}\sigma_i^m n_i\le N_0\sigma_r^m \qquad (7.23)$$

- 机械零件的接触疲劳强度

赫兹公式：

$$\sigma_H=\sqrt{\frac{F}{\pi b}\left(\frac{\frac{1}{\rho_1}\pm\frac{1}{\rho_2}}{\frac{1-\mu_1^2}{E_1}+\frac{1-\mu_2^2}{E_2}}\right)} \qquad (7.26)$$