Redondeemos los intervalos de confianza: el caso de las medias

Análisis estadístico

- Deben haber recordado[1]:
  - Si $\hat{\theta}$ es un **estimador** que:
    1) tiene **aproximadamente una distribución normal**
    2) es **insesgado** (por lo menos aproximadamente)
    3) se **conoce una expresión** para el **error estándar** (i.e. la desviación estándar del estimador $\sigma_{\hat{\theta}}$)

    entonces:

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\hat{\theta}-\theta}{\sigma_{\hat{\theta}}} < z_{\alpha/2}\right) \approx 1-\alpha$$

y

$$\hat{\theta} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{\theta}}$$

es un **intervalo de confianza para θ** con nivel de confianza aproximadamente de 100·(1 - α)%.

- Esto es consecuencia del

  teorema del límite central (TLC)

  - Que en su forma más general dice[2]:

    Si S_n es la suma de un **número grande *n*** de variables aleatorias independientes y de varianza no nula pero finita, entonces la función de distribución de S_n **se aproxima bien** a una distribución normal.

- Esto es consecuencia del

teorema del límite central (TLC)

  - Aunque es común encontrarlo más acotado[1]:

    Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ una muestra aleatoria de una **distribución normal** con media μ y varianza σ^2. Entonces **con cualquier *n***, $\bar{x}$ está normalmente distribuida (con media μ y varianza σ^2/n).

  - O un poco más generalizado[1]:

    Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2. Entonces **si *n* es suficientemente grande**, $\bar{x}$ tiene **aproximadamente una distribución normal** con media μ y varianza σ^2/n.

Análisis estadístico

- Se cumplen las condiciones:
  - $\bar{x}$ es un **estimador** de *μ* que:
    1) tiene **aproximadamente una distribución normal**
    2) es **insesgado**
    3) se **conoce una expresión** para $\sigma_{\bar{x}}$: sqrt(σ^2/n)

  entonces:

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) \approx 1-\alpha$$

y

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

es un **intervalo de confianza para *μ*** con nivel de confianza aproximadamente de 100·(1 - α)%.

Análisis estadístico

- Pero, ¿qué es “suficientemente grande”?
  - Es aceptado que ***n* > 30** como suficientemente grande en la mayoría de los casos[1-4]

- Pero lo usual es que **desconocemos *σ***
  - Y utilizar su **estimador muestral *s***
  - Antes teníamos solo **una fuente de aletoriedad**, en el numerador
  - Ahora tanto $\bar{x}$ como *s* **varían muestra a muestra**

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

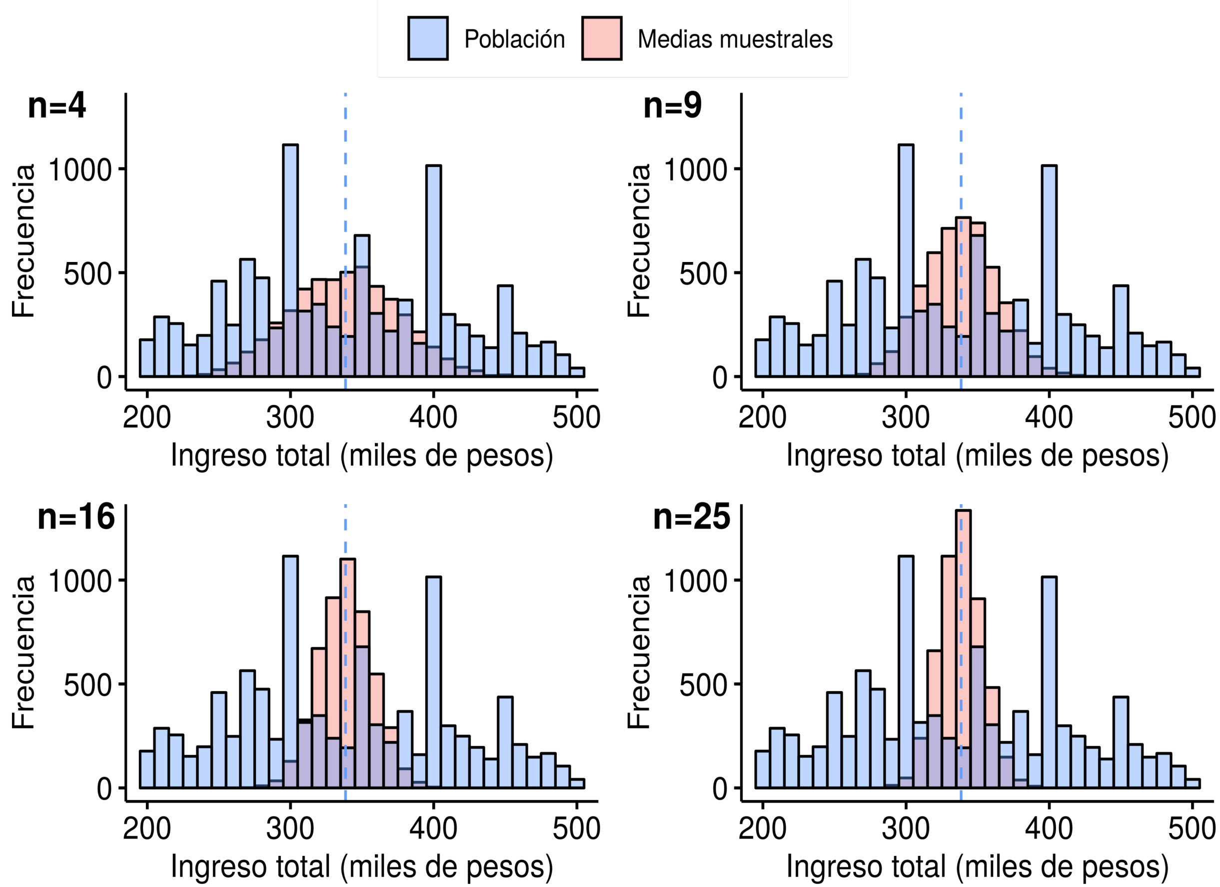
- Al menos deberíamos ser **más exigentes**

Análisis estadístico

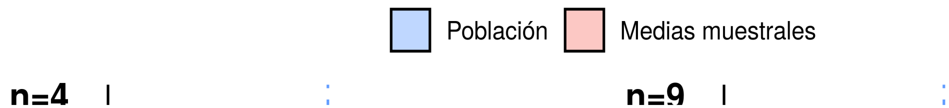
- Debemos ser más cuidadosos ahora:
  - Si la población es aproximadamente **normal**, ***n*** **≥ 10** usualmente es suficiente
  - En el caso de una distribución de **población uniforme**, ***n*** **≥ 12** da una buena aproximación
  - ***n*** **> 30** sigue siendo adecuado **para la mayoría** de las poblaciones
  - ***n*** **> 40** se recomienda para **poblaciones asimétricas** (*skewed*)
  - **Existen distribuciones** de población para las cuales ***n*** **> 50** no es suficiente, aunque no son comunes en la práctica

Análisis estadístico

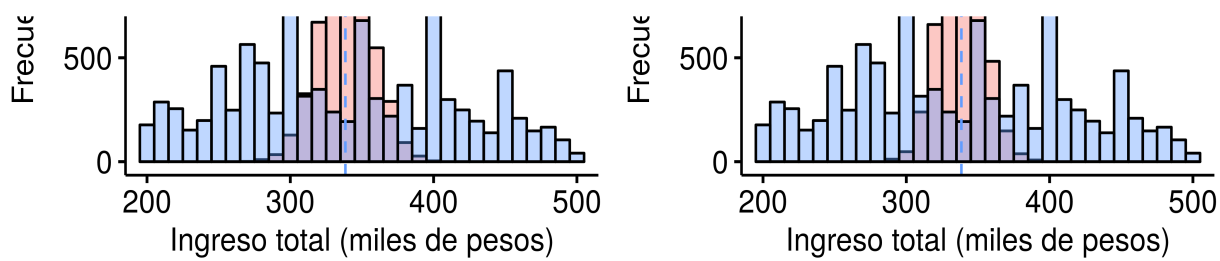
- ¿Pero qué significa "confianza"?
  - Dijimos: "es un intervalo de confianza para *μ* con nivel de confianza aproximadamente de 100·(1 - *α*)%"



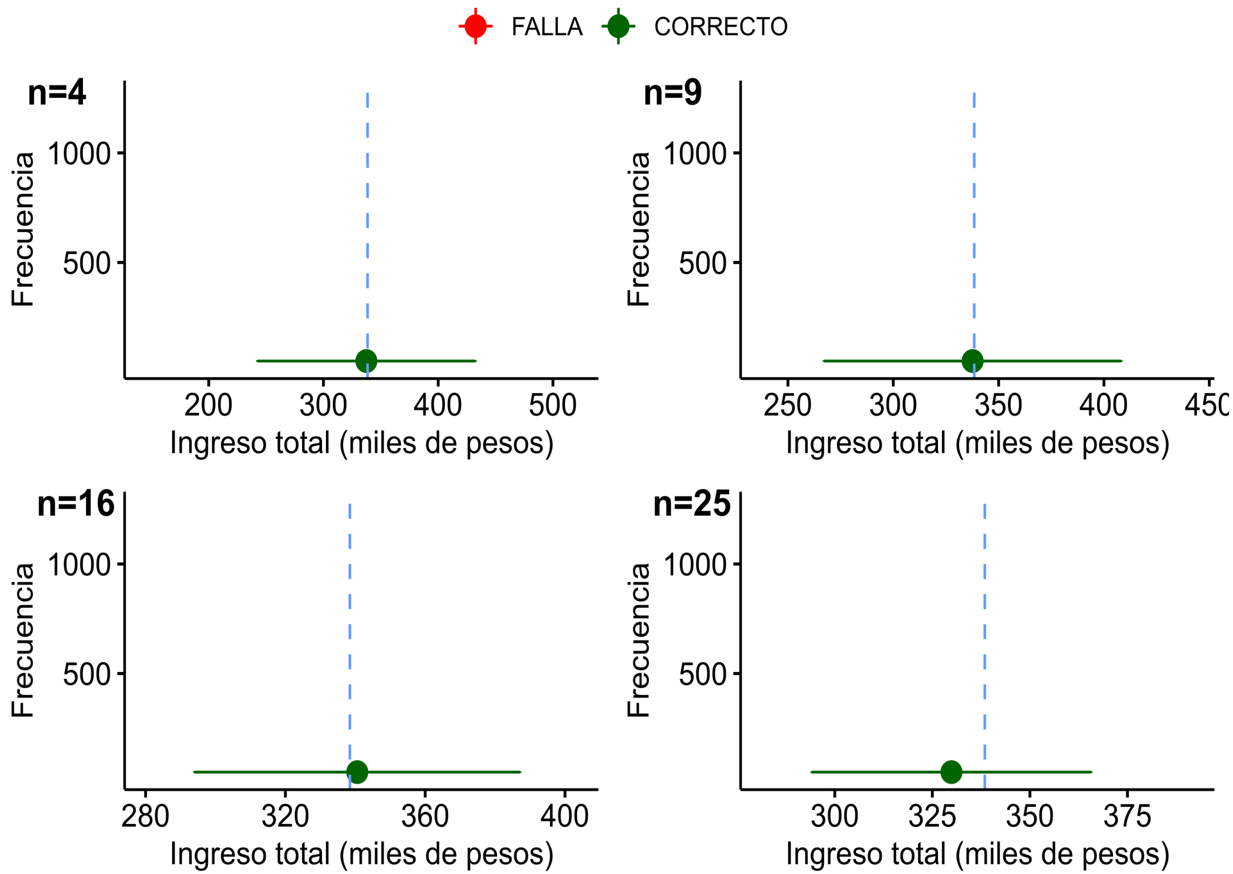
- ¿Pero qué significa "confianza"?
  - Dijimos: "es un intervalo de confianza para μ con nivel de confianza aproximadamente de $100 \cdot (1 - \alpha)\%$"



  - Pero ahora:
    - **no conocemos** la población (dejamos la media para efectos de ubicarnos solamente)
    - normalmente podemos contar solo con **una muestra**

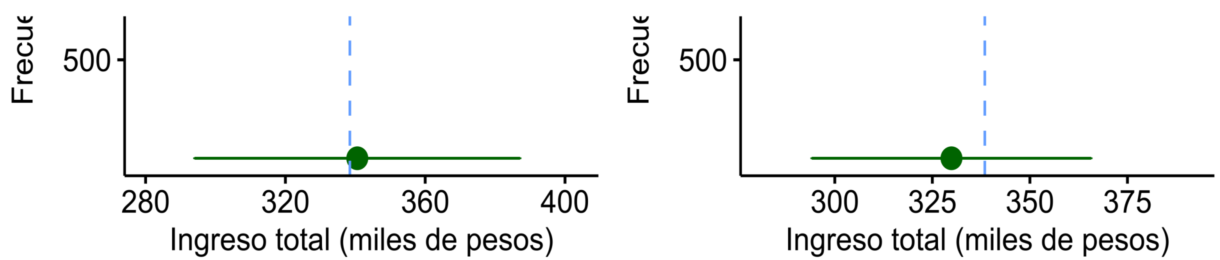


- ¿Pero qué significa “confianza”?
  - Dijimos: “es un intervalo de confianza para *μ* con nivel de confianza aproximadamente de 100·(1 - *α*)%”



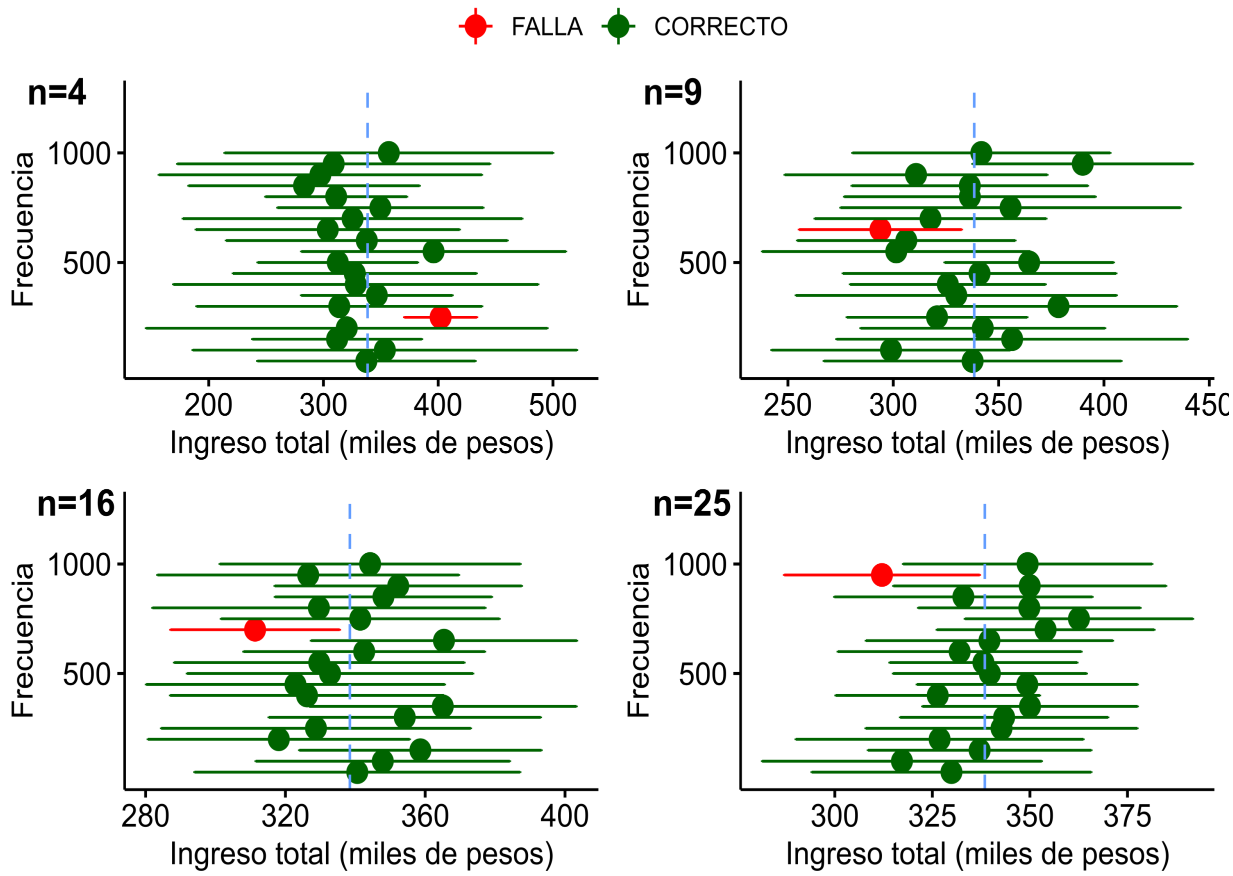
- ¿Pero qué significa “confianza”?
  - Dijimos: “es un intervalo de confianza para μ con nivel de confianza aproximadamente de $100 \cdot (1 - \alpha)\%$”

  - Tenemos un **intervalo que incluye μ** en cada caso
  - Vamos a repetir el procedimiento 20 veces (en cada caso)



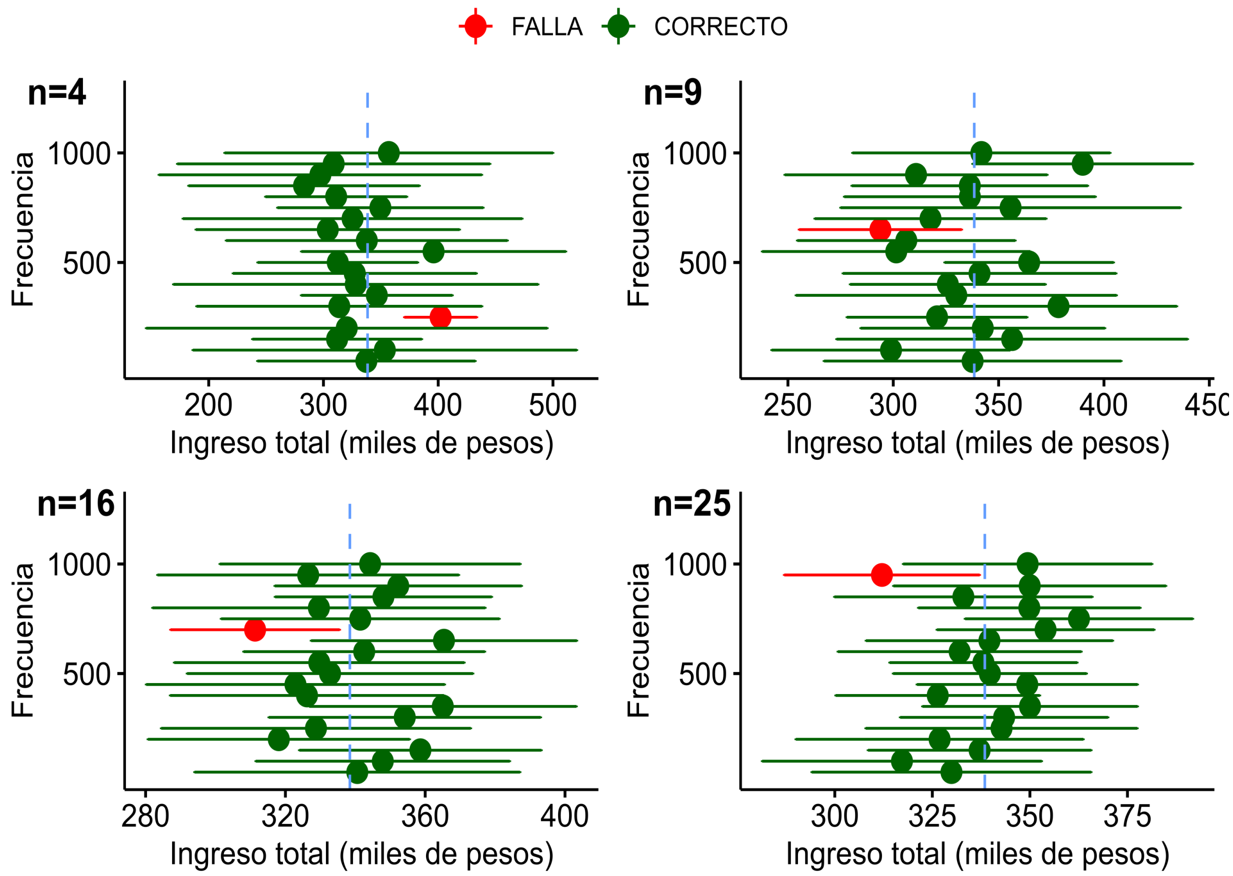
Análisis estadístico

- ¿Pero qué significa “confianza”?
  - Dijimos: “es un intervalo de confianza para μ con nivel de confianza aproximadamente de $100 \cdot (1 - \alpha)\%$”



Análisis estadístico

- ¿Pero qué significa "confianza"?
  - Aquí usamos α = 0.05, luego 95% confianza = 1 falla en 20 intentos **en promedio**



Referencias

[1] Jay L. Devore (2011). Probability and Statistics for Engineering and the Sciences; 8th Edition, Duxbury Press.

[2] Charles M. Grinstead, J. Laurie Snell (1997). Introduction to Probability, chapter 9: Central Limit Theorem; 2nd Edition, AMS Bookstore.

[3] David M. Diez, Christopher D. Barr, Mine Çetinkaya-Rundel (2015). OpenIntro Statistics; 3rd Edition. Disponible en www.openintro.org.

[4] Rudolf J. Freund, William J. Wilson, Donna L. Mohr (2010). Statistical Methods; 3rd Edition, Academic Press.