

UNIDAD 6:

Eje Teórico: CONJUNTOS

Definición: Un conjunto es la agrupación, clase, o colección de elementos con ciertas particularidades o, que pertenecen y responden a la misma categoría o grupo de cosas. Un elemento es cada parte constitutiva de un conjunto.

Los conjuntos se designan generalmente con las letras: A, B, C, etc. (letras mayúsculas)
Los elementos se designan generalmente con las letras: a, b, c, etc. (letras minúsculas)

La relación que existe entre los elementos y los conjuntos es de pertenencia:

- $a \in A$, se lee: el elemento “a” pertenece al conjunto A.
- $a \notin A$, se lee: el elemento “a” no pertenece al conjunto A.

Formas para definir un conjunto:

a) Por extensión o enumeración: se define nombrando a cada elemento del conjunto.

b) Por comprensión: se define mediante un enunciado o atributo que representa al conjunto (se busca una frase que represente a la totalidad de elementos sin nombrar a ninguno en particular).

Por comprensión	Por extensión
$A = \{\text{Números Naturales de una cifra incluido el cero}\}$	$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$B = \{\text{Números Naturales y pares}\}$	$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots\}$
$C = \{x / x \in \mathbb{N}, 10 \leq x < 17\}$	$C = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$
$D = \{\text{Números Naturales Múltiplos de 5}\}$	$D = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \dots\}$

Clasificación de conjuntos

1. **Conjunto Finito:** Un Conjunto es Finito si consta de un cierto número de elementos distintos, es decir si al contar los diferentes elementos del conjunto, el proceso de contar puede terminar.
2. **Conjunto Infinito:** Un Conjunto es Infinito si al contar los diferentes elementos del conjunto, el proceso de contar no termina.

Cardinal de un Conjunto “#”

Es el número de elementos diferentes que posee un conjunto Finito.

Ejemplo:

Sea $A = \{a, e, i, o, u\}$ Entonces: $\#(A)=5$

Conjuntos Especiales

1. Al conjunto que está formado por todos los elementos que intervienen en el tema de interés, se lo denomina **Conjunto Universal** y se lo designa con el símbolo **U**.
2. Al conjunto que contiene un único elemento, se lo denomina **Conjunto Unitario** y se lo designa:

$$A = \{a\} = \{x/x = a\}$$

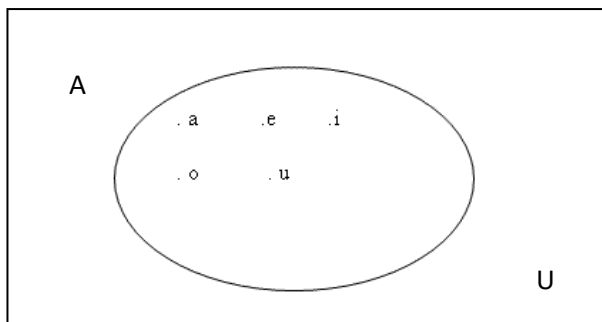
3. Al conjunto que no tiene elementos, se lo denomina **Conjunto Vacio** y se lo designa:

$$A = \emptyset = \{x / x \neq x\}$$

Los conjuntos se pueden vincular entre sí mediante relaciones o pueden generar nuevos conjuntos mediante operaciones o leyes de composición.

Gráficamente se utiliza el diagrama de Venn, en homenaje a su creador, el británico John Venn, que son líneas circulares u ovoides cerradas, donde se disponen los elementos, señalados mediante puntos.

Considerando el conjunto $A = \{a, e, i, o, u\}$, quedaría representado así:



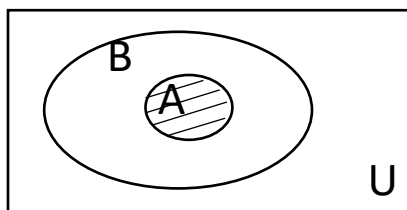
Relaciones Entre Conjuntos

Inclusión de conjuntos

Un conjunto A está incluido en un conjunto B, si todos los elementos del conjunto A pertenecen al conjunto B.

Simbólicamente:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x: (x \in A \Rightarrow x \in B)$$



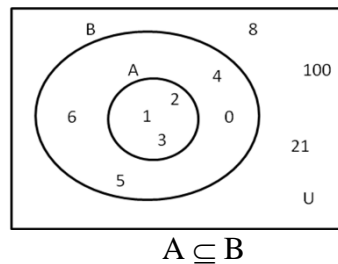
Coloquialmente, se puede leer de diferentes formas:

“A está incluido en B”
 “A está contenido en B”
 “A es subconjunto de B”
 “ $B \supset A$ ”
 “B incluye a A”
 “B contiene a A”

Ejemplo

$$A = \{ 1, 2, 3 \}$$

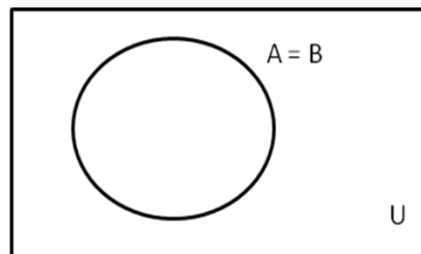
$$B = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$



Igualdad de conjuntos

Si los conjuntos A y B son iguales, entonces se cumple simultáneamente $A \subset B$ y $B \subset A$.

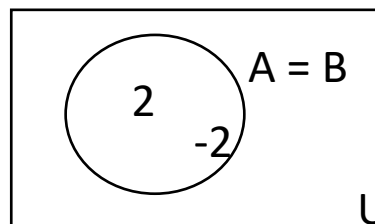
Simbólicamente: $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$



Ejemplo

$$A = \{ x / x^2 = 4 \}$$

$$B = \{ x / (x - 2) \cdot (x + 2) = 0 \}$$



Conjuntos Disjuntos

Si dos conjuntos A y B no tienen ningún elemento común, A y B son disjuntos.

Ejemplo

$$A = \{2, 4, 6\} \quad B = \{1, 3, 5\}$$

Conjunto Potencia

Sea $A = \{a, b\}$ y todos los subconjuntos de este conjunto son: $\{a\}; \{b\}; \{a, b\}$

El conjunto cuyos elementos son los subconjuntos anteriores, se le llaman Conjunto de partes de A y se denota: $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

En general, el numero de subconjuntos se halla con la siguiente relación: 2^n y donde # (es el números de elementos del conjunto)

$$\Rightarrow \# [P(A)] = 2^{n(A)}$$

Ejemplo

$$A = \{m, a, r\} \quad \text{Entonces:} \quad \# [P(A)] = 2^3 = 8 \text{ subconjuntos}$$

$$P(A) = \{\{m\}, \{a\}, \{r\}, \{m, a\}, \{m, r\}, \{a, r\}, \{m, a, r\}, \emptyset\}$$

Representación Gráfica de las Relaciones

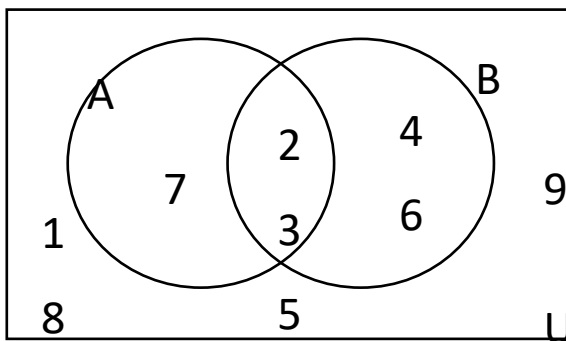
Diagrama de Venn-Euler:

Son regiones planas limitadas por figuras geométricas cerradas que se utilizan para representar gráficamente a los conjuntos.

Ejemplo

$$A = \{2, 3, 5, 7\} \quad \text{y} \quad B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

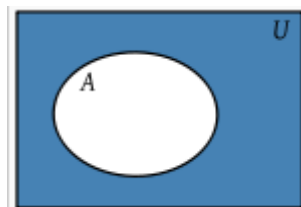


OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Complemento de un conjunto

Dado un conjunto A , su complementario es el conjunto A^c formado por los elementos que no pertenecen a A .

Simbólicamente: $A^c = \{x / x \notin A\}$

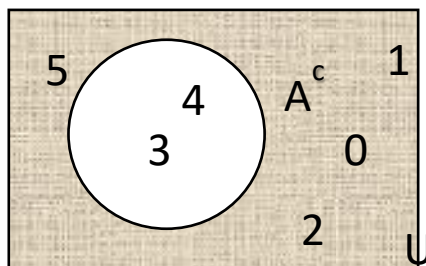


Ejemplo

$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$A = \{3, 4\}$

$A^c = \{0, 1, 2, 5\}$

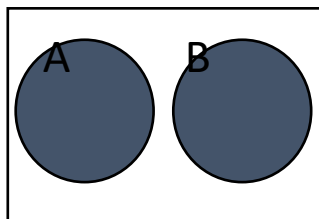
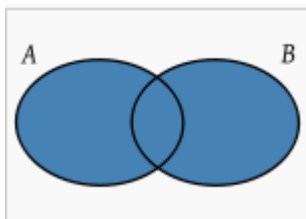


Unión de conjuntos

La unión de los conjuntos A y B es el conjunto, denotado por $A \cup B$, formado por los elementos que estén en al menos uno de los conjuntos A o B .

Así, podemos decir que los elementos de la unión del conjunto A con el conjunto B son aquéllos que estén o bien en A o en B o en ambos

Simbólicamente: $A \cup B = \{x \in U / x \in A \vee x \in B\}$

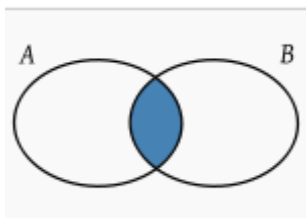


Intersección de conjuntos

La intersección de los conjuntos A y B es el conjunto, denotado por $A \cap B$, formado por los elementos que estén simultáneamente en los conjuntos A y B.

Así, podemos decir que los elementos de la intersección de A con B son aquéllos que estén a la vez en A y en B.

Simbólicamente: $A \cap B = \{x \in U / x \in A \wedge x \in B\}$



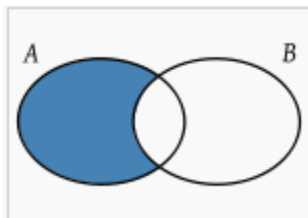
Diferencia entre conjuntos

Existen dos clases de diferencias:

1. La diferencia del conjunto A menos B, denotado por $A - B$, es el conjunto formado por los elementos que estén en A y no en B.

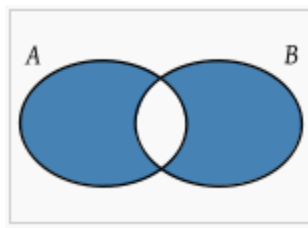
Simbólicamente: $A - B = \{x \in U / x \in A \wedge x \notin B\}$

Así, podemos decir que los elementos de la diferencia de A con B son aquéllos que estén únicamente en A.



2. La diferencia simétrica entre los conjuntos A y B es la unión entre $(A - B)$ y $(B - A)$

simbólicamente: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$



PROPIEDADES

- Idempotencia o igual potencia:
 - $A \cup A = A$
 - $A \cap A = A$
- Asociativa:
 - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
 - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$
- Conmutativa:
 - $A \cup B = B \cup A$
 - $A \cap B = B \cap A$
- Distributiva:
 - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Identidad:
 - $A \cup \emptyset = A$
 - $A \cap \emptyset = \emptyset$
- Complementariedad:
 - $A \cup A^C = U$
 - $A \cap A^C = \emptyset$
 - $U^C = \emptyset$
 - $\emptyset^C = U$
- Involutiva:
 - $(A^C)^C = A$
- Ley de De Morgan:
 - $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
 - $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
- Para cualquier conjunto A y B
 - $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$
 - $A - B = A \cap B^C$

Pero las notaciones pueden variar

Paralelismo entre Lógica y Teoría de Conjuntos

Proposiciones p; q; r ...	Conjuntos A, B, C...
Negación p, $\sim p$	Complemento $m \in A, m \notin A^c$
Conjunción $p \wedge q$	Intersección $A \cap B$
Disyunción $p \vee q$	Unión $A \cup B$
Condicional $p \Rightarrow q$	Inclusión $A \subset B$
Bicondicional $p \Leftrightarrow q$	Igualdad $A = B$
Disyunción excluyente $p \underline{\vee} q$	Diferencia simétrica $A \Delta B$

Trabajo Práctico UNIDAD 6:

CONJUNTOS

1. Definir por extensión los siguientes conjuntos
 - a. Los meses del año.
 - b. Los múltiplos de 3 mayores que 7 y menores que 22.
 - c. Las vocales.
 - d. $\{x \in \mathbb{N} / x \text{ es un número de una cifra}\}$
 - e. $\{x \in \mathbb{Z} / x \text{ es un número de una cifra}\}$
 - f. $\{x \in \mathbb{N} / x \text{ es un número par menor o igual a } 14\}$
 - g. $\{x \in \mathbb{N} / x \text{ es un número impar menor que } 13\}$
2. Definir por comprensión
 - a. $A = \{\text{pulgar; índice; mayor; anular; meñique}\}$
 - b. $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$
 - c. $C = \{\text{azul; rojo; amarillo}\}$
 - d. $D = \{\text{Pica, corazón, diamante, trébol}\}$
 - e. $E = \{\text{Aries, Tauro, Géminis, Cáncer, Leo, Virgo, Libra, Escorpio, Sagitario, Capricornio, Acuario, Piscis}\}$
 - f. $F = \{\text{Espadas, copas, oros, bastos}\}$
 - g. $G = \{\text{Melchor, Gaspar, Baltasar}\}$
 - h. $H = \{\text{Tenedor, cuchillo, cuchara, cucharita}\}$
 - i. $I = \{\text{Otoño, Primavera, Invierno, verano}\}$
3. Hallar $A \cap B$ sabiendo que:
 $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es un número par}\}$
 $B = \{x \in \mathbb{N} / x > 23 \text{ y } x < 40\}$
4. Expresar el complemento de cada conjunto
 - a. $A = \{2, 3, 4\}$ Con respecto al conjunto de los números naturales de una cifra.
 - b. $B = \{a, u\}$ Con respecto al conjunto de las vocales.
 - c. $C = \{\text{Febrero, Abril, junio}\}$ Respecto a los seis primeros meses del año.
5. Sea \mathbb{N} el conjunto de los números naturales. Dados
$$\Omega = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x < 50\}$$
$$A = \{x | x = 2n - 1 \wedge n \in \mathbb{N} \wedge x > 17\}$$
$$B = \{x | x = 2n \wedge n \in \mathbb{N} \wedge x < 38\}$$
$$C = \{x | x = 5n \wedge n \in \mathbb{N}\}$$
$$D = \{x | x = 10n \wedge n \in \mathbb{N}\}$$
 - a) Define por extensión cada uno de los conjuntos siguientes:

$$(A \cup C) \cap B$$

$$B \cap A \cap D$$

$$(B^c \cap A) - C$$

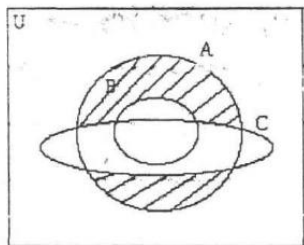
$$A - (B \cap C^c)$$

6. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son: vacíos, unitarios, finitos, infinitos?

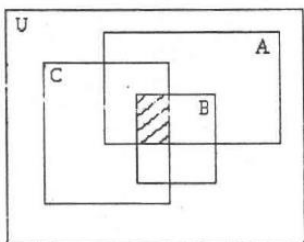
- a) $A = \{x / x \text{ es día de la semana}\}$
- b) $B = \{\text{vocales de la palabra conjunto}\}$
- c) $C = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$
- d) $D = \{x / x \text{ es un número par}\}$
- e) $E = \{x \in \mathbb{N} / x < 15\}$
- f) $F = \{x \in \mathbb{N} / 2 < x < 3\}$

7. Indicar en cada diagrama la operación entre conjuntos que corresponda a la región sombreada

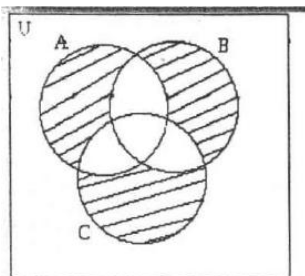
A.



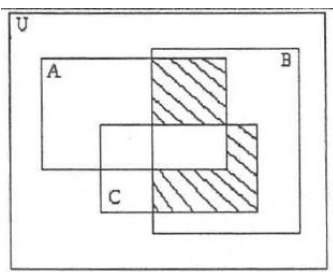
B.



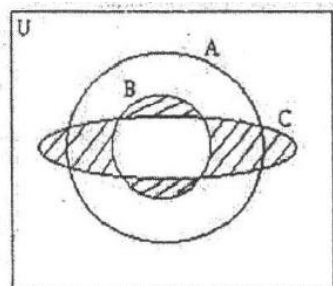
C.



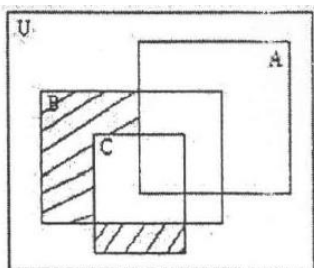
D.



E.

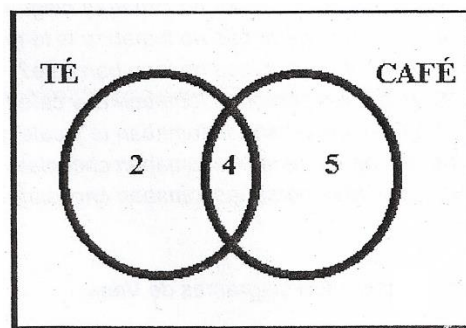


F.



Problemas de Conteo

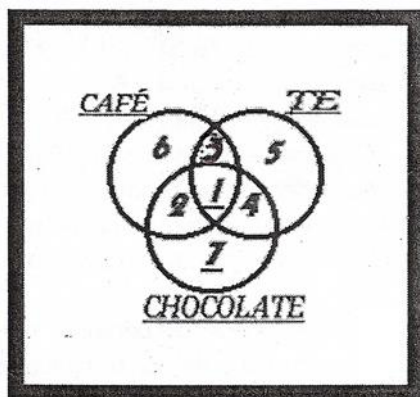
1. En el diagrama que colocamos a continuación, se han volcado los datos obtenidos en una encuesta realizada a personas, donde se les preguntó si tomaban té o café. Los números que aparecen se refieren a las cantidades de personas que respondieron a la pregunta en las diversas formas posibles: solamente té, té y café, ninguna de las dos bebidas, etc.



En base a estos datos responderemos a las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas personas tomaban té?
- ¿Cuántas personas tomaban café?
- ¿Cuántas personas tomaban té y café?
- ¿Cuántas personas no tomaban ninguna de las dos bebidas?
- ¿Cuántas personas no tomaban té?
- ¿Cuántas personas no tomaban café?
- ¿Cuántas personas tomaban por lo menos una de esas dos bebidas?

- h) ¿Cuántas personas tomaban sólo una de esas dos bebidas?
- i) ¿Cuántas personas tomaban sólo café?
- j) ¿Cuántas personas tomaban alguna de esas bebidas?
2. Durante el mes de abril, una empresa ha fabricado diariamente productos del tipo A o del tipo B (o ambos), excepto 4 domingos durante los cuales no ha fabricado nada. Sabiendo que 15 días del mes ha fabricado A, y 20 días ha fabricado B,
- a) ¿cuántos días del mes ha fabricado ambos productos?
- b) ¿cuántos días del mes ha fabricado sólo productos del tipo A?
- c) ¿cuántos días del mes ha fabricado sólo productos del tipo B?
3. En el diagrama se han volcado los datos obtenidos en una encuesta realizada a personas, donde se les preguntó si tomaban té, café o chocolate. Los números que aparecen se refieren a las cantidades de personas que respondieron a la pregunta en las diversas formas posibles: las tres bebidas, sólo té, té y chocolate, pero no café, etc.



En base a estos datos responderemos a las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuántas personas fueron encuestadas?
- b) ¿Cuántas personas tomaban por lo menos una de esas tres bebidas?
- c) ¿Cuántas personas tomaban té?
- d) ¿Cuántas personas tomaban sólo dos de esas tres bebidas?
- e) ¿Cuántas personas tomaban exactamente dos de esas tres bebidas?
- f) ¿Cuántas personas tomaban menos de dos de esas tres bebidas?
- g) ¿Cuántas personas tomaban exactamente una de esas dos bebidas?
- h) ¿Cuántas personas tomaban sólo chocolate?
- i) ¿Cuántas personas tomaban café?
- j) ¿Cuántas personas no tomaban té?
- k) ¿Cuántas personas tomaban las tres bebidas?
- l) ¿Cuántas personas no tomaban las tres bebidas?
- m) ¿Cuántas personas no tomaban ninguna de esas tres bebidas?
- n) ¿Cuántas personas no tomaban ni té ni café?
- o) ¿Cuántas personas no tomaban café?
- p) ¿Cuántas personas tomaban té y café?
- q) ¿Cuántas personas tomaban té y café pero no chocolate?

- r) ¿Cuántas personas tomaban chocolate y café?
- s) ¿Cuántas personas tomaban chocolate y café pero no té?

RESOLVER APLICANDO DIAGRAMAS DE VENN:

4. Un grupo de jóvenes fue entrevistado acerca de sus preferencias por ciertos medios de transporte (bicicleta, motocicleta y automóvil). Los datos de la encuesta fueron los siguientes:

- Motocicleta solamente: 5
- Motocicleta: 38
- No gustan del automóvil: 9
- Motocicleta y bicicleta, pero no automóvil: 3
- Motocicleta y automóvil, pero no bicicleta: 20
- No gustan de la bicicleta: 72
- Ninguna de las tres cosas: 1
- No gustan de la motocicleta: 61

- a) ¿Cuál fue el número de personas entrevistadas?
- b) ¿A cuántos le gustaba la bicicleta solamente?
- c) ¿A cuántos le gustaba el automóvil solamente?
- d) ¿A cuántos le gustaba las tres cosas?
- e) ¿A cuántos le gustaba la bicicleta y el automóvil pero no la motocicleta?

5. Una encuesta sobre 500 personas reveló los siguientes datos acerca del consumo de dos productos A y B:

- 138 personas consumían A pero no B.
- 206 personas consumían A y B
- 44 personas no consumían ni A ni B.

- a) ¿Cuántas personas consumían A?
- b) ¿Cuántas personas consumían B?
- c) ¿Cuántas personas consumían B pero no A?
- d) ¿Cuántas personas consumían por lo menos uno de los dos productos?

6. Una encuesta sobre 500 personas reveló los siguientes datos acerca del consumo de dos productos A y B:

- 410 personas consumían por lo menos uno de los dos productos.
- 294 personas consumían A.
- 78 personas consumían A pero no B.

- a) ¿Qué porcentaje de personas consumía B?
- b) ¿Qué porcentaje de personas consumía sólo B?
- c) ¿Qué porcentaje de personas consumía los dos productos?
- d) ¿Qué porcentaje de personas no consumía ninguno de los dos productos?

7. Una encuesta sobre 500 personas reveló los siguientes datos acerca del consumo de dos productos A y B:

- 310 personas consumían por lo menos uno de los dos productos.
- 270 personas consumían A.
- 205 personas consumían B pero no A.

Demostrar que los resultados de la encuesta no son atendibles.

8. Una encuesta sobre 200 personas reveló los siguientes datos acerca del consumo tres productos A, B y C:

- 5 personas consumían sólo A.
 - 5 personas consumían sólo B.
 - 10 personas consumían sólo C.
 - 15 personas consumían A y B, pero no C.
 - 80 personas consumían B y C, pero no A.
 - 8 personas consumían C y A, pero no B.
 - 17 personas no consumían ninguno de los tres productos.
- a) ¿Cuántas personas consumían A?
- b) ¿Cuántas personas consumían B?
- c) ¿Cuántas personas consumían C?
- d) ¿Cuántas personas consumían A, B y C?
- e) ¿Cuántas personas consumían por lo menos uno de los tres productos?
- f) ¿Cuántas personas consumían A o B?
- g) ¿Cuántas personas no consumían C?
- h) ¿Cuántas personas no consumían ni C ni A?

9. Una encuesta sobre 200 personas reveló los siguientes datos acerca del consumo tres productos A, B y C:

- 30 personas consumían A.
 - 85 personas consumían B.
 - 103 personas consumían C.
 - 10 personas consumían A y C, pero no B.
 - 13 personas consumían A y B.
 - 18 personas consumían B y C.
 - 5 personas consumían A y B, pero no C.
- a) ¿Cuántas personas no consumían ninguno de los tres productos?
- b) ¿Cuántas personas consumían ninguno los tres productos?
- c) ¿Cuántas personas consumían A pero no B ni C?
- d) ¿Cuántas personas no consumían A?
- e) ¿Cuántas personas consumían por lo menos uno de los tres productos?

10. Sobre un grupo de 45 alumnos se sabe que:

- 16 alumnos leen novelas
- 18 alumnos leen ciencia ficción
- 17 alumnos leen cuentos
- 3 alumnos leen novelas, ciencia ficción y cuentos
- 1 alumno lee sólo cuentos y ciencia ficción
- 8 alumnos leen sólo cuentos
- 4 alumnos leen sólo novelas y ciencia ficción

- a) ¿Cuántos alumnos leen sólo ciencia ficción?
- b) ¿Cuántos alumnos no leen ni novelas, ni cuentos, ni ciencia ficción?

11. Una encuesta sobre 200 personas acerca del consumo de tres productos A, B y C reveló los siguientes datos:

- 126 personas consumían C
- 124 personas no consumían A
- 36 personas no consumían ni A ni B
- 170 personas consumían por lo menos uno de los tres productos
- 60 personas consumían A y C
- 40 personas consumían los tres productos
- 56 personas no consumían B

- a) ¿Cuántas personas consumían solamente B?
- b) ¿Cuántas personas consumían A y B?
- c) ¿Cuántas personas consumían solamente A?