LOGARITMOS

Definición: La Logaritmación es una operación entre dos números reales a y b, llamados base y argumento respectivamente, que se define como sigue:

$$Log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, \quad \text{siendo } a \rangle 0, a \neq 1 \text{ y b} \rangle 0$$

Existen dos logaritmos cuya notación simbólica es especial:

a. Logaritmos decimales

Los logaritmos decimales tienen base 10. Se representan por “log b”, es decir,

$$Log_{10} b = Log\ b$$

b. Logaritmos neperianos

Los logaritmos neperianos tienen base e. Se representan por “ln (b)” o “L(b)”, es decir,

$$Log_e b = Ln\ b$$

De la definición de logaritmo podemos deducir:

- No existe el logaritmo de un número con base negativa.

$$\nexists \log_{-a} x$$

- No existe el logaritmo de un número negativo

$$\nexists \log_a (-x)$$

- No existe el logaritmo de cero.

$$\nexists \log_a 0$$

- El logaritmo de 1 es cero.

$$\log_a 1 = 0$$

- El logaritmo en base a de a es uno.

$$\log_a a = 1$$

- El logaritmo en base a de una potencia en base a es igual al exponente.

$$\log_a a^n = n$$

Cambio de Base

$$Log_a b = \frac{Log\ b}{Log\ a}$$

$$Log_a b = \frac{Ln\ b}{Ln\ a}$$

Propiedades de los logaritmos

1. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log_a(x.y)=\log_a x+\log_a y$$

Ejemplo $\log_2(4.8)=\log_2 4+\log_2 8=2+3=5$

2. El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$$

Ejemplo $log_2\left(\frac{8}{4}\right) = log_2 8 + log_2 4 = 3 - 2 = 1$

3. El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_a(x^n)=n.\log_a x$$

Ejemplo $log_2(8^4) = 4.log_2 8 = 4.3 = 12$

4. El logaritmo de una raíz es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz:

$$\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right)=\frac{1}{n}.\log_a x$$

Ejemplo $\log_2\left(\sqrt[4]{8}\right)=\frac{1}{4}\log_2 8=\frac{1}{4}.3=\frac{3}{4}$

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Cuando en una ecuación la variable o incógnita aparece como argumento o como base de un logaritmo, se llama *logarítmica*.

La resolución de ecuaciones logarítmicas se basa en los mismos procedimientos utilizados en la resolución de las ecuaciones habituales. Aunque no existen métodos fijos, habitualmente se procura convertir la ecuación logarítmica en otra equivalente donde no aparezca ningún logaritmo. Para ello, se ha de intentar llegar a una situación semejante a la siguiente:

$$\log_a f(x)=\log_a g(x)$$

Entonces, se emplean los antilogaritmos para simplificar la ecuación hasta $f(x)=g(x)$, que se resuelve por los métodos habituales.

También puede operarse en la ecuación logarítmica para obtener una ecuación equivalente del tipo:

$$\log_a f(x)=m$$

de donde se obtiene que $f(x)=a^m$, que sí se puede resolver de la forma habitual.

SISTEMAS DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Cuando en un sistema aparecen una o varias ecuaciones logarítmicas, se denomina *sistema de ecuaciones logarítmicas*. En el caso de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, se pueden producir tres casos distintos:

- Un sistema formado por una ecuación polinómica y una logarítmica.
- Un sistema constituido por dos ecuaciones logarítmicas.
- Un sistema compuesto por una ecuación polinómica y una ecuación exponencial.

cada caso, se utilizan los métodos habituales de resolución de sistemas de ecuaciones, teniendo siempre presente que estas ecuaciones han de transformarse en otras equivalentes, donde la incógnita no aparezca en el argumento o la base del logaritmo, ni en el exponente de la función exponencial.

Para resolver un sistema de ecuaciones logarítmicas se aplicarán los procedimientos vistos en el apartado anterior, para transformarlo en un sistema lineal o no lineal, que resolveremos por el método que consideremos más adecuado.

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

$$\log\frac{x}{y} = 1 = \log 10 \rightarrow \frac{x}{y} = 10 \rightarrow x = 10y$$

Transformamos la segunda ecuación

$$(10y)^2 - y^2 = 11$$

Sustituimos en la primera ecuación

$$99y^2 = 11 \rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{11}{33}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Resolvemos la correspondiente ecuación de segundo grado

$$S = (x; y) = \left(\frac{10}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Solución: los valores negativos no valen.

<u>ECUACIONES EXPONENCIALES</u>

Las ecuaciones en las que la incógnita aparece como exponente son ecuaciones exponenciales.

No existe fórmula general alguna que nos muestre cómo resolver todas las ecuaciones exponenciales. Para resolver estas ecuaciones hay que tener presentes algunos resultados y propiedades que ya se han descripto anteriormente.

EJERCICIO: Resolución de ecuaciones exponenciales

1. Resolver $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$

resolución: Expresando $1/8$ como $2^{1-x^2} = \frac{1}{2^3}$ potencia de 2:

$$2^{1-x^2} = 2^{-3} \Rightarrow 1 - x^2 = -3$$

Basta ahora con resolver esta ecuación de segundo grado: $1 - x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

2. Resolver $4^{x+1} + 2^{x+3} = 320$

Resolución: en algunas ecuaciones es necesario hacer un cambio de variable para su resolución. Teniendo en cuenta las propiedades de las potencias, la ecuación puede escribirse:

$$4.4^x + 2^3.2^x = 320 \Rightarrow 4.4^x + 8.2^x = 320$$

Expresando 4^x como potencia de 2, $4.2^{2x} + 8.2^x = 320$

Se hace el cambio de variable $2^x = y$, (por lo tanto $2^{2x} = y^2$) y se obtiene:

$$4y^2 + 8y = 320$$

Basta ahora con resolver esta ecuación: $4y^2 + 8y - 320 = 0$ o su equivalente

$$y^2 + 2y - 80 = 0$$

hallando que sus raíces son $y = -10; y = 8$.

Se deshace ahora el cambio de variable $y = 2^x$

$y_1 = -10 = 2^x$. No es posible encontrar un *x* que verifique esta condición (2^x es siempre positivo)

$$y_2 = 8 = 2^x \Rightarrow x = 3$$

La solución es, por lo tanto, $x = 3$.

3. Resolver $5^x + 5^{x+2} + 5^{x+4} = 651$

Resolución: aplicando las propiedades de las potencias, la ecuación se puede escribir como

$$5^x + 5^2.5^x + 5^4.5^x = 651$$

Sacando factor común 5^x:

$$5^x\left(1 + 5^2 + 5^4\right) = 651 \Rightarrow 5^x.651 = 651 \Rightarrow 5^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

SISTEMAS DE ECUACIONES EXPONENCIALES

Un sistema de ecuaciones es exponencial si, por lo menos, una de las ecuaciones que lo forman lo es.

Para resolver un sistema de ecuaciones exponenciales se aplicarán los procedimientos vistos en el apartado anterior, para transformarlo en un sistema lineal o no lineal, que resolveremos por el método que consideremos más adecuado.

$$\begin{cases} 2^{2x-y} = 8 \\ 3^{2x+y} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{2x-y} = 2^3 \\ 3^{2x+y} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Despejamos “y” de ambas ecuaciones

$y = +2x - 3$ *1

$y = -2x + 1$ *2

Igualo las ecuaciones y despejo la incógnita “x”

$$+2x - 3 = -2x + 1$$

$$+2x + 2x = +1 + 3$$

$$+4x = +4$$

$$\boldsymbol{x = 1}$$

Reemplazo $x = 1$ **en *1 o *2** para obtener el valor de "y"

$y = +2(1) - 3 \Rightarrow \qquad \boldsymbol{y = -1}$

Expresamos la solución al sistema

$S = (x; y) = (1; -1)$

TRABAJO PRÁCTICO

1. FUNCIÓN LOGARITMICA / ECUACIÓN Y SISTEMA LOGARÍTMICA

1. Evaluar sin usar tabla ni calculadora:

a) $\log_2 16 =$ b) $\log_2 \frac{1}{8} =$ c) $\log_4 2 =$

d) $\log_{10} 10000 =$ e) $\log_e e =$ f) $\log_x 1 =$

g) $\log_3 \sqrt{3} =$ h) $\log_b 0 =$ i) $\log_{10} 0{,}01 =$

j) $\log_{1/3} 3 =$ k) $\log_7 \sqrt[3]{49} =$ l) $\ln e^e =$

m) $10^{\log_{10} 6^2} =$ n) $25^{\log_5 2} =$ ñ) $e^{-\ln 7} =$

2. Hallar el valor de la incógnita en cada caso:

a) $\log_b 125 = 3$ b) $\log N = -2$ c) $\log_7 343 = x$

a) $\log_5 25^x = 4$ e) $\log_2 \frac{1}{N} = 5$ f) $\log_b 6 = -1$

g) $2\log_9 N = 1$ h) $\log_2 4^{-3} = x$ i) $\log_2 8 = x$

j) $\log_{(x-1)^4} 3 = \frac{1}{2}$ k) $\log_9 27 = x$ l) $\log_x 81 = 2$

m) $\log_x \frac{1}{8} = -3$ n) $\log_{\sqrt{x}} 4 = 2$

3. Simplificar y reducir la expresión a un solo logaritmo:

a) $\log 2 + \log 5 =$ b) $\frac{1}{2}\log_3 49 - \frac{1}{3}\log_3 8 + 13\log_3 1 =$

c) $\log(x^4 - 4) - \log(x^2 + 2) =$ d) $\log\left(\frac{x}{y}\right) - 2\log x^3 + \log y^{-4} =$

e) $\log_2 5 + \log_2 5^2 + \log_2 5^3 - \log_2 5^6 =$ f) $5\ln 2 + 2\ln 3 - 3\ln 4 =$

4. Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log 4x = 3$

b) $\log(x-2) + \log x = \log 8$

c) $\log(\log x) = 1$

d) $10\log_5 x + 5 - 5\log_5 x = 0$

e) $\log(x+1) - \log(x-2) = 1$

f) $\log x + \log(x+3) = 1$

g) $\log^2 x = \log x^2$

h) $\log_3 9x^2 + \log_3 x = 1$

i) $\log 54 - \log 2 = 2\log x - \log\sqrt{x}$

j) $\log_6 2x - \log_6(x+1) = 0$

5. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas:

i₁) $\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x - y = 20 \end{cases}$

j₁) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2\log x - 2\log y = -1 \end{cases}$

k₁) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

l₁) $\begin{cases} \log x + \log y = \log 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

m₁) $\begin{cases} \log_x(y-18) = 2 \\ \log_y(x+3) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

n₁) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

2. FUNCIÓN EXPONENCIAL / ECUACIÓN Y SISTEMA EXPONENCIAL

1. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3.4^x - 6 = 0$

b) $3^{x+1} + 3^{x-1} = 30$

c) $3^x - 12 + 27.3^x = 0$

d) $3^{x+1} = 45$

e) $20^x = 2^{2x+1}.5^x$

f) $2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^x = \dfrac{7}{2}$

g) $5^{x+1} - 5^x = 20$

h) $10^x + 10^{x+1} = 22$

i) $e^x - 2e^x + 3 = 0$

j) $\dfrac{3^x + 3^{-x}}{3^{-x}} - 10.3^{x-1} = 0$

k) $e^{2x} - 5(e^x - e) - e^{x+1} = 0$

l) $4^{x-3} = 5^{x+6}$

m) $\dfrac{2^{x+1}}{4^{x-2}} = \dfrac{4^x}{2^{x-1}}$

n) $\dfrac{3^{x-1}}{9^{x+2}} = \dfrac{9^{x-1}}{3^{x+1}}$

2. Resolver las siguientes ecuaciones

a) $3^{2x+5} = 3^7$

b) $5^{x+3} = 25$

c) $2^{1+x} = 4^{2-x}$

d) $5^{x^2-5x+6} = 1$

e) $3^x.\left(3^2\right)^x = 9^3$

f) $\dfrac{10^x}{10^3} = \sqrt[x]{100^2}$

g) $\sqrt[x-1]{216} = 6$

h) $\sqrt{a^{5-x}} = a^{3-x}$

i) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 7$

j) $2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4} + 2^{x+5} + 2^{x+6} = 31$

k) $2^{2x} - 10.2^x + 16 = 0$

l) $2^{2x-5} - 3.2^{x-3} + 1 = 0$

m) $5^{x-1} = 2 + \dfrac{3}{5^{x-2}}$

n) $3^{1-x} + 3^{2-x} = \dfrac{4}{27}$

b) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas

k₁) $\begin{cases} 2^{x+2y} = 32 \\ 2^{3x-5y} = 16 \end{cases}$

l₁) $\begin{cases} 3^x = 3^y \\ 4^x.4^y = 256 \end{cases}$

m₁) $\begin{cases} 5^x = 5^y.625 \\ 2^x.2^y = 256 \end{cases}$

n₁) $\begin{cases} 15.5^{x-1} - 6^y = 339 \\ 3.5^x + 2.6^{y+1} = 807 \end{cases}$

o₁) x $\begin{cases} 2^{x+y} = 4^{x-y} \\ 3^{xy} = 531441 \end{cases}$

p₁) $\begin{cases} \sqrt[x]{x+y} = 3 \\ (x+y).2^x = 36 \end{cases}$