UNIDAD Nº 3:
MATRICES Y DETERMINANTES

PARTE I

Definición de Matriz:

Se llama matriz de orden m x n a todo conjunto rectangular (o cuadrada) de elementos a_{ij} dispuestos en **m** líneas horizontales (filas) y **n** verticales (columnas) de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

Abreviadamente suele expresarse en la forma A= a_{ij} , con i = 1, 2, 3, …, m y; j = 1, 2, 3, …, n.

Los subíndices indican la posición del elemento dentro de la matriz, el primero denota la fila (i) y el segundo de la columna (j). Por ejemplo el elemento a_{25} será el elemento cuya posición sea la fila 2 y la columna 5.

Dimensión u orden de una matriz

Es una forma de definir el números de filas y columnas que tiene una matriz. Si tiene m filas y n columnas, se dice que la dimensión u orden de la matriz es de m x n.

Dos matrices son iguales cuando tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas son iguales.

Ejemplo

La siguiente es una matriz de *2x3*:

$$A_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Dónde sus filas son (1 -3 4) y (0 5 -2) y sus columnas: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Matrices Especiales

Tipo de Matriz	Definición	Ejemplo
FILA	Aquella matriz que tiene una sola fila, siendo su orden *1×n*	$A_{1x3} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$
COLUMNA	Aquella matriz que tiene una sola columna, siendo su orden *m×1*	$A_{3x1} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$
RECTANGULAR	Aquella matriz que tiene distinto número de filas que de columnas, siendo su orden *m×n*, con $m \neq n$	$A_{3x4} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 5 & 7 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
TRANSPUESTA	Dada una matriz A, se llama transpuesta de A a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas. Se representa por A^t ó A^T	Si es A= $(a_{ij})_{mxn}$ su transpuerta es $A^t = (a_{ji})_{nxm}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \end{bmatrix}$, $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$
OPUESTA	La matriz opuesta de una dada es la que resulta de sustituir cada elemento por su opuesto. La opuesta de A es -A.	$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}, -A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 7 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$
NULA	Si todos sus elementos son cero. También se denomina matriz cero y se denota por 0 o 0_{mxn}	$0_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
CUADRADA	Aquella matriz que tiene igual número de filas que de columnas, m = n, diciéndose que la matriz es de orden n. Diagonal Principal: Son los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ Diagonal Secundaria: Son los elementos a_{ij} con i + j = n +1 Traza: de una matriz cuadrada, es la suma de los elementos de la diagonal principal. "tr A"	$A_{3x3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $A_{3x3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ D. principal $A_{3x3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ D. Secundaria Tr A= -1 + (- 2) +4 =1

	Propiedades de las M. Cuadradas	
SIMÉTRICA	Es una matriz cuadrada que es igual a su traspuesta. A = A^t , $a_{ij} = a_{ji}$ para todo *i,j*	$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & -6 \\ 9 & 2 & 1 \\ -6 & 1 & 5 \end{bmatrix}$
ANTISIMÉTRICA	Es una matriz cuadrada que es igual a la opuesta de su traspuesta. A = -A^t , $a_{ij} = -a_{ji}$ Necesariamente $a_{ii} = 0$	$A = \begin{bmatrix} 0 & 9 & -6 \\ -9 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
DIAGONAL	Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal	$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
ESCALAR	Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales, distinto de uno.	$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$
IDENTIDAD	Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales a 1. También se denomina matriz unidad. Se indica I	$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
TRIANGULAR	Es una matriz cuadrada que tiene todos los elementos por encima (o por debajo) de la diagonal principal nulos.	$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ T. superior T. inferior
ORTOGONAL	Una matriz necesariamente cuadrada e invertible, es decir: $A^{-1} = A^T$. La inversa de una matriz ortogonal es otra matriz ortogonal. El producto de dos matrices ortogonales es outra matriz ortogonal. El determinante de una matriz ortogonal es +1 o -1	$A.A^T = A^T.A = I$ $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

NORMAL	Una matriz es normal cuando conmuta con su transpuesta. Las matrices simétricas, son Antisimétrica u ortogonales son necesariamente normales.	$A=\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ $A.A^T = A^T.A$
INVERSA	Decimos que una matriz cuadrada A tiene inversa, A^{-1}, si se verifica que : $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$	$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $A^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

<u>SUMA DE MATRICES:</u> La suma de dos matrices A= (a_{ij}) y B = (b_{ij}) de la misma dimensión (equidimensionales) es otra matriz C = A + B = c_{ij} de mxn, suyo término genérico es $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Para la suma o la resta nos queda:

$$A_{mxn} + B_{mxn} = C_{mxn} \quad donde\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$
$$A_{mxn} - B_{mxn} = A_{mxn} + (-B_{mxn}) = C_{mxn} \quad donde\ c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Ejemplo:

$$A_{2x3} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad B_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 9 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 5 & -11 & 2 \end{bmatrix}$$

- <u>Propiedades de la suma y resta de matrices</u>

Dadas las matrices A, B y C, todas de *mxn,* se cumple:

1. Propiedad Asociativa: A + (B + C) = (A + B) + C

2. Propiedad Conmutativa: A + B = B + A

3. Existencia de matriz cero a matriz nula: A + 0 = 0 + A = A

4. Existencia de matriz opuesta: A + (-A) = 0

PRODUCTO DE UN ESCALAR (NÚMERO REAL) POR UNA MATRIZ

Para multiplicar un escalar por una matriz se multiplica el escalar por todos los elementos de la matriz, obteniéndose otra matriz del mismo orden.

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda \cdot A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

$$A_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 8 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow (-5)\cdot\begin{bmatrix} 1 & -3 & 8 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 15 & -40 \\ -10 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

- Propiedades del producto de una matriz por un escalar

1. Propiedad Distributiva respecto a la suma de Matrices:

$\lambda.(A+B) = \lambda.A + \lambda.B$

2. Propiedad Distributiva respecto a la suma de Escalares:

$(\lambda + \mu).A = \lambda.A + \mu.A$

3. Propiedad Asociativa Mixta:

$\lambda.(\mu.A) = (\lambda.\mu).A$

4. Existencia de elemento unidad:

$1.A = A$

PRODUCTO DE MATRICES

Dos matrices A y B se dicen multiplicables si el número de columnas de A coincide con el número de filas de B.

$\mathbf{A_{m\,x\,n}\ x\ B_{n\,x\,p} = C_{m\,x\,p}}$

El elemento c_{ij} de la matriz producto se obtiene multiplicando cada elemento de la fila i de la matriz A por cada elemento de la columna j de la matriz B y sumándolos.

En general

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1p} + \cdots + a_{1n}b_{np} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1p} + \cdots + a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 & 2\cdot 0 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 3\cdot 1 + 0\cdot 1 + 0\cdot 1 & 3\cdot 0 + 0\cdot 2 + 0\cdot 1 & 3\cdot 1 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 5\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 5\cdot 0 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 & 5\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Otra forma de efectuar la multiplicación entre dos matrices A y B, es práctico utilizar un esquema (llamado ábaco de la multiplicación) como la siguiente:

	B
A	A.B

Por ejemplo, si A y B son tales que:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2x3} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}_{3x1} \Rightarrow C = [\ \ ]_{2x1}$$

Entonces Completamos la tabla anterior:

	$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13}.b_{31} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} + a_{23}.b_{31} \end{bmatrix}_{2x1}$

- <u>Propiedades del Producto de Matrices</u>

1. A·(B·C) = (A·B)·C
2. El producto de matrices en general no es conmutativo.
3. Si A es una matriz cuadrada de orden **n** se tiene $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$.
4. Dada una matriz cuadrada A de orden n, no siempre existe otra matriz B tal que $\mathbf{A \cdot B = B \cdot A = I_n}$.
5. Si existe dicha matriz B, se dice que es la matriz inversa de A y se representa por $\mathbf{A}^{-1}$.
6. El producto de matrices es distributivo respecto de la suma de matrices, es decir:
   A·(B + C) = A·B + A·C

<u>Consecuencias de las propiedades</u>

1. Si A·B= 0 no implica que A=0 ó B=0.
2. Si A·B=A·C no implica que B = C.
3. En general $(A+B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB$, ya que $A \cdot B \neq B \cdot A$.
4. En general $(A+B)\cdot(A-B) \neq A^2 - B^2$, ya que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

PARTE II

<u>DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA:</u>

Es una aplicación del conjunto de las matrices cuadradas en los reales donde a cada matriz cuadrada A le asignamos un número real al que llamaremos determinante de A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{le corresponde el número } \sum (-1)^k . a_{ij_1} . a_{2j_2} ... a_{nj_n} = \det(A)$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Resolución de Determinantes:

a. Regla de Sarrus: Es útil para determinantes hasta de orden 3

- El determinante de una matriz 1x1 es: Det(A)= a

- El determinante de una matriz 2x2 es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

- El determinante de una matriz 3x3 es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{21}.a_{32}.a_{13} + a_{12}.a_{23}.a_{31} - (a_{31}.a_{22}.a_{13} + a_{21}.a_{12}.a_{33} + a_{32}.a_{23}.a_{11})$$

b. Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea (fila): Método de Laplace

El determinante de una matriz es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) por sus adjuntos.
Esta propiedad nos permite resolver determinantes de cualquier orden, puesto que al desarrollar por una línea, los determinantes que tenemos que calcular son de orden menos en una unidad y así, siempre podremos llegar a un determinante de orden 3, que ya sabemos calcular.

→ **Menor complementario de un elemento**

El menor complementario de un elemento de una matriz cuadrada es el determinante de la matriz que obtenemos al suprimir su fila y su columna. Lo representamos por M_{ij}.
Ejemplo
Hallar el menor complementario del elemento a_{23} en la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\Rightarrow M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1 \Rightarrow \boxed{M_{23} = -1}$$

→ **Adjunto de un elemento**

Es el menor complementario con signo positivo o negativo según sea par o impar la suma de su número de fila y su número de columna. Lo representamos por "A_{ij}"

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}$$

Ejemplo: Hallar el adjunto del elemento a_{23}

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{23} = (-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow A_{23} = -1.(-1) \quad \Rightarrow \boxed{A_{23} = 1}$$

Ya podemos hallar el determinante de una matriz cuadrada cualquiera sea su orden:

Sea A= (a_{ij}) una matriz cuadrada de orden n. Entonces su <u>Determinante</u> se puede calcular mediante el desarrollo de LAPACE por una fila cualquiera o columna cualquiera, de la siguiente forma:

1. Si elegimos la i-ésima fila: $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.c_{ij} = a_{i1}.c_{i1} + a_{i2}.c_{i2} + ... + a_{in}.c_{in}, \forall i = 1,...,n$
2. Si elegimos la j-ésima columna: $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.c_{ij} = a_{1j}.c_{1j} + a_{2j}.c_{2j} + ... + a_{nj}.c_{nj}, \forall j = 1,...,n$

En General, en una matriz de 3x3, quedará expresado por fila:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Para calcular el determinante por los adjuntos de la primera fila:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Desarrollando los determinantes 2x2, tendremos:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Eliminando los paréntesis, tenemos:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Que podemos ordenar, para presentarlo en la forma usual y comparar los resultados con la Regla de Sarrus:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Considerando las columnas quedará:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

En general, los signos son:

- Para una matriz de 2x2

$$\begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix}$$

- Para una matriz de 3x3

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

- Para una matriz de 4x4

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$$ Calculamos del det(A) por los elementos de la fila 2

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}=0.(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}+3.(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{vmatrix}+1.(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$|A|=0+3.6-1.(-3)$$

$$\boxed{|A|=21}$$

Propiedades del Determinante:

1. El determinante de una matriz cuadrada coincide con el determinante de su traspuesta, es decir: Det (A) = Det (A^t)

$$\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -5\end{vmatrix}=3.(-5)-2.1=-17 \qquad \begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & -5\end{vmatrix}=3.(-5)-2.1=-17$$

2. Si intercambiamos dos filas o dos columnas de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo aunque son iguales en valor absoluto.

$$\begin{vmatrix}4 & 2 & 4\\ 5 & 0 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}=54 \quad f1 \leftrightarrow f2 \begin{vmatrix}5 & 0 & -1\\ 4 & 2 & 4\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}=-54 \quad C2 \leftrightarrow$$
$$C3\begin{vmatrix}4 & 4 & 2\\ 5 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix}=-54$$

3. Si una matriz cuadrada tiene todos los elementos de una línea (fila o columna) nulos, su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}=3.0-1.0=0 \qquad \begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & -4\end{vmatrix}=0.(-4)-1.0=0$$

4. Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas iguales su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3.1 - 1.3 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (0 - 6 + 2) - (0 + 2 - 6) = 0$$

5. Si multiplicamos todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada por un número k, su determinante queda multiplicado por dicho número.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \quad \text{multiplico la } f_2 \text{ } por \text{ } 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 9 + 6 = 15$$

6. Si una matriz cuadrada tiene dos filas o columnas proporcionales su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ \mathbf{2}.3 & \mathbf{2}.1 \end{vmatrix} = \mathbf{2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & -\mathbf{1} \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 2.3.\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & -\mathbf{1} \end{vmatrix} = 0$$

7. Si a una fila o columna de una matriz cuadrada se le suma otra paralela a ella, su determinante no varía

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 11 = 7 \quad f_1 + f_2 \rightarrow f_1 \quad \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -9 - (-16) = 7$$

8. Si a una fila o columna de una matriz cuadrada se le suma otra paralela a ella multiplicada por un número, su determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 7$$

$$f_1 + 2f_2 \rightarrow f_1 \quad \begin{vmatrix} 1 + 2.2 & 2 + 2.1 & 3 + 2.1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-14) - (-21) = 7$$

9. Si todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada se descomponen en dos sumandos, entonces su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha fila o columna el primero y el segundo sumando respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 7 + 2 = 9$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1+3 & 0+1 & -2+0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 8 - (-1) = 9$$

10. El determinante del producto de dos matrices cuadradas del mismo orden es igual al producto de los determinantes de dichas matrices: Det (A . B) = Det (A) . Det (B).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A.B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |A.B| = -14 \\ |A| = 7\ ;\ |B| = -2 \quad \Rightarrow |A|.|B| = 7.(-2) \ = -14 \end{array}\right\} |A.B| = |A|.|B|$$

11. Si una matriz cuadrada tiene una línea que es combinación lineal de las otras entonces, su determinante vale cero

12. Si una fila o columna esta multiplicada por un valor numérico k, entonces el determinante queda multiplicado por ese valor.

<u>Es la vuelta del item 5</u>

Si todas las componentes esta multiplicado por un valor numérico k, entonces el determinante queda multiplicado por ese valor elevado a la cantidad de filas.

D/ $k.A = k.\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow |k.A| = \begin{vmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}$

$$= k.\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = \underbrace{k.k..k}_{n\ veces}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k^n\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k^n.|A|$$

Ejemplo 1

$$|3.A| = 3^2.|A|$$

$$\left.\begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 3.A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow |3A| = 63 \\ |A| = 7 \Rightarrow 3^2|A| = 9.7 = 63 \end{array}\right\} |3A| = 3^2|A|$$

Ejemplo 2

Calcular el $|2.A|$, si $A \in R_{5x5}$ y el $|A| = 8$.

$$|k.A| = k^n.|A| \Longrightarrow |2.A| = 2^5.|A| = 32.8 = 256$$

c. <u>Regla de Ghio</u>

Consiste en hacer ceros una fila o columna dejando fijo un elemento (pivote) aplicando las propiedades de los determinantes. De ésta forma reducimos en uno el orden del determinante. Y luego calculamos el Adjunto.

Ejemplo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

Sumando a la 3er columna la 1ra columna multiplicada por (-1)

y

a la 4ta columna la 1ra multiplicada por (-2), resulta:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = 1.\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{|A| = 19}$$

MATRIZ INVERSA: Se llama Matriz Inversa de una Matriz Cuadrada A_n y se expresa, "A^{-1}", a la matriz que verifica la siguiente propiedad:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

- Propiedades de la inversión de matrices

1. La matriz inversa, si existe, es única
2. $A^{-1}A=A\cdot A^{-1}=I$
3. $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
4. $(A^{-1})^{-1}=A$
5. $(kA)^{-1}=(1/k\cdot A^{-1}$
6. $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

Aclaración importante:

Decimos que una matriz cuadrada es "*Regular*" si su determinante es distinto de cero, y es "*Singular*" si su determinante es igual a cero.

$|A| \neq 0 \Rightarrow$ Matriz Regular

$|A| = 0 \Rightarrow$ Matriz Singular

Observación

- Podemos encontrar matrices que cumplen A.B = I, pero B.A ≠ I; en tal caso, podemos decir que A es la inversa de B "por izquierda" o que B es inversa de A "por derecha".
- Sólo existe matriz inversa de una matriz cuadrada si ésta es *regular*.
- La matriz inversa de una matriz cuadrada, si existe, es única.
- Entre matrices NO existe la operación división, la matriz inversa realiza funciones análogas.

CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA

1. **Directamente:**

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ buscamos una matriz que cumple con A. A^{-1} = I, es decir

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Para ello, planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}2a-c=1\\2b-d=0\\a+c=0\\b+d=1\end{array}\right\} a=-c \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-2c-c=1\\d=2b\\a=-c\\b+2b=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll}a=\dfrac{1}{3} & b=\dfrac{1}{3}\\ & \\ c=-\dfrac{1}{3} & d=\dfrac{2}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3}\\ -\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3}\end{pmatrix}$$

La matriz que se encontró, es la inversa de la matriz A; es decir, "A^{-1}".

2. **Teniendo en cuenta la siguiente fórmula:** $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}.\left(A^{*}\right)^{t}$

Donde:

A^{-1} Matriz inversa

$|A|$ Determinante de la matriz A

A^{*} Matriz Adjunta

$\left(A^{*}\right)^{t}$ Matriz transpuesta de la adjunta

Ejemplo

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\3 & 0 & 0\\5 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

1. Calculamos el determinante de la matriz, en el caso que el determinante sea nulo la matriz no tendrá inversa.

$$A=\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\3 & 0 & 0\\5 & 1 & 1\end{vmatrix}=3$$

2. Hallamos la matriz adjunta, que es aquella en la que cada elemento se sustituye por su adjunto.

$$A^{*}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 0\\5 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & 0\\5 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\5 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 0\\5 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 0\\3 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\1 & -3 & -2\\0 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

3. Calculamos la traspuesta de la matriz adjunta.

$$\left(A^{*}\right)^{t}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. La matriz inversa es igual al inverso del valor de su determinante por la matriz traspuesta de la adjunta.

   Reemplazamos en $A^{-1}=\frac{1}{|A|}.\left(A^{*}\right)^{t}$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

OPERACIONES ELEMENTALES ENTRE FILAS:

Sera útil utilizar notaciones adaptadas para describir las operaciones elementales que se hacen sobre filas o columnas.

- Intercambiar las filas i y j de la matriz:
  $F_i \leftrightarrow F_j$ con $i \neq j$

  Ejemplo: Cambiar la fila 1 por fila 2

- Multiplicar la fila i por $\lambda \neq 0$:
  $F_i \leftarrow \lambda F_i$

  Ejemplo: $F_2 = 3.\ F_2$

- Añadir a la fila i la fila j multiplicada por el escalar λ:
  $F_i \leftarrow F_i + \lambda F_j$ con $i \neq j$

  Ejemplo: $F_2 = 3.F_1 + F_2$

Las operaciones elementales sobre columnas se notaran de la manera análoga:

- Intercambiar las columnas i y j:
  $C_i \leftrightarrow C_j$ con $i \neq j$
- Añadir a la columna i la columna j multiplicada por el escalar λ:
  $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ con $i \neq j$
- Multiplicar la columna i por $\lambda \neq 0$:
  $C_i \leftarrow \lambda C_i$

Matrices Equivalentes

Dos Matrices A y B son del mismo tamaño, se dicen *equivalentes* si una se puede obtener a partir de la otra por medio de un numero finito de operaciones elementales.
Se utiliza la anotación A~B para indicar que "La matriz A es equivalente a la matriz B".

Ejemplo:

Las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ son equivalentes, pues si a partir de la matriz A realizamos sucesivamente las transformaciones siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{f_1 \leftrightarrow f_2}{} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} f_3 + f_1 \to f_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} f_3 - f_2 \to f_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Escalonamiento o triangulación de una Matriz:

La idea que se persigue con las transformaciones elementales es convertir una matrix concreta en otra matriz más fácil de estudiar.

Siempre será posible conseguir una matriz escalonada, en el sentido que definimos a continuación:
"Sea A un matriz y F una fila de A. Diremos que F es nula si todos los número de F coinciden con el cero, Si F es no nula, llamamos PIVOTE de F al primer número distinto de cero contando de izquierda a derecha"

Una **Matriz Escalonada** es aquella que verifica las siguientes propiedades:
1. Todas las filas nulas (caso de existir) se encuentran en la parte inferior de la matriz.

2. El pivote de cada fila no nula se encuentra estrictamente más a la derecha del pivote de la fila de encima.

Por ejemplo, entre las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&7\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&4&3\\0&1&8\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&4\\0&0&0\end{pmatrix}$

A no está escalonada, mientras que B y C si lo están.

<u>RANGO</u>

Dada una matriz escalonada E se define rango de E, que representamos por rg(E), como el número de filas no nulas de E.

Podemos descartar una fila si:

1. Todos sus coeficientes son ceros.
2. Hay dos líneas iguales.
3. Es proporcional a otra.
4. Una línea es combinación lineal de otras.

En los ejemplos B y C de arriba, se tiene que rg(B)=rg(C)=2; si embargo, no podemos decir que rg(A)=3 ya que A no está escalonada.
Otro ejemplo, las matrices Nulas tienen rango cero y la matriz identidad de orden n cumple rg(I)=n.
La siguiente cuestión que abordaremos es la definición de rango para una matriz cualquiera que no esté escalonada. La idea será la de transformar la matriz dada en otra matriz que sea escalonada mediante las operaciones elementales.

Ejemplo

Dada A=$\begin{pmatrix}-6&2&3&1\\1&0&-1&0\\1&-1&0&2\end{pmatrix}$ mediante operaciones elementales la escalonaremos y hallamos su rango

$$\begin{pmatrix}-6&2&3&1\\1&0&-1&0\\1&-1&0&2\end{pmatrix} f_1 \leftrightarrow f_3 \begin{pmatrix}1&-1&0&2\\1&0&-1&0\\-6&2&3&1\end{pmatrix} f_2 - f_1 \to f_2 \begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&1&-1&-2\\-6&2&3&1\end{pmatrix}$$

$$f_3+6f_1 \to f_3 \begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&1&-1&-2\\0&-4&3&13\end{pmatrix} f_3+4f_2 \to f_3 \begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&1&-1&-2\\0&0&-1&5\end{pmatrix} -f_3 \to f_3 \begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&1&-1&-2\\0&0&1&-5\end{pmatrix}$$

La matriz quedó escalonada y su rango es 3.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

PARTE II

TEOREMA ROUCHÉ FROBENIUS

El Método de Rouché Frobenius sirve para efectuar el análisis de los sistemas de ecuaciones lineales.

Consideremos un sistema de **m ecuaciones lineales** con **n incógnitas**, cuya expresión general es la siguiente:

$$\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\
a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \dots + a_{3n} x_n &= b_3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \dots + a_{mn} x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Sean **A** la **matriz del sistema** y **A*** la **matriz ampliada del sistema** (con los **términos independientes**).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas sea compatible es que el rango de la matriz de los coeficientes de las incógnitas (A) sea igual al rango de la matriz ampliada con los términos independientes (A*).
Es decir: rango (A) = rango (A*).

Conclusión:

- Si rango (A) = rango (A*) = n (número de incógnitas), el **Sistema es Compatible Determinado** (tiene una única solución).

- Si rango (A) = rango (A*) < n (número de incógnitas), **el Sistema es Compatible Indeterminado** (tiene infinitas soluciones).

- Si rango (A) ≠ rango (A*), el **Sistema es Incompatible** (no tiene solución).

Métodos de Resolución

1) **Método de Crámer:**

La Regla de Crámer sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales, Se aplica a sistemas que cumplan las dos condiciones siguientes:

1. El numero de ecuaciones es igual al número de incógnitas
2. El determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero

Tales sistemas se denominan Sistemas de Cramer:
Sea el sistema:

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + ... + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 + ... + a_{2n}.x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + a_{m3}.x_3 + ... + a_{mn}.x_n = b_m \end{cases}$$

Sea "Δ" el determinante de la matriz de coeficientes

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Y sean Δ_1, Δ_2, Δ_3, …, Δ_n los determinantes que se obtiene al sustituir los coeficientes del 2do miembro (los términos independientes) en la 1er columna, en la segunda, en la tercera y en la n-ésima columna respectivamente.

Un Sistema de Crámer tiene una sola solución que viene dada por las siguientes expresiones:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \qquad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & .... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & .... & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ b_m & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & .... & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & .... & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & b_m & .... & a_{mn} \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad x_n = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & .... & b_1 \\ b_2 & a_{22} & .... & b_2 \\ \dots & \dots & & \dots \\ b_m & a_{m2} & .... & b_m \end{vmatrix}}{\Delta}$$

De los resultados de éstos determinantes dice:

$$\text{Sistema}\begin{cases}\text{Compatible } \Delta \neq 0 & \Rightarrow \text{Única Solución} \quad \Rightarrow \text{ S.C.D} \\ \text{Incomplatible } \Delta = 0 \begin{cases} \Delta_x = 0 \ ; \ \Delta_y = 0 \ ; \ \Delta_z = 0 \Rightarrow \text{ Tiene Infinitas Soluciones} \quad \Rightarrow \text{ S.C.I} \\ \Delta_x \text{ ó } \Delta_y \text{ ó } \Delta_z \neq 0 \quad \Rightarrow \text{No tiene Solución} \quad \Rightarrow \text{ S.I}\end{cases}\end{cases}$$

Ejercicio

Dado el siguiente sistema de ecuaciones, hallar el valor de k para que el mismo tenga:

a. Ninguna Solución
b. Única Solución
c. Infinitas Soluciones

$$\begin{cases} 4x + 2y - 2z = 4 \\ 3x + y + z = 8 \\ 3x + Ky + 3z = 6 \end{cases}$$

<u>Solución 1</u> Método de Crámer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & K & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = 12 + 6 - 6K - (-6 + 18 + 4K)$$

$$\Delta = 6 - 10K$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 6 & K & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_x = 12 + 12 - 16K - (-12 + 48 + 4K)$$

$$\Delta_x = -12 - 20K$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 3 & 8 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_y = 96 + 12 - 36 - (-48 + 36 + 24)$$

$$\Delta_y = 60$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 8 \\ 3 & K & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_z = 24 + 48 + 12K - (12 + 36 + 32K)$$

$$\Delta_z = 24 - 20K$$

a. Ninguna Solución

$\Delta = 0 \Rightarrow k = \frac{3}{5}$

$\Delta_x \neq 0 \quad \Delta_y = 60 \neq 0 \quad \Delta_z \neq 0$

b. Única Solución

$\Delta \neq 0 \Rightarrow k \neq \frac{3}{5}$

c. Infinitas Soluciones

Si $\Delta = 0 \Rightarrow$ el valor de $k = \frac{3}{5}$

al reemplazar en: $\Delta_x = -24 \quad \Delta_y = 60 \quad \Delta_z = 12 \Rightarrow$ *No* existe valor de K para que el sistema sea Compatible Indeterminado

Solución 2: Por el Teorema de Rouché Frobenius

$$\begin{array}{ccc:c}
4 & 2 & -2 & 4 \\
3 & 1 & 1 & 8 \\
3 & k & 3 & 6 \\
\hline
 & -2 & 10 & 20 \\
 & (4k-6) & 12 & 12 \\
\hline
 & & (4k+24) & (-80+96)
\end{array}$$

Comparamos los rangos

1. S.I. r≠r´

   Para que r = 2 -40k + 24 = 0 despejando k=$\frac{3}{5}$

   Para que r´= 3 -80k +96 $\neq$ 0 pero, como k es igual para ambas expresiones, reemplazamos k y efectivamente -80k +96 es distinto de 0.

   por lo tanto para k=$\frac{3}{5}$, el sistema es Incomplatible

2. SCD r = r´=3

   Para que r = 3 -40k + 24 $\neq$ 0 despejando k $\neq \frac{3}{5}$

   Para que r´= 3 es sufiente que -80k +96 $\neq$ 0

   por lo tanto para k $\neq \frac{3}{5}$, el sistema es Compatible Determinado

3. SCI r = r´< 3

Para que r = 2 -40k + 24 = 0 despejando k=$\frac{3}{5}$ pero, como k es igual para ambas expresiones, reemplazamos k y nos queda que -80k +96 es distinto de 0; es decir, nunca podremos anularla.

Por lo tanto, no existe valor de k para que el sistema se Compatible Indeterminado.

2) **Método de Reducción de Gauss**

El método de Gauss consiste en transformar el sistema dado en otro equivalente. Para ello tomamos la matriz ampliada del sistema y mediante las operaciones elementales por filas la transformamos en triangular superior (o inferior). De esta forma obtenemos un sistema equivalente al inicial y que es muy fácil de resolver.

Ejemplo

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ x-y-z=-1 \end{cases}$$

La matriz ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

$$\begin{array}{l} \\ f_2-f_1 \to f_2 \\ f_3-f_1 \to f_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right)$$ Intercambiamos las segunda y la tercer filas $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$

Logramos triangular la matriz, que resulta ser la ampliada del sistema $\begin{cases} x+y+z=3 \\ -2y-2z=-4 \\ -2z=-2 \end{cases}$

Que es equivalente al dado y de sencilla solución.

Trabajo Práctico UNIDAD 3:

Matrices y Determinantes

Matrices

Parte I

1. Efectuar las siguientes operaciones:

$a)\left(A+B\right).2=$ $\quad b)\left(A-B\right).2=$ $\quad c)B.3=$ $\quad d)A.B.C=$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad F=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1/2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad G=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

a. Verificar la condición de producto
b. Resolver

c. A.B= d. B.A= e. C.E= f. E.C=	g. F.C= h. F.E= i. E.F= j. G.F=	k. D.B= l. A.D= m. C.F= n. G.A= o. A.G=

3. Calcular $A^2 - 3.A - I$ siendo:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Siendo la Matriz $A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ Verificar:

a) $A^3 + I = 0$, siendo "0" la matriz Nula e "I" la Matriz Identidad

b)Calcular razonadamente A^{10}

5. Dadas las matrices A y B, hallar la matriz C, de tal forma que A+B-C=0

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

6. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuar las siguientes operaciones:

a. $(A + B)^2$;

b. $(A - B)^2$;

c. $(B)^3$;

d. $A \cdot B^t \cdot C$.

7. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Justificar si son posibles los siguientes productos:

a. $(A^t \cdot B) \cdot C$

b. $(B \cdot C^t) \cdot A^t$

c. Determinar la dimensión de M para que pueda efectuarse el producto $A \cdot M \cdot C$

8.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular si es posible:

a) $A + B$ **b)** AC **c)** CB y C^tB **d)** $(2A+B)C$

9.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular si es posible:

a) ABC **b)** $C^t\left(\frac{1}{2}B\text{-}A\right)$ **c)** A^2, B^2 y C^2

10.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular AB y BA, ¿coinciden los resultados?.

b) Calcular $(A + B)^2$ y $A^2 + 2AB + B^2$, ¿coinciden los resultados?.

c) Calcular A^2 - B^2 y $(A + B)(A - B)$, ¿coinciden los resultados?.

11. Hallar x, y, z, t; tales que satisfaga la siguiente igualdad:

$$2.\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & 2 \\ 1 & 3t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & y-x \\ z+t & 4 \end{bmatrix}$$

12. Dadas

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Verificar:

a) A.B=B.A=0
b) A.C=A
c) C.A=C
d) Usar los resultados anteriores y comprobar:
   a. A.C.B=C.B.A
   b. $A^2 - B^2 = (A - B).(A + B)$
   c. $(A+B)^2 = (A - B)^2 = A^2 + B^2$

13. Dadas las Matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3a+2 & 5b+1 \\ 2c+2 & d-3 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 2a+3 & b-5 \\ 2c-3 & 3d+1 \end{bmatrix}.$$

Hallar los valores de a, b, c y d que verifiquen:

2.A-3.I = 4.B

14. Determinar el rango de las siguientes matrices de acuerdo al valor del parámetro t:

$$a) A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & t \end{bmatrix} \qquad \text{b)} B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Parte II

15. Calcular que rango va a tener la Matriz E, en función del valor de β_

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \beta \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

16. Calcular la inversa de la matriz A y verificar el resultado

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

17. Encontrar el valor de "a" para que la matriz no sea inversible y hallar la inversa para a = 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & a \end{pmatrix}$$

18. Se considera la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 2 & m^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a. Determinar m para que la matriz sea singular
b. Resolver para m= -1 el siguiente sistema:

$$A. \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

19. Resolver la ecuación

a. **A.X – B + C = 0,** siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

b. **X.A – 2.B = C**

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

c. **X.A – C = 2.B**

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

d. **A.X + 2.B = 3.C**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

20. Determinar dos matrices X e Y, ambas de R^{2x2} tales que cumpla con:

$$\begin{cases} 3X + 4Y = \begin{pmatrix}5 & 2\\ -12 & 9\end{pmatrix} \\ 2X - 3Y = \begin{pmatrix}8 & -2\\ -1 & 5\end{pmatrix}\end{cases}$$

21. Hallar la matriz B, sabiendo que su primer fila es (1 0) y que verifica:

$$A.B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} \text{ Siendo } A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Determinantes

22. Calcular los siguientes Determinantes

$a)\ \begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 5\end{vmatrix} =$ $\quad b)\ \begin{vmatrix}2 & 5\\ -10 & -25\end{vmatrix} =$ $\quad c)\ \begin{vmatrix}-1 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix} =$

$$d)\begin{vmatrix}8 & 4 & 1\\6 & 3 & -1\\2 & 1 & 3\end{vmatrix}= \qquad e)\begin{vmatrix}3 & 9 & 6\\8 & 20 & 4\\-1 & -2 & 1\end{vmatrix}= \qquad f)\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\-3 & -1 & 0\\2 & 3 & -1\end{vmatrix}=$$

$$g)\begin{vmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\4 & -1 & -1 & 2\\1 & 0 & 3 & 0\\2 & 2 & 2 & 3\end{vmatrix} \qquad h)\begin{vmatrix}2 & 3 & -2 & 4\\3 & -2 & 1 & 2\\3 & 2 & 3 & 4\\-2 & 4 & 0 & 5\end{vmatrix} \qquad i)\begin{vmatrix}3 & 0 & -1 & 6\\2 & 4 & 3 & 5\\-1 & 0 & 8 & -1\\0 & -2 & 4 & 0\end{vmatrix}$$

23. Determinar el valor de X que satisface las siguientes igualdades

$$a)\begin{vmatrix}2 & 5 & 1\\-x & 0 & 4\\3 & 1 & -2\end{vmatrix}=-14 \qquad b)\begin{vmatrix}-2 & 1 & 0\\0 & x+1 & x+5\\1 & 2 & -1\end{vmatrix}=48 \qquad c)\begin{vmatrix}x-3 & 1 & 2\\1 & 3 & 2\\x-1 & x+5 & -1\end{vmatrix}=-32$$

24. Si

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 0 & 2\\-1 & 0 & 3\end{pmatrix} \qquad B=2A^{T} \qquad D=A^2B, calcular\ |D|$$

25. Sabiendo que $|A|=\begin{vmatrix}x & y & z\\t & u & v\\a & b & c\end{vmatrix}$ es 6, determinar el valor de los siguientes determinantes:

$$|B|=\begin{vmatrix}-3x & -y & -z\\3t & u & v\\3a & b & c\end{vmatrix} \qquad |C|=\begin{vmatrix}-2y & x & z\\-2u & t & v\\-2b & a & c\end{vmatrix} \qquad |D|=\begin{vmatrix}x & y & z\\t & u & v\\2x-a & 2y-b & 2z-c\end{vmatrix}$$

26. Sabiendo que $|A|=\begin{vmatrix}x & y & z\\3 & 0 & 2\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}$ =5, Calcular los siguientes determinantes:

$$a)\begin{vmatrix}2x & 2y & 2z\\3/2 & 0 & 1\\1 & 1 & 1\end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix}x & y & z\\3x+3 & 3y & 3z+2\\x+1 & y+1 & z+1\end{vmatrix} \qquad |D|=\begin{vmatrix}x & y & z\\2 & 3 & 0\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

27. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} x-2 & 2 \\ -1 & x+3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ 5 & x+1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ hallar x ∈ R tal que:

$a)\ |A|=-4$ $b)\ |B|=27$ $c)\ |A|=|B|$

28. Calcular el valor de x ∈ R tal que el determinante se anule:

$$|A|=\begin{vmatrix} x & 2 & x+2 \\ 2 & x+2 & x \\ x+2 & x & 2 \end{vmatrix}$$

29. Hallar la matriz inversa por el método de la matriz adjunta si es posible.

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e) $E=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Respuestas:

a) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ b) $B^{-1}=\begin{pmatrix} 1{,}5 & -3 & 0{,}5 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ c) $\nexists\ C^{-1}$, pues $|C|=0$

d) $D^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ e) $E^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Ejercicios opcionales:

1. Dadas las matrices cuadradas A y B, sabiendo que

$|A|=5$ y $|B|=-3, calcular$

$a)\ |A^{-1}|=$ $b)\ |A.B|=$ $c)\ |A^{-1}.B^{t}|=$ $d)\ |(A.B)^{t}|=$

2. Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$ ¿Cuál es el valor de los siguientes determinantes? Justificar

$$|A| = \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 3m & 3n \\ 2p & 2q \end{vmatrix}$$

3. Determinar el valor real de x para que se cumpla lo siguiente:

"El determinante de la matriz 2.B = 160, siendo B= $\begin{bmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{bmatrix}$"

Sistemas Lineales
Parte III

30. Resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$a)\begin{cases} -x-y+z=1 \\ x+2y+3z=1 \\ 2x+2y-z=0 \end{cases} \qquad \text{b)}\begin{cases} 2x+3y-7z=-1 \\ 3x+4y-6z=5 \\ 5x-2y+4z=-7 \end{cases} \qquad \text{c)}\begin{cases} 8x+y+4z=9 \\ 5x-2y+4z=6 \\ x+y \qquad =1 \end{cases}$$

31. Discutir según los valores del parámetro *a* los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a)\begin{cases} ax-y=1 \\ -2x+(a-1)y=2 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} ax+3y=2 \\ 3x+2y=a \end{cases} \qquad c)\begin{cases} 5x-11y+9z=a \\ x-3y+5z=2 \\ 2x-4y+2z=a \end{cases}$$

$$d)\begin{cases} x-3y+5z=2 \\ 2x-4y+2z=1 \\ 5x-11y+9z=a \end{cases} \qquad \text{e)}\begin{cases} x-5y \qquad =0 \\ 4x-6y+2z=0 \\ 5x-4y+az=0 \end{cases} \qquad \text{f)}\begin{cases} x+y+az=0 \\ 3x+2y+4az=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases}$$

32. Dado el sistema $\begin{cases} x+2y=8 \\ x-my=4 \end{cases}$ determinar *m* para que tenga:

a. Solución única
b. Solución múltiple
c. La solución x=0
d. La solución x=8
e. La solución x=k
f. Para que sea incompatible

33. Dado el sistema siguiente $\begin{cases} x+2y-z=8 \\ 2x-3y+z=-1 \\ -3y+3x+kz=5 \end{cases}$

a. Hallar el valor de k que hace el sistema incompatible.
b. Hallar el valor de k para el cual el sistema es compatible y además z=-1
c. Para el valor de k hallado en b), resolver el sistema obtenido.

34. Resolver los siguientes sistemas por el método de Cramer:

$a)\begin{cases} -x+y+z=3 \\ x-y+z=7 \\ x+y-z=1 \end{cases}$ b)$\begin{cases} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{cases}$ c)$\begin{cases} x+4y-3z=-8 \\ 4x+8y-z=76 \\ 8x-y-4z=110 \end{cases}$

35. Valiéndose del método de reducción de Gauss, determinar el valor de la constante k para que el sistema que indica a continuación no tenga solución:

$$\begin{cases} 4x+2y+z=-2 \\ 2x+y+kz=4 \\ x+2y+2z=0 \end{cases}$$

36. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando la regla de Cramer:

$a)\begin{cases} -3x+2y=-1 \\ 4x+3y=41 \end{cases}$ $b)\begin{cases} 6x-y-3z=6 \\ -4x+2y+2z=0 \\ 5x+3y+z=8 \end{cases}$

37. Resolver los sistemas con el método de reducción de Gauss

$a)\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3x-z=0 \\ 3x+2y-2z=1 \end{cases}$ $b)\begin{cases} 2x+y-5z+u=-15 \\ 6x+3y-3z=3 \\ 10y-2z-3u=2 \\ x+y+z+u=7 \end{cases}$

38. Encontrar la solución general y tres soluciones particulares para cada uno de los siguientes sistemas indeterminados, aplicando el método de reducción por Gauss

$$a)\begin{cases} -3x-2y+5z=4 \\ 2x-8z=-6 \\ x-2y-11z=-8 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} u-2v-3w=-2 \\ 5u+2v-3w=2 \\ 3u+2v-w=2 \\ u+2v+w=2 \end{cases}$$

39. Encontrar, en cada caso, los valores de k que hacen que los siguientes sistemas tengan:

a. Una solución
b. Infinitas Soluciones
c. Ninguna Solución

$$a)\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+kz=3 \\ x+ky-3z=2 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=k \\ x+y+kz=k^2 \end{cases}$$