<u>UNIDAD 2:</u> Parte II

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Factorización

Factorizar un polinomio, consiste en expresarlo como producto de otros polinomios.
Las identidades correspondientes a los productos notables, si se miran de derecha a izquierda, proporcionan identidades que nos permiten los procesos inversos: la factorización.
Para realizar esto, existen determinadas reglas, lo llamados casos de Factoreo. Esos casos son los siguientes:

1. <u>Factor Común</u>

   Si en todos los términos de un polinomio figura un factor común, dicho polinomio es igual al producto de ese factor por el polinomio que resulta de dividir a cada término por ese factor.

$$2x^4a - 4x^3a^2b + \frac{1}{2}xa^5c \Rightarrow \frac{2x^4a - 4x^3a^2b + \frac{1}{2}xa^5c}{\underbrace{2xa}_{factor\ \ común}}$$

$$\Rightarrow 2x^4a - 4x^3a^2b + \frac{1}{2}xa^5c = 2xa.\left(x^3 - 2x^2ab + \frac{1}{4}a^4c\right)$$

2. <u>Factor Común en grupos</u>

$$2ax + 2bx - ay + 5a - by + 5b = 2x(a+b) - y(a+b) + 5(a+b)$$
$$2ax + 2bx - ay + 5a - by + 5b = (a+b).(2x - y + 5)$$

3. <u>Trinomio Cuadrado Perfecto</u>

$$36x^2 + 12xy^2 + y^4 = (6x + y^2)^2$$

Una regla para verificar es:

$$\underbrace{\underbrace{\sqrt{36x^2}}_{6x} + 12xy^2 + \underbrace{\sqrt{y^4}}_{y^2}}_{2.6x.y^2 \Rightarrow 12xy^2} \qquad 36x^2 + 12xy^2 + y^4 = (6x + y^2)^2$$

4. <u>Cuatrinomio Cubo Perfecto</u>

$$x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 = \left(x + 2y\right)^3$$

   Una regla para verificar es:

$$\underbrace{x^3}_{\sqrt[3]{x^3} = x} + 6x^2y + 12xy^2 + \underbrace{8y^3}_{\sqrt[3]{8y^3} = 2y} = \left(x + 2y\right)^3 \Rightarrow 3.x^2.y = 6x^2y \quad \text{y} \quad 3.x.\left(2y\right)^2 = 12xy^2$$

5. <u>Diferencia de cuadrados:</u> Producto notable

$$4z^2 - 9y^6 = \left(2z + 3y^3\right).\left(2z - 3y^3\right)$$

6. Suma o diferencia de Potencias de igual grado

<table>
<tr><td rowspan="2">$x^n + y^n$

$x^n + y^n$</td><td>n par: no se puede factorizar</td></tr>
<tr><td>n impar: se divide por la suma de las bases
$x^3 + a^3 = (x+a).(x^2 - ax + a^2)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$x^n - y^n$

$x^n - y^n$</td><td>n par: se divide por la suma de sus bases o por la diferencia de sus bases
$x^4 - a^4 = (x-a).(x^3 + x^2.a + x.a^2 + a^3)$
$x^4 - a^4 = (x+a).(x^3 - x^2.a + x.a^2 - a^3)$</td></tr>
<tr><td>n impar: se divide por la diferencia de las bases
$x^3 - a^3 = (x-a).(x^2 + ax + a^2)$</td></tr>
</table>

Recordatorio de la clase anterior…

División mediante la Regla de Ruffini

La Regla de Ruffini es un algoritmo que permite obtener fácilmente el cociente y el resto de la división de un polinomio por un binomio de la forma (x – a).

Veamos el algoritmo con un ejemplo:

$P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 5 \qquad Q(x) = x - 1$

El procedimiento es el siguiente

a. El polinomio P(x) se completa y ordena en forma decreciente; y se colocan los coeficientes de cada término. A la izquierda se coloca la raíz del polinomio Q(x); en nuestro caso es 1.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & & & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

b. Se baja el primer coeficiente; luego multiplicamos la raíz “1” por ese valor que bajamos “2” y colocamos el resultado debajo del siguiente coeficiente. A continuación sumamos ambos resultados como se muestra a continuación.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & -3 & 5 \\ & & + & & \\ 1 & & 2 & & \\ \hline & 2 & 3 & & \end{array}$$

c. El resultado de la suma se vuelve a multiplicar por la raíz “1” y se continúa el procedimiento hasta el último valor.

	2	1	-3	5
1		2	3	0
	2	3	0	5

d. El último número se corresponde al resto de la división, mientras que el resto de los números son los coeficientes del polinomio cociente.

$R(x) = 5$ Es el Resto de la división
$C(x) = 2x^2 + 3x + 0$

$P(x) = 2x^3 + x^2 – 3x + 5 = (x – 1).(2x^2 + 3x + 0) + 5$ “Algoritmo de la división”

Teorema del Resto

El Teorema del Resto nos permite obtener el resto de una división de polinomios, sin la necesidad de realizar la división; teniendo en cuenta lo siguiente:

Sea el Polinomio P(x) el polinomio dividendo y $Q(x) = x – a$, el polinomio divisor.
Lo que dice el Teorema es que vamos a encontrar el resto al evaluar al polinomio P(x) en la raíz de Q(x); es decir:

$$R(x) = P(a)$$

Ejemplo
$P(x) = 2x^3 + x^2 – 3x + 5$
$Q(x) = x – 1$

$\Rightarrow R(x) = P(1)$
$R(x) = 2(1)^3 + (1)^2 – 3(1) + 5$
$R(x) = 2 +1 – 3 + 5$

$\boxed{R(x) = 5}$

Con el Teorema podemos verificar si un polinomio es divisible por otro, ya que sólo nos tiene que dar es el resto cero.

Raíces de un Polinomio

Las raíces de un polinomio, son los números que hacen que el valor numérico del polinomio sea cero.

Si graficamos al polinomio, en el plano cartesiano, las raíces son la intersección de la gráfica con el eje x.

La cantidad de raíces que tiene un polinomio lo da su grado.

Ejemplo: un polinomio de grado dos, tiene como máximo, dos raíces.

Cuando el polinomio es de grado uno, igualamos el polinomio a cero y encontramos la única raíz.

Cuando el polinomio es de grado mayor a uno, para hallar sus raíces podemos aplicar los siguientes teoremas.

TEOREMAS

Teoremas del Factor

Dado un polinomio P(x), si P (a) = 0 $\Rightarrow$ (x – a) es un factor del polinomio

Ejemplo
$P(x) = 2x^2 - 8$
Si x = 2 $\Rightarrow$ $P(2) = 2.\,(2)^2 - 8 = 0$ $\Rightarrow$ (x - 2) es un factor del polinomio.

En consecuencia, si efectuamos la división por Ruffini, y al cociente resultante volvemos a aplicarle el Teorema del factor, así sucesivamente.
$\Rightarrow P(x) = 2x^2 - 8 = 2.\,(x - 2).\,(x + 2)$

Esta propiedad es útil, para factorizar polinomios que no encajan en ninguno de los casos vistos. Para encontrar ese valor “a”, hacemos prueba y error. Pero una forma más optima es otro teorema que me permite encontrar sus posibles raíces reales, el Teorema de Gauss.

Otra técnica de factorización

Pasos a seguir:

1. **Teorema de Gauss**

Si $P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2} + ... + a_1.x^1 + a_0.x^0$, tiene raíces reales, estas serán de la forma $\frac{p}{q}$, donde p es un divisor de a_0 y q es un divisor de a_n.

Ejemplo

Hallar las raíces del polinomio y factorizarlo: $P(x) = -4x^3 + 7x - 3$
Buscamos los divisores
Divisores del término independiente “a_0” $\Rightarrow$ p = $\pm 1; \ \pm 3$
Divisores del coeficiente principal “a_n” $\Rightarrow$ q = $\pm 1; \ \pm 2; \ \pm 4$

Las posibles raíces son $\pm 1; \ \pm\frac{1}{2}; \ \pm\frac{1}{4}; \ \pm\frac{3}{2}; \ \pm\frac{3}{4}; \ \pm 3$

2. Realizamos el **Teorema del Resto** para hallar una raíz; lo realizamos con cada una de las posibles raíces. Aplicamos todo lo visto:

- Aplicamos Teorema del resto
  P(1) = 0 $\Rightarrow$ x = 1 es raíz
- Por el Teorema del factor concluimos que
  (x – 1) es un factor de P(x)
- Aplicamos Ruffini para encontrar el cociente y podes expresarlo como producto

	-4	0	7	-3
1		-4	-4	3
	-4	-4	3	0

3. Entonces queda **factorizado**:
   $– 4\,x^3 + 7x – 3 = (x – 1).(- 4x^2 - 4x + 3)$

En el segundo factor podemos iniciar nuevamente el procedimiento,

$– 4\,x^3 + 7x – 3 = (x – 1).(x – \frac{3}{2}).(x – \frac{3}{2})$ El polinomio quedo factorizado.

ACTIVIDADES I

1. Factorizar los siguientes polinomios (EJ 11 GUIA)

$a)2ax^2 - x =$

$b)x^2 - ax - bx + ab =$

$c)x^5 - 32 =$

$d)y^4 - 25 =$

$e)x^5 - 0{,}00001 =$

$f)9 - 6x^4 + x^8 =$

$g)x^3 + x - 2 =$

$h) - y^3 - y^2 + y =$

$i)\left(x-2\right)^2 - \left(x-1\right)^2 =$

$j)x^2 - 2 + a.x + a\sqrt{2} =$

$k)x^5 - 4x^3 + x^2 - 4 =$

$l)36t^2 + 9 + 36t =$

$m)x^3 - 9.x^2.y + 27xy^2 - 27y^3 =$

$n)\left(a+b\right).x^3 - \left(a+b\right).x^2 - a - b =$

2. Hallar las raíces racionales de los siguientes polinomios utilizando Teorema de Gauss (Ej 16 guía)

$a)P(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$	$f)P(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 12$
$b)P(x) = x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4$	$g)V(x) = 6x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 12x$
$c)P(x) = 2x^5 - 8x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 8x$	$h)P(x) = 2x^5 + 3x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 12x + 4$
$d)S(x) = 5x^3 - 20x^2 - 20x + 80$	$i)S(x) = -3x^4 - 9x^2 + 12x^3 - 12x + 12$
$e)T(x) = 3x^4 + 15x^3 + 24x^2 + 12x$	$j)T(x) = -2x^5 + 28x^3 - 24x^2 - 26x + 24$

3. ¿Es cierto que existe un polinomio K(x) tal que
   $6x^6 - 9x^4 + 10x^2 - 15 = K(x).\left(2x^2 - 3\right)$?   (ej 17 guía)
4. El polinomio $P(x) = x^4 - ax^3 + bx^2$ tiene como raíces x = 3 y x = - 1.
   Hallar los valores de a y b.   (ej 18 guía)
5. Hallar todas las raíces de los siguientes polinomios sabiendo que r es una de las raíces.

   $a)P(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x$ $r = 1$

   $b)P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 2$ $r = \frac{1}{3}$

   $c)P(x) = -x^3 + 6x^2 + 2x - 12$ $r = 6$

   $d)P(x) = 6x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ $r = -\frac{1}{2}$

6. Expresar los siguientes polinomios como productos y hallar sus raíces reales (ej 20 guía)

$a) P(x) = x^4 - x$

$b) R(x) = 2x^7 + 3x^6 - 5x^5$

$c) S(x) = 5x^3 - 10x^2 + 5x - 10$

$d) T(x) = x^2 - 6x + 9$

$e) Q(x) = -2x^2 + 162$

$f) U(x) = x^4 - 81$

$g) V(x) = 4x^7 + 4$

$h) P(x) = 3x^2 - 15$

$i) R(x) = x^4 + 12x^2 + 36$

$j) S(x) = 2x^3 - 48x^2 + 288x$