UNDAD 2: Parte I

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Expresión Algebraica

Una expresión algebraica es una combinación de letras y números (variables, incógnitas, indeterminadas, etc.) ligada por los signos de las operaciones, en forma finita: adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación de exponente natural o radicación.

Clasificación de las Expresiones Algebraicas

- E. A. Entera: Son aquellas que no contienen denominadores algebraicos.
  Ejemplo $3xz+4;\ \ 2y^3+3tr$
- E.A. Racionales: Son aquellas donde las variables también aparecen en el denominador.
  Ejemplo $\dfrac{3z+4}{2y};\ \ \dfrac{2y}{7t}$
- No son expresiones algebraicas: log(x); cos(3z+1)

En cada expresión diferenciamos los términos, y dentro de ellos, los coeficientes numéricos (números) y parte literal (Variable/s).

Coeficiente numérico

$$3.\underbrace{x.y}-7\ \underbrace{x.z}$$

Parte literal

Las expresiones algebraicas, que son de mucha utilización en física, biología, etc. Pueden evaluarse en determinados valores asignados, a esto le llamamos **Valor numérico de la expresión algebraica.**

Ejemplo:
Dada la expresión algebraica $4x^2-6z$, determinar su valor para x=1 y z=-2

$$\Rightarrow VN = 4.(-2)^2 - 6.(-2)$$

El valor numérico para esos valores dados es 16

$$\Rightarrow VN = 16$$

POLINOMIOS

Monomio: Es una expresión algebraica de un solo termino.
Ejemplo: $3xz^2$

Monomios Semejantes: Son expresiones algebraicas que tienen la misma parte literal
Ejemplo: $3xz^2 \quad y \quad -12xz^2$
Grado de un Monomio: Es la suma de los exponentes de la parte literal
Ejemplo: Sea el monomio $3xz^2 \ \Rightarrow$ El grado es 3

Polinomio: Es la suma algebraica de monomios no semejantes.

La expresión general de un polinomio en una variable

$$P(x)=a_n.x^n+a_{n-1}.x^{n-1}+a_{n-2}.x^{n-2}+...+a_1.x^1+a_0.x^0$$

Donde n es un número Natural

- Los $a_n; a_{n-1}; a_{n-2}; ...; a_1 \ y \ a_0$ son números, denominados coeficientes
- a_n se denomina **coeficiente principal**
- a_0 se denomina **termino independiente**

Grado de un Polinomio: Es el del monomio de mayor grado.
$P(x) = 3x^4 + 4.x - x^2 + 14 \Rightarrow$ El grado del polinomio es 4

Polinomio ordenado: Es aquel que tiene sus exponentes ordenados en forma creciente o decreciente.

$P(x) = 3x^4 - x^2 + 4.x + 14 \Rightarrow$ Ordenado en forma decreciente
$P(x) = 14 + 4.x - x^2 + 3x^4 \Rightarrow$ Ordenado en forma creciente

Polinomio completo: Es aquel que tiene todos sus términos, desde el coeficiente principal hasta el término independiente.

$P(x) = 3x^4 + 0x^3 - x^2 + 4x + 14$

OPERACONES CON POLINOMIOS

Para ello, utilizaremos un polinomio de una variable.

1. **<u>Suma</u> de dos o más polinomios:** Para realizar la operación, se suman los monomios semejantes.

$$
\begin{array}{r}
P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 0x^2 - x + 5 \\
+ \qquad\qquad\qquad\qquad \\
Q(x) = 4x^4 + 0x^3 - 2x^2 + x + 2 \\
\hline
P(x) + Q(x) = 7x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 0x + 7
\end{array}
$$

2. **<u>Diferencia</u> de dos o más polinomios:** Para realizar la operación, se restan los monomios semejantes. Pero en el caso de los polinomios es conveniente utilizar el opuesto del polinomio sustraendo.

Entonces nos queda analizar la expresión: $P(x) - Q(x) = P(x) + (-P(x))$

$$
\begin{array}{r}
P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 0x^2 - x + 5 \\
- \qquad\qquad\qquad\qquad \\
Q(x) = 4x^4 + 0x^3 - 2x^2 + x + 2 \\
\hline
P(x) - Q(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad
\end{array}
$$

Entonces

$$
\begin{array}{r}
P(x) = \quad 3x^4 - \ 2x^3 + 0x^2 - x + 5 \\
+ \qquad\qquad\qquad\qquad \\
-Q(x) = -4x^4 + 0x^3 + 2x^2 \ - x - 2 \\
\hline
P(x) - Q(x) = -x^4 - 2x^3 \ + 2x^2 - 2x + 3
\end{array}
$$

3. **<u>Multiplicación</u>:** Para poder realizar la operación, se debe recordar la propiedad de la multiplicación de igual base, $x^n.x^p = x^{n+p} \Rightarrow Ejemplo: \quad x^2.x^5 = x^7$

Se pueden multiplicar:

- Número por polinomio
  $-3.\ Q(x) = -\ 3.(\ 2x^3 - 3x^2 + 4x)$
  $-3.\ Q(x) = -\ 6\ x^3\ + 9x^2 - 12x$

- Monomio por polinomio
  $2x^2.\ Q(x) = 2x^2.\ (\ 2x^3 - 3x^2 + 4x)$
  $2x^2.\ Q(x) = 4x^5 - 6x^4 + 8x^3$

- Polinomio por polinomio

En cualquiera de los casos aplicamos la propiedad distributiva; el último caso también puede realizarse la multiplicación tradicional.
Este tipo de operaciones se puede llevar a cabo de dos formas distintas.

Ejemplo:
$P(x) = 2x^2 - 3 \qquad Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$

1. Opción I

Se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los elementos del segundo polinomio.
$P(x) \cdot Q(x) = (2x^2 - 3) \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x) =$
$= 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x =$
Se suman los monomios del mismo grado.
$= 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x$

Se obtiene otro polinomio cuyo grado es la suma de los grados de los polinomios que se multiplican
.
Grado del polinomio = Grado de P(x) + Grado de Q(x) = 2 + 3 = **5**

2. Opción II

$$\begin{array}{r}
2x^3 - 3x^2 + 4x \\
2x^2 - 3 \\
\hline
-6x^3 + 9x^2 - 12x \\
4x^5 - 6x^4 + 8x^3 \qquad\qquad\quad \\
\hline
4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x
\end{array}$$

Productos Notables

- Cuadrado de un binomio
  $$(x+y)^2 = (x+y).(x+y)$$
  $$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

- Cuadrado de un trinomio
  $$(x+y+z)^2 = (x+y+z).(x+y+z)$$
  $$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

- Producto de una suma por su diferencia
  $$(x+y).(x-y) = x^2 - y^2$$

- Cubo de un binomio
  $(x+y)^3=(x+y).(x+y).(x+y)$
  $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

- Suma de dos cubos
  $(x^2-xy+y^2).(x+y)=x^3+y^3$

- Diferencia de dos cubos
  $(x^2+xy+y^2).(x-y)=x^3-y^3$

4. División de Polinomios

División Tradicional

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} & C(x) \\ R(x) & \end{array}$$

$\Rightarrow$ Algoritmo de la división $\Rightarrow$ $P(x)=Q(x).C(x)+R(x)$

Para dividir dos polinomios, debemos tener en cuenta:

- El grado del polinomio dividendo debe ser mayor o igual que el grado del polinomio divisor.

  $Gr(P(x))\geq Gr(Q(x))$

- El polinomio dividendo deberá estar ordenado en forma decreciente y completo (si faltara algún termino lo completamos con cero), en tanto el polinomio divisor solamente deberá estar ordenado en forma decreciente.

- La división finaliza se el resto que nos queda es de grado menor al divisor.

  $Gr(R(x)) \langle \ Gr(Q(x))$

- El resto puede ser: Un polinomio o un número; en el caso de que el resto sea el número cero, entonces, la división es exacta.

  $R(x)$ un polinomio
  o
  $R(x)$ un número $\Rightarrow a)$ $\mathrm{R}(x)\in\Re-\{0\}$
  $\Rightarrow b)$ $\mathrm{R}(x)=0$ $\Rightarrow$ La división es exacta
  Diremos que $P(x)$ es múltiplo de $Q(x)$
  y $Q(x)$ es divisor exacto de $P(x)$.

Ejemplo

Pasos a seguir:
1. El primer término del cociente se obtiene dividiendo el término de mayor grado del dividendo entre el de mayor grado del divisor.

2. Este término se multiplica por cada uno de los términos del divisor y, el resultado, se le resta al dividendo.
3. Con el nuevo dividendo obtenido se repite el proceso hasta que el grado resulte menor que el del divisor. (No te olvides que en toda multiplicación los exponentes SE SUMAN y en toda división, los exponentes SE RESTAN)

DIVIDENDO	DIVISOR	
$4x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 2x$	$x^2 - x - 1$	
$-4x^4 + 4x^3 + 4x^2$	$4x^2 + 6x + 15$	COCIENTE
$0 \quad 6x^3 + 9x^2 + 2x$		
$-6x^3 + 6x^2 + 6x$		
$0 \quad 15x^2 + 8x$		
$-15x^2 + 15x + 15$		
$0 \quad 23x + 15$	RESTO	

División mediante la Regla de Ruffini

La Regla de Ruffini es un algoritmo que permite obtener fácilmente el cociente y el resto de la división de un polinomio por un binomio de la forma (x – a).

Veamos el algoritmo con un ejemplo:

$P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 5 \qquad Q(x) = x - 1$

El procedimiento es el siguiente

a. El polinomio P(x) se completa y ordena en forma decreciente; y se colocan los coeficientes de cada término. A la izquierda se coloca la raíz del polinomio Q(x); en nuestro caso es 1.

	2	1	-3	5
1				
	2			

b. Se baja el primer coeficiente; luego multiplicamos la raíz "1" por ese valor que bajamos "2" y colocamos el resultado debajo del siguiente coeficiente. A continuación, sumamos ambos resultados como se muestra a continuación.

	2	1	-3	5
1		+ 2		
	2	3		

c. El resultado de la suma se vuelve a multiplicar por la raíz "1" y se continúa el procedimiento hasta el último valor.

	2	1	-3	5
1		2	3	0
	2	3	0	5

d. El último número se corresponde al resto de la división, mientras que el resto de los números son los coeficientes del polinomio cociente.

$R(x) = 5$ Es el Resto de la división
$C(x) = 2x^2 + 3x + 0$

$P(x) = 2x^3 + x^2 – 3x + 5 = (x – 1).(2x^2 + 3x + 0) + 5$ “Algoritmo de la división”

Teorema del Resto

El Teorema del Resto nos permite obtener el resto de una división de polinomios, sin la necesidad de realizar la división; teniendo en cuenta lo siguiente:

Sea el Polinomio P(x) el polinomio dividendo y $Q(x) = x – a$, el polinomio divisor.
Lo que dice el Teorema es que vamos a encontrar el resto al evaluar al polinomio P(x) en la raíz de Q(x); es decir:

$$R(x) = P(a)$$

Ejemplo
$P(x) = 2x^3 + x^2 – 3x + 5$
$Q(x) = x – 1$

$\Rightarrow R(x) = P(1)$
$R(x) = 2(1)^3 + (1)^2 – 3(1) + 5$
$R(x) = 2 + 1 – 3 + 5$

$$\boxed{R(x) = 5}$$

Con el Teorema podemos verificar si un polinomio es divisible por otro, ya que sólo nos tiene que dar es el resto cero.

ACTIVIDADES

1. Dados los polinomios (ej 8 guía)

$$P(x) = 4x^2 - x + 2$$
$$Q(x) = x^3 + x - 1$$
$$R(x) = 2x - 1$$

Hallar:

$a) P(x) + Q(x)$
$b) P(x) + R(x)$
$c) Q(x).R(x)$
$d) P(x).Q(x)$
$e) P(x) : R(x)$ Verificar por el Teorema del Resto

$f)Q(x):R(x)$ Verificar por el Teorema del Resto

$g)$El resto de la division de P(x) por (x-1)

$h)P(1)=$

$i)P(-2)+\left[Q(-2)\right]^2$

$j)$El grado de $\left[P(x)\right]^4$

2. Hallar C(x) y R(x) dividiendo a P(x) por Q(x) utilizando la Regla de Ruffini (ej. 5 guía)

$a)P(x)=\frac{1}{2}x^4+x^2-1 \qquad Q(x)=x-2$

$b)P(x)=-x^5+x^3 \qquad Q(x)=x+\frac{1}{2}$

$c)P(x)=-x+3-x^3-x^5 \qquad Q(x)=x+2$

$d)P(x)=a(x^3-a^3) \qquad Q(x)=x-a$

$e)P(x)=\left(x-2\right)^3-3.(x-2) \qquad Q(x)=x-2$

$f)P(x)=x^4-x \qquad Q(x)=(3x-1)/4$

$g)P(x)=2x^3 \qquad Q(x)=-3x+2$

3. Determinar k, sabiendo que el resto de la división entre P(x) y Q(x) (ej 9 guía)
   a. Es 30. $P(x)=3x^3-kx^2+2 \qquad Q(x)=x+2$
   b. Es 16. $P(x)=-3x^4+kx^2-15x+2 \qquad Q(x)=x+1$
   c. Es 0. $P(x)=3x^4+2kx^2-kx-12 \qquad Q(x)=x-2$

4. Calcular el valor de k $\in$ Z para que: (ej 10 guía)

   $a)P(x)=x^8-kx^4+1$ Sea divisible por $Q(x)=x+1$

   $b)P(x)=\left(-kx+4\right)^2$ Sea divisible por $Q(x)=x-k$

   $c)P(x)=x^4-3x^3+kx-1$ Sea divisible por $Q(x)=x+2$

   $d)P(x)=x^4-2x^2+1$ Sea divisible por $Q(x)=x-k$

   $e)P(x)=3x^3+2x^2+kx-5;$ para que P(x) dividido por Q(x)=x+1 tenga resto 1

   $f)P(x)=2x^2+4x+k;$ para que P(x) sea divisible por Q(x)= x-2