<u>UNIDAD 2:</u> Parte III

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Simplificación de Expresiones Algebraicas Fraccionarias

Para **simplificar expresiones racionales**, factorizamos el numerador y el denominador y usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\boxed{\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}}$$

Esto nos permite **cancelar** factores comunes del numerador y el denominador.

Simplifique: $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$

SOLUCIÓN

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 2)} \qquad \text{Factorice}$$

$$= \frac{x + 1}{x + 2} \qquad \text{Cancele factores comunes}$$

▼ Multiplicación y división de expresiones racionales

Para **multiplicar expresiones racionales,** usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\boxed{\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}}$$

Esto dice que para multiplicar dos fracciones multiplicamos sus numeradores y multiplicamos sus denominadores.

Ejecute la multiplicación indicada y simplifique: $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 16} \cdot \dfrac{3x + 12}{x - 1}$

SOLUCIÓN Primero factorizamos.

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 16} \cdot \frac{3x + 12}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x + 4)^2} \cdot \frac{3(x + 4)}{x - 1} \qquad \text{Factorice}$$

$$= \frac{3(x - 1)(x + 3)(x + 4)}{(x - 1)(x + 4)^2} \qquad \text{Propiedad de fracciones}$$

$$= \frac{3(x + 3)}{x + 4} \qquad \text{Cancele factores comunes}$$

Para **dividir expresiones racionales**, usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\boxed{\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}}$$

Esto dice que para dividir una fracción entre otra fracción, invertimos el divisor y multiplicamos.

Ejecute la división indicada y simplifique:

$$\frac{x-4}{x^2-4} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6}$$

SOLUCIÓN

$$\frac{x-4}{x^2-4} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6} = \frac{x-4}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2-3x-4}$$ Invierta y multiplique

$$= \frac{(x-4)(x+2)(x+3)}{(x-2)(x+2)(x-4)(x+1)}$$ Factorice

$$= \frac{x+3}{(x-2)(x+1)}$$ Cancele factores comunes

Suma y resta de expresiones racionales

Para **sumar o restar expresiones racionales,** primero encontramos un denominador común y a continuación usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}$$

Aun cuando funcionará cualquier denominador común, es mejor usar el **mínimo común denominador** (MCD) como se explica en la Sección 1.1. El MCD se encuentra al factorizar cada denominador y tomar el producto de los distintos factores, usando la potencia superior que aparezca en cualquiera de los factores.

Ejecute las operaciones indicadas y simplifique:

(a) $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{x}{x+2}$ **(b)** $\dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{2}{(x+1)^2}$

SOLUCIÓN

(a) Aquí el MCD es simplemente el producto de $(x-1)(x+2)$.

$$\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+2} = \frac{3(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$ Escriba fracciones usando el MCD

$$= \frac{3x+6+x^2-x}{(x-1)(x+2)}$$ Sume fracciones

$$= \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x+2)}$$ Combine los términos del numerador

(b) El MCD de $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ y $(x + 1)^2$ es $(x - 1)(x + 1)^2$.

$$\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{(x+1)^2}$$ Factorice

$$= \frac{(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$ Combine fracciones usando el MCD

$$= \frac{x + 1 - 2x + 2}{(x-1)(x+1)^2}$$ Propiedad Distributiva

$$= \frac{3 - x}{(x-1)(x+1)^2}$$ Combine los términos del numerador

Fracciones compuestas

Una **fracción compuesta** es una fracción en la que el numerador, el denominador, o ambos, son expresiones fraccionarias.

Simplifique: $\dfrac{\frac{x}{y} + 1}{1 - \frac{y}{x}}$

SOLUCIÓN 1 Combinamos los términos del numerador en una sola fracción. Hacemos lo mismo con el denominador. A continuación invertimos y multiplicamos.

$$\frac{\frac{x}{y} + 1}{1 - \frac{y}{x}} = \frac{\frac{x + y}{y}}{\frac{x - y}{x}} = \frac{x + y}{y} \cdot \frac{x}{x - y}$$

$$= \frac{x(x + y)}{y(x - y)}$$

ACTIVIDADES

1. Efectuar las operaciones correspondientes (ej 14 guía)

$a)\ \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{x}{x-1} =$

$b)\ \dfrac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 1} \cdot \dfrac{x^2 - 1}{6x - 4} =$

$c)\ \left(\dfrac{3}{x-2} - \dfrac{4}{x-1}\right) : \dfrac{x-5}{4x} =$

2. Reducir a la mínima expresión (ej 15)

a) $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{4}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-x+ax-a} : \dfrac{3x^2-27}{x^2+ax}$

c) $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$

d) $\dfrac{2x-7}{x^2-10x+25} + \dfrac{2x}{x^2-25} - \dfrac{6}{7x+35}$

e) $\dfrac{x^2+x}{x+1} - \dfrac{x+3}{x-3} + \dfrac{5x}{x}$

f) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+4x+4} \cdot \dfrac{7x-21}{x^3-9x^2+27x-27}$

g) $\dfrac{x^3-27}{x^2-9} \cdot \dfrac{5x+15}{2}$

h) $\dfrac{x^2-81}{x^2+11x+18} : \dfrac{11x-99}{x^3+6x^2+12x+8}$

ACTIVIDADES EXTRAS

1. .

Utilizar **identidades notables** para simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ $\left(Soluc:\ \frac{x-1}{x+1}\right)$

b) $\frac{x^2-16}{x^2-4x}$ $\left(Soluc:\ 1+\frac{4}{x}\right)$

c) $\frac{2x+4}{2x-4}$ $\left(Soluc:\ \frac{x+2}{x-2}\right)$

d) $\frac{2x^2-2}{3x^2+6x+3}$ $\left(Soluc:\ \frac{2x-2}{3x+3}\right)$

e) $\frac{x^2+2ax+a^2}{mx+ma}$ $\left(Soluc:\ \frac{x+a}{m}\right)$

f) $\frac{x^2-y^2}{x^2+xy}$ $\left(Soluc:\ 1-\frac{y}{x}\right)$

g) $\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$ $\left(Soluc:\ \frac{x+2}{x-2}\right)$

h) $\frac{x^2+2x+1}{x^4-1}$ $\left(Soluc:\ \frac{x+1}{x^3-x^2+x-1}\right)$

i) $\frac{x^2-2ax+a^2}{x^2-a^2}$ $\left(Soluc:\ \frac{x-a}{x+a}\right)$

j) $\frac{a^2x^2-1}{a^2x^2+2ax+1}$ $\left(Soluc:\ \frac{ax-1}{ax+1}\right)$

2. .

RECORDAR:

TEOREMA DEL FACTOR: "P(x) es divisible por x-a (o dicho de otra forma, P(x) contiene el factor x-a) si se cumple que P(a)=0"
Ejemplo: Dado $P(x)=x^2+x-2$, como P(1)=0, podemos asegurar que P(x) es divisible por x-1
De hecho, puede comprobarse que al factorizarlo se obtiene $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

Utilizar el **teorema del factor** para simplificar, siempre que sea posible, las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{x-2}{x^2+x-6}$ $\left(Soluc:\ \frac{1}{x+3}\right)$

b) $\frac{x-1}{2x^2-3x+1}$ $\left(Soluc:\ \frac{1}{2x-1}\right)$

c) $\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$ $\left(Soluc:\ \frac{x+3}{x+2}\right)$

d) $\frac{x^2-1}{5x^2+4x-9}$ $\left(Soluc:\ \frac{x+1}{5x+9}\right)$

e) $\frac{x+2}{x^2-1}$ (*Soluc: irreducible*)

f) $\frac{x^2+x-2}{x+2}$ (*Soluc: x-1*)

g) $\frac{2x-2}{x^2+x-2}$ $\left(Soluc:\ \frac{2}{x+2}\right)$

h) $\frac{x-3}{x^2+5x+6}$ (*Soluc: irreducible*)

i) $\frac{x-1}{5x^2+4x-9}$ $\left(Soluc:\ \frac{1}{5x+9}\right)$

j) $\frac{x^3-1}{x^2-1}$ $\left(Soluc:\ \frac{x^2+x+1}{x+1}\right)$

k) $\frac{2x^2-x-6}{x^2-4}$ $\left(Soluc:\ \frac{2x+3}{x+2}\right)$