UNIDAD 5:

Lógica Proposicional

Proposición

Es un enunciado o afirmación al que se le puede asignar el valor de verdad verdadero o el valor de verdad falso, pero no ambos.

Las proposiciones admiten equivalencias, oraciones de distinta estructura semántica (es decir, diferentes palabras) e igual significado.

Ejemplo: Las siguientes afirmaciones, ¿son proposiciones?

- Chivilcoy es nombre de una ciudad pampeana.
- Fontanarrosa nació en Rosario.
- ¡que calor! Imperativo
- 2 + 2 = 3
- 8 + 2 = 10
- ¡Viva la libertad! Exclamativo
- El trabajo es muy complicado. Aseverativo
- El cuadrado de todo número par también es par.

Las proposiciones pueden ser:

→ **simples** (o atómicas): Contiene una sola afirmación

$$\underbrace{\text{Pit}\acute{a}\text{goras era Griego}}_{p}$$

→ **compuestas** (o molecular)**,** es cuando está formada por varias proposiciones simples conectadas entre si.

$$\underbrace{\text{Pit}\acute{a}\text{goras era Griego}}_{p} \text{ y } \underbrace{\text{era geómetra}}_{q}$$

Ejemplo: Indicar si las afirmaciones son proposiciones simples o proposiciones compuestas.

- El triángulo es un polígono.
- *1 + 7 = 5*
- Si Juan va al cine, entonces tiene dinero.
- Un triángulo es equiángulo si, y solo si es equilátero.
- Marcos es ingeniero o Beatriz es profesora.

Notación y Conectivos Lógicos

Usaremos las letras minúsculas p, q, r,… para simbolizar las proposiciones. Las proposiciones se pueden combinar para obtener proposiciones compuestas utilizando conectivos lógicos que veremos a continuación:

Conectiva	Expresión en el lenguaje natural (como se lee)	Ejemplo	Símbolo en este artículo
Negación	No p	**No** está lloviendo.	$\sim$ / $\neg$
Conjunción	p y q	Está lloviendo **y** nublado.	$\wedge$
Disyunción (inclusiva)	p o q	Esta la tele prendida **o** el día soleado.	$\vee$
Disyunción (exclusiva)	p ó q	La puerta está abierta **o** cerrada	$\veebar$
Condicional o Implicación	Si p entonces q	**Si** está soleado, **entonces** es de día.	$\rightarrow$
Bicondicional	p si y sólo si q	Está nublado **si y sólo si** hay nubes visibles.	$\leftrightarrow$

Operaciones proposicionales

Objetivos

- Calcular el valor de verdad de proposiciones compuestas
- Construir razonamientos válidos en matemática

La definición de proposición nos dice que debe ser una oración a la cual se le puede asignar un valor de verdad de manera precisa, sin ambigüedades. Ahora bien, ¿cómo le asignamos un valor de verdad a las proposiciones compuestas?, es decir, a las proposiciones que contienen alguno de los conectivos lógicos. Esto lo haremos a través de ***tablas de verdad.***

Ejemplo: “**El día esta soleado”**

Es una proposición simple, podemos extraer el valor de verdad. Para expresarlo de forma simbólica diremos:

$\underbrace{El\ día\ esta\ soleado.}_{p}$ ¿Cuáles son las opciones que debemos analizar? En la proposición simple podemos analizar dos opciones V o F.

1. **Tabla de la negación**

p	~p	~(~p)
V	F	V
F	V	F

Observamos que si p es verdadera, entonces ~p es falso; si p es falso, entonces ~p es verdadero. Es decir, el valor de la negación de un enunciado es siempre opuesto al valor de verdad del enunciado inicial. La negación de una negación es siempre la proposición original.

Ejemplo.

p: Pedro estudia matemática.

~p: Pedro no estudia matemática.

~p: No es cierto que Pedro estudia matemática.

~(~p): Es falso que Pedro no estudia matemática.

2. **Tabla de la disyunción (inclusiva o débil)   “_____ o _____”**

p	V	Q
V	V	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F

La disyunción inclusiva es verdadera, si al menos una de las proposiciones componentes es verdadera, resultando falso únicamente cuando las dos proposiciones son falsas.

Ejemplo

$\underbrace{\text{Tiro las cosas que no me sirven}}_{p}$ o $\underbrace{\text{las cosas viejas}}_{q}$

3. **Tabla de la disyunción (exclusiva o fuerte) “_______ ó______” “_______ o bien ________”**

p	$\underline{V}$	Q
V	F	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F

La disyunción exclusiva es verdadera cuando sólo una de las proposiciones que la compone es verdadera, resultando falso en cualquier otro caso.

Ejemplo

$\underbrace{\textit{M}\text{e pongo pantalón de vestir}}_{p}$ o $\underset{q}{\textit{jeans}}$

4. Tabla de la conjunción **"__________ y _________"**

p	$\wedge$	Q
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	F	F

La conjunción es únicamente verdadera cuando los valores de las proposiciones que la compone son ambas verdaderas, resultando falso en cualquier otro caso.

- **p y q**
- p con q
- p aunque q
- p sin embargo q
- p incluso q
- p tanto como q
- p así mismo q
- **p también q**
- p al igual que q
- No sólo p también q
- p no obstante q

Ejemplo

$$\underbrace{\text{Realizo un diagrama de flujo}}_{p} \text{ y } \underbrace{\text{escucho música}}_{q}.$$

4. **Tabla de la condicional** **"____ entonces _____"** **"Si ________, _______"**

En los problemas económicos, la siguiente proposición es una verdad:
"Si los precios de los artículos suben, entonces, tienen menos demanda.
Aquí
p: Los precios de los artículos suben (premisa o antecedente)
q: Los artículos tiene menos demanda (consecuente)
y se simboliza: $p \rightarrow q$
Se lee: Si p, entonces q
A la proposición "p" se le llama antecedente o hipótesis o premisa y a "q" consecuente o tesis.

p	$\rightarrow$	Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

NUNCA pasará que, de premisas Verdaderas, podemos obtener conclusiones Falsas.

6. Tabla de la bicondicional o doble implicación

Dadas las proposiciones simples "p" y "q", se llama bicondicional a la proposición definida por la conjunción de la proposición condicional con su recíproca.

Asi: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ que se anota por $p \leftrightarrow q$; se lee "p si, y solo si q"

p	↔	q
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	V	F

$$\underbrace{9\ es\ multiplo\ de\ 3}_{p}\ sí\ y\ sólo\ si$$

$$\underbrace{\text{B es múltiplo de A}}_{p}\ \text{sí y solo sí}\ \underbrace{\text{B contiene a A una cantidad exacta de veces}}_{q}.$$

Nótese que la bicondicional $p \leftrightarrow q$ significa una deducción doble: de "p" se puede deducir "q" y de "q" se puede deducir "p"

7. Cálculo de valores de verdad de proposiciones compuestas

Utilizando los conectivos lógicos, se pueden combinar cualquier número finito de proposiciones simples, para obtener otras proposiciones cuyos valores de verdad pueden ser conocidos construyendo sus tablas de verdad.

Para efectuar el número de combinaciones de los valores de las proposiciones, recurrimos a la relación $\mathbf{2^n}$, donde n representa el número de proposiciones.

Como en los cálculos combinados que se realizan en matemática, debemos resolver primero los paréntesis, luego los corches y por último las llaves. Así mismo, se considera a la operación "→" y a la operación "↔" como el "=", ya que a través de ellas obtenemos las conclusiones.

Ejemplo. Construir la tabla de verdad de la proposición:

$[\sim p \rightarrow (q \wedge p)] \rightarrow \sim q$

Son $2^n = 2^2 = 4$; 4 es la cantidad de combinaciones que hay con dos proposiciones

[~p	→	(q	∧	p)]	→	~q
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F
V	F	F	F	F	V	V
	*2		*1		*3	

Los *1 es la solución a $(q \wedge p)$ y *2 es la solución a $[\sim p \rightarrow (q \wedge p)]$, que son las soluciones parciales, *3 es la solución final.

Construir una tabla de verdad de la siguiente proposición

$[\sim p \wedge (q \vee p)] \leftrightarrow [(p \vee r) \wedge q]$

[~p	∧	(q	∨	p)]	↔	[(p	∨	r)	∧	q]
F	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V	V	F	F	F
V	V	V	V	F	V	F	V	V	V	V
V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	V
V	F	F	F	F	V	F	V	V	F	F
V	F	F	F	F	V	F	F	F	F	F
	*2		*1				*1		*2	

Solución

8. **Proposiciones lógicamente equivalentes**

Dos proposiciones son equivalentes cuando los resultados de las tablas de verdad son iguales.

Ejemplo. Las proposiciones $(p \rightarrow q)$ y $(\sim p \vee q)$ son equivalente, ya que:

p	(p → q)	q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

(~ p	∨	q)
F	V	V
F	F	F
V	V	V
V	V	F

La equivalencia entre dos proposiciones p y q lo escribimos como $p \approx q$ (puse el símbolo, pero si utiliza otro hay que cambiarlo, pero el que es uno solo se puede confundir con el de negación, creo)

Nota: La relación de equivalen es reflexiva, simétrica y transitiva

9. **Tautologías, contradicciones y contingencias:** Son posibles resultados de analizar una tabla de verdad con proposiciones compuestas; donde, la columna que contiene el resultado final es denominado operador principal.

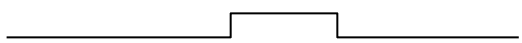
Una expresión proposicional se llama:

- **Tautología**, si los valores de verdad de su operador principal son verdaderos.
- **Contradicción** o antitautología, si los valores de verdad de su operador principal son todos falsos.
- **Contingencia**, cuando los valores de verdad de su operador principal hay valores verdaderos y falsos.

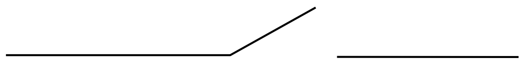
Circuitos Lógicos o Booleanas

La verdad en una proposición puede asociarse al pasaje de corriente en un circuito eléctrico con un interruptor. Si la proposición es verdadera (V), admite el paso de la corriente eléctrica; si es falsa (F) no lo admite.

Para representar p, si es V, se tiene:



Y para p, si es F

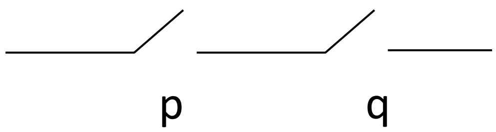


Es decir el interruptor se cierra si *p* es **V**, y se abre si *p* es **F**.

Las operaciones proposicionales pueden presentarse mediante circuitos, con tantos interruptores como proposiciones componentes haya; combinadas en serie o paralelo.

<u>Conjunción</u>

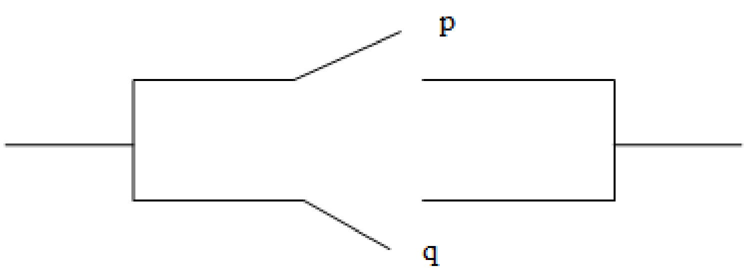
Representada por un circuito en Serie



$p \wedge q$

<u>Disyunción</u>

Representada por un circuito en paralelo



$p \vee q$

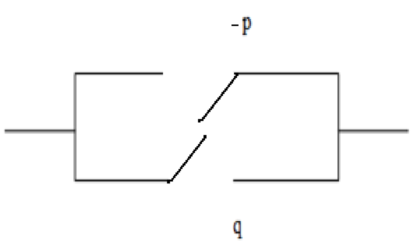
<u>Implicación</u>

Dado que para representar mediante circuitos booleanos sólo es posible en caso de la conjunción y la disyunción, para todas las demás operaciones necesitamos convertirlas en combinación lineal de estas. En el caso de la implicación, queda:

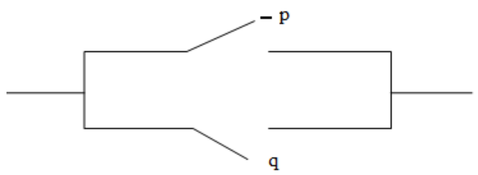
"$p \Rightarrow q$" es equivalente a "- (p $\wedge$ -q)"

Además, sabemos que "- (p $\wedge$ -q)" es equivalente a "-p $\vee$ q"

Es decir, convertimos la implicación en una disyunción para poder representarla

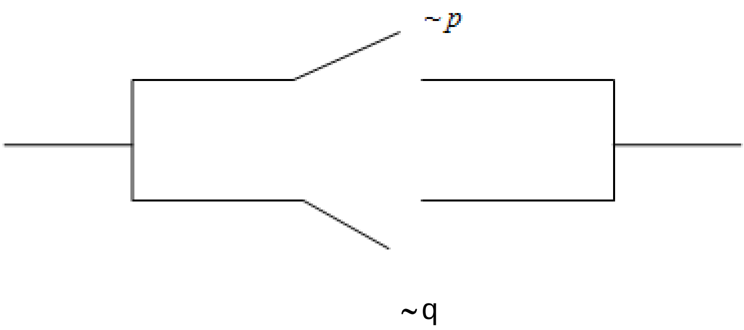


O bien,

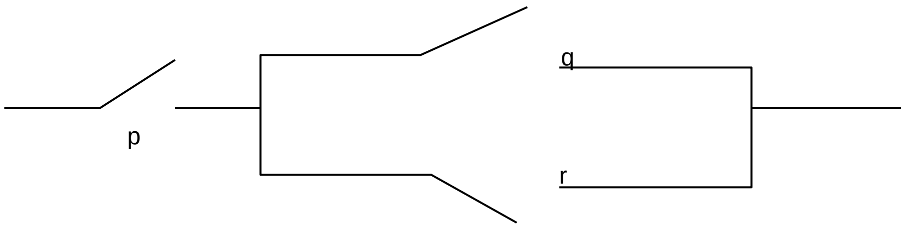


<u>Ejemplos</u>:

El siguiente circuito corresponde a la proposición $\sim p \vee \sim q$



La operación proposicional: ***p* ∧ (*q* ∨ r)**, está caracterizada por el circuito



Trabajo Práctico UNIDAD 5

Lógica Proposicional

1. Evaluar las siguientes fórmulas lógicas y establecer si se trata de Tautología, Contradicción o Contingencia.

   a. $\sim(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow \sim q)$

   b. $\sim [\sim p \wedge q] \Rightarrow q$

   c. $(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \vee q)$

   d. $\sim (p \wedge q) \Rightarrow [(p \vee r) \Rightarrow q]$

   e. $[(\sim p) \wedge (\sim r)] \Rightarrow q$

   f. $[(p \vee q) \Rightarrow \sim p] \wedge p$

   g. $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

   h. $[(p \vee q) \Rightarrow q] \Leftrightarrow q$

   i. $(\sim p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \wedge r)$

   j. $(p \Leftrightarrow r) \wedge (p \Rightarrow q)$

2. De las siguientes proposiciones ¿Cuáles son tautologías?

a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(\sim p) \vee q]$

b) $[\sim (p \wedge q) \Rightarrow (\sim q \wedge q)] \Rightarrow p$

c) $[(p \wedge q) \vee (\sim q)] \Rightarrow \sim p$

3. Sabiendo que $p \vee q$ es verdadero y luego q es Falso, determinar el valor de verdad de $\left[\left(p \vee q\right) \wedge \neg q\right] \Rightarrow q$

4. Determinar en cada caso si la información que se da es suficiente para conocer el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas. En caso de ser afirmativo, justificar.

a.	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$	Sabiendo que r es V
b.	$p \wedge r \leftrightarrow t$	Sabiendo que $r \wedge t$ es V
c.	$(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$	Sabiendo que q es V
d.	$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)$	Sabiendo que p es V y r es F
e.	$[p \wedge (q \rightarrow r)] \vee (\sim p \wedge r) \rightarrow \sim q$	Sabiendo que $\sim p \wedge r$ es V
f.	$[p \wedge (\sim q \leftrightarrow s)] \rightarrow \sim (s \rightarrow \sim p)$	Sabiendo que $(q \rightarrow p)$ es F
g.	[p ^ (q <=> s)] => ~ (s ^ p)	Sabiendo que ~ s ^ p es V
h.	[p ^ (~q <=> s)] => ~ (s => ~p)	Sabiendo que p es F
i.	[p ^ (~q <=> s)] => ~ (s => ~p)	Sabiendo que (q => p) es F

5. Sabiendo que las proposiciones p y r son proposiciones verdaderas y las proposiciones q y s son proposiciones falsas; indicar cuantas de las proposiciones compuestas tienen resultado falso.

Los datos son:

p: V   r: V   q: F   s: F

a. $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \wedge s)$

b. $(p \wedge q) \rightarrow (r \leftrightarrow s)$

c. $\sim p \leftrightarrow (r \wedge q)$

d. $\sim q \leftrightarrow (p \wedge s)$

e. $\sim s \leftrightarrow (p \vee q)$

6. Sean p, q y r proposiciones tales que p es verdadera, q es falsa y r es falsa. Indicar el valor de verdad de la siguiente proposición $\left[(-p \vee -q) \Rightarrow (-r \veebar q)\right] \Rightarrow (p \Rightarrow -r)$

7. Sabiendo que las proposiciones p y r son proposiciones verdaderas y las proposiciones q y s son proposiciones falsas; indicar cuantas de las siguientes proposiciones son falsas:

$$
\begin{array}{ll}
i. (p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (r \wedge s) & ii. (p \wedge q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow s) \\
iii. -p \Leftrightarrow (r \wedge q) & iv. -p \Leftrightarrow (r \wedge -q) \\
v. -q \Leftrightarrow (p \wedge s) & vi. -s \Leftrightarrow (p \vee q)
\end{array}
$$

8. Si se sabe que la proposición compuesta $p \wedge q$ es verdadera, encontrar (de ser posible) el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

$$
\begin{array}{ll}
i. (p \veebar q) & ii. (p \Rightarrow q) \wedge q \\
iii. -p \Rightarrow (p \wedge q) & iv. -q \Leftrightarrow (p \wedge -p) \\
v. \left[(p \vee s) \Rightarrow (p \wedge q)\right] & vi. \left[(p \vee s) \Rightarrow (p \wedge q)\right] \Leftrightarrow (p \Rightarrow -q)
\end{array}
$$