UNIDAD 7:

RELACIONES Y FUNCIONES

Relaciones Binarias

Interesan muy especialmente los subconjuntos del producto cartesiano, pues dados dos conjuntos A y B, cada subconjunto del producto cartesiano A X B establece una relación entre los elementos de ambos conjuntos.

Definición

Una **Relación Binaria** entre los elementos de A y B es, entonces, cualquier conjunto incluido en su producto cartesiano AxB.

En símbolos $\boxed{\Re \text{ es una relación de A en B} \Leftrightarrow \Re \subseteq A \times B}$

Análogamente, se dice que $\Re$ es una relación binaria definida en el conjunto A si es un conjunto incluido en A X A, o sea, si es un subconjunto o una parte de A X A.

$$\Re \text{ relación en A} \Leftrightarrow \Re \subseteq A^2$$

Además, se puede simbolizar una relación $\Re$ entre dos conjuntos A y B, se anota

$\boxed{\Re : A \longrightarrow B}$; se lee "relación R, de A en B"

Ejemplo:

$P = \{x \in P / x \text{ es primo} \wedge \ x \langle 12\}$

$I = \{x \in P / x \text{ es impar} \wedge \ x \langle 10\}$

Por lo tanto

$P \times I = \{(1;1),(1;3),(1,5),\ldots,(11;9)\}$

$Sea\ R \in P \times I$

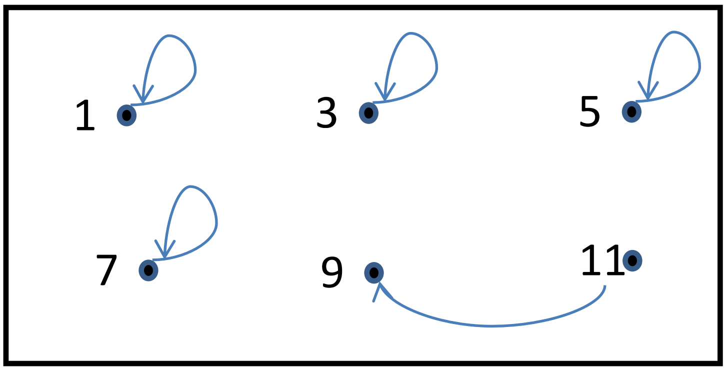
$R = \{(1;1),(3;3),(5,5),(7;7),(11;9)\}$

Se puede representar de varias formas, algunas de ellas son:

- Matriz o Cuadro de Doble entrada

P \ I	1	3	5	7	9
1	(1; 1)	(1; 3)	(1; 5)	(1; 7)	(1; 9)
3	(3; 1)	(3; 3)	(3; 5)	(3; 7)	(3; 9)
5	(5; 1)	(5; 3)	(5; 5)	(5; 7)	(5; 9)
7	(7; 1)	(7; 3)	(7; 5)	(7; 7)	(7; 9)
11	(11; 1)	(11; 3)	(11; 5)	(11; 7)	(11; 9)

- Grafo



Observación: Como casos triviales, están el conjunto vacío ϕ y el conjunto A x B; ambas son relaciones de A en B; ya que, por una parte, ϕ está incluido en cualquier conjunto y por otra, todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

Dominio y Codominio

Sea R una relación entre dos conjuntos A y B.
Si (x; y) es un par ordenado de R ((x; y) $\in$R); entonces,
"y" recibe el nombre de "imagen de x" según R
"x" recibe el nombre de "preimagen de y" según R

Definición

Se llama **dominio** de una relación al conjunto formado por todos los elementos del conjunto A que tienen imagen en B.

$D_R = \{x \in A / (x; y) \in \Re\}$

Definición

Se llama **recorrido** o Codominio de una relación al conjunto formado por todos los elementos del conjunto B que tienen preimagen en A.

$CD_R = \{y \in B / (x; y) \in \Re\}$

FUNCIONES

Este capítulo constituye uno de los temas centrales más importantes de la teoría de conjuntos. Nos detendremos e alguno aspectos prácticos de la interpretación de sus comportamientos gráficos analítico en general, para luego ocuparnos del estudio de algunas funciones especiales (Lineal, cuadrática, logarítmicas, entre otras) y de sus aplicaciones.

Definición:

Una función es toda relación que hace corresponder a cada elemento del dominio (conjunto de partida) una y solo una imagen (Codominio o conjunto de llegada).

Las funciones se simbolizan preferentemente con las letras *f, g, h…*
Para indicar que una función "*f*" tiene como Dominio al conjunto A y como Codominio al conjunto B, se anota:

$f : A \to B$, se lee "*f* es una función de A en B"

De la definición de función se "desprenden" dos condiciones.

- **Existencia:** para todo elemento del conjunto de partida existe y corresponde un elemento del conjunto de llegada.
- **Unicidad:** a cada elemento del conjunto de partida le corresponde uno y solo uno del conjunto de llegada.

Como una **función** es una relación entre dos variables, de forma que a cada valor de la **variable independiente** x, que llamaremos dominio y le asocia un único valor de la **variable dependiente** y, que llamaremos **imagen** de x. Decimos que y **es función** de x y lo representamos por

$$y = f(x)$$

En símbolos, la definición es:

$$f : A \to B \Leftrightarrow \begin{cases} a) & \forall x \in A, \quad \exists y \in B / (x, y) \in f \\ b) & (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1) \in f \wedge (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2 \end{cases}$$

<u>Clasificación de las funciones</u>

1. Inyectivas
2. Sobreyectivas
3. Biyectivas

1. Una función es ***inyectiva*** cuando a cada elemento distinto del dominio le corresponde elementos distintos de la imagen.

$$f \text{ es Inyectiva} \Leftrightarrow (x_1, y_1) \in f \wedge (x_2, y_2) \in f \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$$

2. Una función es ***sobreyectiva*** si cada elemento del conjunto B es correspondido por al menos un elemento del conjunto A.

$$f \text{ es Sobreyectiva} \Leftrightarrow \forall y \in f, \exists x \in A / (x, y) \in f$$

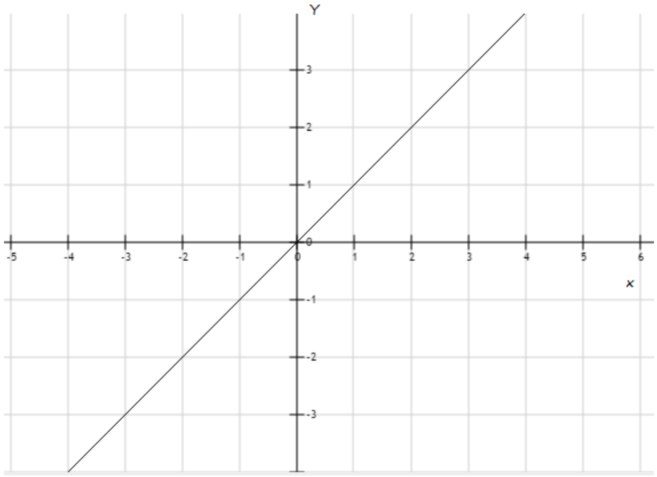
3. Una función es **Biyectiva** si cumple con ambas condiciones anteriores, es decir, si es sobreyectiva e inyectiva

FUNCIÓN LINEAL

Una **función lineal** es aquella cuya expresión matemática viene dada por:

$$f(x) = m.x$$

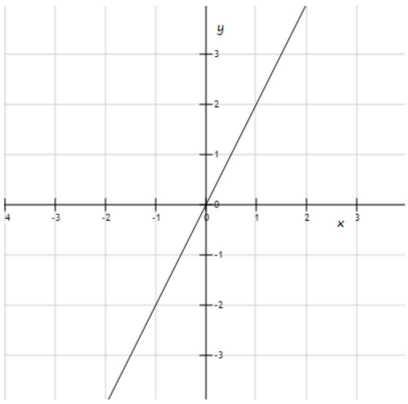
Su grafica es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas, el punto (0, 0)



La pendiente m de una recta mide la inclinación de la misma, de manera que:

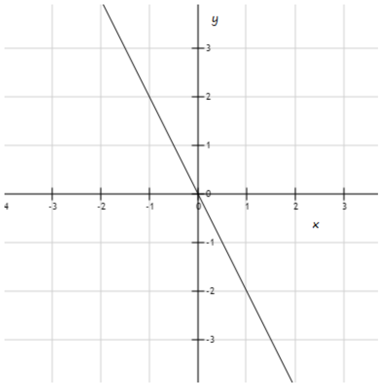
- Si $m > 0$, la función es creciente.

Ejemplo $y = 2x$



- Si $m < 0$ la función es decreciente.

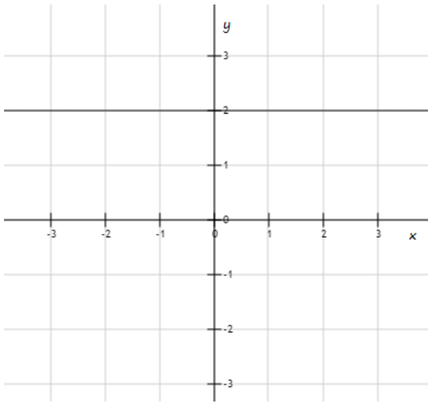
Ejemplo $y = -2x$



- Si $m = 0$ la función es constante (recta horizontal).

La grafica es una recta horizontal paralela al eje de las abscisas. Y la ecuación de la recta que forma está dada por la siguiente fórmula: $y = m.0 + b$

y = 2



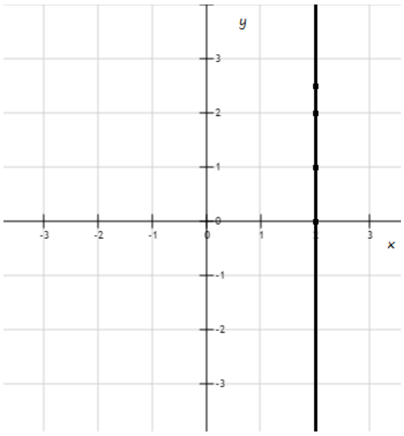
Rectas Verticales

Las rectas paralelas al eje y, eje de las ordenadas, NO son funciones, ya que un valor de x tienen infinitas imágenes; no cumple con la definición de función.

Su fórmula es: $x = k$

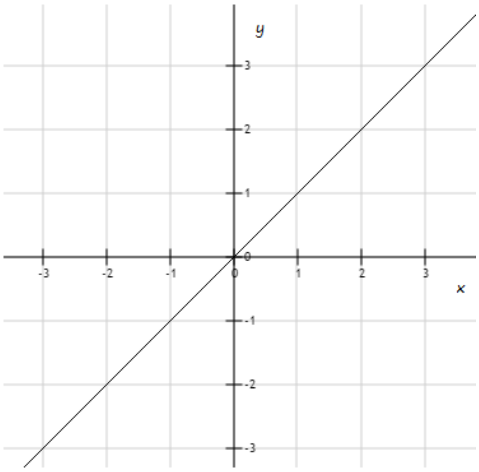
Ejemplo

x = 2



Función Identidad

$f(x) = x$



Su grafica es una bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Su **función lineal Afin** es aquella cuya expresión matemática viene dada por:

$f(x) = m.x + b$

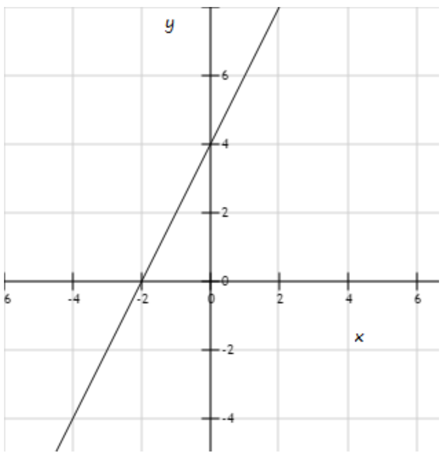
y su ecuación se expresa de la siguiente manera:

$y = f(x) = m.x + b$

donde m es la pendiente, es decir, la inclinación de la recta (mencionado anteriormente) y b es la ordenada al origen, nos indica el punto donde la recta cruza al eje de ordenadas.

Ejemplo: $y = 2x + 4$

Pendiente m = 2
Ordenada al origen b = 4, punto de intersección (0; 4)
Gráfico



Ceros o raíces de una función

Llamamos ceros o raíces de una función a los valores de x para los cuáles se cumple que:
$f(x)=0$

Los ceros de una función son las abscisas de los puntos en los cuales su grafica tiene intersección con el eje de las x.

Para hallar los ceros de una función de manera analítica, basta con igualar la ecuación a cero.

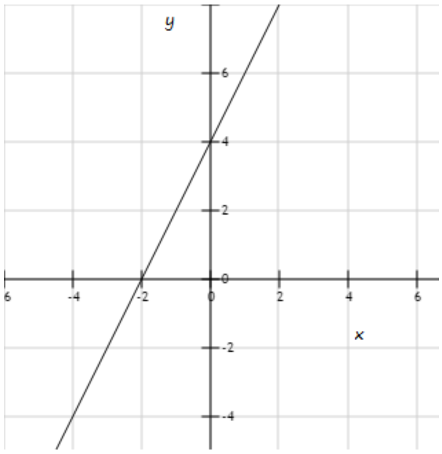
Ejemplo
$y=2x+4$

$0=2x+4$

$-4=2x$

$-4:2=x$

$\boxed{x = -2}$ es la raíz de la función estudiada en la gráfica:



Recta que pasa por un punto y de pendiente conocida

Se conoce la pendiente **m** de una recta que pasa por un punto dado por sus coordenadas $(x_0;y_0)$ y se quiere hallar la ecuación de la recta que cumple con estos requisitos.

Para ello ponemos: $y=m.x+b$

Para calcular **b** se reemplazan las coordenadas del punto por el que pasa

$$y_0=m.x_0+b$$

y se despeja b con lo cual $b=y_0-m.x_0$.

Reemplazamos en la ecuación:

$$y=m.x+y_0-m.x_0 \Rightarrow y-y_0=mx-mx_0 \Rightarrow y-y_0=m(x-x_0)$$

datos $P_0 = (x_0 ; y_0) \wedge m \Rightarrow$ Nos queda para aplicar la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$

Ejemplo:

Hallar la ecuación ordinaria de la recta que pasa por el punto $A = (-5;4)$ y tiene una pendiente *m=2*

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad y - 4 = 2x + 10$$
$$y - 4 = 2(x - (-5)) \qquad y = 2x + 10 + 4$$
$$y - 4 = m(x + 5) \qquad y = 2x + 14$$

Recta que pasa por dos puntos determinados

Se quiere hallar la ecuación de una recta sabiendo que la misma pasa por $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$.
Por tratarse de una función lineal que pasa por $(x_1; y_1)$ podemos aplicar la ecuación de una recta que pasa por un punto dado, quedando:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Falta calcular la pendiente.
Como la recta pasa también por $(x_2; y_2)$, las coordenadas de este punto satisfacen a la ecuación anterior. Luego reemplazamos: $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$

Despejamos *m* $\Rightarrow$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Sustituimos el pendiente resultando:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.(x - x_1) \qquad \text{ó} \qquad \boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

Ejemplo:

Obtener la ecuación de la recta en su forma general que pasa por los puntos $A = (-5;-3)$ y $B = (2;4)$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.(x - x_1)$$

$$y - (-3) = \frac{4 - (-3)}{2 - (-5)}.(x - (-5))$$

$$y + 3 = \frac{4 + 3}{2 + 5}.(x + 5) \qquad y + 3 = 1.(x + 5)$$

$$y + 3 = x + 5$$
$$-x + y + 3 - 5 = 0$$
$$-x + y - 2 = 0$$

Como el término A debe ser positivo, multiplicamos por -1 toda la ecuación:

$x - y + 2 = 0$ Forma General
$y = -x + 2$ Forma Explícita

Formas de expresar la ecuación de la recta:

1. Explícita

   Es cuando la variable "y" está despejada $y = mx + b$

   Ejemplo $y = \frac{4}{3}x + 4$

2. Implícita

   Es cuando las componentes de la ecuación se encuentran del mismo lado de la igualdad. $ax + by + c = 0$

   Ejemplo $\frac{4}{3}x - y + 4 = 0$

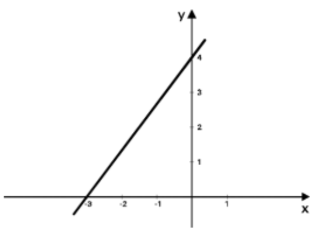
3. Segmentaria

   Es una recta del plano que no pasa por el origen $(0;0)$ y que intercepta a ambos ejes coordenados n los puntos $A = (a;0)$ y $B = (0;b)$, su ecuación simétrica es:

   $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$

   Ejemplo $\frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1$

   La gráfica de los ejemplos queda:



   En la misma se puede verificar las intersecciones con los ejes coordenados

Relaciones entre Rectas

Dadas dos rectas en el plano R_1 y R_2 con sus respectivas ecuaciones principales:

$$\begin{cases} R_1 : \ y_1 = m_1 x + b_1 \\ R_2 : \ y_2 = m_2 x + b_2 \end{cases}$$

- Rectas Paralelas

$$\boxed{R_1 \ // \ R_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2} \begin{cases} \textit{No Coincidentes} & b_1 \neq b_2 \\ \textit{Coincidentes} & b_1 = b_2 \end{cases}$$

- Rectas Secantes

$$\boxed{R_1 \angle R_2 \Leftrightarrow m_1 \neq m_2} \text{ Tienen un punto en común} \begin{cases} \text{Rectas Perpendiculares (forman un ángulo 90º)} \\ \boxed{R_1 \ \perp \ R_2 \Leftrightarrow m_1 = -\dfrac{1}{m_2}} \\ \text{Rectas Oblicuas (forman un ángulo agudo u obtuso)} \\ \boxed{R_1 \ \perp \ R_2 \Leftrightarrow m_1 \neq -\dfrac{1}{m_2}} \end{cases}$$

TRABAJO PRÁCTICO 7
FUNCIÓN LINEAL / ECUACIÓN DE LA RECTA

1. En cada caso, hallar la función lineal *f* que cumpla lo pedido, hacer el gráfico correspondiente y encontrar la pendiente de la recta determinada por el gráfico de *f*:
   a) $f(0) = 3$ y $f(-1) = 4$ b) $f(-2) = 3$ y $f(1) = 5$
   c) $f(-2) = 7$ y $f(3) = 7$
   d) $f(1) = 0$ y el punto $(2;-3)$ pertenece al gráfico de *f*.

2. Sea la recta *r* de ecuación $y = 2x - 3$
   a) Hallar tres puntos de *r*.
   b) ¿$(5;7) \in r$? ¿$(-2;1) \in r$?
   c) Encontrar *k* para que:
      i. $(-4;k) \in r$ ii. $(k;2) \in r$ ii. $(k-1;3k) \in r$
   d) Hallar los puntos de corte de la recta *r* con los ejes coordenados.

3. Calcular la pendiente, la ordenada al origen y expresarlas (si es posible) de las tres formas que existe:
   a) $y = 2x - 3$ b) $y = 2x + 3$ c) $2x - 5y = 2$
   d) $3x = 2y$ e) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$ f) $y = 5$

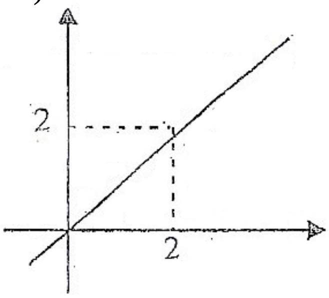
4. En cada caso, dar la ecuación de la recta que verifica lo pedido, y graficar:
   a) Pasa por los puntos $(1;2)$ y $(-1;3)$

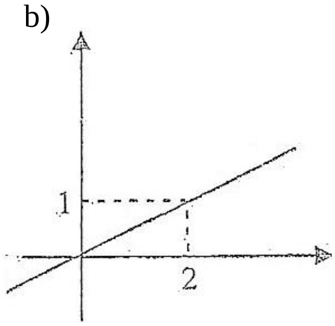
b) Pasa por el punto $(2;1/2)$ y es paralela a la recta $y = 2x + 5$
c) Es perpendicular a $y = 2/3x - 2$ y pasa por el $(-1;-1)$
d) Es perpendicular a $y = -x + 3$ y pasa por el origen de coordenadas.
e) Es vertical y pasa por el punto $(2;-3)$
f) Es horizontal y pasa por $(2;-5)$
g) Es perpendicular a la recta $y = 5$ y pasa por el punto $(5;8)$

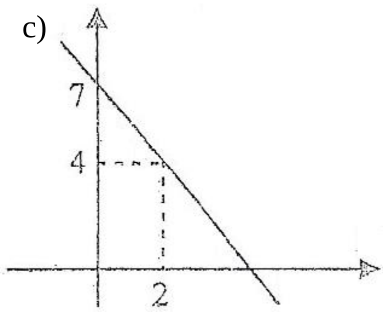
5. a) Probar analíticamente que el triángulo cuyos vértices son $A = (1;4)$, $B = (0;2)$ y $C = (2;1)$ es rectángulo. Graficar.
   b) Decidir cuántos pares de lados paralelos tiene el cuadrilátero *ABCD* siendo $A = (-2;-5)$, $B = (2;7)$, $C = (1;1)$ y $D = (-1;-5)$.

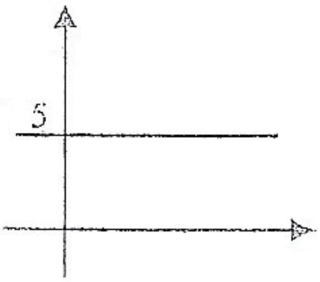
6. Decidir analíticamente si los puntos $(1;2)$, $(-3;4)$ y $(3;5)$ están alineados.

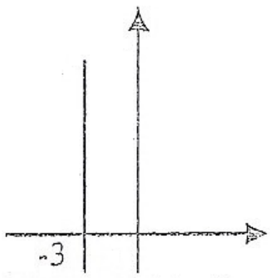
7. Hallar la ecuación de la recta representada en cada gráfico:

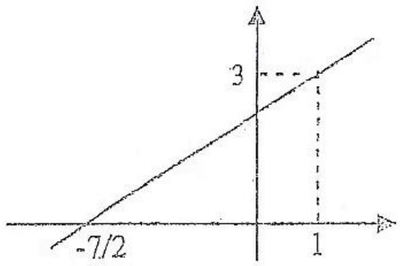
a)


b)


c)


d)


e)


f)


8. Graficar y hallar la imagen de *f* en cada caso:
   a) $f : R \to R$ dada por $f(x) = 2x + 3$
   b) $f : (-1,3) \to R$ dada por $f(x) = 2x + 3$
   c) $f : (-2,4] \to R$ dada por $f(x) = 2x + 4$
   d) $f : R \to R$ dada por $f(x) = 5$

9. ¿Cuál debe ser el dominio de $f(x) = 2x + 1$ para que su imagen sea el intervalo $[0,4)$?

10. Hallar *k* para que los puntos $(-2;3)$, $(0;-1)$ y $(2;k-3)$ estén alineados.

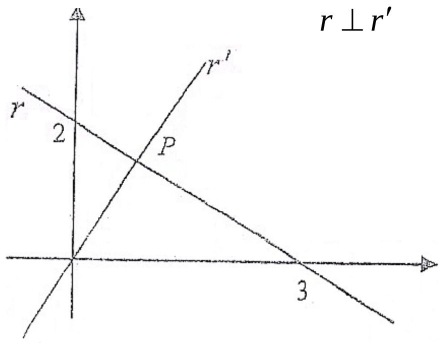
11. Encontrar la ecuación de la recta paralela a la recta $r: y = 3$ y que pasa por el punto de intersección de la recta $y = -2/3\,x + 3$ con la recta $y = 1/3\,x - 9$.

12. Dados los puntos del plano $P = (1;6)$, $Q = (3;4)$ y $R = (-2;3)$, hallar el punto de intersección de la recta que pasa por *P* y *Q* con la recta perpendicular a $y = 2x - 1$ que pasa por *R*.

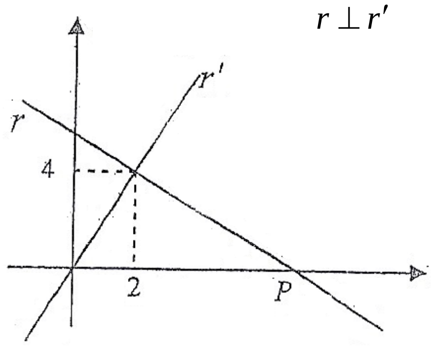
13. a) Hallar *b* de manera que las rectas $r: 2x - 4$ y $r': x + b$ se corten en el punto de coordenadas $(1;-2)$.
    a) Para el valor de *b* encontrado, graficar y describir el conjunto de valores de *x* para los cuales resulta el gráfico de *r* por encima del gráfico de r'.

14. En cada caso hallar las coordenadas del punto *P*:

a) $r \perp r'$



b) $r \perp r'$



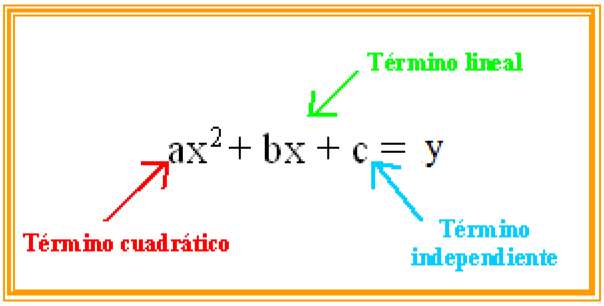
15. Hallar la ecuación de la recta a partir de los siguientes datos. Graficar.
    a) $m = 4$ y pasa por el punto $P = (0;-1)$
    b) $m = -3$ y pasa por el punto $P = (-3;-2)$
    c) Pasa por los puntos $P = (2;5)$ y $Q = (-2;-3)$
    d) Pasa por los puntos $P = (-1;-3)$ y $Q = (2;5)$
    e) Pasa por $P = (1;2)$ y es paralela a la recta $4x + 2y = 2$
    f) Pasa por $P = (-2;5)$ y es perpendicular a la recta $y = -3x - 2$
    g) Pasa por $P = (-1;-3)$ y es perpendicular a la recta $y = -1/2\,x - 3$
    h) Interseca al eje *x* en 3 y al eje *y* en 4
    i) Pasa por los puntos $P = (0;3)$ y $P = (5;0)$
    j) Tiene pendiente –1/5 y ordenada al origen 3
    k) Es paralela al eje *y*, y pasa por $P = (4;0)$
    l) Es paralela al eje *x*, y pasa por $P = (0;4)$
    m) Es paralela a la recta que pasa por los puntos $P = (2;4)$ y $R = (6;-1)$, y pasa por el punto $A = (3;-5)$
    n) Es perpendicular a la recta $y = -x$ y pasa por $Q = (-3;2)$

FUNCION CUADRÁTICA

Una función de la forma:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ con *a*, *b* y *c* pertenecientes a los reales y a distinto de 0, es una función cuadrática y su gráfico es una curva llamada parábola.

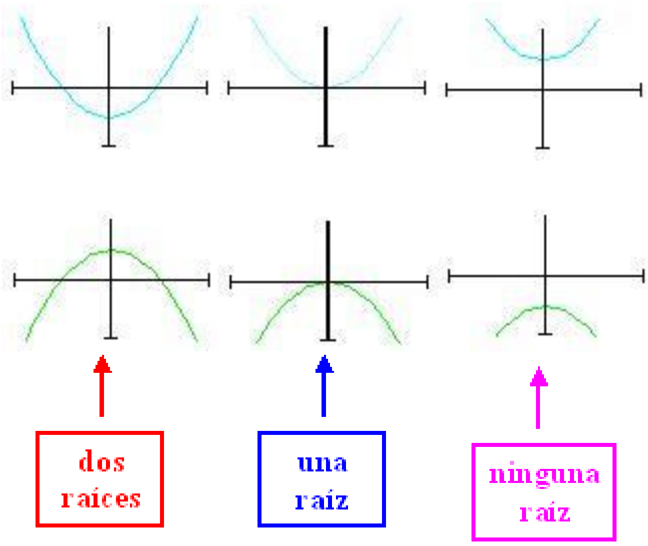
En la ecuación cuadrática " $f(x) = y$ " sus términos se llaman:



Si la ecuación tiene todos los términos se dice ecuación completa, si a la ecuación le falta el término lineal o independiente se dice que la ecuación es incompleta.

Raíces

Las *raíces* (o ceros) de la función cuadrática son aquellos valores de x para los cuales la expresión vale 0, es decir los valores de *x* tales que $y = 0$. Gráficamente corresponden a las abscisas de los puntos donde la parábola corta al eje *x*. Podemos ver a continuación que existen parábolas que cortan al eje *x* en:



Para poder calcular las raíces de cualquier función cuadrática calculamos $f(x) = 0$, entonces

$ax^2 + bx + c = 0$

Pero para resolver $ax^2 + bx + c = 0$ observamos que no podemos aplicar las propiedades de las ecuaciones, ésta tiene la particularidad de poseer un término de segundo grado, otro de primer grado y un término constante.

Entonces, para resolverla podemos hacer uso de la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Al resultado de la cuenta $b^2 - 4ac$ se lo llama *discriminante de la ecuación y* esta operación presenta distintas posibilidades.

Posibles Soluciones:

- Si $b^2 - 4ac > 0$ tenemos dos soluciones posibles.
- Si $b^2 - 4ac = 0$ el resultado de la raíz será 0, con lo cual la ecuación tiene una sola solución real.
- Si $b^2 - 4ac < 0$ la raíz no puede resolverse, con lo cual la ecuación no tendrá solución real.

Simetría

La parábola presenta simetría respecto a una cierta recta vertical. Es decir, si conocemos dos puntos del gráfico $(x_1; p)$ y $(x_2; p)$, el eje de simetría pasará por el punto medio entre estos, o sea $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

Vértice

El vértice de la parábola está ubicado sobre la recta de simetría, de modo que su coordenada x, que notaremos x_v vale: $x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

Conocida la coordenada x de un punto, su correspondiente coordenada y se calcula reemplazando el valor de x en la expresión de la función.

En el vértice se calcula el máximo (o el mínimo) valor de la función de acuerdo a que la parábola tenga sus ramas para abajo o para arriba (*lo veremos a continuación*).

Si la parábola no tiene raíces el vértice se puede calcular utilizando los coeficientes de la función de la siguiente manera:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

Concavidad

Otra característica es si la parábola es su concavidad.

También suele decirse que:

- Si $a > 0$ la parábola es cóncava o con ramas hacia arriba.

- Si $a < 0$ la parábola es convexa o con ramas hacia abajo.

Formas de una ecuación de segundo grado

Forma	**Expresión Matemática**	**Parámetros**
Polinómica	$y = ax^2 + bx + c$	**a, b, c**
Canónica	$y = a(x - x_v)^2 + y_v$	**a, x_v, y_v**
Factorizada	$y = a(x - x_1)(x - x_2)$	**a, x_1, x_2**

Propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado

Dada la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, y además x_1 y x_2 sus soluciones, se cumple:

1. ***La suma de las dos soluciones o raíces de una ecuación de segundo grado, $x_1 + x_2$, es*** $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

Demostración:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - b}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

2. ***El producto de las dos soluciones de una ecuación de segundo grado, $x_1 \times x_2$, es*** $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Demostración:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{4a^2}$$

El numerador es una suma por una diferencia. Su resultado es la diferencia de cuadrados:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

3. ***Diferencia de las raíces:*** $\left| x_1 - x_2 \right| = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$

4. ***Suma de cuadrados de las raíces:*** $x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = \dfrac{b^2 - 2ac}{a^2}$

5. ***Identidad de Legendre aplicada a la raíces:*** $(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4.x_1.x_2$

Construcción de la ecuación de segundo grado conociendo sus raíces

Conociendo las dos raíces x_1 y x_2 de una ecuación de segundo grado, esta se construye empleando la suma y el producto de dichas raíces.

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1.x_2) = 0$$

Propiedades adicionales de las raíces

1. La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, cuando a ≠ 0; tiene **raíces simétricas** (raíces opuestas, de igual valor absoluto) si y sólo si:

   $x_1 = -x_2$ de allí que $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow b = 0$

2. La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, cuando a ≠ 0; tiene **raíces recíprocas** (una raíz es inversa a la otra) si y sólo si:

   $x_1 = \dfrac{1}{x_2}$ de allí que $x_1.x_2 = 1 \Rightarrow a = c$

Raíz Nula

Dada la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, cuando a ≠ 0; si esta ecuación presenta una raíz nula ($x_1=0$) entonces:

C=0 → $\boxed{ax^2 + bx = 0}$

Raiz Unidad

Dada la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, cuando a ≠ 0; si esta ecuación presenta una raíz unidad ($x_1=1$) entonces: $a + b + c = 0$

TRABAJO PRÁCTICO 7

1. FUNCIÓN CUADRÁTICA / ECUACIÓN CUADRÁTICA (EC. DE LA PARABOLA)

ECUACIONES DE 2° GRADO

1. Resolver las siguientes ecuaciones:
   a) $x^2+3x-28=0$ b) $x^2+8x+15=0$ c) $x^2+5x=0$
   d) $10x^2-11x+3=0$ e) $x^2+8x+16=0$ f) $x^2-81=0$

2. Calcular los valores de x que satisfacen la ecuación en cada uno de los casos siguientes:
   a) $(2x-1)^2-9=0$ b) $4x(x-3)+5=3[(x+1)(x-2)+1]$
   c) $\frac{10}{3}x+\frac{3}{x}=7$ con $x\neq 0$ d) $(x^2-1)+(x-1)^2=\frac{1}{2}$
   e) $\frac{x^2+x+3}{x^2-x+3}=\frac{2x+5}{2x+7}$ f) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x+10}$
   g) $\sqrt{x}-\sqrt{1-x}=1$ h) $\sqrt{48x^2+97}=8x+1$ i) $\sqrt{x^2+6x}=x+\sqrt{2x}$

3. Factorizar las siguientes ecuaciones:
   a) $3x^2-5x-12=0$ b) $x^2+12x+36=0$ c) $15x^2-13x+2=0$

4. Indicar el tipo de raíces de las siguientes ecuaciones, sin resolverlas:
   a) $9x^2-6x+1=0$ b) $12x^2-5x-2=0$ c) $6x^2+4x+2=0$
   d) $6x^2-4x+2=0$ e) $x^2+11x+10=0$

5. Reconstruir las ecuaciones de segundo grado con los datos que se indican en cada caso:
   a) $\begin{cases} x_1=6 \\ x_2=-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1=-4 \\ x_2=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=-11 \\ a=-5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=10 \\ a=-2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x_1=x_2=\frac{1}{3} \\ a=6 \end{cases}$

6. Determinar el valor de *k* para que la ecuación $(2k-3)x^2+kx+6=0$ tenga raíces que sumen 4.

7. Calcular *k* para que la ecuación $3x^2+(k^2-1)x+2=0$ tenga raíces opuestas.

8. Encontrar el valor de *k* que provoca raíces recíprocas en la ecuación $(2k-1)x^2+5x+k+6=0$

9. ¿Cuál es el valor de *k* que arroja raíces de producto 20 en la ecuación $(9-k)x^2-36x+k+54=0$?

10. Determinar el valor de *k* que anula una raíz de la ecuación $3x^2+8x+k^2-9=0$

11. ¿Con qué valor de *k* la ecuación $2x^2+(k-1)x+\frac{k}{2}-\frac{7}{8}=0$ tiene raíces iguales?

12. Hallar el número *q* que hace igual a 3 una de las raíces de la ecuación $x^2-7x+q=0$

13. Determinar el valor de *k* para que las raíces de la ecuación $3x^2-2(k-1)x-(k-1)=0$ resulten:
    a) Iguales
    b) Opuestas
    c) Recíprocas
    d) Una el doble de la otra.

14. Calcular los lados de un rectángulo de área 35 cm^2 y perímetro 24 cm.

15. Encontrar un número positivo tal que su triplo más su semicuadrado sea igual a su cuádruplo más cuatro.

16. Los lados de un rectángulo difieren en 7 cm y su área es de 60 cm^2. ¿Cuál es su perímetro?

17. Hallar dos números cuyo producto valga 105 y su suma sea 26.

18. Dos números enteros positivos difieren en 3, y la suma de sus cuadrados es 89. ¿Cuáles son ellos?

19. Resolver gráficamente las siguientes ecuaciones, dibujando la parábola de 2° grado a ellas asociadas (intersección con el eje *x*):
    a) $-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2=0$ b) $x^2-2x+3=0$

20. Hallar gráficamente las raíces de las siguientes ecuaciones empleando la misma parábola mónica para todas ellas:
    a) $3x^2-5x+18=0$ b) $x^2+x-3=0$
    c) $x^2+4x+4=0$ d) $2x^2-x+2=0$

21. Halar la cuadrática que cumple con:
    a) Su gráfico pasa por el punto $(3;-1/2)$ y su vértice es $V=(-2;0)$
    b) El vértice de su gráfico es $V=(0;3)$ y x = 2 es raíz
    c) El vértice de su gráfico es $V=(-2;1)$ y la ordenada al origen es 4
    d) Las raíces son $x_1=-3$ y $x_2=3$, y el máximo es 4

FUNCIÓN CUADRÁTICA

22. En cada caso graficar la función cuadrática *f*, especificando las coordenadas del vértice, eje de simetría y concavidad de la parábola que representa, y hallar imagen, ceros y conjuntos de positividad y negatividad de *f*:

a) $f(x)=x^2-x-2$ b) $f(x)=\frac{1}{2}x-2x^2+\frac{3}{2}$ c) $f(x)=(x-2)^2-3$

d) $f(x)=3x^2+3x+4$ e) $y+1=7-x^2$ f) $x^2-\frac{2}{3}x=y-2$

23. Dar la ecuación de una función cuadrática que verifique lo pedido:
   a) Sus raíces sean –1 y 5 y $(0;1)$ esté en el gráfico de *f*
   b) Su vértice sea el $(-1;2)$, y en cero valga 1
   c) Sea cóncava hacia abajo y no contenga raíces reales
   d) No tenga raíces reales y e gráfico de f pase por el $(1;4)$
   e) Sus raíces sean 3 y ½ y su coeficiente principal valga 3
   f) Sus raíces sean –3 y 1, y cuya imagen sea el conjunto $[-2,+\infty)$
   g) El eje de simetría sea la recta $x=5$, $(1;0)$ y $(-2;3)$ están en el gráfico de f
   h) $C^+=(-4,0)$ e $\operatorname{Im} f=(-\infty,5]$

24. Sea la función cuadrática $f(x)=x^2-x-2$, describir los conjuntos
   $A=\{x\in R\,/\,f(x)=0\}$ $B=\{x\in R\,/\,f(x)>0\}$ $C=\{x\in R\,/\,f(x)\le 0\}$
   $D=\{x\in R\,/\,f(x)=4\}$ $E=\{x\in R\,/\,f(x)\le 4\}$ $F=\{x\in R\,/\,0\le f(x)<4\}$

25. a) Graficar indicando vértice, eje de simetría, raíces, concavidad e intersecciones con los ejes coordenados, la parábola $f(x)=3x^2-6x-9$

   b) Hallar una ecuación de la recta que pasa por el vértice de la parábola anterior y por el punto $(2;f(2))$. Graficar.

26. a) Hallar la ecuación de una parábola que tenga vértice en $(1;1)$ y una de sus raíces sea $x=0$. Graficar indicando cuál es la imagen de la parábola.
   b) Hallar la intersección de la parábola con la recta $r: y=2x-3$. Graficar.
   c) Hallar la ecuación de una recta paralela a r que **no** corte a la parábola.

28. a) Hallar la ecuación de una parábola cuyo eje de simetría sea la recta $x=0$, 1 sea raíz y pase por el punto $(0;4)$. Graficar.
   b) Hallar la intersección de la parábola hallada con la recta $y=4-4x$. Graficar.
   b) Hallar los valores de x para los cuales el gráfico de la parábola está por encima del de la recta. Señalar en el gráfico.

29. Dada la parábola $y=ax^2+2x+3$
   a) Hallar el valor de a si el vértice de la parábola es el punto $(1;4)$.
   b) Para el valor hallado en a), graficar la parábola indicando concavidad, eje de simetría, vértice e intersecciones con los ejes.
   c) Hallar $A=\{x\in R\,/\,y>3\}$

LOGARITMOS

Definición: La Logaritmación es una operación entre dos números reales a y b, llamados base y argumento respectivamente, que se define como sigue:

$$Log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, \quad \text{siendo}\, a \rangle 0, a \neq 1 \,\text{y b} \rangle 0$$

Existen dos logaritmos cuya notación simbólica es especial:

a. Logarítmos decimales

Los logarítmos decimales tienen base 10. Se representan por "log b", es decir,

$Log_{10} b = Log\ b$

b. Logarítmos neperianos

Los logarítmos neperianos tienen base e. Se representan por "ln (b)" o "L(b)", es decir,

$Log_e b = Ln\ b$

De la definición de logaritmo podemos deducir:

- No existe el logaritmo de un número con base negativa.
  $\nexists \log_{-a} x$
- No existe el logaritmo de un número negativo
  $\nexists \log_a (-x)$
- No existe el logaritmo de cero.
  $\nexists \log_a 0$
- El logaritmo de 1 es cero.
  $\log_a 1 = 0$
- El logaritmo en base a de a es uno.
  $\log_a a = 1$
- El logaritmo en base a de una potencia en base a es igual al exponente.
  $\log_a a^n = n$

Cambio de Base

$$Log_a b = \frac{Log\ b}{Log\ a}$$

$$Log_a b = \frac{Ln\ b}{Ln\ a}$$

Propiedades de los logaritmos

1. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$$

Ejemplo $\log_2(4.8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$

2. El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

Ejemplo $\log_2\left(\frac{8}{4}\right) = \log_2 8 + \log_2 4 = 3 - 2 = 1$

3. El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_a\left(x^n\right) = n.\log_a x$$

Ejemplo $\log_2\left(8^4\right) = 4.\log_2 8 = 4.3 = 12$

4. El logaritmo de una raíz es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz:

$$\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}.\log_a x$$

Ejemplo $\log_2\left(\sqrt[4]{8}\right)=\frac{1}{4}\log_2 8=\frac{1}{4}.3=\frac{3}{4}$

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Cuando en una ecuación la variable o incógnita aparece como argumento o como base de un logaritmo, se llama *logarítmica*.

La resolución de ecuaciones logarítmicas se basa en los mismos procedimientos utilizados en la resolución de las ecuaciones habituales. Aunque no existen métodos fijos, habitualmente se procura convertir la ecuación logarítmica en otra equivalente donde no aparezca ningún logaritmo. Para ello, se ha de intentar llegar a una situación semejante a la siguiente:

$$\log_a f(x)=\log_a g(x)$$

Entonces, se emplean los antilogaritmos para simplificar la ecuación hasta $f(x)=g(x)$, que se resuelve por los métodos habituales.

También puede operarse en la ecuación logarítmica para obtener una ecuación equivalente del tipo:

$$\log_a f(x)=m$$

de donde se obtiene que $f(x)=a^m$, que sí se puede resolver de la forma habitual.

SISTEMAS DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Cuando en un sistema aparecen una o varias ecuaciones logarítmicas, se denomina *sistema de ecuaciones logarítmicas*. En el caso de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, se pueden producir tres casos distintos:

- Un sistema formado por una ecuación polinómica y una logarítmica.
- Un sistema constituido por dos ecuaciones logarítmicas.
- Un sistema compuesto por una ecuación polinómica y una ecuación exponencial.

En cada caso, se utilizan los métodos habituales de resolución de sistemas de ecuaciones, teniendo siempre presente que estas ecuaciones han de transformarse en otras equivalentes, donde la incógnita no aparezca en el argumento o la base del logaritmo, ni en el exponente de la función exponencial.

FUNCIÓN LOGARTÍMICA

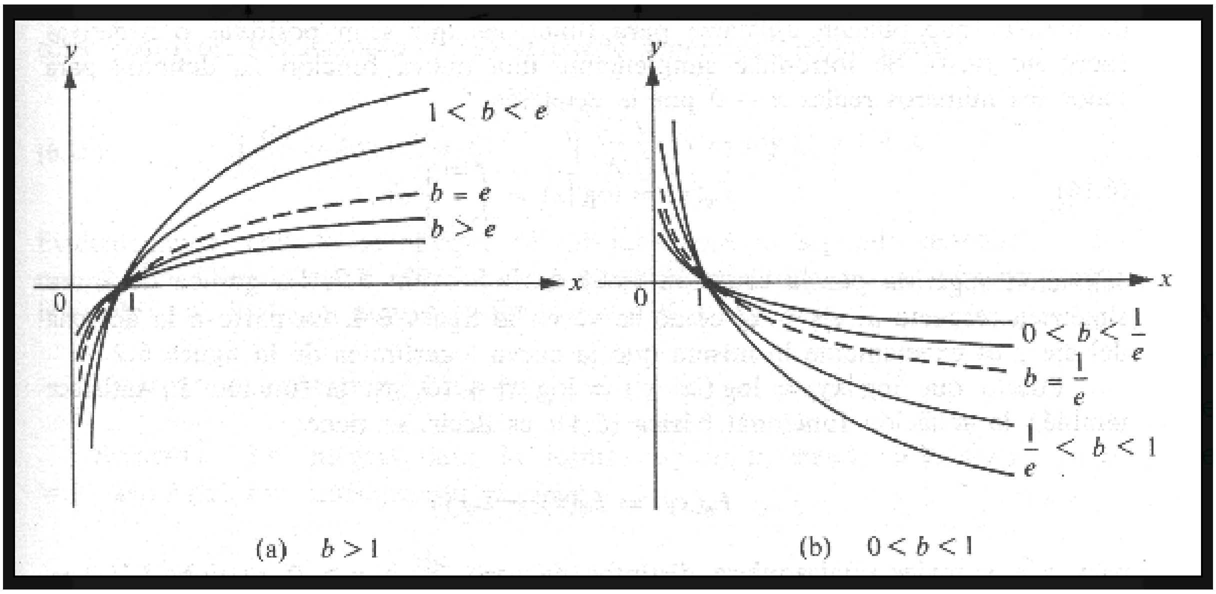
Llamamos *función logarítmica* a toda función cuya expresión sea de la forma:

$$f(x) = \log_a x \quad (a \in \Re; a > 0 \wedge a \neq 1)$$

El dominio de la función es el conjunto de los números reales positivos y su ámbito o recorrido es el conjunto de los números reales.

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

- La función logarítmica sólo existe para valores de x positivos, sin incluir al cero. Por lo tanto, su dominio es el intervalo $(0;+\infty)$. Dominio: $\Re^+$.
- Las imágenes obtenidas de la aplicación de una función logarítmica corresponden a cualquier elemento del conjunto de los números reales, luego: Recorrido: $\Re$.
- En el punto $x = 1$, la función logarítmica se anula, ya que $\log_a 1 = 0$, en cualquier base. Los puntos $(1;0)$ y $(a;1)$ pertenecen a la gráfica.
- La función logarítmica es continua.
- Es inyectiva (ninguna imagen tiene más de un original)
- Es creciente si $a > 1$
- Es decreciente si $a < 1$



FUNCIÓN EXPONENCIAL

La función exponencial es del tipo: $f(x)=a^x$

Sea a un número real positivo. La función que a cada número real x le hace corresponder la potencia a^x se llama *función exponencial de base a y exponente x,* con $a>0$, la variable independiente es el exponente, siendo la base constante y positiva.

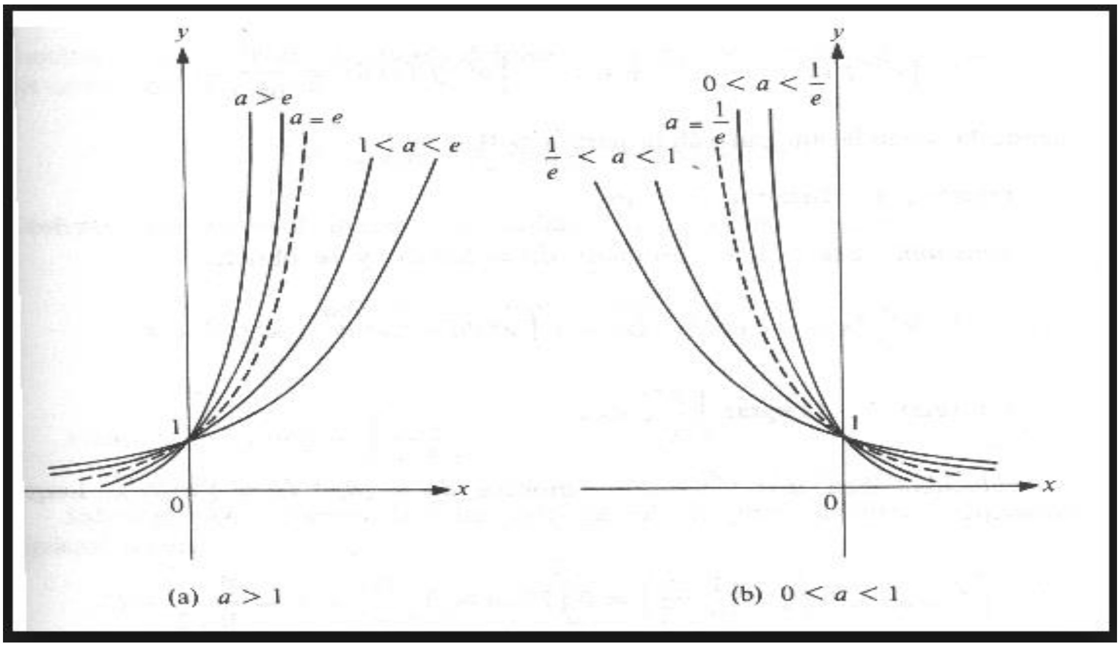
Es la función inversa de la función logarítmica.

Si $a=1$, se reduce a la función contante $f(x)=1$ y no la consideramos como función exponencial.

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

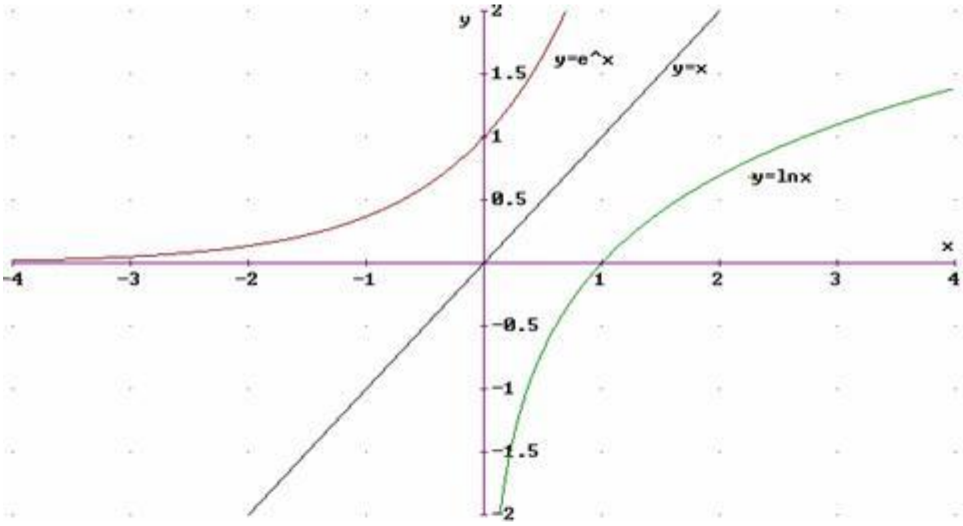
- Para todo x es $a^x>0$. En particular, la función exponencial no se anula nunca.
- Dominio: $\Re$.
- Imagen: $\Re^+$.
- Es continua.
- Los puntos $(0;1)$ y $(1;a)$ pertenecen a la gráfica. Debido a:
  $f(0)=a^0=1$. (todas las gráficas pasan por el punto $(0;1)$)
  $f(1)=a^1=a$.
- Es inyectiva $\forall a\neq 1$ (ninguna imagen tiene más de un original)
- Es creciente si $a>1$
- Es decreciente si $a<1$
- Las curvas $y=a^x$ e $y=(1/a)^x$ son simétricas respecto del eje OY.

Representación Gráfica de la Función Exponencial



Se ha definido la funcion Exponencial de manera que las dos ecuaciones

$y = \mathrm{e}^{x} \quad y \quad x = \ln y \longrightarrow$ Significan lo mismo



La gráfica de la funcion exponencial $y = \mathrm{e}^{x}$ la obtenemos de la del logaritmo $y = \log x$ por la simetría respecto de la recta y=x.

ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES EXPONENCIALES

Las ecuaciones en las que la incógnita aparece como exponente son ecuaciones exponenciales.

No existe fórmula general alguna que nos muestre cómo resolver todas las ecuaciones exponenciales. Para resolver estas ecuaciones hay que tener presentes algunos resultados y propiedades que ya se han descripto anteriormente.

EJERCICIO: Resolución de ecuaciones exponenciales

1. Resolver $2^{1-x^2} = \dfrac{1}{8}$

Resolución: Expresando $1/8$ como $2^{1-x^2} = \dfrac{1}{2^3}$ potencia de 2:

$$2^{1-x^2} = 2^{-3} \Rightarrow 1 - x^2 = -3$$

Basta ahora con resolver esta ecuación de segundo grado: $1 - x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

2. Resolver $4^{x+1}+2^{x+3}=320$

Resolución: en algunas ecuaciones es necesario hacer un cambio de variable para su resolución. Teniendo en cuenta las propiedades de las potencias, la ecuación puede escribirse:

$$4.4^{x}+2^{3}.2^{x}=320 \Rightarrow 4.4^{x}+8.2^{x}=320$$

Expresando 4^{x} como potencia de 2, $4.2^{2x}+8.2^{x}=320$

Se hace el cambio de variable $2^{x}=y$, (por lo tanto $2^{2x}=y^{2}$) y se obtiene:

$$4y^{2}+8y=320$$

Basta ahora con resolver esta ecuación: $4y^{2}+8y-320=0$ o su equivalente

$$y^{2}+2y-80=0$$

hallando que sus raíces son $y=-10; y=8$.

Se deshace ahora el cambio de variable $y=2^{x}$

$y_1=-10=2^{x}$. No es posible encontrar un *x* que verifique esta condición (2^{x} es siempre positivo)

$y_2=8=2^{x} \Rightarrow x=3$

La solución es, por lo tanto, $x=3$.

3. Resolver $5^{x}+5^{x+2}+5^{x+4}=651$

Resolución: aplicando las propiedades de las potencias, la ecuación se puede escribir como $5^{x}+5^{2}.5^{x}+5^{4}.5^{x}=651$

Sacando factor común 5^{x}:

$5^{x}\left(1+5^{2}+5^{4}\right)=651 \Rightarrow 5^{x}.651=651 \Rightarrow 5^{x}=1 \Rightarrow x=0$

SISTEMAS DE ECUACIONES LOGARITMICAS

Un sistema de ecuaciones es logarítmico si, por lo menos, una de las ecuaciones que lo forman lo es.

Para resolver un sistema de ecuaciones logarítmicas se aplicarán los procedimientos vistos en el apartado anterior, para transformarlo en un sistema lineal o no lineal, que resolveremos por el método que consideremos más adecuado.

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

$\log\frac{x}{y} = 1 = \log 10 \to \frac{x}{y} = 10 \to x = 10y$ Transformamos la segunda ecuación

$(10y)^2 - y^2 = 11$ Sustituimos en la primera ecuación

$99y^2 = 11 \to y = \pm\sqrt{\frac{11}{33}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ Resolvemos la correspondiente ecuación de segundo grado

$(x; y) = \left(\frac{10}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ Solución: los valores negativos no valen.

TRABAJO PRÁCTICO 7

2. FUNCIÓN LOGARITMICA / ECUACIÓN Y SISTEMA LOGARÍTMICA

1. Evaluar sin usar tabla ni calculadora:

a) $\log_2 16 =$ b) $\log_2 \frac{1}{8} =$ c) $\log_4 2 =$

d) $\log_{10} 10000 =$ e) $\log_e e =$ f) $\log_x 1 =$

g) $\log_3 \sqrt{3} =$ h) $\log_b 0 =$ i) $\log_{10} 0{,}01 =$

j) $\log_{1/3} 3 =$ k) $\log_7 \sqrt[3]{49} =$ l) $\ln e^e =$

m) $10^{\log_{10} 6^2} =$ n) $25^{\log_5 2} =$ ñ) $e^{-\ln 7} =$

2. Hallar el valor de la incógnita en cada caso:

a) $\log_b 125 = 3$ b) $\log N = -2$ c) $\log_7 343 = x$

d) $\log_5 25^x = 4$ e) $\log_2 \frac{1}{N} = 5$ f) $\log_b 6 = -1$

g) $2\log_9 N = 1$ h) $\log_2 4^{-3} = x$ i) $\log_2 8 = x$

j) $\log_{(x-1)^4} 3 = \frac{1}{2}$ k) $\log_9 27 = x$ l) $\log_x 81 = 2$

m) $\log_x \frac{1}{8} = -3$ n) $\log_{\sqrt{x}} 4 = 2$

3. Simplificar y reducir la expresión a un solo logaritmo:

a) $\log 2 + \log 5 =$ b) $\frac{1}{2}\log_3 49 - \frac{1}{3}\log_3 8 + 13\log_3 1 =$

c) $\log(x^4 - 4) - \log(x^2 + 2) =$ d) $\log\left(\frac{x}{y}\right) - 2\log x^3 + \log y^{-4} =$

e) $\log_2 5 + \log_2 5^2 + \log_2 5^3 - \log_2 5^6 =$ f) $5\ln 2 + 2\ln 3 - 3\ln 4 =$

4. Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log 4x = 3$ b) $\log(x-2) + \log x = \log 8$

c) $\log(\log x) = 1$ d) $10\log_5 x + 5 - 5\log_5 x = 0$

e) $\log(x+1) - \log(x-2) = 1$ f) $\log x + \log(x+3) = 1$

g) $\log_{x^2} 12 - \log_{x^2} 2 = \frac{1}{2}$ h) $\log_3 x^2 + \log_3 x - 6 = 0$

i) $\log^2 x = \log x^2$ j) $\log_3 9x^2 + \log_3 x = 1$

k) $\log 54 - \log 2 = 2\log x - \log\sqrt{x}$ l) $\log_6 2x - \log_6(x+1) = 0$

m) $\log x = 1 + \log\sqrt{x}$ n) $4\log_2 x - \log_2(x+2) = \log_2 x^2 + \log_2 1$

ñ) $\log_2(x-3) - \log_2(2x+1) = -\log_{1/2} 4$ o) $\sqrt[3]{4x(x-1)} = \log_2 4$

p) $\sqrt{(2x-1)(x+1)} = \log_2 8$ q) $\sqrt{(2x-1)(x-1)} = \log_3 3^{\sqrt{10}}$

r) $\log_3 \sqrt{x^2 + 17} = 2$ s) $\log_9 \sqrt{2x-1} = \log_9 \sqrt{x-4} + \log_9 3$

5. Resolver las siguientes ecuaciones y sistemas de ecuaciones logarítmicas:
   a) $\log(x-a)-\log(x+a)=\log x-\log(x-a)$ b) $\log x+\log(x+3)=2\log(x+1)$
   c) $\ln(x^2+2)-\ln(x+1)=\ln(2-x)$ d) $\ln x-\ln(x-2)=\ln(4x-3)-\ln 3$
   e) $\log x=\dfrac{2-\log x}{\log x}$ f) $\log(25-x^3)-3\log(4-x)=0$
   e) $\dfrac{\log(16-x^2)}{\log(3x-4)}=1$ h) $\log 2+\log(11-x^2)=2\log(5-x)$
   i) $\log_5 x+\dfrac{\log_5 125}{\log_5 x}=\dfrac{7}{2}$ j) $\log_6(x+5)=2+2\log_6 x$
   k) $(\log_4 x)^2+\log_4 x^3+2=0$ l) $\log_5(x+12)=\log_5(x+2)-\log_5 5$
   m) $\log_3(x+5)=2-\log_3 x$ n) $(\log_5 x)^2-\log_5 x^2-8=0$
   ñ) $\log x=\log 5-\log 2$ o) $\ln x=2\ln 3$
   p) $1+2\log x=3$ q) $3\log 3x=-9$
   r) $\log x+\log 30=1$ s) $\ln(x-1)-\ln(x^2-1)=\ln 1/3$
   t) $\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)+\ln 2=\ln(x+3)$ u) $\dfrac{\log 2+\log(11-x^2)}{\log(5-x)}=2$
   v) $2[1-\log(2x+3)]=4\log\sqrt{5x-3}$ w) $2\log x-4\log 2=3\log x$
   x) $3\log_2 x-2\log_2\dfrac{x}{3}=2\log_2 3+1$ y) $3\ln x-\ln 32=\dfrac{\ln x}{2}$
   z) $\log(2x-4)-\log(x+2)=1$ a1) $\log(6-x)-\log(4-x)=\log 2$
   b1) $\log(x-2)-\log(x-11)=1$ c1) $\log(9-x^2)=\log(3x-3)^2$
   d1) $\log\sqrt{2x}=\log(x-3)+\log 1$ e1) $\log_9(x^2-2x+1)=\log_3(x-1)^2+2$
   f1) $\log_{3/2}(x^3-8)-\log_{9/4}(x^2+2x+4)^2=0$ g1) $\log_5(x-2)-2=\log_{25}(x^2-4)^2$
   h1) $\log x+\log(x+3)=2\log(x+1)$
   i1) $\begin{cases}\log x+\log y=2\\ x-y=20\end{cases}$ j1) $\begin{cases}\log x+\log y=3\\ 2\log x-2\log y=-1\end{cases}$
   k1) $\begin{cases}x^2-y^2=11\\ \log x-\log y=1\end{cases}$ l1) $\begin{cases}\log x+\log y=\log 2\\ x^2+y^2=5\end{cases}$
   m1) $\begin{cases}\log_x(y-18)=2\\ \log_y(x+3)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ n1) $\begin{cases}\log x+\log y=3\\ \log x-\log y=1\end{cases}$

3. FUNCIÓN EXPONENCIAL / ECUACIÓN Y SISTEMA EXPONENCIAL

1. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:
   a) $3.4^x-6=0$ b) $3^{x+1}+3^{x-1}=30$
   c) $3^x-12+27.3^x=0$ d) $3^{x+1}=45$
   e) $20^x=2^{2x+1}.5^x$ f) $2^{x+2}+2^{x+1}+2^x=\dfrac{7}{2}$
   g) $5^{x+1}-5^x=20$ h) $10^x+10^{x+1}=22$

i) $e^x - 2e^x + 3 = 0$

j) $\dfrac{3^x + 3^{-x}}{3^{-x}} - 10.3^{x-1} = 0$

k) $e^{2x} - 5\left(e^x - e\right) - e^{x+1} = 0$

l) $4^{x-3} = 5^{x+6}$

m) $\dfrac{2^{x+1}}{4^{x-2}} = \dfrac{4^x}{2^{x-1}}$

n) $\dfrac{3^{x-1}}{9^{x+2}} = \dfrac{9^{x-1}}{3^{x+1}}$

2. Resolver las siguientes ecuaciones y sistemas de ecuaciones exponenciales:

a) $3^{2x+5} = 3^7$

b) $5^{x+3} = 25$

c) $2^{1+x} = 4^{2-x}$

d) $5^{x^2-5x+6} = 1$

e) $3^x.\left(3^2\right)^x = 9^3$

f) $\dfrac{10^x}{10^3} = \sqrt[x]{100^2}$

g) $\sqrt[x-1]{216} = 6$

h) $\sqrt{a^{5-x}} = a^{3-x}$

i) $1000.10^x = \sqrt[x]{100^5}$

j) $2^{x^2-1} = 8$

k) $\sqrt[x-1]{a^{5-x}} = \sqrt[x+1]{a^{2x+5}}$

l) $\sqrt{a^x\sqrt{a^x\sqrt{a^x}}} = a^7$

m) $\sqrt[3]{a^{2x}\sqrt[3]{a^{2x}\sqrt[3]{a^{2x}}}} = a^{26}$

n) $\sqrt{a^{2x-1}}.\sqrt[3]{a^{x-6}}.\sqrt[4]{a^{3x-2}} = \sqrt[6]{a^{3x+1}}$

ñ) $\sqrt{a^x\sqrt{a^x\sqrt{a^x}}} = a$

o) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{x+1}} = \sqrt{8}$

p) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 7$

q) $2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4} + 2^{x+5} + 2^{x+6} = 31$

r) $4^{x-1} + 4^{x-2} + 4^{x-3} + 4^{x-4} + 4^{x-5} = 341$

s) $2.2^x + 2^{2x} = 80$

t) $3^{x^2-1}.3^{2x-4}.3^5 = 6561$

u) $7^{2x+3} - 8.7^{x+1} + 1 = 0$

v) $2^{2x} - 10.2^x + 16 = 0$

w) $2^{2x-5} - 3.2^{x-3} + 1 = 0$

x) $3^{2x-3} + 1 = 4.3^{x-2}$

y) $2^{2x-6} + 1 = 5.2^{x-4}$

z) $5^{2x-2} + 125 = 6.5^x$

a$_1$) $2^{2x+4} - 5.2^{x+1} + 1 = 0$

b$_1$) $2^{x-1} + \dfrac{1}{2^{x-3}} = 5$

c$_1$) $3^x + \dfrac{1}{3^{x-1}} = 4$

d$_1$) $5^{x-1} = 2 + \dfrac{3}{5^{x-2}}$

e$_1$) $3^{1-x} + 3^{2-x} = \dfrac{4}{27}$

f$_1$) $4^{2x} + 16.4^{-2x} - 10 = 0$

g$_1$) $5^{1-x} + 5^x = 6$

h$_1$) $4^x + 2^{x+1} - 80 = 0$

i$_1$) $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$

j$_1$) $9^{x+1} + 3^{x+2} - 810 = 0$

k$_1$) $\begin{cases} 2^{x+2y} = 32 \\ 2^{3x-5y} = 16 \end{cases}$

l$_1$) $\begin{cases} 3^x = 3^y \\ 4^x.4^y = 256 \end{cases}$

m$_1$) $\begin{cases} 5^x = 5^y.625 \\ 2^x.2^y = 256 \end{cases}$

n$_1$) $\begin{cases} 15.5^{x-1} - 6^y = 339 \\ 3.5^x + 2.6^{y+1} = 807 \end{cases}$

o$_1$) x $\begin{cases} 2^{x+y} = 4^{x-y} \\ 3^{xy} = 531441 \end{cases}$

p$_1$) $\begin{cases} \sqrt[x]{x+y} = 3 \\ \left(x+y\right).2^x = 36 \end{cases}$