Eje temático: Ecuaciones e inecuaciones

Ecuaciones de 1er Grado con una incógnita.

En las ecuaciones distinguimos varios elementos:

• Incógnita: La letra (o variable) que figura en la ecuación.

• Miembro: Es cada una de las dos expresiones algebraicas separadas por el signo =.

• Término: Cada uno de los sumandos que componen los miembros de la ecuación.

• Grado: Es el mayor de los exponentes de las incógnitas, una vez realizadas todas las operaciones (reducir términos semejantes)

La solución de una ecuación es el valor de la incógnita que hace que la igualdad sea cierta.

• Si una ecuación tiene solución se llama compatible, si no tiene se dice incompatible.

• Dos ecuaciones que tienen las mismas soluciones se dicen que equivalentes.

Una ecuación de primer grado con una incógnita es una igualdad algebraica que se puede expresar en la forma ax+b=0, con a≠0.

La **solución** de una ecuación del tipo **ax+b=c** es:
x=-b/a

Ejemplos de ecuaciones, problemas con ecuaciones y sus soluciones

1.

a) $\frac{-7x+5}{7}+\frac{9x-7}{8}=-1$ Sol: $56\frac{-7x+5}{7}+56\frac{9x-7}{8}=56\cdot(-1) \to 8(-7x+5)+7(9x-7)=-56$

$-56x+40+63x-49=-56 \to 7x=-47 \to x=\frac{-47}{7}$

b) $\frac{2x-(x+1)}{4}=\frac{5x+2}{6}$ Sol: $12\frac{x-1}{4}=12\frac{5x+2}{6} \to 3(x-1)=2(5x+2)$

$3x-3=10x+4 \to -7x=7 \to x=\frac{7}{-7}=-1$

c) $\frac{3x-7(x+1)}{6}=\frac{2x-1}{3}-2$ Sol: $6\frac{3x-7(x+1)}{6}=6\frac{2x-1}{3}-6\cdot2 \to 3x-7(x+1)=2(2x-1)-12$

$3x-7x-7=4x-2-12 \to -8x=-7 \to x=\frac{7}{8}$

2. .

La edad de un padre es el triple que la de su hijo, si entre los dos suman 56 años ¿Cuál es la edad de cada uno?

Sol: Edad del hijo: x
Edad del padre: 3x

$x+3x=56 \to 4x=56 \to x=\frac{56}{4}=14$

La edad del hijo es 14 años y la del padre es 42 años

3. .

¿Cuántos litros de vino de 5€ el litro deben mezclarse con vino de 3€ el litro para obtener 50 litros de vino cuyo precio sea de 4€ el litro?

Sol:
Litros de vino de 5€ :x

	litros	precio
vino de 3€ el litro	x	5x
vino de 4€ el litro	50 – x	3(50 – x)
vino de 6€ el litro	50	200

$$5x + 3(50 - x) = 200 \rightarrow 2x = 50 \rightarrow x = 25$$

Hay que mezclar 25 litros de 5€ con vino de 3€

Inecuaciones de 1er grado con una incógnita

Dos expresiones algebraicas separadas por los signos “>” , “<”, “≤”, “≥” forman una inecuación.

La solución de una inecuación son todos los valores de la incógnita que cumplen la desigualdad.

La solución de una inecuación por lo general va a ser un conjunto de puntos, un intervalo.

Propiedades.

• Al sumar o restar la misma cantidad a los dos miembros de una inecuación la desigualdad no varía.

• Al multiplicar o dividir los dos miembros de una inecuación por un mismo número positivo, la desigualdad no varía.

• Al multiplicar o dividir los dos miembros de una inecuación por un mismo número negativo, el sentido de la desigualdad cambia.

Para resolver una inecuación de primer grado, aplicamos las propiedades de las inecuaciones hasta obtener una inecuación de la forma:

$$\begin{aligned} x < a &\rightarrow sol: (-\infty, a) \\ x \leq a &\rightarrow sol: (-\infty, a] \\ x > a &\rightarrow sol: (a, +\infty) \\ x \geq a &\rightarrow sol: [a, +\infty) \end{aligned}$$

Ejemplos de inecuaciones, problemas con inecuaciones y sus soluciones

1.

$$5x - 3(3x - 3 + 2x) \geq 2(3x - 20 + 4x)$$
$$5x - 3(5x - 3) \geq 2(7x - 20)$$
$$5x - 15x + 9 \geq 14x - 40$$
$$-10x + 9 \geq 14x - 40$$
$$-24x \geq -49$$

$$x \leq \frac{-49}{-24}$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{49}{24}\right]$$

2. .

$$\frac{6}{x-2} \leq x-3$$

$$\frac{6}{x-2} - x + 3 \leq 0$$

$$\frac{6}{x-2} + \frac{-x+3}{1} \leq 0$$

$$\frac{6}{x-2} + \frac{(-x+3)(x-2)}{(x-2)} \leq 0$$

$$\frac{6+(-x+3)(x-2)}{x-2} \leq 0$$

$$\frac{6-x^2+2x+3x-6}{x-2} \leq 0$$

$$\frac{-x^2+5x}{x-2} \leq 0$$

$$\frac{x(5-x)}{x-2} \leq 0$$

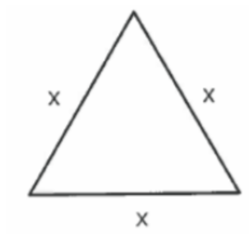
Resuelto por el cuadro de los signos: (puede utilizar otra técnica)

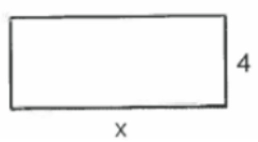
		0		2		5	
X	-	0	+		+		+
5 – x	+		+		+	0	-
X – 2	-		-	0	+		+
Rdo	+	0	-	∄	+	0	-

S= $[0,\ 2) \ \cup \ [5,\ +\infty)$

3. .

Tenemos dos figuras: un triángulo equilátero de lado x y un rectángulo de largo x y de alto igual a 4. Determina para qué valores de x el perímetro del rectángulo es superior al del triángulo.





Perímetro del rectángulo: $P_R = 2x+8$ perímetro del triángulo: $P_T = 3x$

$$P_R > P_T$$

$$2x + 8 > 3x$$

$$2x - 3x > -8$$

$$-x > -8$$

$$(-1)(-x) < (-8)(-1)$$

$$x < 8$$

Para los valores de x menores a 8 el perímetro del rectángulo es superior al perímetro del triángulo.

Ecuaciones e inecuaciones con módulo

__Revisión: intervalos reales__

Un ***intervalo***, es un subconjunto del conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$. O sea, una parte, una porción de la recta real, determinada por alguna relación de orden.

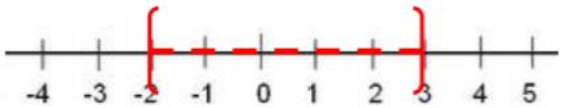
Una relación de orden se establece a través de una desigualdad.

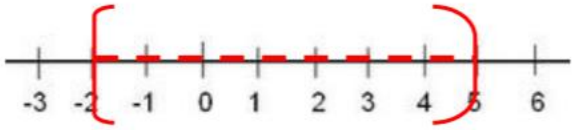
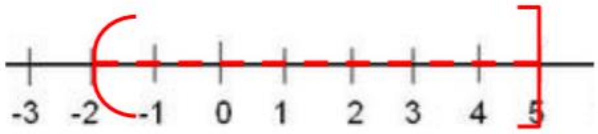
Dados dos números reales ***a*** y ***b*** (llamados extremos), puede ocurrir:

$$\boldsymbol{a} < b \quad o \quad a \leq b \leq \quad o \quad a > b \quad o \quad a \geq b$$

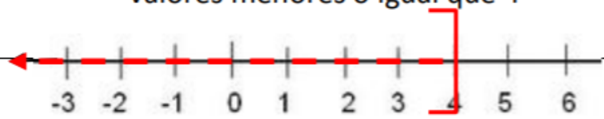
Para establecer los extremos de dichos intervalos se utilizan paréntesis, si el valor no pertenece al intervalo; o corchetes, si el valor pertenece al intervalo.

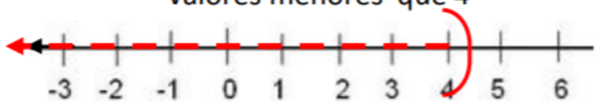
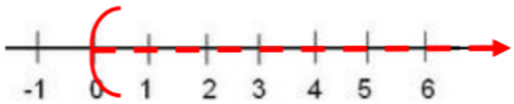
__Clases de intervalos__

Lenguaje formal	Ejemplo
➢ Intervalo abierto $A = \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\} = (a;b)$	$A = \{x \in \mathbb{R}/-1 < x < 4\} = (-1;4)$  "valores mayores que -1 y menores que 4"
➢ Intervalo cerrado $A = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\} = [a;b]$	$A = \{x \in \mathbb{R}/-2 \leq x \leq 3\} = [-2;3]$  "valores mayores o igual que -2 y menores o igual que 3"

➢ Intervalos semiabiertos $A = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\} = [a; b)$ $A = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\} = (a; b]$	$A = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x < 5\} = [-2; 5)$  "valores mayores o iguales que -2 y menores que 5" $A = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 5\} = (-2; 5]$  "valores mayores que -2 y menores o igual que 5"

➢ Intervalos infinitos $A = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\} = (-\infty; b]$	$A = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 4\} = (-\infty; 4]$ "valores menores o igual que 4"



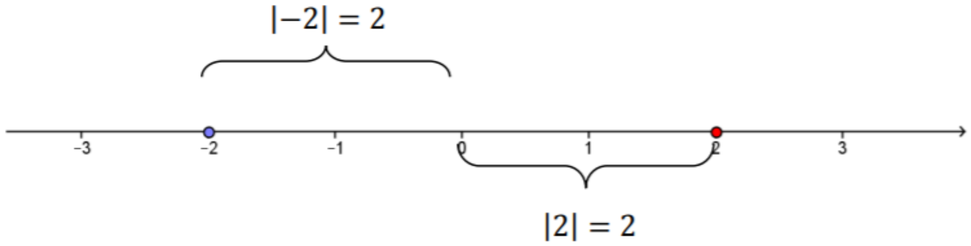
$A = \{x \in \mathbb{R} / x < b\} = (-\infty; b)$	$A = \{x \in \mathbb{R} / x < 4\} = (-\infty; 4)$ "valores menores que 4" 
$A = \{x \in \mathbb{R} / x \geq b\} = [b; \infty)$	$A = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = [0; \infty)$ "valores mayores o iguales que cero" 
$A = \{x \in \mathbb{R} / x > b\} = (b; \infty)$	$A = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\} = (0; \infty)$ "valores mayores que cero" 

Módulo de un número real

El ***módulo*** o ***valor absoluto*** de un número es el mismo número si este es positivo, o su opuesto si es negativo.

Formalmente	Ejemplo	Lectura
$\lvert x\rvert = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$	$\lvert 2\rvert = 2$ $\lvert -2\rvert = -(-2) = 2$	El módulo de dos es dos. El módulo de menos dos es dos.

En cuanto a la representación gráfica, el módulo de un número representa la distancia entre el cero y dicho número.



Por representar una distancia, el módulo es un valor mayor o igual a cero.
Existe otra forma de expresar el módulo de un número real, en la que interviene la raíz cuadrada de x^2:

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Por ejemplo, la ecuación $x^2 = 25$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$$

$$|x| = 5$$

$$x = 5 \qquad x = -5$$

Ecuaciones e inecuaciones con módulo

✓ **Ejemplo 1**

$$|x + 1| = 3$$

$$x + 1 = 3 \quad \vee \quad x + 1 = -3$$

$$X = 2 \quad \vee \quad x = -4$$

v : se lee "o"

- ✓ **<u>Ejemplo 2</u>**

$$3 + 2.|x - 2| = 7$$
$$2.|x - 2| = 7 - 3$$
$$|x - 2| = 4 : 2$$
$$|x - 2| = 2$$

Separar en términos y comenzar a despejar hasta dejar solo el módulo

________________ v ________________

________________ v ________________

:n general, las ecuaciones con módulo tienen dos soluciones; salvo cuando están gualadas a cero.

Esta situación se formaliza de la siguiente manera, para el ejemplo 1, la solución es:

$$S = \{-4; 2\}$$

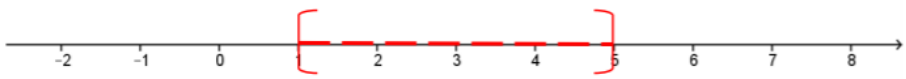
Observa que se utilizan llaves para expresar la respuesta, porque se trata de un conjunto en el que estoy enumerando los valores que toma la incógnita. <u>NUNCA</u> utilices paréntesis ni corchetes, porque la solución no es un intervalo real.

- ✓ **<u>Ejemplo 3</u>**
  (con signo ≤, menos o igual a cero)

$$|x - 3| \leq 2$$

$$x - 3 \leq 2 \quad \wedge \quad x - 3 \geq -2$$
$$x \leq 5 \quad\quad\quad x \geq 1$$

∧ : se lee "y"



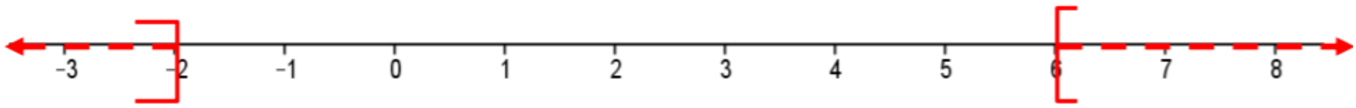
$S = [1; 5]$ En este caso la solución es un **intervalo cerrado**, por ello se utilizan los corchetes; y a diferencia de la ecuación, representa el conjunto de los infinitos números reales que se encuentran entre 1 y 5, incluidos estos valores extremos.

- ✓ **Ejemplo 4** (con signo ≥, mayor o igual a cero)

$$|x-2| \geq 4$$

$$x-2 \geq 4 \quad \vee \quad x-2 \leq -4$$

$$x \geq 6 \quad \vee \quad x \leq -2$$



$S = (-\infty; -2] \cup [6; \infty)$ La solución se expresa como unión de intervalos infinitos, en este caso cerrados porque los extremos están incluidos.