Eje Teórico: Conjuntos Numéricos

Números naturales:
El conjunto de los **números naturales** es

$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., 17, 18, ...\}$.

Si se excluye el 0 suele ponerse $\mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, 4\ldots\}$
En **N** se pueden realizar las operaciones de sumar y multiplicar.
No siempre puede restarse, pues en **N** no hay opuestos. Por ejemplo, el resultado de 5 – 9 no es un número natural.
Tampoco puede dividirse siempre, pues en **N** no existen inversos. Por ejemplo, 10 : 3 no es natural.

Números enteros:
El conjunto de los **enteros** es

$\mathbf{Z} = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$

Como ves, contiene también a los negativos. Los números negativos son los opuestos de los positivos; así –2 es el opuesto de +2. En general, el opuesto de n es –n; y viceversa, el opuesto de –n es +n. La existencia de opuestos permite restar. Así, en **Z** se puede sumar, restar y multiplicar.
Por ejemplo, 5 – 9 = –4.
En **Z** no puede dividirse siempre. El resultado de la división 2 : 5 no es un número entero, es un número racional.

Números racionales
El conjunto de los **números racionales**, que se denota por **Q**, es

$$\mathbf{Q} = \left\{\frac{p}{q} | p, q \in Z; q \neq 0\right\}$$

Observación:
La raya | significa "tal que". El símbolo $\in$ significa "pertenece". Así, "| *p, q* $\in$ **Z**", se lee "tal que los números *p* y *q* pertenecen a **Z**".

- Los números racionales son las fracciones.

Por ejemplo: $\frac{2}{7}$, $\frac{-7}{2}$ o $\frac{4}{-3}$. No es costumbre dejar un denominador negativo, prefiriéndose escribir $\frac{-4}{3}$ o $-\frac{4}{3}$ en vez de $\frac{4}{-3}$.

- Los números enteros son fracciones con denominador 1.

Por ejemplo, $-3 = \frac{-3}{1}$.

Números irracionales
Son todos aquellos números que no pueden ponerse en forma de fracción.

Ejemplos:
Son irracionales los siguientes números: $\sqrt{2}$; $-\sqrt{7}$; 1,2345…; π. (Hay infinitos números irracionales).

Números reales

Todos los números anteriores se llaman reales. Por tanto, el conjunto de los reales, **R**, es una sucesiva ampliación de los demás conjuntos numéricos, cumpliéndose que: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

El siguiente esquema es más preciso:

$$\text{Reales}\begin{cases}\text{Racionales}\begin{cases}\text{Enteros}\begin{cases}\text{Naturales}\\ \text{Negativos}\end{cases}\\ \text{Fraccionarios}\end{cases}\\ \text{Irracionales}\end{cases}$$

<u>Relación entre números reales y números decimales</u>

- Desde los **números decimales** se llega a una situación similar, pues se pueden distinguir:

a) <u>Decimales con un número finito de cifras decimales.</u>

Por ejemplo, el número 3,209 es igual a la fracción $\dfrac{3209}{1000}$; se ha dividido por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales *significativas* tiene el número decimal, al que se ha quitado la coma. (En algunos libros a estos números se les llama *decimales exactos*.)

b) <u>Decimales con infinitas cifras decimales periódicas</u>. Por ejemplo, 3,12222..., que se conviene en escribir $3{,}1\widehat{2}$. Este número es igual a la fracción $\dfrac{281}{90}$, como puede comprobarse dividiendo. Para hallar la fracción anterior se ha multiplicado el número dado por 100 (para conseguir que salga el primer periodo de la parte decimal, quedando $100f = 312{,}222\ldots$); después se multiplica por 10 (para llegar hasta la cifra del periodo, quedando $10f = 31{,}22\ldots$); por último se resta:

$$100f - 10f = 90f = 312{,}222\ldots - 31{,}222\ldots = 281, \text{ de donde } f = \frac{281}{90}.$$

c) <u>Decimales con infinitas cifras decimales no periódicas</u>. Por ejemplo, 2,12345… cada vez se añade el número siguiente. Ese número decimal no puede escribirse en forma de fracción. Y, por tanto, no es un número racional: es un número irracional, en el sentido de que no puede expresarse como razón de dos magnitudes.

¿Cuáles son los pasos para resolver correctamente cálculos combinados?

El orden en el que deben realizarse las diferentes operaciones que pueden existir en una expresión matemática:

1. Separar en términos (las operaciones de referencia son “ + ” y “ - “); fuera de los paréntesis, corchetes y llaves
2. Si hubiera Paréntesis, corchetes o llaves (se resuelven de dentro hacia afuera); dentro de ellas también se separa en términos.
3. Luego se realizan las 6 operaciones básicas en el siguiente orden:
   a. Potencias y raíces
   b. Multiplicaciones y divisiones
   c. Sumas y restas

POTENCIA Y RAIZ

Potencias de exponente entero y base real

En general, si tenemos un número real cualquiera que llamamos "a":
Si el exponente un número natural que llamamos n, entonces:

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^2 &= a \times a \\ \vdots & \quad \vdots \\ a^n &= \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ veces}}, \end{aligned}$$

Si el exponente es negativo, entonces:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Consecuencias de la definición

$$a^0 = 1$$
$$a^1 = a$$
$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Propiedades

1. **Potencia de igual base en la multiplicación:**
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

2. **Potencia de igual base en la división:**
$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

3. **Multiplicación de igual exponente**
$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

4. **División de igual exponente:**
$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

5. **Potencia de otra potencia:**
$$\left(a^n\right)^p = a^{n.p}$$

Radicales de índice natural

La raíz enésima (de índice distinto de cero) de un número real a $\neq$ 0, se define como:
$\sqrt[n]{a} = b \longrightarrow donde:$ n se llama índice; $\sqrt{\ }$ se llama radical (raíz) y; a se llama base o radicando.
La forma de calcular es la siguiente:
$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$ **(Sabiendo que son operaciones opuestas)**

Cuando se trata de una raíz con índice 2; se acostumbra a no escribir el número.

$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

Cuando el índice es par y el radicando negativo, no tiene solución en el conjunto de los números reales

$\sqrt[par]{-a}$ no tiene solución en $\Re$

Propiedades

1. **Multiplicación de radicales con igual índice:**

$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$

2. **División de radicales con igual índice:**

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

3. **Elevar el radical de una potencia y viceversa:**

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

4. **Radical de un radical:**

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

Relación entre la potencia y el radical

Una potencia de exponente fraccionario es equivalente a un radical en el que el denominador de la fracción es el índice del radical y el numerador de la fracción es el exponente del radicando:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

TECNICAS PARA RACIONALIZAR

Racionalización

Es realizar las operaciones adecuadas para obtener una fracción equivalente que no tenga raíces en el denominador.

- **Caso 1: Única raíz en el denominador con índice 2. Racionalización del tipo:**

$$\frac{a}{b\sqrt{c}}$$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{c}$.

Ejemplo:

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

- **Caso 2: Única raíz en el denominador con índice mayor a 2. Racionalización del tipo:**

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$$

Se multiplica el numerador y denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m}\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m\cdot c^{n-m}}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^n}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\cdot c}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3\sqrt[5]{4}} = \frac{2}{3\sqrt[5]{2^2}} = \frac{2\cdot\sqrt[5]{2^3}}{3\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[5]{2^3}} = \frac{2\sqrt[5]{8}}{3\sqrt[5]{2^5}} = \frac{2\sqrt[5]{8}}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt[5]{8}}{3}$$

- **Caso 3: Raíz en el denominador relacionada con sumas o restas. Racionalización del tipo:**

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

Y en general cuando el denominador sea un binomio con al menos un radical.

Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador.

El conjugado de un binomio es igual al binomio con el signo central cambiado:

$a+b \rightarrow a-b$

$-a+b \rightarrow -a-b$

$a-b \rightarrow a+b$

$-a-b \rightarrow -a+b$

También tenemos que tener en cuenta que: "suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados".

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Ejemplos

a. Con dos raíces en el denominador:

$$\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} = \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2-3} = \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{-1} = -2\sqrt{2}-2\sqrt{3}$$

b. Con una raíz en el denominador:

$$\frac{1}{3-\sqrt{2}} \times \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{2}}{3^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3+\sqrt{2}}{7}$$