D=3EinsteinHilbert と ChernSimons の作用の計算

2018 年 1 月 9 日

目次

1 poi

$D=3$ なので、vielbeine_μ^a の行列式 e は定義より

$$e=\frac{1}{3!}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{abc}e_\alpha^a e_\beta^b e_\gamma^c \tag{1}$$

Levi-chivita symbol の性質から

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\nu\sigma}=\delta_\mu^\alpha\left(\delta_\nu^\beta\delta_\sigma^\gamma-\delta_\sigma^\beta\delta_\nu^\gamma\right)+\delta_\nu^\alpha\left(\delta_\sigma^\beta\delta_\mu^\gamma-\delta_\mu^\beta\delta_\sigma^\gamma\right)+\delta_\sigma^\alpha\left(\delta_\mu^\beta\delta_\nu^\gamma-\delta_\nu^\beta\delta_\mu^\gamma\right) \tag{2}$$

この 2 つを使うと

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mu\nu\sigma}e&=\varepsilon_{abc}e_\alpha^a e_\beta^b e_\gamma^c\left(\delta_\mu^\alpha\delta_\nu^\beta\delta_\sigma^\gamma-\delta_\mu^\alpha\delta_\sigma^\beta\delta_\nu^\gamma+\delta_\nu^\alpha\delta_\sigma^\beta\delta_\mu^\gamma-\delta_\nu^\alpha\delta_\mu^\beta\delta_\sigma^\gamma+\delta_\sigma^\alpha\delta_\mu^\beta\delta_\nu^\gamma-\delta_\sigma^\alpha\delta_\nu^\beta\delta_\mu^\gamma\right) && (3)\\ &=\frac{1}{6}\varepsilon_{abc}\left(e_\mu^a e_\nu^b e_\sigma^c-e_\mu^a e_\sigma^b e_\nu^c+e_\nu^a e_\sigma^b e_\mu^c-e_\nu^a e_\mu^b e_\sigma^c+e_\sigma^a e_\mu^b e_\nu^c-e_\sigma^a e_\nu^b e_\mu^c\right) && (4)\\ &=\varepsilon_{abc}e_\mu^a e_\nu^b e_\sigma^c && (5)\end{aligned}$$

のように書き換えることできる。添字を調整すれば

$$\varepsilon^{\mu\nu\sigma}e=\varepsilon^{abc}e_a^\mu e_b^\nu e_c^\sigma \tag{6}$$

これは完全反対称テンソルの定義から自明である。上の計算は二種類の添字に対応した完全反対称テンソルの定義が無矛盾であることを確認したことになる

2 EH

Einstein-Hilbert の作用は

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^3x\sqrt{g}R \tag{7}$$

であるが d^3x を積分する前の形に書けば $\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$ であることを踏まえると

$$\begin{aligned}\sqrt{g}R &= e\delta^\mu_a\delta^\nu_b R^{ab}{}_{\mu\nu} && (8)\\ &= e\varepsilon^{\mu\nu\sigma}\varepsilon_{abc}e^c_\sigma R^{ab}{}_{\mu\nu} && (9)\\ &= \varepsilon^{def}e^\mu_d e^\nu_e e^\sigma_f \varepsilon_{abc}R^{ab}{}_{\mu\nu}e^c_\sigma && (10)\\ \sqrt{g}R\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 &= \varepsilon_{abc}R^{ab}e^c && (11)\end{aligned}$$

のように微分形式でかける。同様にラグランジアンに宇宙項 $2/\ell^2$ を加えたとしても

$$\sqrt{g}\frac{2}{\ell^2}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 = \frac{1}{3!}\frac{2}{\ell^2}\varepsilon_{abc}e^a e^b e^c \tag{12}$$

と書ける。結局、宇宙項込みの作用は

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G}\int \varepsilon_{abc}\left(R^{ab} + \frac{1}{3\ell^2}e^a e^b\right)e^c \tag{13}$$

spin connectionω^{ab} や Riemann curvatureR^{ab} の Hodge　dual として次を定義する。

$$\begin{aligned}\omega^a &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{abc}\omega_{bc} && (14)\\ R^a &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{abc}R_{bc} && (15)\end{aligned}$$

逆にとけば

$$\omega_{bc} = -\varepsilon_{bca}\omega^a \tag{16}$$

などと書ける。curvature の定義から

$$\begin{aligned}R^a &= \mathrm{d}\omega^a - \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}\omega_{bd}\omega^d{}_c && (17)\\ &= \mathrm{d}\omega^a - \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}\varepsilon_{bde}\omega^e\varepsilon_c{}^d{}_f\omega^f && (18)\\ &= \mathrm{d}\omega^a - \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}\varepsilon_{bde}\omega^e\varepsilon_c{}^d{}_f\omega^f && (19)\\ &= \mathrm{d}\omega^a - \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}\omega_b\omega_c && (20)\end{aligned}$$

である。

では、Chern-Simons 3-form になるように書き換えていこう。次のように定義する。

$$A^a = \omega^a + \frac{i}{\ell}e^a \ , \ \bar{A}^a = \omega^a - \frac{i}{\ell}e^a \tag{21}$$

$$\omega^a = \frac{1}{2}\left(A^a + \bar{A}^a\right) \ , \ e^a = -\frac{i\ell}{2}\left(A^a - \bar{A}^a\right) \tag{22}$$

すると Einstein-Hilbert のラグランジアンが書き換えられる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{EH} =& -2R^a e_a + \frac{1}{3\ell^2}\varepsilon_{abc}e^a e^b e^c && (23)\\
=& -2e_a\left(\mathrm{d}\omega^a - \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}\omega_b\omega_c\right) + \frac{1}{3\ell^2}\varepsilon_{abc}e^a e^b e^c && (24)\\
=& \frac{i\ell}{2}\left(A_a - \bar{A}_a\right)\left(\left(\mathrm{d}A^a + \mathrm{d}\bar{A}^a\right) - \frac{1}{4}\varepsilon^{abc}\left(A_b + \bar{A}_b\right)\left(A_c + \bar{A}_c\right)\right) && \\
& + \frac{i\ell}{24}\varepsilon_{abc}\left(A^a - \bar{A}^a\right)\left(A^b - \bar{A}^b\right)\left(A^c - \bar{A}^c\right) && (25)\\
=& \frac{i\ell}{2}\left(A_a\mathrm{d}A^a + A_a\mathrm{d}\bar{A}^a - \bar{A}_a\mathrm{d}A^a - \bar{A}_a\mathrm{d}\bar{A}^a\right) && \\
& - \frac{i\ell}{24}\varepsilon_{abc}\left(A^a - \bar{A}^a\right)\left(3\left(A^b + \bar{A}^b\right)\left(A^c + \bar{A}^c\right) - \left(A^b - \bar{A}^b\right)\left(A^c - \bar{A}^c\right)\right) && (26)\\
=& \frac{i\ell}{2}\left(A_a\mathrm{d}A^a - \bar{A}_a\mathrm{d}\bar{A}^a - \mathrm{d}\left(A_a\bar{A}^a\right)\right) && \\
& - \frac{i\ell}{24}\varepsilon_{abc}\left(A^a - \bar{A}^a\right)\left(A^bA^c + \bar{A}^b\bar{A}^c + 2\bar{A}^bA^c + 2A^b\bar{A}^c\right) && (27)
\end{aligned}$$

第二項はさらに

$$\begin{aligned}
-\frac{i\ell}{24}\varepsilon_{abc}(&A^aA^bA^c + A^a\bar{A}^b\bar{A}^c + 2A^a\bar{A}^bA^c + 2A^aA^b\bar{A}^c \\
&-\bar{A}^aA^bA^c - \bar{A}^a\bar{A}^b\bar{A}^c - 2\bar{A}^a\bar{A}^bA^c - 2\bar{A}^aA^b\bar{A}^c)
\end{aligned} \tag{28}$$

と展開できるが wedge 積の反交換性と完全反対称テンソルの反交換性からもっと整理できて

$$-\frac{i\ell}{24}\varepsilon_{abc}\left(A^aA^bA^c - \bar{A}^a\bar{A}^b\bar{A}^c + 3A^aA^b\bar{A}^c - 3A^a\bar{A}^b\bar{A}^c\right) \tag{29}$$

である。この式では A^a と $\bar{A}^a$ が混ざった項が存在するが、実は ω^a, e^a で再び書くと混ざらない項だけで書くことができる。記法 $A^{\pm^a a}$ を

$$A = A^{+^a a} \ , \ \bar{A} = A^{-^a a} \ , \ \left(\omega^a + (\pm)^a\frac{i}{\ell}e^a\right) \tag{30}$$

と定義する。このようにすると

$$\varepsilon_{abc}A^{\pm^a a}A^{\pm^b b}A^{\pm^c c} = \varepsilon_{abc}\Bigg(\omega^a\omega^b\omega^c - \frac{i}{\ell^3}(\pm)^{a+b+c}e^ae^be^c - \frac{1}{\ell^2}\left((\pm)^{a+b}+(\pm)^{b+c}+(\pm)^{c+a}\right)\omega^ae^be^c + \tag{31}$$

とかけて且つ

$$(k,l,m,n) := \left(1, (\pm)^{a+b+c}, (\pm)^{a+b}+(\pm)^{b+c}+(\pm)^{c+a}, (\pm)^a+(\pm)^b+(\pm)^c\right) \tag{32}$$

と書けば である。定義からこれらの項の和についても (k,l,m,n) は対角的に定義で

$(\pm^a, \pm^b, \pm^c)$	l	m	n
$(+,+,+)$	1	3	3
$(-,-,-)$	-1	3	-3
$(+,+,-)$	-1	-1	1
$(+,-,-)$	1	-1	-1

きる。($\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}$ に和を定義する感じ) ところで今問題にしている項について $(k,l,m,n) = (0,-4,0,12)$ と計算できる。$k=m=0$ であることはエルミート性からわかることである。(k,l,m,n) で一意に項を決定できるので $(k,l,m,n) = (0,-4,0,12)$ となる $((\pm^a,\pm^b,\pm^c) = (+,+,+),(-,-,-)$ の) 組み合わせを見つければ A^a と $\bar{A}^a$ の積を含まない式が得られることがわかる。そのような組み合わせはすぐに見つかって

$$-\frac{i\ell}{12}\varepsilon_{abc}\left(2A^aA^bA^c - 2\bar{A}^a\bar{A}^b\bar{A}^c\right) \tag{33}$$

とすれば良いことがわかる。ゆえにラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{i\ell}{2}\left(A_a\mathrm{d}A^a - \frac{1}{3}\varepsilon_{abc}A^aA^bA^c\right) - \frac{i\ell}{2}\left(\bar{A}_a\mathrm{d}\bar{A}^a - \frac{1}{3}\varepsilon_{abc}\bar{A}^a\bar{A}^b\bar{A}^c\right) - \frac{i\ell}{2}\mathrm{d}\left(A_a\bar{A}^a\right) \tag{34}$$

と書ける。パウリ行列 σ_a を用いて SU(2) の生成子 T_a を

$$T_a := \frac{i}{2}\sigma_a \tag{35}$$

と定義しよう。このように定義すると性質として

$$T_aT_b = -\frac{1}{4}\delta_{ab}\mathbb{I}_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}{}^cT_c \tag{36}$$

$$\mathrm{tr}\left(T_aT_b\right) = -\frac{1}{2}\delta_{ab} \tag{37}$$

$$\mathrm{tr}\left(T_aT_bT_c\right) = \frac{1}{4}\varepsilon_{abc} \tag{38}$$

を持つので、SU(2)gauge field のように Lie algebra valued 2-form として

$$A := A^a T_a \tag{39}$$
$$\bar{A} := \bar{A}^a T_a \tag{40}$$

を定義すると

$$\mathrm{t}r\left(A\mathrm{d}A\right) = -\frac{1}{2}A^a\mathrm{d}A_a \tag{41}$$
$$\mathrm{t}r\left(\bar{A}\mathrm{d}\bar{A}\right) = -\frac{1}{2}\bar{A}^a\mathrm{d}\bar{A}_a \tag{42}$$
$$\mathrm{t}r\left(AAA\right) = \frac{1}{4}\varepsilon_{abc}A^aA^bA^c \tag{43}$$
$$\mathrm{t}r\left(\bar{A}\bar{A}\bar{A}\right) = \frac{1}{4}\varepsilon_{abc}\bar{A}^a\bar{A}^b\bar{A}^c \tag{44}$$

なので

$$\mathcal{L}_{EH} = -i\ell\mathrm{t}r\left(A\mathrm{d}A + \frac{2}{3}AAA\right) + i\ell\mathrm{t}r\left(\bar{A}\mathrm{d}\bar{A} + \frac{2}{3}\bar{A}\bar{A}\bar{A}\right) + i\ell\mathrm{d}\left(\mathrm{tr}\left(A\bar{A}\right)\right) \tag{45}$$

最後の全微分項は作用では表面項になるので無視することにしよう。このように書くと例えば

$$\mathrm{t}r\left(A\mathrm{d}A + \frac{2}{3}AAA\right) \tag{46}$$

が Chern-Simons 3-form になっている。これは位相不変量であることが知られており、本来、可微分多様体の変分論として特徴づけられる Einstein 重力が $D = 3$ では Toporogical な問題になるというのは興味深い事実である。これは Weyl tensor の $D = 3$ 類似物である Cotton tensor が消えることと関連している。以上の計算は [1] の section2 における計算を詳細に記したものである。(2+1)-dimensional toporogical gravity として理論が広がっている。

参考文献

[1] Edward Witten. (2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System. *Nucl. Phys.*, Vol. B311, p. 46, 1988.