Anomaly まとめ

るみ (@e_fermite)

2018 年 1 月 30 日

目次

第-1 章

Notation

基本的には Wess Bagger notation を用いる。すなわち添字 $\mu, \nu, \cdots$ は Einstein indice として一般座標変換 $\mathrm{diff}(M)$ によって変換され, 添字 $a, b, \cdots$ は Lorentz indice として Lorentz 変換 $\mathfrak{so}(3,1)$ によって変換されると定める。添字 $\alpha, \beta, \cdots, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \cdots$ は Weyl indice として $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ によって変換するとする。Minkowski metric を $\eta_{a,b}$ などと書いて

$$\eta_{a,b} \sim (-1, 1, 1, 1) \tag{-1.0.1}$$

$$\varepsilon^{12} = \varepsilon_{21} = 1,\ \ \varepsilon_{12} = \varepsilon^{21} = -1,\ \ \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0 \tag{-1.0.2}$$

$$\psi^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_{\beta},\ \psi_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta}\psi^{\beta} \tag{-1.0.3}$$

$$\psi_D = \begin{pmatrix} \chi_{\alpha} \\ \overline{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{-1.0.4}$$

$$\gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{a} \\ \overline{\sigma}^{a\dot{\alpha}\alpha} & 0 \end{pmatrix} \tag{-1.0.5}$$

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{-1.0.6}$$

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{-1.0.7}$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{-1.0.8}$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{-1.0.9}$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{-1.0.10}$$

$$\overline{\sigma}^{a\dot{\alpha}\alpha} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma_{\beta\dot{\beta}}{}^{a} \tag{-1.0.11}$$

$$\mathrm{Tr}\sigma^a\overline{\sigma}^b = -2\eta^{ab} \tag{-1.0.12}$$
$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^a\overline{\sigma}_a{}^{\dot{\beta}\beta} = -2\delta_\alpha{}^\beta\delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \tag{-1.0.13}$$
$$(\sigma^a\overline{\sigma}^b + \sigma^b\overline{\sigma}^a)_\alpha{}^\beta = -2\eta^{ab}\delta_\alpha{}^\beta \tag{-1.0.14}$$
$$(\overline{\sigma}^a\sigma^b + \overline{\sigma}^b\sigma^a)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = -2\eta^{ab}\delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \tag{-1.0.15}$$
$$\left\{\gamma^a, \gamma^b\right\} = -2\eta^{ab} \tag{-1.0.16}$$
$$\sigma^{ab}{}_\alpha{}^\beta := \frac{i}{4}(\sigma^a\overline{\sigma}^b - \sigma^b\overline{\sigma}^a)_\alpha{}^\beta \tag{-1.0.17}$$
$$\sigma^{ab\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} := \frac{i}{4}(\overline{\sigma}^a\sigma^b + \overline{\sigma}^b\sigma^a)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \tag{-1.0.18}$$

Wess Bagger notation とは γ_5, σ^{ab} の定義が i 倍ことなることに注意が必要である。

他にも色々と公式があるので Wess Bagger[4] の Appendix B などを見ながら手を動かすことを強く推奨する。この PDF は多くを [藤川][6] によっているが，藤川は Minkowski metric を $(1, -1, -1, -1)$ で計算している。また Fujikawa method では計算の殆どを経路積分のもとで行うので多くの場合 Euclidean に Wick rotation して計算されている:

$$x^0 \to -ix^4 \in \mathbb{R} \tag{-1.0.19}$$
$$\gamma^4 = i\gamma^0 = -i\begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{-1.0.20}$$
$$\left\{\gamma^a, \gamma^b\right\} = -2\delta^{ab} \tag{-1.0.21}$$
$$\gamma_4 = -i\gamma_0 \tag{-1.0.22}$$
$$\gamma_5 = \gamma^4\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 \tag{-1.0.23}$$
$$V^0 = -iV^4,\ \ A_0 = iA_4 \tag{-1.0.24}$$
$$e_\mu{}^{a=0} \to -ie_\mu{}^{a=4},\ \sqrt{-g} = \det e_\mu{}^a \to -i\det e_\mu{}^a = -i\sqrt{g} \tag{-1.0.25}$$

このように Euclid 化を通じてガンマ行列が変換する。特に γ_0 がもともと hermitian だったのに対し Euclid 化したあとは anti hermitian になっていること、Euclid であることを反映して計量が δ になる。

Euclid 化の際にガンマ行列の時間成分を変換するのではなく，空間成分を変換する流儀もあるらしいが $D = odd$ のときに γ_{5E} が hermitian になるなど一般次元での議論が面倒になってしまう。V_a について

$$\not{V} := \gamma^a V_a \tag{-1.0.26}$$

と書く (Feynmann slash notation). $[V_a, W_b] = 0$ なら

$$\not{V}\not{W} = -V \cdot W \tag{-1.0.27}$$

と計算できる。よく使う共変ベクトルとして共変微分がある

$$\not{D} = \gamma^a D_a \tag{-1.0.28}$$

Euclid 化で gamma marix が anti hermitian であるために, この演算子が Euclidean のときに hermitan になる。この性質が結構重要である。

第 0 章

Introduction

場の量子論の実用性というものは基本的に摂動論を用いた計算による実験の予言である。しかしながら摂動論は近似であるから本質的ではないから、理論的発展においては重要ではない。例えば共形場理論は完全に非摂動論的である。さらに言えば摂動論に基づいた計算ではモデルに依存した結果が現れるが、モデルの詳細に依存しない性質を取り出すという目的では非摂動論的であると良い。場の量子論における非摂動論的条件式としては Ward-Takahashi identity がよく知られている。まず、WT id の導出を復習してみよう。古典的作用 S と、その古典的対称性 δ_G があるとする:

$$\varphi' = \varphi + \delta_G \varphi \tag{0.0.1}$$

$$\delta_G S[\varphi] = 0 \tag{0.0.2}$$

この古典的対称性が量子論において、どのような条件式を与えるかを調べる。まず経路積分で量子化すると任意の演算子 $\hat{\mathcal{O}}(x)$ に対して

$$\langle 0| \hat{\mathcal{O}}(x) |0\rangle = \langle \mathcal{O}(x) \rangle = \int \mathcal{D}\mu \mathcal{O}(x) \exp\left[iS[\varphi]\right] \tag{0.0.3}$$

名前の付替えと古典的対称性があること、そして「経路積分測度の不変性の仮定」を用いると

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{O}(x) \rangle &= \int \mathcal{D}\mu \mathcal{O}(x) \exp\left[iS[\varphi]\right] && (0.0.4)\\
&= \int \mathcal{D}\mu' \mathcal{O}'(x) \exp\left[iS[\varphi']\right] && (0.0.5)\\
&= \int \mathcal{D}\mu \left(\mathcal{O}(x) + \delta_G \mathcal{O}(x)\right) \exp\left[iS[\varphi] + i\delta_G S[\varphi]\right] && (0.0.6)
\end{aligned}$$

と計算できるが最初と最後の差から

$$\langle \delta_G \mathcal{O}(x) \rangle = 0 \tag{0.0.7}$$

を得る。これが WT id であった。では、「経路積分測度の不変性の仮定」をはずし、

$$\mathcal{D}\mu' = \mathrm{e}^{-2i\theta}\mathcal{D}\mu \tag{0.0.8}$$

のように変換したとしよう、こうすると

$$\langle \delta_G \mathcal{O}(x) \rangle = 2i \, \langle \theta \mathcal{O}(x) \rangle \tag{0.0.9}$$

という WT id を得る。この右辺を Anomaly と呼び、この式は Anomalous Ward-Takahashi identity と呼ばれる。このように Anomaly を生じると理論の対称性が量子論に移行した時点で消えているということになる。この Anomaly がどのように現れるかを計算できるようになるのが目標である。

第1章

Chiral Anomaly

この章では歴史的に最も古く、すべての原点となる γ_5 による Anomaly の非摂動論的定式化と計算を学んでいこう。

1.1 準備

1.1.1 Measure

簡単のため γ_5 による local$U(1)$ 変換

$$\psi(x) \to \psi(x)' = \exp(i\alpha(x)\gamma_5)\psi(x) \tag{1.1.1}$$

$$\overline{\psi}(x) \to \overline{\psi}'(x) = \overline{\psi}(x)\exp(i\alpha(x)\gamma_5) \tag{1.1.2}$$

を考える．これは global 変換であったなら massless Dirac fermion の Kinetic term を不変にする

$$\begin{aligned} \overline{\psi}(x)\exp(i\alpha\gamma_5)\gamma^\mu\partial_\mu\exp(i\alpha\gamma_5)\psi(x) &= \overline{\psi}(x)\exp(i\alpha\gamma_5)\exp(-i\alpha\gamma_5)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) && (1.1.3) \\ &= \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) && (1.1.4) \end{aligned}$$

ここで γ_5とγ_μ が反交換することを用いた．massive であったときにはもちろん不変でない

$$m\overline{\psi(x)}\exp(2i\alpha\gamma_5)\psi(x) \neq m\overline{\psi(x)}\psi(x) \tag{1.1.5}$$

しかしながら local な変換のもとでは微分ではうまくないため対応する gauge 場 $A_\mu(x)$ を導入することで不変にできる

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) \tag{1.1.6}$$
$$D_\mu := \partial_\mu - iA_\mu(x) \tag{1.1.7}$$

この共変微分によって作られる Curvature tensor

$$F_{\mu\nu} := i[D_\mu, D_\nu] \tag{1.1.8}$$

は gauge 不変であり、局所的である．これによって gauge 場の Kinetic term は

$$-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{1.1.9}$$

ここまでは通常の Yang-Mills 理論と同様である. そのために Action は gauge 不変になっている．経路積分による量子化を考えると，もし積分測度 $\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi$ が gauge 不変なら量子論は gauge 不変である。ChiralAnomaly とは積分測度が不変にならないことによる問題である．ということで積分測度の gauge 変換を考える．まず，経路積分は対応する関数空間の体積測度のようなものなので，関数空間の CONS を取ってくる必要がある．しかしながらこの基底の選び方には注意が必要である。ChiralAnomaly の計算では Dirac 作用素 $\not{D} = \gamma^\mu D_\mu$ が主役なので次のように考える。$\not{D}$ は古典 Dirac 場の関数空間での内積

$$\langle \phi | \psi \rangle := \int \mathrm{d}^4x \phi^\dagger(x)\psi(x) \tag{1.1.10}$$

の意味でエルミートである.（今，ユークリッド化を行っているために γ_5 は反エルミート）

$$\langle \phi | \not{D}\psi \rangle = \int \mathrm{d}^4x \phi^\dagger(x)\not{D}\psi(x) \tag{1.1.11}$$
$$= \int \mathrm{d}^4x (\not{D}\phi(x))^\dagger \psi(x) \tag{1.1.12}$$
$$= \langle \not{D}\phi | \psi \rangle \tag{1.1.13}$$

$\not{D}$ の固有関数の直交完全系 (CompleteOrthoNormalSystem) として $\{\phi_n(x) = \langle x|n\rangle\}$ が取れる

$$\not{D}\phi_n = \lambda\phi_n \tag{1.1.14}$$
$$\int \mathrm{d}^4x \phi_n^\dagger(x)\phi_m(x) = \delta_{nm} \tag{1.1.15}$$
$$\sum_n \phi_n(x)\phi_n^\dagger(y) = \delta(x-y) \tag{1.1.16}$$

この CONS で場を定義する．

$$\psi(x)=\sum_n a_n\phi_n(x)\ ,\ \overline{\psi}(x)\sum_n \overline{b}_n\phi_n^\dagger(x) \tag{1.1.17}$$

このようにすると汎関数積分測度としては $a_n,\overline{b}_n$ が grassman であることをを反映して

$$\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi=(\det\langle n|x\rangle\det\langle x|n\rangle)^{-1}\prod_n \mathrm{d}\bar{b}_n\mathrm{d}a_n=\prod_n \mathrm{d}\bar{b}_n\mathrm{d}a_n \tag{1.1.18}$$

と計算できる．

1.1.2 Jacobian

さて積分測度の変換を考えよう．$\alpha(x)$ を微小量として無限小 chiral 変換を考える:$(\exp(i\alpha(x)\gamma_5)\sim 1+i\alpha(x)\gamma_5)$

$$\psi(x)'=(1+i\alpha(x)\gamma_5)\psi(x) \tag{1.1.19}$$

$$\overline{\psi(x)}'=\overline{\psi(x)}(1+i\alpha(x)\gamma_5) \tag{1.1.20}$$

この CONS による展開を考えると

$$a_n'=\sum_m(\delta_{nm}+i\int \mathrm{d}x\phi_n^\dagger(x)\alpha(x)\gamma_5\phi_m(x))a_m \tag{1.1.21}$$

$$\overline{b}_n'=\sum_m \overline{b}_m(\delta_{nm}+i\int \mathrm{d}x\phi_m^\dagger(x)\alpha(x)\gamma_5\phi_n(x)) \tag{1.1.22}$$

と計算でき，この変換による jacobian$J$ としては

$$\prod_n \mathrm{d}\bar{b}_n'\mathrm{d}a_n'=\left(\det(\delta_{nm}+i\int\phi_n^\dagger\alpha\gamma_5\phi_m\right)^{-1}\prod_n \mathrm{d}\bar{b}_n\left(\det(\delta_{nm}+i\int\phi_m^\dagger\alpha\gamma_5\phi_n)\right)^{-1}\prod_n \mathrm{d}a_n \tag{1.1.23}$$

なので

$$J=\left(\det(\delta_{nm}+i\int\phi_n^\dagger\alpha\gamma_5\phi_m)\right)^{-2} \tag{1.1.24}$$

しかしながらこれは次のように書き換えると使いやすくて嬉しい．
まずよく使う公式 $\det=\exp tr\ln$ と $\ln(1-x)=-\sum_{n=1}x^n/n$ を用いると

$$J=\exp\left(-2\mathrm{tr}\ln\left(\delta_{nm}+i\int\phi_n^\dagger\alpha\gamma_5\phi_m\right)\right) \tag{1.1.25}$$

$$=\exp\left(-2\mathrm{tr}\left(-\sum_{j=1}\frac{(-i\int\phi_n^\dagger\alpha\gamma_5\phi_m)^j}{j}\right)\right) \tag{1.1.26}$$

$\alpha(x)$ は微小量としているので

$$\ln J = -2\mathrm{t}ri(\int \phi_n^\dagger \alpha \gamma_5 \phi_m) \tag{1.1.27}$$

$$= -2i \sum_n^\infty \int \mathrm{d}x \phi_n^\dagger(x) \alpha(x) \gamma_5 \phi_n(x)) =: -2i \int \mathrm{d}^4 x \alpha(x) A(x) \tag{1.1.28}$$

として藤川の Anomaly Factor を定義する。この記法を使うと anomalous WT id は

$$\langle \delta_G \mathcal{O} \rangle = 2i \left\langle \int \mathrm{d}^4 x \alpha(x) A(x) \right\rangle = - \langle \ln J \rangle \tag{1.1.29}$$

で例えば $\mathcal{O}$ を Noether current に取れば

$$\int \mathrm{d}^4 x \theta(x) \partial_\mu j^\mu = 2i \left\langle \int \mathrm{d}^4 x \alpha(x) A(x) \right\rangle \tag{1.1.30}$$

さらに θ が局所的なら

$$\partial_\mu j^\mu = 2i \langle A(x) \rangle \tag{1.1.31}$$

となる。

1.2 Zeta Function Regularization and Heat kernel Method

さて、jacobian を書くことができたわけであるが積分を消すためにはうまく正則化をしなくてはならない.

1.2.1 Elliptic Operator

m 次元コンパクト多様体 M 上の複素 vector bundle E において $\Delta : \Gamma(M, E) \to \Gamma(M, E)$ を楕円型作用素、$|n\rangle$ をその固有 vector とする。:

$$\Delta |n\rangle = \lambda_n |n\rangle \tag{1.2.32}$$

また固有値が非負であると仮定する (正負を判定しているので固有値は実数)。さらに zero mode が n_0 個存在するとする:

$$\dim \ker \Delta = n_0 \tag{1.2.33}$$

この zero mode は縮退しているので $|0, i\rangle$ $(i = 0 \sim n_0)$ と表すことにする。熱核 $h(t)$ を

$$h(t) := \mathrm{e}^{-t\Delta} \tag{1.2.34}$$

と定義する。この座標表示

$$h(x,y;t) := \langle x|\, h(t)\, |y\rangle = \sum_n \langle x|\, \mathrm{e}^{-t\Delta}\, |n\rangle \langle n|y\rangle \tag{1.2.35}$$

$$= \sum_n \mathrm{e}^{-t\lambda_n} \langle x|n\rangle \langle n|y\rangle \tag{1.2.36}$$

また $\langle x|n\rangle$ は正規直交であると仮定する。(エルミート作用素なら固有関数系は直交関数系になる。また $t>0$ での指数関数の収束性は固有値の非負性が保証する。) $t\to\infty$ 極限では非 zero mode の指数は 1 に近づくので

$$\lim_{t\to\infty} h(x,y;t) = \lim_{t\to\infty} \langle x|\, h(t)\, |y\rangle = \sum_i \langle x|0,i\rangle \langle 0,i|y\rangle \tag{1.2.37}$$

と計算でき作用素としては

$$h(t) \overset{t\to\infty}{\to} \sum_i |0,i\rangle \langle 0,i| \tag{1.2.38}$$

という zero mode 空間への射影作用素に収束することがわかる。なので熱核のトレースは

$$\tilde{h}(t) := \int \mathrm{d}x \quad h(x,x;t) \overset{t\to\infty}{\to} n_0 \tag{1.2.39}$$

と振る舞う。熱核はその名の通り熱方程式の積分核になっている:

$$(\partial_t + \Delta_x)\, h(x,y;t) = 0 \tag{1.2.40}$$

初期条件は

$$h(x,y;0) = \sum_n \langle x|n\rangle \langle n|y\rangle = \delta(x-y) \tag{1.2.41}$$

である。またこの熱方程式の解は $t\to\varepsilon$ における漸近展開を持つ [Gikey(1984)]

$$h(x,x;t) = \sum_i a_i(x)\varepsilon^i \tag{1.2.42}$$

この展開を反映して

$$\tilde{h}(t) = \sum_i a_i\varepsilon^i \ (a_i := \int \mathrm{d}x a_i(x)) \tag{1.2.43}$$

と展開できる。

以上の議論は楕円型作用素 $\Delta : \Gamma(M,E) \to \Gamma(M,E)$ で行ったが、E,F を M 上 vector bundle として楕円型作用素 $A : \Gamma(M,E) \to \Gamma(M,F)$ を用いて 2 つのラプラシアン

$$\Delta_E := A^\dagger A : \Gamma(M,E) \to \Gamma(M,E) \tag{1.2.44}$$

$$\Delta_F := AA^\dagger : \Gamma(M,F) \to \Gamma(M,F) \tag{1.2.45}$$

を定義すればこれらの作用素はエルミートで非負固有値を持ち，さらに zero 固有値を除き縮退度も含めて固有値が一致する：

$$\mathrm{Spec}'\Delta_E = \mathrm{Spec}'\Delta_F \tag{1.2.46}$$

これは超対称性の表れの一つである [坂本, 量子力学から超対称性へ]．2 つの対応した熱核を定義する：

$$h_E(x,y;t) := \sum_n \mathrm{e}^{-t\lambda_n} \langle x|n\rangle \langle n|y\rangle \tag{1.2.47}$$

$$h_F(x,y;t) := \sum_n \mathrm{e}^{-t\mu_n} \langle x|n\rangle \langle n|y\rangle \tag{1.2.48}$$

これらは上での議論よりそれぞれ

$$\tilde{h}_E(t) \overset{t\to\infty}{\to} \dim\ker\Delta_E = \dim\ker A \tag{1.2.49}$$

$$\tilde{h}_F(t) \overset{t\to\infty}{\to} \dim\ker\Delta_F = \dim\ker A^\dagger \tag{1.2.50}$$

なので指数は

$$\mathrm{ind}A = \lim_{t\to\infty}(\tilde{h}_E(t) - \tilde{h}_F(t)) \tag{1.2.51}$$

とかける。この極限であるが

$$\tilde{h}_E = \sum_n \mathrm{e}^{-t\lambda_n} = \dim\ker\Delta_E + \sum_n{}' \mathrm{e}^{-t\lambda_n} \tag{1.2.52}$$

$$\tilde{h}_F = \sum_n \mathrm{e}^{-t\mu_n} = \dim\ker\Delta_F + \sum_n{}' \mathrm{e}^{-t\mu_n} \tag{1.2.53}$$

であり $\mathrm{Spec}'\Delta_E = \mathrm{Spec}'\Delta_F$ なので t 依存のある項は打ち消し合う。

$$\mathrm{ind}A = \tilde{h}_E(t) - \tilde{h}_F(t) \tag{1.2.54}$$

さらに $t \sim 0$ での漸近展開

$$\tilde{h}_E(t) = \sum_i a_i^E t^i \ \ \tilde{h}_F(t) = \sum_i a_i^F t^i \tag{1.2.55}$$

を用いれば t 依存のない項が生き残るのだから

$$\mathrm{ind}A = a_0^E - a_0^F = \int \mathrm{d}x[a_0^E(x) - a_0^F(x)] \tag{1.2.56}$$

この $a_0(x)$ は曲率 2-form で書かれる局所不変量になっている。この頁は [中原　理論物理学のための幾何学とトポロジー] を参照している。

1.2.2 General ζ function

ある非負固有値エルミート作用素 A に対し、一般化されたゼータ関数 $\zeta_A(x,y;s)$ を

$$\zeta_A(x,y;s) := \sum_n{}' \langle x|n\rangle \langle n|y\rangle \lambda_n^{-s} \tag{1.2.57}$$

と定義する。$\lambda_n, |n\rangle$ は前頁の記法を用いている。こうして定義されたゼータ関数は熱核の Mellin 変換と対応する。Mellin 変換とは

$$\mathcal{M}f(s) := \int_0^\infty t^{s-1} f(t)\mathrm{d}t \tag{1.2.58}$$

である。Mellin 変換の一般論には立ち入らず，ゼータ関数と熱核の関係だけを考えよう。まずガンマ関数の定義から

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \lambda^s \int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t \tag{1.2.59}$$

である。この最後の式を見ると

$$\Gamma(s)\zeta_A(x,y;s) = \sum_n{}' \int_0^\infty \langle x|n\rangle \langle n|y\rangle t^{s-1}\mathrm{e}^{-\lambda_n t}\mathrm{d}t \tag{1.2.60}$$

である。和は zero mode 以外を取るので

$$\Gamma(s)\zeta_A(x,y;s) = \int_0^\infty t^{s-1}\left(h(x,y;t) - \sum_i \langle x|0,i\rangle \langle 0,i|y\rangle\right)\mathrm{d}t \tag{1.2.61}$$

と計算でき結局

$$\zeta_A(x,y;s) = \frac{\mathcal{M}h(x,y;s) - \sum_i \langle x|0,i\rangle \langle 0,i|y\rangle \int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{d}t}{\Gamma(s)} \tag{1.2.62}$$

となる。右辺第二項を見るとわかるとおりあからさまに発散が現れている。次のゼータ関数を定義する.

$$\zeta_A(s) := \int_M \zeta_A(x,x;s)\mathrm{d}x = \sum_n{}' \lambda_n^{-s} \tag{1.2.63}$$

この最後の表式を s で形式的に微分を行うと

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\zeta_A(s) = -\sum_n{}' \log\lambda_n \mathrm{e}^{-s\log\lambda_n} \tag{1.2.64}$$

この原点での値をみると

$$-\zeta_A(s)'|_{s=0} = \sum_n{}' \log\lambda_n = \log\left(\prod_n \lambda_n\right) \tag{1.2.65}$$

となるこの形式的な原点での微分係数から作用素 A の行列式 $\mathrm{D}etA$ を

$$\mathrm{D}etA := \exp\left(-\zeta_A(s)'|_{s=0}\right) \tag{1.2.66}$$

と定義する。

1.3 Regularization

ここまでは数学的準備を行った。この数学を量子以上の計算に使ってみよう。まず藤川の方法では量子異常は経路積分の測度の Jacobian として現れることを見た。経路積分測度は無限次元の Hilbert 空間の体積測度と見れたから、Jacob 行列は無限次元で作用素として扱うべきものである。つまりその行列式も作用素の行列式であり上で定義したものを用いるべきである。以下では Jacobian の正則化の手順を紹介する。大まかな流れとしては Dirac 作用素による正則化を導入し，Dirac 作用素のゼータ関数を求め、対応する熱核の漸近展開を計算する。この漸近展開のうち有限項が正則化として重要であることをみる。

1.3.1 $U(1)$

最も簡単な例として $U(1)$ から始める。まず計算するべき藤川の jacobian は

$$J = \exp\left[-2i\int \mathrm{d}^4x\alpha(x)A(x)\right] \tag{1.3.67}$$

$$A(x) = \sum_n \phi_n(x)^\dagger\gamma_5\phi_n(x) \tag{1.3.68}$$

である。また

$$A(x) = \sum_n{}' \langle n|x\rangle \gamma_5 \langle x|n\rangle + \sum_i \langle 0,i|x\rangle \gamma_5 \langle x|0,i\rangle \tag{1.3.69}$$

$$\sum_n{}' \langle n|x\rangle \gamma_5 \langle x|n\rangle = \sum_n{}' \mathrm{tr}\gamma_5 \langle x|n\rangle \langle n|x\rangle \tag{1.3.70}$$

$$= \lim_{s\to 0} \sum_n{}' \mathrm{tr}\gamma_5 \langle x| \frac{|n\rangle \langle n|}{(\lambda_n^2)^s} |x\rangle \tag{1.3.71}$$

$$= \lim_{s\to 0} \lim_{y\to x} \sum_n{}' \mathrm{tr}\gamma_5 \langle y| \frac{|n\rangle \langle n|}{(\lambda_n^2)^s} |x\rangle \tag{1.3.72}$$

と計算でき s が有限で $|x-y|$ 有限では収束性が改善されている．

$$\langle y| \sum_n{}' \frac{|n\rangle \langle n|}{(\lambda_n^2)^s} |x\rangle = \zeta_{\not{D}^2}(y,x;s) \tag{1.3.73}$$

$$= \frac{\int_0^\infty t^{s-1} \left(h(y,x;t) - \sum_i \langle y|0,i\rangle \langle 0,i|x\rangle\right) \mathrm{d}t}{\Gamma(s)} \tag{1.3.74}$$

なので

$$A(x) = \lim_{s\to 0} \lim_{y\to x} \mathrm{tr}\gamma_5 \frac{\int_0^\infty t^{s-1} \left(\langle y| \mathrm{e}^{-t\not{D}^2} |x\rangle - \sum_i \langle x|0,i\rangle \langle 0,i|y\rangle\right) \mathrm{d}t}{\Gamma(s)} + \sum_i \langle 0,i|x\rangle \gamma_5 \langle x|0,i\rangle \tag{1.3.75}$$

$$= \lim_{s\to 0} \lim_{y\to x} \mathrm{tr}\gamma_5 \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \langle y| \mathrm{e}^{-t\not{D}^2} |x\rangle \mathrm{d}t + \sum_i \langle 0,i|x\rangle \gamma_5 \langle x|0,i\rangle \left(1 - \frac{\int_0^\infty t^{s-1}}{\Gamma(s)}\right) \tag{1.3.76}$$

右辺第二項は $s\to 0$ で消えるので

$$A(x) = \lim_{s\to 0} \lim_{y\to x} \mathrm{tr}\gamma_5 \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \langle y| \mathrm{e}^{-t\not{D}^2} |x\rangle \mathrm{d}t \tag{1.3.77}$$

ここまで、$\not{D}^2$ は固有関数による表示 (n-representation) であったが，これを $|x\rangle$ による座標表示 $\not{D}_x = \partial_x - i\not{A}$ に変更すると

$$\langle y| \mathrm{e}^{-t\not{D}^2} |x\rangle = \mathrm{e}^{-t\not{D}_x^2} \langle y|x\rangle \tag{1.3.78}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \mathrm{e}^{-iky} \mathrm{e}^{-t\not{D}_x^2} \mathrm{e}^{ikx} \tag{1.3.79}$$

また

$$\not{D}(\mathrm{e}^{ikx}f(x)) = \mathrm{e}^{ikx}\left(i\not{k} + \not{D}\right)f(x) \tag{1.3.80}$$

$$\left(i\not{k} + \not{D}\right)^2 = k^2 - 2ik\cdot D_x + \not{D}^2 \tag{1.3.81}$$

を用いると

$$h(x,x;t) = \lim_{y\to x}\langle y|\,\mathrm{e}^{-t\not{D}^2}\,|x\rangle = \int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-t\left(k^2 - 2ik\cdot D_x + \not{D}^2\right)} \tag{1.3.82}$$

tk^2 を k^2 と置き直すと

$$h(x,x;t) = \frac{1}{t^2}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-k^2}\mathrm{e}^{2i\sqrt{t}k\cdot D_x - t\not{D}^2} \tag{1.3.83}$$

この被積分部分を t で展開すると

$$h(x,x;t) = \frac{1}{t^2}\sum_{m=0}\frac{1}{m!}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-k^2}\left(2i\sqrt{t}k\cdot D_x - t\not{D}^2\right)^m \tag{1.3.84}$$

積分の中が $k^{odd}\mathrm{e}^{-k^2}$ の形のときに消えることを使えば

$$h(x,x;t) = \frac{1}{t^2}\sum_{m=0}\sum_{n=0}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\frac{(-1)^{m+n}2^n}{n!(m-2n)!}t^{m-n}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-k^2}\left[(k\cdot D_x)^{2n}(\not{D}^2)^{m-2n}\right]_W \tag{1.3.85}$$

と展開できる.($[AB]_W$) は Weyl 順序である。この和に含まれる t^l 次の項は $l+1$ 個あることがわかる。熱核は漸近展開が存在していたので和を取り直して

$$h(x,x;t) = \frac{1}{t^2}\sum_{l=0}a_l t^l \tag{1.3.86}$$

と展開する。a_2 を計算してみる。関係するのは $(m,n)=(2,0)(3,1)(4,2)$ の三項だけである。

$$a_2 = \frac{(-1)^2 2^0}{0!2!}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-k^2}\left[(\not{D}^2)^2\right]_W \tag{1.3.87}$$
$$+\frac{(-1)^4 2^1}{1!1!}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-k^2}\left[(k\cdot D_x)^2(\not{D}^2)\right]_W \tag{1.3.88}$$
$$+\frac{(-1)^6 2^2}{2!0!}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-k^2}\left[(k\cdot D_x)^4\right]_W \tag{1.3.89}$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-k^2}(\not{D}^2)^2 \tag{1.3.90}$$
$$+\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-k^2}\left[(k\cdot D_x)^2\not{D}^2+(k\cdot D_x)\not{D}^2(k\cdot D_x)+\not{D}^2(k\cdot D_x)^2\right] \tag{1.3.91}$$
$$+\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-k^2}(k\cdot D_x)^4 \tag{1.3.92}$$

ここで積分公式：

$$\int\frac{\mathrm{d}^4k}{\pi^2}\mathrm{e}^{-k^2}=1 \tag{1.3.93}$$
$$\int\frac{\mathrm{d}^4k}{\pi^2}\mathrm{e}^{-k^2}k_\mu k_\nu=\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu} \tag{1.3.94}$$
$$\int\frac{\mathrm{d}^4k}{\pi^2}\mathrm{e}^{-k^2}k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma=\frac{1}{4}\left(\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma}+\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}\right) \tag{1.3.95}$$

また

$$\not{D}^2=\gamma^\mu\gamma^\nu D_\mu D_\nu+\frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]D^\mu D^\nu \tag{1.3.96}$$
$$=-\eta^{\mu\nu}D^\mu D^\nu+\frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu][D^\mu,D^\nu] \tag{1.3.97}$$
$$=-D^2+\frac{ie}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}=:-D^2+X \tag{1.3.98}$$

を代入してそれぞれ計算をすすめることができる。

$$\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-k^2}(\not{D}^2)^2=\frac{1}{32\pi^2}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{\pi^2}\mathrm{e}^{-k^2}\left(-D^2+X\right)^2$$
$$=\frac{1}{32\pi^2}\left[(D^2)^2-XD^2-D^2X+X^2\right] \tag{1.3.99}$$
$$\tag{1.3.100}$$

$$\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-k^2}\left[(k\cdot D_x)^2\not{D}^2+(k\cdot D_x)\not{D}^2(k\cdot D_x)+\not{D}^2(k\cdot D_x)^2\right] \tag{1.3.101}$$

$$=\frac{2}{3}\frac{1}{16\pi^2}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{\pi^2}\mathrm{e}^{-k^2}k^\mu k^\nu\left[D_\mu D_\nu\not{D}^2+D_\mu\not{D}^2D_\nu+\not{D}^2D_\mu D_\nu\right]$$

$$=\frac{1}{3\cdot16\pi^2}\delta^{\mu\nu}\left[D_\mu D_\nu\not{D}^2+D_\mu\not{D}^2D_\nu+\not{D}^2D_\mu D_\nu\right]$$

$$=\frac{1}{3\cdot16\pi^2}\left[D^2\not{D}^2+D_\mu\not{D}^2D^\mu+\not{D}^2D^2\right] \tag{1.3.102}$$

$$=\frac{1}{3\cdot16\pi^2}\left[-2D^4+D^2X+XD^2+DXD-D_aD^2D^a\right] \tag{1.3.103}$$

$$\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-k^2}(k\cdot D_x)^4 \tag{1.3.104}$$

$$=\frac{2}{3}\frac{1}{4\times16\pi^2}\left[D^4+D^aD^bD_aD_b+D^aD^bD_bD_a\right] \tag{1.3.105}$$

足し合わせることによって

$$16\pi^2a_2=\frac{1}{2}\left[D^4-XD^2-D^2X+X^2\right]+\frac{1}{6}\left[D^4+D^aD^bD_aD_b+D^aD^bD_bD_a\right]$$

$$+\frac{1}{3}\left[-2D^4+D^2X+XD^2+DXD-D_aD^2D^a\right] \tag{1.3.106}$$

$$=\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{6}\left[-XD^2-D^2X+D^aD^bD_aD_b-D^aD^bD_bD_a+2DXD\right] \tag{1.3.107}$$

$$=\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{12}[D^a,D^b][D_a,D_b]+\frac{1}{6}\left[-XD^2-D^2X+2DXD\right] \tag{1.3.108}$$

さらに愚直に微分を計算すると

$$D^2X=XD^2+(\partial^2X)+2(\partial_aX)D^a \tag{1.3.109}$$

$$DXD=XD^2+(\partial_aX)D^a \tag{1.3.110}$$

$$\rightarrow\ \left[-XD^2-D^2X+2DXD\right]=-(\partial^2X) \tag{1.3.111}$$

結局

$$a_2=\frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{12}[D^a,D^b][D_a,D_b]-\frac{1}{6}(\partial^2X)\right] \tag{1.3.112}$$

と計算される。ところで、積分域を変えることによって

$$A(x)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{\Gamma(s)}\mathrm{tr}\gamma_5\lim_{y\to x}\int_0^u t^{s-1}\langle y|\,\mathrm{e}^{-t\not{D}^2}\,|x\rangle\,\mathrm{d}t+\int_u^\infty t^{s-1}\langle y|\,\mathrm{e}^{-t\not{D}^2}\,|x\rangle\,\mathrm{d}t \tag{1.3.113}$$

と分割できるが、第 2 項の積分は固有値による熱核の表示を用いて

$$\lim_{s\to 0}\lim_{y\to x}\int_u^\infty t^{s-1}\langle y|\,\mathrm{e}^{-t\not{D}^2}\,|x\rangle\,\mathrm{d}t=\int_u^\infty t^{-1}\left(\sum_n \mathrm{e}^{-t\lambda_n^2}|\,\langle n|x\rangle\,|^2\right)\mathrm{d}t \tag{1.3.114}$$

$$=\sum_n|\,\langle n|x\rangle\,|^2\int_{\lambda_n^2 u}^\infty t^{-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \tag{1.3.115}$$

$$=\sum_n|\,\langle n|x\rangle\,|^2\left(-\mathrm{Ei}(-\lambda_n^2 u)\right) \tag{1.3.116}$$

ここで Ei(x) は指数積分で、今は負の実軸から解析接続する流儀を取る。このとき指数積分は十分小さい u で展開することができて

$$\mathrm{Ei}(-u)\approx\gamma+\log(-u)+O(u) \tag{1.3.117}$$

となる。(ここで γ は Euler constant) また

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\approx s+\gamma s^2+O(s^3) \tag{1.3.118}$$

ここから $s\to 0$ で積分は 0 に向かうことがわかる。ゆえに $[0,u]$ 間の積分のみが生き残り

$$A(x)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{\Gamma(s)}\mathrm{tr}\gamma_5\lim_{y\to x}\int_0^u t^{s-1}\langle y|\,\mathrm{e}^{-t\not{D}^2}\,|x\rangle\,\mathrm{d}t \tag{1.3.119}$$

この積分は漸近展開の代入によって

$$\lim_{y\to x}\int_0^u t^{s-1}\langle y|\,\mathrm{e}^{-t\not{D}^2}\,|x\rangle\,\mathrm{d}t=\int_0^u t^{s-1}\left(\frac{1}{t^2}\sum_{l=0}a_l t^l\right)\mathrm{d}t \tag{1.3.120}$$

$$=\sum_{l=0}a_l\int_0^u t^{l+s-3}\mathrm{d}t=\sum_{l=0}a_l\frac{1}{l+s-2}\left.t^{l+s-2}\right|_0^u \tag{1.3.121}$$

と計算できるが $s\to 0$ 極限では $l=0,1$ に発散を起こし，$l=2$ で有限の値を導き $l\geq 3$ では 0 となることがわかる。物理的に興味があるのは有限の項であるから $l=2$ を取り出

して計算してみると

$$A(x) = \lim_{s\to+0} \frac{1}{\Gamma(s)} \mathrm{tr}\gamma_5 a_2 \frac{1}{s} u^s = \mathrm{tr}\gamma_5 a_2 \tag{1.3.122}$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \mathrm{tr}\gamma_5 \left[\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{12}[D^a, D^b][D_a, D_b] - \frac{1}{6}(\partial^2 X)\right] \tag{1.3.123}$$

$$= -\frac{e^2}{32\pi^2}\frac{1}{4} F_{ab}F_{cd}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d \tag{1.3.124}$$

$$= \frac{e^2}{32\pi^2}\varepsilon^{abcd}F_{ab}F_{cd} \tag{1.3.125}$$

ここで γ_5 とのトレースで生き残るのが γ_5 だけであること, および

$$\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d = -4\varepsilon^{abcd} \tag{1.3.126}$$

を用いた。$l = 0, 1$ に対応する発散項がくりこまれると思えば結局 Fujikawa Jacobian は

$$\log J = \exp\left[-2i\int \mathrm{d}^4 x \alpha(x) \frac{e^2}{32\pi^2}\varepsilon^{abcd}F_{ab}F_{cd}\right] \tag{1.3.127}$$

であり、anomalous Ward-Takahashi identity として

$$\partial_a\langle\overline{\psi}(x)\gamma^a\gamma_5\psi(x)\rangle = 2i\frac{e^2}{32\pi^2}\varepsilon^{abcd}F_{ab}F_{cd} \tag{1.3.128}$$

を得る。この計算は [5] にならった。

では、発散項の計算をしてみよう。$l = 0$ の項について:

$$a_0 = \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-k^2} = \frac{1}{16\pi^2} \tag{1.3.129}$$

であるから $h(x, x; s \to 0)$ への寄与は

$$\frac{1}{16\pi^2}\int_0^u t^{s-1}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \tag{1.3.130}$$

となるが積分域の $t = 0$ 側にカットオフ $1/M^2$ を入れて計算してみよう ($\exp(t\not{D}^2)$ とあるように t は質量次元-2):

$$\frac{1}{16\pi^2}\int_{\frac{1}{M^2}}^u t^{s-3}\mathrm{d}t = \frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{s-2}\left(u^{s-2} - M^{4-2s}\right) \tag{1.3.131}$$

$$= \frac{1}{16\pi^2}\sum_{j=0}\frac{s^j}{2^{j+1}}\left(M^{4-2s}\right) \to \frac{M^4}{32\pi^2}\mathrm{tr}\gamma_5 \tag{1.3.132}$$

同様に $l=1$ では

$$a_1 = \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \mathrm{e}^{-k^2} \left(-4(k\cdot D_x)^2 - \not{D}^2\right) \tag{1.3.133}$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{\pi^2} \mathrm{e}^{-k^2} \left(-4k^\mu k^\nu D_\mu D_\nu + D^2 - X\right) \tag{1.3.134}$$

$$= -\frac{1}{16\pi^2}\left(D^2 + X\right) \tag{1.3.135}$$

より $h(x,x;s\to 0)$ への寄与は

$$-\frac{1}{16\pi^2}\left(D^2+X\right)\int_{\frac{1}{M^2}}^{u} t^{s-2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{16\pi^2}\left(D^2+X\right)\frac{1}{s-1}\left(u^{s-1} - M^{2-2s}\right) \tag{1.3.136}$$

$$= -\frac{1}{16\pi^2}\left(D^2+X\right)\sum_{j=0} s^j \left(M^{2-2s}\right) \tag{1.3.137}$$

$$\to -\frac{M^2}{16\pi^2}\left(D^2+X\right) \tag{1.3.138}$$

となる。これらが発散として寄与してくるわけだが、くりこまずとも結局 $\mathrm{t}r\gamma_5$ を取るから Anomaly への寄与は 0 である。

$U(1)$axial current が保存しないことが示されたわけだが、これを可換 Anomaly とよんだり、Anomaly を初めて明確に認識した Adler[1] および Bel,Jackiw[3] の名前を取って ABJ-anomaly と呼んだりする。

1.3.2 $U_L(N)\times U_R(N)$

非可換なゲージ群について同様に計算していこう。手法としては $U(1)$ の場合と同様であるため，非可換性に起因する多少の差のみに注目して記述していく。考えるゲージ群 G はカイラル型

$$G = U_L(N)\times U_R(N) \tag{1.3.139}$$

であって，N 個の massless Dirac fieldsψ_f を並べたベクトル $\psi = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_N)$ に $(N,1)+(1,N)$ 表現で作用する．あらわに書くと群作用を Fermion の各成分の左手、右手成分：

$$\psi_{Lf} := \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi_f \tag{1.3.140}$$

$$\psi_{Rf} := \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi_f \tag{1.3.141}$$

に対し、それぞれ別に $U(N)$ 変換:

$$\psi'_{Lf'} := (\exp i\theta_{L\mathfrak{a}}T^{\mathfrak{a}})_{f'f}\,\psi_{Lf} \tag{1.3.142}$$
$$\psi'_{Rf'} := (\exp i\theta_{R\mathfrak{a}}T^{\mathfrak{a}})_{f'f}\,\psi_{Rf} \tag{1.3.143}$$

があるという状況である。($T^{\mathfrak{a}}$ は一般化 Gell-Mann 行列)

$$\left(\frac{1\mp\gamma_5}{2}\right)^n = \frac{1\mp\gamma_5}{2}$$
$$\frac{1-\gamma_5}{2}\frac{1+\gamma_5}{2} = 0$$

を使えば

$$\psi'_{f'} = \left(\exp i\left[\frac{\theta_{L\mathfrak{a}}+\theta_{R\mathfrak{a}}}{2}T^{\mathfrak{a}} - \gamma_5\frac{\theta_{L\mathfrak{a}}-\theta_{R\mathfrak{a}}}{2}T^{\mathfrak{a}}\right]\right)_{f'f}\psi_{Rf} \tag{1.3.144}$$

と書ける。

それぞれの Noether current は

$$l^{\mathfrak{a}}_{\mu} = -\bar{\psi}_f\gamma_\mu\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)(T^{\mathfrak{a}})_{ff'}\psi_{f'} \tag{1.3.145}$$
$$r^{\mathfrak{a}}_{\mu} = -\bar{\psi}_f\gamma_\mu\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)(T^{\mathfrak{a}})_{ff'}\psi_{f'} \tag{1.3.146}$$
$$\tag{1.3.147}$$

である。

共変微分を

$$D_\mu\psi := (\partial_\mu + V_\mu + \gamma_5 A_\mu)\,\psi \tag{1.3.148}$$
$$V_\mu := -iV^{\mathfrak{a}}_{\mu}T^{\mathfrak{a}} \tag{1.3.149}$$
$$A_\mu := -iA^{\mathfrak{a}}_{\mu}T^{\mathfrak{a}} \tag{1.3.150}$$

と定義する。

γ_5 が居ることから経路積分測度 $\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}$ は不変にならないことがわかる:

$$\psi^{\pm} = \exp\left(\frac{1\pm\gamma_5}{2}T^{\mathfrak{a}}\theta_{\mathfrak{a}}(x)\right)\psi \tag{1.3.151}$$

というゲージ変換をしてみれば ($\mp$ が LR に対応している)

$$\mathcal{D}\psi^{\pm}\mathcal{D}\bar{\psi}^{\pm} = \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\mathrm{D}et[\mathrm{e}^{\mp i\gamma_5 T^{\mathfrak{a}}\theta_{\mathfrak{a}}}] \tag{1.3.152}$$
$$= \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\mathrm{e}^{\mp i\gamma_5 \mathrm{T}r T^{\mathfrak{a}}\theta_{\mathfrak{a}}} \tag{1.3.153}$$

と変換する。(Tr は $\mathfrak{a}$ と Dirac の足、さらに x のトレースであり、tr は $\mathfrak{a}$ または/かつ Dirac の足のトレースとする) これは、LR を同程度回転させる $\psi \to \exp(\theta_{\mathfrak{a}} T^{\mathfrak{a}})\psi$ 以外はアノマリーを出すということである。それぞれの変換の $\ln J$ が分かったので WT id :

$$\int \mathrm{d}^4 x \theta_{\mathfrak{a}}(x) \partial^\mu l^{\mathfrak{a}}_\mu = \mathrm{T}rT^{\mathfrak{a}}\theta_{\mathfrak{a}}\gamma_5 \tag{1.3.154}$$

$$\int \mathrm{d}^4 x \theta_{\mathfrak{a}}(x) \partial^\mu r^{\mathfrak{a}}_\mu = -\mathrm{T}rT^{\mathfrak{a}}\theta_{\mathfrak{a}}\gamma_5 \tag{1.3.155}$$

記法の便宜のために

$$\mathrm{d}\mu(\psi, W) := \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \tag{1.3.156}$$

$$W_\mu := V_\mu + \gamma_5 A_\mu \tag{1.3.157}$$

として、さらに W_μ に対応した gauge 群として $U_L(N) \times U_R(N)$ を以下のように書き直す:

$$g = \exp \eta \tag{1.3.158}$$

$$\eta = i\frac{1+\gamma_5}{2}T^{\mathfrak{a}}\theta_{R\mathfrak{a}} + i\frac{1-\gamma_5}{2}T^{\mathfrak{a}}\theta_{L\mathfrak{a}}$$

このように書くと W_μ の g による gauge 変換 $g \circ W_\mu$ は当然

$$g \circ W_\mu = gW_\mu g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1} \tag{1.3.159}$$

測度の変換を

$$\mathrm{d}\mu(g\psi, g \circ W) = \mathrm{d}\mu(\psi, W)\mathrm{e}^{\beta(g,W)} \tag{1.3.160}$$

$$\beta(g, W) = -i\gamma_5 \mathrm{T}rT^{\mathfrak{a}}\left(\theta_{R\mathfrak{a}} - \theta_{L\mathfrak{a}}\right) \tag{1.3.161}$$

とかく。また、群の合成則から当然

$$\mathrm{d}\mu((gg')\psi, (g \circ g') \circ W) = \mathrm{d}\mu(g(g'\psi), g \circ (g' \circ W)) \tag{1.3.162}$$

であるから、ヤコビアンとしては

$$\beta(gg', W) = \beta(g, g' \circ W) + \beta(g', W) \quad (mod \;\; 2\pi) \tag{1.3.163}$$

この条件は Wess-Zumino consistent condition の積分形になっている。

Wess-Zumino condition の微分形にするためには次のようにすれば良い。左辺が Ad になるように

$$\beta(gg'g^{-1}, W) = \beta(g, g' \circ g^{-1} \circ W) + \beta(g', g^{-1} \circ W) + \beta(g^{-1}, W) \quad (mod \;\; 2\pi) \tag{1.3.164}$$

として $g = \mathrm{e}^{\eta}, g' = \mathrm{e}^{\epsilon}$ として η, ϵ を十分小さく取ればいい:

$$\mathrm{e}^{\eta}\mathrm{e}^{\epsilon}\mathrm{e}^{-\eta} = \exp(1 + [\eta, \epsilon] + \cdots) \tag{1.3.165}$$

$$\mathrm{e}^{-\eta} \circ W = W - \eta W + W\eta + \partial\eta + \cdots \tag{1.3.166}$$

$$\beta(e^{\xi}, W) = -\frac{i}{2}\gamma_5 \mathrm{T}r\gamma_5\xi \tag{1.3.167}$$

であり

$$\delta_{\epsilon}\beta(s, W) = \text{term linear in } \epsilon \text{ in } \beta(s, W - \eta W + W\eta + \partial\eta) - \beta(s, W) \tag{1.3.168}$$

と定義すれば

$$\beta(gg'g^{-1}, W) = \beta(\mathrm{e}^{\eta}, \mathrm{e}^{\epsilon} \circ \mathrm{e}^{-\eta} \circ W) + \beta(\mathrm{e}^{\epsilon}, \mathrm{e}^{-\eta} \circ W) + \beta(\mathrm{e}^{\eta}, W) \tag{1.3.169}$$

$$\beta(gg'g^{-1}, W) = \beta(g', W - [\eta, W] + \partial\eta) - \beta(g', W) - \beta(g, W - [\epsilon, W] + \partial\epsilon) + \beta(g, W) \tag{1.3.170}$$

1.4 Perturabatic Calc

ここまでは非摂動論的な計算を通して Anomaly を見てきたが、歴史的には (当然ではあるが) 摂動論から見つかった。以降のためにも摂動論で $U(1)$ の場合を計算してみよう。

1.4.1 Adler-Bardeen theorem

上の摂動計算の低次の項だけで先に非摂動で計算した項を再現できてしまった。これは Anomaly が高次の量子補正を受けず、くりこまれることがないということを示唆しているのである。これは Adler-Bardeen theorem[2] と呼ばれている。証明は込み入っているのでにゃ〜ん（気が向いたら完全理解したいけど今じゃない）

1.5 Some Contents

1.5.1 Charn form

1.5.2 Cancel

ここまで Anomaly の計算を行ってきて、保存則が敗れることを見てきたが、理論全体で保存則が保たれていれば部分的に破れてもよく、SM にもそのような例があるのである。

Chiral Anomaly の Lie 代数的な見方から Chiral Anomaly が存在しないための必要十分条件が得られる。基本的に Chiral Anomaly は要らない子なので特に統一理論を目指す上では非存在が手っ取り早くわかれば良い先に非存在の必要十分条件を紹介しよう:

$$\mathrm{tr}\left(T_R^a\left\{T_R^b,T_R^c\right\}\right)-\mathrm{tr}\left(T_L^a\left\{T_L^b,T_L^c\right\}\right)=0 \tag{1.5.171}$$

Weinberg-Salam theory

Standerd model

1.5.3 Instanton

1.5.4 Nambu-Goldstone theorem

1.5.5 $U(1)_A$problem

第 2 章

Chiral Anomaly in Curved Space

第 3 章

Weyl Anomaly

第 4 章

Gravitational Anomaly

時空が曲がったときにはスピノルなしに、何もせずに Anomaly が出てくる。時空が曲がった上での電磁場を考えよう:

$$S = S_{cl} + S_{GF+FP} \tag{4.0.1}$$

$$S_{cl} = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{g}\left[-\frac{1}{4}g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho}\right] \tag{4.0.2}$$

$$S_{GF+FP} = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{g}\left[-\frac{1}{2\alpha}\left(\nabla^\mu A_\mu\right)^2 - i\bar{c}\Box c\right] \tag{4.0.3}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{4.0.4}$$

これを、Heat kernel method を使いやすいように二次形式に書き直せる。

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{g}\left[-\frac{1}{2}A_\mu H^{\mu\nu}(\alpha)A_\nu + i\bar{c}H_0 c\right] \tag{4.0.5}$$

$$H^{\mu\nu}(\alpha) = -\left[g^{\mu\nu}\Box + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\nabla^\mu\nabla^\nu + R^{\mu\nu}\right] \tag{4.0.6}$$

$$H_0 = -\Box \tag{4.0.7}$$

この証明は全微分項の積分

$$I = \int \mathrm{d}^4x\partial_\mu\sqrt{g}\left[-\frac{1}{2}g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}A_\nu F_{\sigma\rho} - \frac{1}{2\alpha}A^\mu\nabla^\nu A_\nu\right]$$

を考えよう.Leipnitz rule より

$$I = \int \mathrm{d}^4x\left[-\frac{1}{2}A_{\nu,\mu}\sqrt{g}g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}F_{\sigma\rho} - \frac{1}{2}A_\nu\partial_\mu(\sqrt{g}g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}F_{\sigma\rho}) - \frac{1}{2\alpha}\partial_\mu(\sqrt{g}A^\mu\nabla^\nu A_\nu)\right]$$

ここで、反変ベクトル f^μ と反対称反変 2 テンソル $B^{\mu\nu}$ に対する次の式:

$$\partial_\mu\left(\sqrt{g}f^\mu\right) = \sqrt{g}\nabla_\mu f^\mu$$
$$\partial_\mu\left(\sqrt{g}B^{\mu\nu}\right) = \sqrt{g}\nabla_\mu B^{\mu\nu}$$

を使えば

$$I = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{g}\left[-\frac{1}{2}A_{\nu,\mu}g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}F_{\sigma\rho} - \frac{1}{2}A_\nu\nabla_\mu(g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}F_{\sigma\rho}) - \frac{1}{2\alpha}\nabla_\mu(A^\mu\nabla^\nu A_\nu)\right]$$

さらに Leipnitz rule と計量条件により

$$I = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{g}\left[-\frac{1}{2}A_{\nu,\mu}g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}F_{\sigma\rho} - \frac{1}{2}A_\nu g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}F_{\sigma\rho;\mu} - \frac{1}{2\alpha}(\nabla^\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{2\alpha}(A_\mu\nabla^\mu\nabla^\nu A_\nu)\right]$$

$F_{\mu\nu} = 2A_{[\nu,\mu]} = 2A_{[\nu;\mu]}$ であることより

$$I = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{g}\left[-\frac{1}{4}g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho} - A_\nu g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}A_{[\rho;\sigma];\mu} - \frac{1}{2\alpha}(\nabla^\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{2\alpha}(A_\mu\nabla^\mu\nabla^\nu A_\nu)\right]$$

また、第二項は

$$\begin{aligned}
-A_\nu g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}A_{[\rho;\sigma];\mu} &= \frac{1}{2}A_\mu\nabla^\nu\nabla^\mu A_\nu - \frac{1}{2}A_\nu g^{\nu\rho}\Box A_\rho \\
&= \frac{1}{2}A_\mu\nabla^\mu\nabla^\nu A_\nu + \frac{1}{2}A_\mu R^{\mu\nu}A_\nu - \frac{1}{2}A_\nu g^{\nu\rho}\Box A_\rho
\end{aligned}$$

である. 曲率の定義の変形

$$\nabla^\nu\nabla^\mu A_\nu - \nabla^\mu\nabla^\nu A_\nu = -R^{\mu\nu}A_\nu \tag{4.0.8}$$
$$\rightarrow \nabla^\nu\nabla^\mu A_\nu = \nabla^\mu\nabla^\nu A_\nu - R^{\mu\nu}A_\nu \tag{4.0.9}$$

を使った。DeWitt,Dynamical theory of Groups and Fields の notation を用いている
らしい

$$\begin{aligned}
I =& \int \mathrm{d}^4x\sqrt{g}\left[-\frac{1}{4}g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho} - \frac{1}{2\alpha}(\nabla^\mu A_\mu)^2 + \frac{1}{2}A_\mu\nabla^\mu\nabla^\nu A_\nu\right. \\
&\left. -\frac{1}{2}A_\nu g^{\nu\rho}\Box A_\rho \quad -\frac{1}{2}A_\mu R^{\mu\nu}A_\nu \quad -\frac{1}{2\alpha}(A_\mu\nabla^\mu\nabla^\nu A_\nu)\right] \\
=& S_{cl} + S_{GF} + \int \mathrm{d}^4x\sqrt{g}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)A_\mu\nabla^\mu\nabla^\nu A_\nu \quad -\frac{1}{2}A_\nu g^{\nu\rho}\Box A_\rho \quad -\frac{1}{2}A_\mu R^{\mu\nu}A_\nu \quad \right]
\end{aligned}$$

表面項　$I = const.$ と仮定してこれを 0 に定めれば

$$S_{cl} + S_{GF} = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{g}A_\mu\left(-\left[g^{\mu\nu}\Box + \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\nabla^\mu\nabla^\nu - R^{\mu\nu}\right]\right)A_\nu$$

こうして二次形式への書き換えが示された。

作用 S はもちろん BRS 変換について不変である:

$$\delta_{BRS}A_\mu = \partial_\mu c,\ \ \delta_{BRS}c = 0,\ \ \delta_{BRS}\bar{c} = \frac{i}{\alpha}\nabla^\mu A_\mu$$

ここで、上の $H^{\mu\nu}(\alpha), H_0$ に対応した"Hamiltonian"演算子 $\hat{H}(\alpha), \hat{H}_0$ とその下の Hilbert 空間 $span\{|x,\mu\rangle\}, span\{|x\rangle\}$ を定義しよう:

$$\langle x,\mu|x',\nu\rangle = g_{\mu\nu}(x)\delta(x,x'),$$
$$\langle x|x'\rangle = \delta(x,x').$$

ここで $|x,\mu\rangle, \langle x,\mu|$ はどちらもウェイトが 1/2 の共変 Vector 密度である。そして演算子を

$$\langle x,\mu|\,\hat{H}(\alpha)\,|x',\nu\rangle = {H_\mu}^\rho(\alpha)\,\langle x,\rho|x',\nu\rangle\,, \tag{4.0.10}$$
$$\langle x|\,\hat{H}_0\,|x'\rangle = H_0\,\langle x|x'\rangle\,.$$

となるように定義する。(全 Hilbert 空間は $span\{|x,\mu\rangle\} \oplus span\{|x\rangle\}$ としてそれぞれの基底が直交するように取っておく) さらにこれらの演算子を用いて proper-time τ の推進の kernel を作る:

$$K^{(\alpha)}_{\mu\nu}(x,x';\tau) = \langle x,\mu|\,\mathrm{e}^{-i\tau\hat{H}(\alpha)}\,|x',\nu\rangle\,, \tag{4.0.11}$$

$$K_0(x,x';\tau) = \langle x|\,\mathrm{e}^{-i\tau\hat{H}_0}\,|x'\rangle\,. \tag{4.0.12}$$

この kernel$K^{(\alpha)}_{\mu\nu'}(\tau) = K^{(\alpha)}_{\mu\nu}(x,x';\tau)$ は (Schrödinger 型の) 微分方程式:

$$i\frac{\partial}{\partial\tau}K^{(\alpha)}_{\mu\nu'}(\tau) = {H_\mu}^\rho(\alpha)K^{(\alpha)}_{\rho\nu'}(\tau) \tag{4.0.13}$$

と境界条件

$$K^{(\alpha)}_{\mu\nu'}(0) = g_{\mu\nu'}(x)\delta(x,x') \tag{4.0.14}$$

によっても特徴づけられることがわかるであろう。どうように $K_0(\tau) = K_0(x,x';\tau)$ は

$$i\frac{\partial}{\partial\tau}K_0(\tau) = H_0K_0(\tau) \tag{4.0.15}$$

$$K_0(0) = \delta(x,x') \tag{4.0.16}$$

によって特徴づけられる.

以下 Feynman gauge$\alpha=1$ のときの $K^{(\alpha)}_{\mu\nu'}(\tau)$ を $\bar{K}_{\mu\nu'}(\tau)$ と書く。この $\bar{K}_{\mu\nu'}(\tau)$ を漸近展開することを考えよう。

$$\bar{K}_{\mu\nu'}(\tau)=\frac{i}{16\pi^2}g^{1/4}\Delta^{1/2}{g'}^{1/4}\mathrm{e}^{i\sigma/2\tau}\sum_{j=0}(i\tau)^{j-2}\bar{b}_{j\mu\nu'} \tag{4.0.17}$$

ここで $\sigma=\sigma(x,x')$ は geodesic interval で $\Delta=\Delta(x,x')$ は

$$\sqrt{g}\Delta\sqrt{g'}=-\det(\sigma_{;\mu\nu'})$$

という定義の bi-scalar である。展開の係数である $\bar{b}_{j\mu\nu}$ は適当なスカラー値関数で、上の微分方程式から再帰的に決まるものである:

$$B_{\mu\nu'}:=\sum_{j=0}(i\tau)^j\bar{b}_{j\mu\nu'} \tag{4.0.18}$$

とすれば

$$\bar{K}_{\mu\nu'}(\tau)=-\frac{i}{16\pi^2\tau^2}g^{1/4}\Delta^{1/2}{g'}^{1/4}\mathrm{e}^{i\sigma/2\tau}B_{\mu\nu'} \tag{4.0.19}$$

である。$B_{\mu\nu'}$ 以外の部分は次のように各辺で計算できる：

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial\tau}\bar{K}_{\mu\nu'}(\tau)=&\frac{1}{16\pi^2\tau^2}g^{1/4}\Delta^{1/2}{g'}^{1/4}\mathrm{e}^{i\sigma/2\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{2}{\tau}-\frac{i\sigma}{2\tau^2}\right)B_{\mu\nu'}\\
H_\mu{}^\rho(1)\bar{K}_{\rho\nu'}(\tau)=&\left[\delta_\mu{}^\rho\Box+R_\mu{}^\rho\right]\frac{i}{16\pi^2\tau^2}g^{1/4}\Delta^{1/2}{g'}^{1/4}\mathrm{e}^{i\sigma/2\tau}B_{\rho\nu'}\\
=&\frac{i{g'}^{1/4}}{16\pi^2\tau^2}\left[\delta_\mu{}^\rho\Box+R_\mu{}^\rho\right]\mathrm{e}^{i\sigma/2\tau}g^{1/4}\Delta^{1/2}B_{\rho\nu'}
\end{aligned} \tag{4.0.20}$$

さらに

$$\begin{aligned}
\delta_\mu{}^\rho\Box\left(\mathrm{e}^{i\sigma/2\tau}g^{1/4}\Delta^{1/2}B_{\rho\nu'}\right)&=\Box\left(\mathrm{e}^{i\sigma/2\tau}g^{1/4}\Delta^{1/2}B_{\mu\nu'}\right)\\
&=\Box\left(\mathrm{e}^{i\sigma/2\tau}g^{1/4}\right)\Delta^{1/2}B_{\mu\nu'}+2\left(\mathrm{e}^{i\sigma/2\tau}g^{1/4}\right)^{;\lambda}\left(\Delta^{1/2}B_{\mu\nu'}\right)_{;\lambda}\\
&+\mathrm{e}^{i\sigma/2\tau}g^{1/4}\Delta^{1/2}\frac{\left(\Delta^{1/2}B_{\mu\nu'}\right)_{;\lambda}{}^{;\lambda}}{\Delta^{1/2}}
\end{aligned} \tag{4.0.21}$$

各項はそれぞれ

$$\left(\mathrm{e}^{i\sigma/2\tau}g^{1/4}\right)^{,\lambda}=\frac{i\sigma^{,\lambda}}{2\tau}\mathrm{e}^{i\sigma/2\tau}g^{1/4}+\frac{g^{1/4}}{4}\mathrm{e}^{i\sigma/2\tau}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}{}^{,\lambda} \tag{4.0.22}$$

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{e}^{i\sigma/2\tau}g^{1/4}\right)^{,\lambda}{}_{;\lambda}&=\frac{i\sigma^{,\lambda}{}_{;\lambda}}{2\tau}\mathrm{e}^{i\sigma/2\tau}g^{1/4}-\frac{\sigma^{,\lambda}\sigma_{,\lambda}}{4\tau^2}\mathrm{e}^{i\sigma/2\tau}g^{1/4}+\frac{i\sigma^{,\lambda}}{4\tau}\mathrm{e}^{i\sigma/2\tau}g^{1/4}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma,\lambda}\\&+\frac{g^{1/4}}{16}\mathrm{e}^{i\sigma/2\tau}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}{}^{,\lambda}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\lambda}+\frac{g^{1/4}}{4}\mathrm{e}^{i\sigma/2\tau}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}{}^{,\lambda}{}_{;\lambda}\end{aligned} \tag{4.0.23}$$

$$\begin{aligned}&=\mathrm{e}^{i\sigma/2\tau}g^{1/4}\left[\frac{i\sigma^{,\lambda}{}_{;\lambda}}{2\tau}-\frac{\sigma}{2\tau^2}+\frac{i\sigma^{,\lambda}}{4\tau}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma,\lambda}\right.\\&\left.+\ \frac{1}{16}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}{}^{,\lambda}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\lambda}+\frac{1}{4}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}{}^{,\lambda}{}_{;\lambda}\right]\end{aligned} \tag{4.0.24}$$

と計算でき、まとめると

$$\begin{aligned}\delta_\mu{}^\rho\Box\left(\mathrm{e}^{i\sigma/2\tau}g^{1/4}\Delta^{1/2}B_{\rho\nu'}\right)&=\mathrm{e}^{i\sigma/2\tau}g^{1/4}\left[\frac{i\sigma^{,\lambda}{}_{;\lambda}}{2\tau}-\frac{\sigma}{2\tau^2}+\frac{i\sigma^{,\lambda}}{4\tau}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma,\lambda}\right.\\&\left.+\ \frac{1}{16}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}{}^{,\lambda}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\lambda}+\frac{1}{4}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}{}^{,\lambda}{}_{;\lambda}\right]\Delta^{1/2}B_{\mu\nu'}\\&+2\left(\frac{i\sigma^{,\lambda}}{\tau}\mathrm{e}^{i\sigma/\tau}g^{1/4}+\frac{g^{1/4}}{2}\mathrm{e}^{i\sigma/2\tau}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}{}^{,\lambda}\right)\left(\Delta^{1/2}B_{\mu\nu'}\right)_{;\lambda}\\&+\mathrm{e}^{i\sigma/2\tau}g^{1/4}\Delta^{1/2}\frac{\left(\Delta^{1/2}B_{\mu\nu'}\right)_{;\lambda}{}^{;\lambda}}{\Delta^{1/2}}\end{aligned} \tag{4.0.25}$$

これらを用いると微分方程式:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{2}{\tau}-\frac{i\sigma}{2\tau^2}\right)B_{\mu\nu'}=&i\left[\frac{i\sigma^{,\lambda}{}_{;\lambda}}{2\tau}-\frac{\sigma}{2\tau^2}+\frac{i\sigma^{,\lambda}}{4\tau}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma,\lambda}\right.\\&\left.+\ \frac{1}{16}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}{}^{,\lambda}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\lambda}+\frac{1}{4}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}{}^{,\lambda}{}_{;\lambda}\right]B_{\mu\nu'}\\&+i\left(\frac{i\sigma^{,\lambda}}{\tau}+\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}{}^{,\lambda}\right)\left(\frac{\Delta^{1/2}_{,\lambda}}{\Delta^{1/2}}B_{\mu\nu'}+B_{\mu\nu';\lambda}\right)\\&+i\frac{\left(\Delta^{1/2}B_{\mu\nu'}\right)_{;\lambda}{}^{;\lambda}}{\Delta^{1/2}}+iR_\mu{}^\rho B_{\rho\nu'}\end{aligned} \tag{4.0.26}$$

を得る。ここで次の関係式

$$\begin{aligned}4\Delta^{1/2}&=\Delta^{1/2}\sigma_{,\rho}{}^{;\rho}+2\Delta^{1/2,\rho}\sigma_{,\rho}\\\to\frac{2i}{\tau}&=\frac{i}{2\tau}\sigma_{,\rho}{}^{;\rho}+\frac{i}{\tau\Delta^{1/2}}\Delta^{1/2,\rho}\sigma_{,\rho}\end{aligned} \tag{4.0.27}$$

より

$$\frac{\partial}{\partial i\tau}B_{\mu\nu'}=\left[-\frac{\sigma^{,\lambda}}{4(i\tau)}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma,\lambda}+\frac{1}{16}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}{}^{,\lambda}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\lambda}+\frac{1}{4}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}{}^{,\lambda}{}_{;\lambda}+\frac{\Delta^{1/2}_{,\lambda}}{\Delta^{1/2}}\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}{}^{,\lambda}\right]B_{\mu\nu'}$$
$$+\left(-\frac{\sigma^{,\lambda}}{(i\tau)}+\frac{1}{4}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}{}^{,\lambda}\right)B_{\mu\nu';\lambda}+\frac{\left(\Delta^{1/2}B_{\mu\nu'}\right)_{;\lambda}{}^{;\lambda}}{\Delta^{1/2}}+R_{\mu}{}^{\rho}B_{\rho\nu'} \qquad (4.0.28)$$

さらに、$\tau\to 0$ での正則な振る舞いと初期条件より

$$0=\left[-\frac{\sigma^{,\lambda}}{4(i\tau)}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma,\lambda}+\frac{1}{16}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}{}^{,\lambda}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\lambda}+\frac{1}{4}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}{}^{,\lambda}{}_{;\lambda}+\frac{\Delta^{1/2}_{,\lambda}}{\Delta^{1/2}}\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}{}^{,\lambda}\right] \qquad (4.0.29)$$

でなくてはならない。これより

$$\frac{\partial}{\partial i\tau}B_{\mu\nu'}+\frac{\sigma^{,\lambda}}{(i\tau)}=B_{\mu\nu';\lambda}+\frac{\left(\Delta^{1/2}B_{\mu\nu'}\right)_{;\lambda}{}^{;\lambda}}{\Delta^{1/2}}+R_{\mu}{}^{\rho}B_{\rho\nu'} \qquad (4.0.30)$$

ここに $B_{\mu\nu'}=\sum(i\tau)^j\bar{b}_{j\mu\nu'}$ を代入すると係数比較から

$$(j+1)\bar{b}_{j+1\mu\nu'}+\sigma^{,\lambda}\bar{b}_{j+1\mu\nu';\lambda}=\frac{\left(\Delta^{1/2}\bar{b}_{j\mu\nu'}\right)_{;\lambda}{}^{;\lambda}}{\Delta^{1/2}}+R_{\mu}{}^{\rho}\bar{b}_{j\mu\nu'} \qquad (4.0.31)$$

という漸化式を得る。

これは二項間漸化式の形だから $\bar{b}_{0\mu\nu}$ が求まらないと解くことは出来ない。そこで境界条件から、初項の条件を取り出すことを考えよう。境界条件の形から、x,x' は十分近傍であるとして、局所 Lorentz な座標系が貼れるとすれば

$$\bar{K}_{\mu\nu}(\tau)=-\frac{i}{16\pi^2\tau^2}\exp\left(\frac{i|x-x'|^2}{4\tau}\right)\sum_{j=0}(i\tau)^j\bar{b}_{j\mu\nu}$$

とできる。さらに Wick rotation:$x^0\to -ix^4$ してやれば proper time も $i\tau\to s$ で

$$\bar{K}_{\mu\nu}(-is)=\frac{i}{(\sqrt{4\pi s})^4}\prod_{k=1,2,3,4}\exp\left(-\frac{(x^k-x'^k)^2}{4s}\right)\sum_{j=0}(s)^j\bar{b}_{j\mu\nu}$$

極限がデルタ関数になる例として

$$\delta(x)=\lim_{a\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{a}}}{\sqrt{a\pi}} \qquad (4.0.32)$$

がすぐに証明できる。これを用いれば

$$\bar{K}_{\mu\nu}(0) = i\delta^{(4)}(x - x')_{Eucl}\bar{b}_{0\mu\nu}$$

Wick rotation で元に戻すと $\delta(x^0) = i\delta(x^4)$ に注意して

$$\bar{K}_{\mu\nu}(0) = \delta^{(4)}(x - x)\bar{b}_{0\mu\nu}$$

さらに一般共変な形にして:

$$\bar{K}_{\mu\nu'}(0) = \delta(x, x')\bar{b}_{0\mu\nu'}$$

境界条件と見比べると

$$\bar{b}_{0\mu\nu'} = g_{\mu\nu'} \tag{4.0.33}$$

となって、初項が決定された。

$j = 0$ として $\bar{b}_{0\mu\nu'} = g_{\mu\nu'}$ を使えば

$$\bar{b}_{1\mu\nu'} + \sigma^{,\lambda}\bar{b}_{1\mu\nu';\lambda} = \frac{{\Delta^{1/2}}_{;\lambda}{}^{;\lambda}}{\Delta^{1/2}}g_{\mu\nu'} + 2\frac{{\Delta^{1/2}}^{;\lambda}}{\Delta^{1/2}}g_{\mu\nu';\lambda} + {g_{\mu\nu';\lambda}}^{;\lambda} + R_{\mu\nu'} \tag{4.0.34}$$

coincidence limit では

$$\begin{aligned}[\bar{b}_{1\mu\nu}] = \bar{b}_{1\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{R}{6}g_{\mu\nu} \\ {\bar{b}_{1\mu}}{}^{\mu} &= \frac{R}{3}\end{aligned} \tag{4.0.35}$$

となる。

$j = 1$ とすれば

$$2\bar{b}_{2\mu\nu'} + \sigma^{,\lambda}\bar{b}_{2\mu\nu';\lambda} = \frac{\left(\Delta^{1/2}\bar{b}_{1\mu\nu'}\right)_{;\lambda}{}^{;\lambda}}{\Delta^{1/2}} + {R_{\mu}}^{\rho}\bar{b}_{1\mu\nu'} \tag{4.0.36}$$

$$= \bar{b}_{1\mu\nu'}\frac{{\Delta^{1/2}}_{;\lambda}{}^{;\lambda}}{\Delta^{1/2}} + {\bar{b}_{1\mu\nu';\lambda}}^{;\lambda} + \frac{2{\Delta^{1/2}}^{;\lambda}\bar{b}_{1\mu\nu';\lambda}}{\Delta^{1/2}} + {R_{\mu}}^{\rho}\bar{b}_{1\mu\nu'} \tag{4.0.37}$$

coincidence limit では

$$\begin{aligned}2\bar{b}_{2\mu\nu} &= \left[\bar{b}_{1\mu\nu'}\right]\left[\frac{{\Delta^{1/2}}_{;\lambda}{}^{;\lambda}}{\Delta^{1/2}}\right] + \left[{\bar{b}_{1\mu\nu';\lambda}}^{;\lambda}\right] + {R_{\mu}}^{\rho}\left[\bar{b}_{1\mu\nu'}\right] \\ &= \left[{\bar{b}_{1\mu\nu';\lambda}}^{;\lambda}\right] - \frac{R}{6}\bar{b}_{1\mu\nu} + {R_{\mu}}^{\rho}\bar{b}_{1\mu\nu} \\ &= \left[{\bar{b}_{1\mu\nu';\lambda}}^{;\lambda}\right] - \frac{R}{3}R_{\mu\nu} + \frac{R^2}{36}g_{\mu\nu} + {R_{\mu}}^{\rho}R_{\rho\nu}\end{aligned} \tag{4.0.38}$$

となる。では良くわかっていない第一項を計算しよう. まず $j=0$ での式の左辺を二階微分すると:

$$\left(\bar{b}_{1\mu\nu'}+\sigma^{;\rho}\bar{b}_{1\mu\nu';\rho}\right)_{;\lambda}{}^{;\lambda}=\bar{b}_{1\mu\nu';\lambda}{}^{;\lambda}+\sigma^{;\rho}\bar{b}_{1\mu\nu';\rho\lambda}{}^{;\lambda}+\sigma^{;\rho}{}_{;\lambda}{}^{;\lambda}\bar{b}_{1\mu\nu';\rho}+2\sigma^{;\rho\lambda}\bar{b}_{1\mu\nu';\rho\lambda} \tag{4.0.39}$$

となるが coincidence limit では

$$\begin{aligned}\left[\left(\bar{b}_{1\mu\nu'}+\sigma^{;\rho}\bar{b}_{1\mu\nu';\rho}\right)_{;\lambda}{}^{;\lambda}\right]&=\left[\bar{b}_{1\mu\nu';\lambda}{}^{;\lambda}\right]+2g^{\rho\lambda}\left[\bar{b}_{1\mu\nu';\rho\lambda}\right]\\&=3\left[\bar{b}_{1\mu\nu';\lambda}{}^{;\lambda}\right]\end{aligned} \tag{4.0.40}$$

となる。では $j=0$ での式の右辺を二階微分する。長ったらしいので coincidence limit で明らかに消える項を除くと:

$$\begin{aligned}3\left[\bar{b}_{1\mu\nu';\lambda}{}^{;\lambda}\right]=&\left[\Delta^{-1/2}{}_{;\rho}{}^{;\rho}\Delta^{1/2}{}_{;\lambda}{}^{;\lambda}g_{\mu\nu'}\right]+\left[\Delta^{-1/2}\Delta^{1/2}{}_{;\lambda}{}^{;\lambda}{}_{;\rho}{}^{;\rho}g_{\mu\nu'}\right]\\&+\left[\Delta^{-1/2}\Delta^{1/2;\lambda\rho}g_{\mu\nu';\lambda\rho}\right]+\left[g_{\mu\nu';\lambda}{}^{;\lambda}{}_{;\rho}{}^{;\rho}\right]+\left[R_{\mu}{}^{\lambda}{}_{;\rho}{}^{;\rho}g_{\lambda\nu'}\right]\\=&-\frac{R^2}{36}g_{\mu\nu}+g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{36}R^2-\frac{1}{30}R_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma}+\frac{1}{30}R_{\rho\sigma\lambda\kappa}R^{\rho\sigma\lambda\kappa}-\frac{1}{5}\Box R\right)\\&+\frac{1}{3}R^{\lambda\rho}R_{\mu\nu\lambda\rho}+\left[g_{\mu\nu';\lambda}{}^{;\lambda}{}_{;\rho}{}^{;\rho}\right]+R_{\mu}{}^{\lambda}{}_{;\rho}{}^{;\rho}g_{\lambda\nu}\\=&g_{\mu\nu}\left(-\frac{1}{30}R_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma}+\frac{1}{30}R_{\rho\sigma\lambda\kappa}R^{\rho\sigma\lambda\kappa}-\frac{1}{5}\Box R\right)\\&-\frac{1}{2}R_{\mu\rho\sigma\lambda}R_{\nu}{}^{\rho\sigma\lambda}+\Box R_{\mu\nu}\end{aligned}$$

$g^{\mu\nu}$ をかければ

$$\begin{aligned}3g^{\mu\nu}\left[\bar{b}_{1\mu\nu';\lambda}{}^{;\lambda}\right]=&4\left(-\frac{1}{30}R_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma}+\frac{1}{30}R_{\rho\sigma\lambda\kappa}R^{\rho\sigma\lambda\kappa}-\frac{1}{5}\Box R\right)-\frac{1}{2}R_{\mu\rho\sigma\lambda}R^{\mu\rho\sigma\lambda}+\Box R\\=&-\frac{2}{15}R_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma}-\frac{11}{30}R_{\rho\sigma\lambda\kappa}R^{\rho\sigma\lambda\kappa}+\frac{1}{5}\Box R\end{aligned} \tag{4.0.41}$$

となり最終的に

$$\begin{aligned}2\bar{b}_{2\mu}{}^{\mu}&=-\frac{2R^2}{9}+\frac{43}{45}R_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma}-\frac{11}{90}R_{\rho\sigma\lambda\kappa}R^{\rho\sigma\lambda\kappa}+\frac{1}{15}\Box R\\\bar{b}_{2\mu}{}^{\mu}&=\frac{1}{180}\left(-20R^2+86R_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma}-11R_{\rho\sigma\lambda\kappa}R^{\rho\sigma\lambda\kappa}+6\Box R\right)\end{aligned} \tag{4.0.42}$$

となる。こうして再帰的に計算してきたが、以降の計算で使うのは

$$\bar{b}_{0\mu}{}^{\mu} = 4 \tag{4.0.43}$$

$$\bar{b}_{1\mu}{}^{\mu} = \frac{1}{3}R \tag{4.0.44}$$

$$\bar{b}_{2\mu}{}^{\mu} = \frac{1}{180}\left(-20R^2 + 86R_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma} - 11R_{\rho\sigma\lambda\kappa}R^{\rho\sigma\lambda\kappa} + 6\Box R\right) \tag{4.0.45}$$

だけである。

ここまでの計算は Feynman gauge$\alpha = 1$ で行ってきた。実は $\alpha \neq 1$ では $x \neq x'$ での上のような漸近展開は存在しないことが示されている。しかしながら $x = x'$ 極限での展開は残されている。

$$K^{(\alpha)}_{\mu\nu}(x,x;\tau) = \frac{i\sqrt{g}}{16\pi^2}\sum_{n=0}(i\tau)^{n-2}b_{n\mu\nu}(x;\alpha) \tag{4.0.46}$$

ここで次の事実を用いる：

$$\nabla_\mu\nabla^\rho H_{\rho\nu}(\alpha) = H_\mu{}^\rho(\alpha)\nabla_\rho\nabla_\nu = -\frac{1}{\alpha}\nabla_\mu\Box\nabla_\nu \tag{4.0.47}$$

これは

$$H_{\rho\nu}(\alpha) = H_{\rho\nu}(\infty) - \frac{1}{\alpha}\nabla_\rho\nabla_\nu$$

であるために

$$\nabla_\mu\nabla^\rho H_{\rho\nu}(\infty) = H_\mu{}^\rho(\infty)\nabla_\rho\nabla_\nu = 0$$

を示せば良い。まず

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu\nabla^\rho H_{\rho\nu}(\infty) &= -\nabla_\mu\left(\nabla_\nu\Box - \Box\nabla_\nu + \nabla^\rho R_{\rho\nu}\right)\\
&= -\nabla_\mu\left([\nabla_\nu,\Box] + \nabla^\rho R_{\rho\nu}\right)\\
&= -\nabla_\mu\left([\nabla_\nu,\nabla_\rho]\nabla^\rho + \nabla^\rho[\nabla_\nu,\nabla_\rho] + \nabla^\rho R_{\rho\nu}\right)
\end{aligned}$$

を A^ν 対して作用させると

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu\nabla^\rho H_{\rho\nu}(\infty)A^\nu =& -\nabla_\mu\left([\nabla_\nu,\nabla_\rho]\nabla^\rho A^\nu + \nabla^\rho[\nabla_\nu,\nabla_\rho]A^\nu + \nabla^\rho(R_{\rho\nu}A^\nu)\right)\\
=& -\nabla_\mu\left(R^\rho{}_{\sigma\nu\rho}\nabla^\sigma A^\nu + R^\nu{}_{\sigma\nu\rho}\nabla^\rho A^\sigma + \nabla^\rho(R^\nu{}_{\sigma\nu\rho}A^\sigma) + \nabla^\rho(R_{\rho\nu}A^\nu)\right)?\\
=& -\nabla_\mu\left(R_{\sigma\nu}\nabla^\sigma A^\nu - R_{\sigma\rho}\nabla^\rho A^\sigma - \nabla^\rho(R_{\sigma\rho}A^\sigma) + \nabla^\rho(R_{\rho\nu}A^\nu)\right) = 0
\end{aligned}$$

同様に

$$
\begin{aligned}
H_\mu{}^\rho(\infty)\nabla_\rho\nabla_\nu &= -\left(\Box\nabla_\mu - \nabla_\mu\Box + R_\mu{}^\rho\nabla_\rho\right)\nabla_\nu \\
&= -\left(-\left[\nabla_\mu, \Box\right] + R_\mu{}^\rho\nabla_\rho\right)\nabla_\nu \\
&= \left(\left[\nabla_\mu, \nabla_\rho\right]\nabla^\rho + \nabla^\rho\left[\nabla_\mu, \nabla_\rho\right] - R_\mu{}^\rho\nabla_\rho\right)\nabla_\nu
\end{aligned}
$$

を A^ν 対して作用させると $B := \nabla_\nu A^\nu$ とスカラーで書いて

$$
\begin{aligned}
H_\mu{}^\rho(\infty)\nabla_\rho\nabla_\nu A^\nu &= \left(\left[\nabla_\mu, \nabla_\rho\right]\nabla^\rho B + \nabla^\rho\left[\nabla_\mu, \nabla_\rho\right]B - R_\mu{}^\rho\nabla_\rho B\right) \\
&= \left(R_{\sigma\nu}\nabla^\sigma B - R_\mu{}^\rho\nabla_\rho B\right) = 0
\end{aligned}
$$

これによって示された。とくに $[\nabla\nabla, H(\alpha)] = 0$ である。

$$
H_{\rho\nu}(\alpha) = H_{\rho\nu}(\infty) - \frac{1}{\alpha}\nabla_\rho\nabla_\nu = \bar{H}_{\rho\nu} - \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\nabla_\rho\nabla_\nu
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\nabla_\mu\nabla^\rho H_{\rho\nu}(\alpha) &= -\frac{1}{\alpha}\nabla_\mu\Box\nabla_\nu \\
&= \frac{1}{\alpha}\nabla_\mu\nabla^\rho\bar{H}_{\rho\nu}
\end{aligned}
$$

が従い、これと $[\nabla\nabla, H(\alpha)] = 0$ から

$$
\nabla_\mu\nabla^\rho[H(\alpha)^n]_{\rho\nu} = \frac{1}{\alpha^n}\nabla_\mu\nabla^\rho[\bar{H}^n]_{\rho\nu} \tag{4.0.48}
$$

が得られる。これによってべき級数の関数の引数が $H(\alpha)$ なら Feynmann gauge のもので書き換えることができることがわかる：熱核の定義を α^{-1} で微分すれば

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\alpha^{-1}}K^{(\alpha)}_{\mu\nu'}(\tau) &= \frac{\partial}{\partial\alpha^{-1}}\sum_{n=0}\frac{(-i\tau)^n}{n!}[H(\alpha)^n]_\mu{}^\lambda\langle x, \lambda|x', \nu\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial\alpha^{-1}}\sum_{n=0}\frac{(-i\tau)^n}{n!}\left[\left(\bar{H} - \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\nabla\nabla\right)^n\right]_\mu{}^\lambda\langle x, \lambda|x', \nu\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial\alpha^{-1}}\left(\frac{i\tau}{\alpha}\nabla_\mu\nabla^\rho\right)\sum_{n=0}\frac{(-i\tau)^n}{n!}[H(\alpha)^n]_\rho{}^\lambda\langle x, \lambda|x', \nu\rangle \\
&= i\tau\nabla_\mu\nabla^\rho\sum_{n=0}\frac{(-i\tau)^n}{\alpha^n n!}\left[\bar{H}^n\right]_\rho{}^\lambda\langle x, \lambda|x', \nu\rangle \\
&= i\tau\nabla_\mu\nabla^\rho\langle x, \rho|\exp\left(\frac{-i\tau}{\alpha}\bar{H}\right)|x', \nu\rangle \\
&= i\tau\nabla_\mu\nabla^\rho\bar{K}_{\rho\nu'}\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

となる。逆にこれを $1/\alpha$ で積分して積分変数を $\alpha^{-1} \to \tau/\alpha$ に変更してやれば

$$
\begin{aligned}
K^{(\alpha)}_{\mu\nu'}(\tau) - \bar{K}_{\mu\nu'}(\tau) &= i\int_1^{1/\alpha} \tau \mathrm{d}\alpha'^{-1} \nabla_\mu \nabla^\rho \bar{K}_{\rho\nu'}\left(\frac{\tau}{\alpha'}\right) \\
&= i\int_\tau^{\tau/\alpha} \mathrm{d}\frac{\tau}{\alpha'} \nabla_\mu \nabla^\rho \bar{K}_{\rho\nu'}\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)
\end{aligned} \tag{4.0.49}
$$

これは $\tau \to 0$limit での条件を自明に満たしているので良さそうである。次の展開を考えよう

$$
\lim_{x'\to x} \nabla_\mu \nabla^\rho \bar{K}_{\rho\nu'}(\tau) = -\frac{\sqrt{g}}{16\pi^2\tau^3}\sum_{n=0}(i\tau)^n c_{n\mu\nu}(x) \tag{4.0.50}
$$

straightforward に計算すると

$$
\lim_{x'\to x} \nabla_\mu \nabla^\rho \bar{K}_{\rho\nu'}(\tau) = -\frac{\sqrt{g}}{16\pi^2\tau^3}\left(-\frac{1}{2}\bar{b}_{0\mu\nu} + \sum_{n=1}(i\tau)^n\left(-\frac{1}{2}\bar{b}_{n\mu\nu}\left[\left(\Delta^{1/2}\bar{b}_{n-1\lambda\nu'}\right)^{;\lambda}{}_{;\mu}\right]\right)\right) \tag{4.0.51}
$$

この計算では coincidence limit 及び normal coordinate limit で、次を用いればすぐにわかる。

$$
\begin{aligned}
\left(g^{1/4}\mathrm{e}^{\frac{i\sigma}{2\tau}}\right) &\to 1 \\
\left(g^{1/4}\mathrm{e}^{\frac{i\sigma}{2\tau}}\right)^{;\lambda} &= \left(g^{1/4}\mathrm{e}^{\frac{i\sigma}{2\tau}}\right)\left(\frac{1}{4}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}{}^{,\lambda} + \frac{i\sigma^{;\lambda}}{2\tau}\right) \to 0 \\
\left(\frac{1}{4}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}{}^{,\lambda} + \frac{i\sigma^{;\lambda}}{2\tau}\right)_{;\mu} &= \left(\frac{1}{4}g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}{}^{,\lambda}{}_{;\mu} + \frac{i\sigma^{;\lambda}{}_{;\mu}}{2\tau}\right) \to \frac{i\delta^\lambda{}_\mu}{2\tau}
\end{aligned}
$$

この結果から、展開が正しいそうであることがわかり $c_{n\mu\nu}$ が

$$
c_{0\mu\nu} = -\frac{1}{2}\bar{b}_{0\mu\nu} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu} \tag{4.0.52}
$$

$$
c_{n\mu\nu} = -\frac{1}{2}\bar{b}_{n\mu\nu} + \left[\left(\Delta^{1/2}\bar{b}_{n-1\lambda\nu'}\right)^{;\lambda}{}_{;\mu}\right] \tag{4.0.53}
$$

であることがわかる。各展開を式に代入して係数比較すると

$$
(i\tau)^{n-2}b_{n\mu\nu}(x;\alpha) - (i\tau)^{n-2}\bar{b}_{n\mu\nu} = \int_\tau^{\tau/\alpha}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\tau'}(i\tau')^{n-2}c_{n\mu\nu} \tag{4.0.54}
$$

これによって

$$
\begin{aligned}
b_{2\mu\nu}(x;\alpha) - \bar{b}_{2\mu\nu} &= c_{2\mu\nu}\left(\log\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) - \log(\tau)\right) = -(\log\alpha)c_{2\mu\nu} \\
b_{n\mu\nu}(x;\alpha) - \bar{b}_{n\mu\nu} &= c_{n\mu\nu}\frac{\alpha^{2-n}-1}{n-2} \qquad (n\neq 2)
\end{aligned} \tag{4.0.55}
$$

となるから $n = 0, 1, 2$ については

$$\begin{aligned} b_{0\mu\nu}(x;\alpha) &= \bar{b}_{0\mu\nu} - c_{n\mu\nu}\frac{\alpha^2-1}{2} = g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\frac{\alpha^2-1}{4} \\ b_{0\mu}{}^{\mu}(x;\alpha) &= 3+\alpha^2 \end{aligned} \tag{4.0.56}$$

$$\begin{aligned} b_{1\mu}{}^{\mu}(x;\alpha) &= \bar{b}_{\mu}{}^{\mu} - c_{1\mu}{}^{\mu}(\alpha-1) = \frac{\alpha+1}{2}\bar{b}_{1\mu}{}^{\mu} - (\alpha-1)\left[\left(\Delta^{1/2}\bar{b}_{0\lambda\nu'}\right)^{;\lambda\nu}\right] \\ &= \frac{\alpha+1}{6}R - (\alpha-1)\left(-\frac{1}{6}R^{\lambda\nu}g_{\lambda\nu} + \frac{1}{2}R_{\lambda\nu}{}^{\lambda\nu}\right) = \left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{6}\right)R \end{aligned} \tag{4.0.57}$$

$$\begin{aligned} b_{2\mu}{}^{\mu}(x;\alpha) &= \bar{b}_{2\mu}{}^{\mu} - (\log\alpha)c_{2\mu}{}^{\mu} = \frac{2+\log\alpha}{2}\bar{b}_{2\mu}{}^{\mu} - \log\alpha\left[\left(\Delta^{1/2}\bar{b}_{1\lambda\nu'}\right)^{;\lambda\nu}\right] \\ &= \frac{2+\log\alpha}{360}\left(-20R^2 + 86R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - 11R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} + 6\Box R\right) - \log\alpha\left[\left(\Delta^{1/2}\bar{b}_{1\lambda\nu'}\right)^{;\lambda\nu}\right] \end{aligned} \tag{4.0.58}$$

第 5 章

Konishi Anomaly

Weyl Anomaly の SUSY 版が Konishi Anomaly である。ゆえにこの章では Wess-Bagger notation が大活躍する。Weyl Anomaly が CFT への入り口になるように、Konishi Anomaly は SCFT からさきの理論において重要な恒等式を提供する。

第 6 章

$SU(2)$Global Anomaly

経路積分は質点の場合にはその名の通り、積分域は始点と終点を結ぶ曲線全体に渡って積分するというものであった。しかし正確に言えば、時間の定義域から相空間への滑らかな写像全体に渡る積分である。場の場合には時空多様体上のファイバーバンドルの切断 $s : \mathcal{M} \to E$ 全体である。これは E が自明束 $\mathcal{M} \otimes G$ のとき (Lie 群 G 値のファイバーであると想定している)、s の単射性から $\mathcal{M} \to G$ の写像としてみたほうがわかりやすい。G が gauge 群なら切断は gauge 変換になる．いま、$\mathcal{M}$ として Euclid 空間 R^4 を取ろう（Wick rotation したという気持ちである）。ところで場の量子論を構成する上で、漸近的完備性という条件を与える。これは無限遠方で自由場になるということである。以上の考察をまとめると、時空多様体としてはむしろ $R^4 \cap \infty = S^4$ をとり、無限遠点での s の値を (∞, id) に取るのが都合が良いであろう。

ここで本題である。$SU(2)$ が大域的 Anomaly を生じるのは 4 次のホモトピー群が非自明であるということである:

$$\pi^4(SU(2)) = \mathbb{Z}_2 \tag{6.0.1}$$

これは先に述べたことを踏まえると、経路積分の積分域として経路全体を取ると同じ gauge 変換を与えることなる経路が 2 つあるということである。

第 7 章

$D = 2$ QFT

2 次元の共形場の理論では共形変換に対しての追加の条件が与えられることはなく、エネルギー運動量テンソルから Virasoro Algebra が導入される

7.1 Kac-Moody Algebra

7.2 Virasoro Algebra

$$[l_m, l_n] = m - nl_{m+n} \tag{7.2.1}$$

$$[L_m, L_n] = m - nL_{m+n} + \frac{c}{12}\delta_{m+n,0} \tag{7.2.2}$$

ここで c は central charge とよばれ Weyl anomaly に深く関係している。

7.2.1 Central Extension

この項は Appendix に詳しく導入されている。

2-Cocycle Condition

第 8 章

Appendix

A　QFT in curved space

A.1　Vielbein and SpinConection

背景時空を曲げておくと色々と都合がいいので背景時空の計量が Minkowski とは限らない $g_{\mu\nu}$ であるとして扱いたい。しかしながらスピノル場を curved space について定義するためには時空の変数として計量ではなく多脚場を使う必要がある。多脚場形式 (vielbein form) とは以下の式で定義される 1-form である。これは座標非依存な局所フレームであり

$$g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu = \eta_{ab}e^a \otimes e^b \quad = \eta_{ab}\mathrm{d}x^\mu {e_\mu}^a \otimes \mathrm{d}x^\nu {e_\nu}^b \tag{A.1.1}$$

また多脚場場 (vielbein fields, 日本語はダメという感情しかない) を vielbein form から座標基底を外した係数として定義する。

$$e^a = \mathrm{d}x^\mu {e_\mu}^a \tag{A.1.2}$$

Vielbein fields は Einstein と Lorentz の添字をそれぞれ一つずつ持っており添字の種類を入れ替えることができる。例えば Einstein vectorV^μ があったとき $V^a := V^\mu {e_\mu}^a$ は Lorentz vector になる。covector や高階の tensor についても同様である。

ところで vielbein form は Lorentz 変換によって異なる vielbein form にうつることができるので (本義)Lorentz 群 $SO^+(3,1)$ の不定性がある (向き付けされているとしているので非連結部分は除外される)。今は curved space を考えているので、この不定性は局所内部対称性と理解できて gauge 場を導入することができる（Yang-Mills の場合の gauge 場は数学的には principal bundle の接続として理解されるが，principal bundle は frame bundle の抽象化であり frame bundle は vielbein form の住む空間である)。Lorentz 群に対応した Lie 代数 $\mathfrak{so}(3,1)$ について復習する。Lorentz metricη_{ab} に対する不変性から無限小 Lorentz 変換 $\Lambda^a{}_b$ を微小パラメータを $\epsilon^a{}_b$ として

$$\Lambda^a{}_b = \delta^a{}_b + \epsilon^a{}_b \tag{A.1.3}$$
$$\epsilon_{ab} + \epsilon_{ba} = 0 \tag{A.1.4}$$

さらに 4×4 行列 $S^{(1)}_{ab} = -S^{(1)}_{ba}$ を導入して

$$x'^a = \left(1 - \frac{i}{2}\epsilon^{cd}S^{(1)}_{cd}\right)^a{}_b x^b \tag{A.1.5}$$
$$(S^{(1)}_{cd})^a{}_b = i(\delta^a_c \delta_{db} - \delta^a_d \delta_{cb}) \tag{A.1.6}$$

と書き直すことができる。この $S^{(1)}_{ab}$ は Lorentz 代数

$$[S^{(1)}_{ab}, S^{(1)}_{cd}] = -i(\eta_{ac}S^{(1)}_{bd} + \eta_{bd}S^{(1)}_{ac} - \eta_{ad}S^{(1)}_{bc} - \eta_{bc}S^{(1)}_{ad}) \tag{A.1.7}$$

を満たしている。δ を用いた $S^{(1)}$ の行列は Lorentz 代数の表現基底になっている。故に $S^{(1)}$ とは限らない一般の $n \times n$ 行列 S_{ab} で

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2}\epsilon^{cd}S_{cd}\right) \tag{A.1.8}$$
$$[S_{ab}, S_{cd}] = i(\eta_{ac}S_{bd} + \eta_{bd}S_{ac} - \eta_{ad}S_{bc} - \eta_{bc}S_{ad}) \tag{A.1.9}$$

を満たすものが Lorentz 代数の表現になっている。上で紹介した 4×4 行列による表現はその添字からもわかるとおり $\mathfrak{so}(3,1)$ の (1,1) 既約表現 (Lorentz vector) に対する表現になっている。では Weyl spinor に対する表現を考えよう。結果のみ与えると

$$\chi'_\alpha = \left[\exp\left(-\frac{i}{2}\epsilon^{ab}\sigma_{ab}\right)\right]_\alpha{}^\beta \chi_\beta \tag{A.1.10}$$
$$\psi'^{\dot\alpha} = \left[\exp\left(-\frac{i}{2}\epsilon^{ab}\overline{\sigma}_{ab}\right)\right]^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \psi^{\dot\beta} \tag{A.1.11}$$

これを用いると Dirac spinor に対しては

$$\psi_D = \exp\left(-\frac{i}{2}\epsilon^{ab}S^{(1/2)}_{ab}\right)\psi_D \tag{A.1.12}$$
$$S^{(1/2)}_{ab} = \frac{i}{4}[\gamma_a, \gamma_b] \tag{A.1.13}$$

という表現になっていることがわかる。gauge 場 A_a を導入するだけなら表現を考える必要はない。導入するためには $\epsilon^{ab}(x)$ と局所的なパラメータとして、Einstein vector な共変微分 $D_\mu = \partial_\mu - i/2A_\mu$ で

$$\Lambda D_\mu \Lambda^{-1} = D'_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2}A'_\mu \tag{A.1.14}$$

なるようにすれば良い

$$\partial_\mu - \frac{i}{2}A'_\mu = \Lambda(\partial_\mu - \frac{i}{2}A_\mu)\exp\left(\frac{i}{2}\epsilon^{cd}(x)S_{cd}\right) \tag{A.1.15}$$

$$= \partial_\mu - \frac{i}{2}\Lambda A_\mu \Lambda^{-1} + (\partial_\mu \frac{i}{2}\epsilon^{cd}(x)S_{cd}) \tag{A.1.16}$$

$$\rightarrow A'{}_\mu = \Lambda A_\mu \Lambda^{-1} - (\partial_\mu \epsilon^{cd}(x))S_{cd} \tag{A.1.17}$$

ちなみに gauge 場 A_μ を生成子を分離すれば

$$A_\mu = A^{bc}_\mu \quad S_{bd} \tag{A.1.18}$$

$$A^{bc}_\mu \rightarrow A'^{bc}_\mu = \Lambda A_\mu \Lambda^{-1\,bc} - (\partial_a \epsilon^{bc}(x)) \tag{A.1.19}$$

特に無限小変換では

$$\Lambda^a{}_b = \delta^a{}_b - \frac{i}{2}\epsilon^{cd}S^{(1)}_{cd}{}^a{}_b \tag{A.1.20}$$

$$=: \delta^a{}_b + \epsilon^a{}_b \tag{A.1.21}$$

なので

$$A'^{bc}_\mu = \Lambda^b{}_d A^{de}_\mu \Lambda_e{}^c - (\partial_a \epsilon^{bc}(x)) \tag{A.1.22}$$

$$A'^{bc}_\mu = A^{bc} + \epsilon^b{}_d A^{dc}_\mu + A^{be}_\mu \epsilon_e{}^c - (\partial_a \epsilon^{bc}(x)) \tag{A.1.23}$$

となる。こうして導入した $A^{bc}_a(x)$ は spin connection と呼ばれ，metric 形式では現れなかった接続場である。spinor 場を curved space で使いたければ vielbein e^a_μ を使ってあらゆる議論を接空間上で行い付随する gauge 場 A^{bc}_a を含んだ共変微分を運用する必要があるのである。

A.2 Affine connection

Einstein の一般相対性理論では Affine connection と呼ばれる一般座標変換に対する接続が導入される．多くの場合，要請によって Levi-civita　connection になるが，vielbein form を用いた記述では Levi-civita とは限らない接続を導入する。ところで一般座標変換は数学的には微分同相と呼ばれるが、これは局所座標 x^μ によって表現できる:

$$\mathrm{diff}(M) \ni f : M \to N,\ \ M \ni p \to f(p) \in V_{f(p)} \subset N$$
$$\left(\varphi \circ f|_{U_p} \circ \varphi^{-1}\right)(x^\mu) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu$$

この局所表現から

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \in GL(3,1) \tag{A.1.24}$$

という群を成していることがわかる。この意味で $GL(3,1)$ の gauge 場として Affine connection を見ることもできる。$GL(3,1)$ の生成子を考えよう。と言っても，よく知られているように　Christoffel symbols $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ を用いた共変微分があるのでコレを適当に生成子とゲージ場に分ければいい。ここでは

$$\nabla_\rho := \partial_\rho - iU^\nu_\mu \Gamma^\mu_{\nu\rho} \tag{A.1.25}$$

の形で共変微分を書く．U^ν_μ が Lie 代数基底になるようにしている。反変、共変などテンソルの形によって U^ν_μ の表現が変化することによって，共変微分が正しく作用するのである。抽象的生成子 U^ν_μ が満たすべき代数は

$$\left[U^\nu_\mu, U^\sigma_\rho\right] = -i\left(\delta^\sigma_\mu U^\nu_\rho - \delta^\nu_\rho U^\sigma_\mu\right) \tag{A.1.26}$$

これを要求することによってどんな表現、つまりどんなテンソルに作用するときであっても曲率の式を定めることができる。また、変換性も Lie 代数値 1-form の形として理解できる。この形式ではより表現によらない議論が可能であるため嬉しい。ちなみに抽象的生成子の反変添字に対する表現としては

$$\left(U^\nu_\mu\right)_\rho{}^\sigma = -i\left(\delta^\sigma_\mu \delta^\nu_\rho - \delta^\nu_\rho \delta^\sigma_\mu\right) \tag{A.1.27}$$

共変添字に対する表現としては

$$\left(U^\nu_\mu\right)_\rho{}^\sigma = i\left(\delta^\sigma_\mu \delta^\nu_\rho - \delta^\nu_\rho \delta^\sigma_\mu\right) \tag{A.1.28}$$

とできる。

A.3 Metric condition

上で導入した2つの接続はともに、時空に関する接続であるため、アインシュタインよろしく多脚場条件が課される:

$$(\nabla_\mu e_a)^\nu = \partial_\mu e_a^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\sigma} e_a^\sigma + A^b_{\mu a} e_b^\nu = 0 \tag{A.1.29}$$

この条件がいわゆる Einstein's equivalence principle の数学的表現である。これが満たされることによって vielbein の存在が保証されるのである。この条件から spin connection 及び Affine connection に条件が加わる。まず、上の多脚場条件より metric は計量条件

$$\begin{aligned}(\nabla_\rho g)_{\mu\nu} &= \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\rho} g_{\mu\sigma} \\ &= (\nabla_\rho e_a)_\mu \eta^{ab} e_{b\nu} + \eta^{ab} e_{a\mu} (\nabla_\rho e_b)_\nu = 0 \end{aligned} \tag{A.1.30}$$

を満たし、この条件から ($\mu\nu\rho$ を cyclic にまわし、足し引きすることによって)

$$\begin{aligned} 0 =& - (\partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\rho} g_{\mu\sigma}) \\ &+ \partial_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu} g_{\sigma\rho} - \Gamma^\sigma_{\rho\mu} g_{\nu\sigma} \\ &+ \partial_\nu g_{\rho\mu} - \Gamma^\sigma_{\rho\nu} g_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} \\ =& - \partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - 2\Gamma^\sigma_{\nu\mu} g_{\sigma\rho} \end{aligned} \tag{A.1.31}$$

$$\to \Gamma^\sigma_{\nu\mu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (g_{\nu\rho,\mu} + g_{\rho\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\rho}) \tag{A.1.32}$$

を得る。この接続を Levi-civita connection と呼ぶ。$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu$ を用いればこの Levi-civita connection は

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (g_{\nu\rho,\mu} + g_{\rho\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\rho}) \tag{A.1.33}$$

と書ける。次に vielbein に対しての多脚場条件から spin connection の表式を得よう。Levi-civita connection の導出条件から

$$(\nabla_\rho g)_{\mu\nu} = (\nabla_\rho \eta_{ab} e^a e^b)_{\mu\nu} \tag{A.1.34}$$

$$= (\nabla_\rho \eta)_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu + \eta_{ab} (\nabla_\rho e)^a{}_\mu e^b{}_\nu + \eta_{ab} e^a{}_\mu (\nabla_\rho e)^b{}_\nu \tag{A.1.35}$$

$$= A^c_{\rho a} \eta_{cb} e^a{}_\mu e^b{}_\nu + A^c_{\rho b} \eta_{ac} e^a{}_\mu e^b{}_\nu + \eta_{ab} (\nabla_\rho e)^a{}_\mu e^b{}_\nu + \eta_{ab} e^a{}_\mu (\nabla_\rho e)^b{}_\nu \tag{A.1.36}$$

$$= A^c_{\rho a} \eta_{cb} e^a{}_\mu e^b{}_\nu + A^c_{\rho b} \eta_{ac} e^a{}_\mu e^b{}_\nu = 0 \tag{A.1.37}$$

であるから、

$$A_{\rho ab} := A^c_{\rho a}\eta_{cb} = 0 \tag{A.1.38}$$

は対称成分を持たないことが注意が必要である：

$$A_{\rho ab} = A_{\rho[ab]} \tag{A.1.39}$$

$$A_{\rho(ab)} = 0 \tag{A.1.40}$$

さらに Levi-civita connection を vielbein を用いて書き直すと

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{ab}e^\sigma_a e^\rho_b \eta_{cd}\left(e^c_{\nu,\mu}e^d_\rho + e^c_\nu e^d_{\rho,\mu} + e^c_{\mu,\nu}e^d_\rho + e^c_\mu e^d_{\rho,\nu} - e^c_{\mu,\rho}e^d_\mu - e^c_\mu e^d_{\nu,\rho}\right) \tag{A.1.41}$$

$$e_{a\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}e^\nu_b = \frac{1}{2}e^\rho_a \eta_{cd}e^\nu_b\left(e^c_{\nu,\mu}e^d_\rho + e^c_\nu e^d_{\rho,\mu} + e^c_{\mu,\nu}e^d_\rho + e^c_\mu e^d_{\rho,\nu} - e^c_{\mu,\rho}e^d_\nu - e^c_\mu e^d_{\nu,\rho}\right) \tag{A.1.42}$$

計量条件を spin connection について書き換えると

$$A_{\mu ab} = e_{a\nu}\partial_\mu e^\nu_b + e_{a\nu}\Gamma^\nu_{\mu\sigma}e^\sigma_b \tag{A.1.43}$$

であるが、この Affine connection に vielbein を用いた表式を代入すれば

$$2A_{\mu ab} = 2e_{a\nu}e^\nu_{b,\mu} + \eta_{cd}e^\rho_a e^\nu_b\left(e^c_{\nu,\mu}e^d_\rho + e^c_\nu e^d_{\rho,\mu} + e^c_{\mu,\nu}e^d_\rho - e^c_{\mu,\rho}e^d_\nu + e^c_\mu e^d_{\rho,\nu} - e^c_\mu e^d_{\nu,\rho}\right) \tag{A.1.44}$$

$$= 2e_{a\nu}e^\nu_{b,\mu} + \left(e^\nu_b e_{a\nu,\mu} + e^\rho_a e^d_{b\rho,\mu} + e^\nu_b e_{a\mu,\nu} - e^\rho_a e_{b\mu,\rho} + e^\rho_a e^\nu_b e_{c\mu}e^c_{\rho,\nu} - e^\rho_a e^\nu_b e_{c\mu}e^c_{\nu,\rho}\right) \tag{A.1.45}$$

となるはずである。しかし、a, b の反対称性を満たす項が残るから

$$2A_{\mu ab} = 2e_{[a|\nu|}e^\nu_{b],\mu} + 2\left(e^\nu_{[b}e_{a]\mu,\nu} + e^\rho_a e^\nu_b e^c_\mu e_{c\rho,\nu} - e^\rho_b e^\nu_a e^c_\mu e_{c\rho,\nu}\right) \tag{A.1.46}$$

$$= e^\nu_b e_{a\nu,\mu} - e^\nu_b e_{a\mu,\nu} - e^\nu_a e_{b\nu,\mu} + e^\nu_a e_{b\mu,\nu} + e^\rho_a e^\nu_b e^c_\mu e_{c\rho,\nu} - e^\rho_a e^\nu_b e^c_\mu e_{c\nu,\rho} \tag{A.1.47}$$

$$= 2e^\nu_b e_{a[\nu,\mu]} - 2e^\nu_a e_{b[\nu,\mu]} - 2e^\rho_a e^\nu_b e^c_\mu e_{c[\nu,\rho]} \tag{A.1.48}$$

ただし 2 つめの等号では最初の四項には

$$0 = \partial_\mu \eta_{ab} = \partial_\mu\left(e_{a\nu}e^\nu_b\right) \tag{A.1.49}$$

$$\rightarrow e^\nu_a e_{b\nu,\mu} = -e_{a\nu}e^\nu_{b,\mu} \tag{A.1.50}$$

を、次の 1 項には ρ, ν の名前の付替えを用いている。新たに次の記号を定義してみよう

$$C_{\nu\rho\mu} := 2e^c_\nu e_{c[\mu,\rho]} \tag{A.1.51}$$

この記号を用いると

$$2A_{\mu ab} = 2e^{\nu}_{b}e_{a[\nu,\mu]} - 2e^{\nu}_{a}e_{b[\nu,\mu]} - 2e^{\rho}_{a}e^{\nu}_{b}e^{c}_{\mu}e_{c[\nu,\rho]} \tag{A.1.52}$$

$$= e^{\nu}_{a}e^{\rho}_{b}\left(C_{\nu\rho\mu} - C_{\rho\nu\mu} - C_{\mu\nu\rho}\right) \tag{A.1.53}$$

と整理される。まとめると

$$A^{ab}_{\mu} = \frac{1}{2}e^{a\nu}e^{b\rho}\left(C_{\nu\rho\mu} - C_{\rho\nu\mu} - C_{\mu\nu\rho}\right) \tag{A.1.54}$$

$$C_{\nu\rho\mu} = 2e^{c}_{\nu}e_{c[\mu,\rho]} \tag{A.1.55}$$

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}\left(g_{\nu\rho,\mu} + g_{\rho\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\rho}\right) \tag{A.1.56}$$

これが多脚場条件を与えたときの接続の形である。

A.4 Curvature

前節で接続を導入したので曲率テンソルを求めるのが一般的な議論の流れであろう。曲率は通常のゲージ場に対する曲率と同様に交換関係を調べることで現れる。

$$R_{\mu\nu} := \left[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}\right] \tag{A.1.57}$$

一般的な Einstein 重力に現れる Riemann Curvature のときには添字が 4 つ現れていたことを想起するかもしれないが、非可換ゲージ場に対する曲率は対応する Lie 代数に値を取る 2-form であるが、Einstein の場合は Lie 代数の基底を指定するための添字が 2 つになっているのである。このノートでは添字の節約のために Lie 代数の添字を書かないようにしているので以降は

$$\Gamma_{\rho} := U^{\nu}_{\mu}\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} \tag{A.1.58}$$

と書いておく。

まず Affine connection のみの曲率を計算すると

$$R_{\mu\nu} = -i\left[\partial_{\mu} - i\Gamma_{\mu}, \partial_{\nu} - i\Gamma_{\nu}\right] \tag{A.1.59}$$

$$= -\left[\partial_{\mu}, \Gamma_{\nu}\right] - \left[\Gamma_{\mu}, \partial_{\nu}\right] + i\left[\Gamma_{\mu}, \Gamma_{\nu}\right] \tag{A.1.60}$$

$$= \left(\partial_{\nu}\Gamma_{\mu} - \partial_{\mu}\Gamma_{\nu}\right) + i\left[\Gamma_{\mu}, \Gamma_{\nu}\right] \tag{A.1.61}$$

この結果は非可換ゲージ場に対する計算と全く一致している。生成子を分けて書けば

$$R_{\mu\nu} = U^{\sigma}_{\rho}\left(\partial_{\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} - \partial_{\mu}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}\right) + i\left[U^{\sigma}_{\rho}, U^{\lambda}_{\kappa}\right]\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa} \tag{A.1.62}$$

$$= U^{\sigma}_{\rho}\left(\partial_{\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} - \partial_{\mu}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}\right) + \left(\delta^{\lambda}_{\rho}U^{\sigma}_{\kappa} - \delta^{\sigma}_{\kappa}U^{\lambda}_{\rho}\right)\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\Gamma^{\kappa}_{\nu\lambda} \tag{A.1.63}$$

$$= U^{\sigma}_{\rho}\left(\partial_{\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} - \partial_{\mu}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}\right) + U^{\sigma}_{\kappa}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\Gamma^{\kappa}_{\nu\rho} - U^{\lambda}_{\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} \tag{A.1.64}$$

添字を付け替えれば

$$R_{\mu\nu} = U^{\sigma}_{\rho} \left(\partial_\nu \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} - \partial_\mu \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} \right) \tag{A.1.65}$$

Killing　内積によって

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} := \left(R_{\mu\nu}\right)_{\sigma}{}^{\rho} = \partial_\nu \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} - \partial_\mu \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} \tag{A.1.66}$$

とすれば、表現による計算結果としてよく知られている Riemann Curvature になっている．上の計算はあくまでも Einstein 添字のみを持ったテンソルに対する作用で計算されている。では Lorentz 添字を持ってる場合にはどうなるのか, 気になるところである。この問いに対する答えは簡単である。２つの添字は e^a_μ で行き来するので例えば添字が一つのときには

$$A_a = e^{\mu}_{a} A_\mu \tag{A.1.67}$$

と多脚場条件より

$$\begin{aligned}
\left(\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] A\right)_a &= \left(\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] e^{\rho} A_\rho\right)_a && \text{(A.1.68)}\\
&= e^{\rho}_{a} \left(\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] A\right)_\rho && \text{(A.1.69)}\\
&= -e^{\rho}_{a} R^{\sigma}{}_{\rho\mu\nu} A_\sigma && \text{(A.1.70)}\\
&= e^{\rho}_{a} e^{b}_{\sigma} \left(R_{\mu\nu}\right)_{\rho}{}^{\sigma} A_b && \text{(A.1.71)}\\
&= \left(R_{\mu\nu}\right)_{a}{}^{b} A_b && \text{(A.1.72)}
\end{aligned}$$

となる。つまり、spin connection のみで計算した曲率の添字を vielbein で移したものは Affine connection だけで計算したものと一致する。この意味で重力理論の本質は Affine 　connection ではなく spin connection,($SO^+(3,1)$gauge field) にあるということができる。

A.5　Path Integral and BRST Symmetry of Gravity

B　Appendix B

B.1　SUSY algebra

B.2　Geodesic interval

Curved space を考えるときにも Minkowski space における $|x^a - y^a|$ の対応物を考えたくなるときがある。しかしながらこのような座標の差というのは curved space では明

白に定義すること自体が難しい。とくに一般共変性を保って書き下すことは，空間の計量が相当特殊でない限り難しいだろう。ということで次のように geodesic interval $\sigma(x,x')$ を定義する。

$$\sigma(x,x') := \int_{\mathcal{C}} \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{y}^{\mu}\dot{y}^{\nu}}\mathrm{d}t \tag{B.2.73}$$

$$\mathcal{C} \in \left\{ \mathrm{curve}\mathcal{C} : [0,1] \ni t \to M \middle| \mathcal{C}(0) = x, \mathcal{C}(1) = x', \delta \int_{\mathcal{C}} \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{y}^{\mu}\dot{y}^{\nu}}\mathrm{d}t = 0 \right\} \tag{B.2.74}$$

参考文献

[1] Stephen L. Adler. Axial vector vertex in spinor electrodynamics. *Phys. Rev.*, Vol. 177, pp. 2426–2438, 1969.

[2] Stephen L. Adler and William A. Bardeen. Absence of higher order corrections in the anomalous axial vector divergence equation. *Phys. Rev.*, Vol. 182, pp. 1517–1536, 1969.

[3] J. S. Bell and R. Jackiw. A PCAC puzzle: pi0 –¿ gamma gamma in the sigma model. *Nuovo Cim.*, Vol. A60, pp. 47–61, 1969.

[4] Julius Wess and Jonathan Bagger. *Supersymmetry and Supergravity.* Princeton University Press, 1992.

[5] H. J. Wospakrik. NONRECURSIVE ZETA FUNCTION REGULARIZATION OF THE FUJIKAWA ANOMALY FACTOR. *Phys. Rev.*, Vol. D40, pp. 1367–1369, 1989.

[6] 藤川和男. 経路積分と対称性の量子的破れ (新物理学選書). 岩波書店, 2001.