РАЗЛІК ХІБНАСЦЕЙ

Няхай секундамерам вымяраецца час τ некаторай колькасці ваганняў маятніка. У выніках з'яўляюцца выпадковыя хібнасці, таму было праведзена 10 паўторных назіранняў часу τ.

N	τ, с	$\Delta\tau = \tau - <\tau>$, с
1	32,3	–0,22
2	32,8	+0,28
3	32,4	–0,12
4	32,7	+0,18
5	32,4	–0,12
6	32,0	–0,52
7	32,6	+0,08
8	32,9	+0,38
9	32,2	–0,32
10	32,9	+0,38
	$<\tau> = 32{,}52$	$\sum_{i=1}^{n}\Delta\tau_i = 0$

Вызначым вынік і выпадковую хібнасць вымярэння.

1. Знойдзем вынік вымярэння – сярэдняе арыфметычнае

$<\tau> = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i = 32{,}52$ с.

Прамежкавыя вылічэнні праводзім з большай дакладнасцю (на адзін знак), чым дакладнасць вымярэнняў, каб пазбегнуць значнага ўплыву хібнасцей акруглення. У канчатковым адказе апошняя, улічаная "пра запас" лічба адкідваецца.

2. Вызначым выпадковыя адхіленні $\Delta\tau_i = \tau_i - <\tau>$ усіх назіранняў.

3. Праверым правільнасць разлікаў, г.зн. роўнасць нулю алгебраічнай сумы ўсіх велічынь $\Delta\tau_i$. Калі $\sum_{i=1}^{n}\Delta\tau_i \neq 0$, то ў разліках дапушчана памылка.

4. У шэрагу значэнняў τ_i маецца назіранне, якое значна адрозніваецца (шосты вынік), якое можна падазраваць на хібу. Для яго праверкі разлічым сярэднюю квадратычную хібнасць аднаго назірання:

$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Delta\tau_i^2} = 0{,}31$ с.

5. Знойдзем лімітную хібнасць назірання, г.зн. хібнасць, якая ў тры разы перавышае значэнне велічыні S: $\Delta\tau_{лім} = 3S = 0{,}93$ с.

6. Праверым наяўнасць хібаў, г.зн. такіх адхіленняў, модулі якіх перавышаюць лімітную хібнасць: $|\Delta\tau_i| > \Delta\tau_{лім}$. У нашым выпадку $|\Delta\tau| = 0{,}52с < \Delta\tau_{лім}$. Таму, хібы адсутнічаюць. Калі б яны былі знойдзеныя, то вынікі такіх назіранняў трэба было б адкінуць і разлік сярэдняга значэння $<\tau>$ і адхіленняў $\Delta\tau_i$ ажыццявіць ізноў. Калі падазрэнняў на хібы няма, то пп. 4–6 апускаюць.

7. Падлічым сярэднюю квадратычную хібнасць вымярэння

$$\Delta\tau = t_{n,\alpha}\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\Delta\tau_i^2} = 2{,}26\sqrt{\frac{8560\cdot 10^{-4}}{10\cdot 9}} = 0{,}22 \text{ с},$$

дзе $t_{n,\alpha}$ – каэфіцыент Сцьюдзента, які быў знойдзены па табліцы каэфіцыентаў Сцьюдзента для колькасці вымярэнняў $n = 10$ і даверальнай імавернасці $P = 0{,}95$.

8. Вызначым адносную выпадковую хібнасць

$$\varepsilon = \frac{\Delta\tau}{<\tau>}100\% = 0{,}67\% \approx 0{,}7\%.$$

Такім чынам атрымалі: $\tau = <\tau> \pm \Delta\tau = (32{,}5 \pm 0{,}2)$с, $\varepsilon = 0{,}7\%$.

Хібнасць прылады

Сістэматычная хібнасць канкрэтнай прылады (напыклад, звязаная з няправільнасцю разбіўкі шкалы лінейкі або амперметра) з'яўляецца цалкам вызначанай.Яе можна знайсці шляхам параўнання з эталонам і ўвесці ў якасці папраўкі да прылады. Можна перагградуіраваць шкалу прылады або зрабіць новую. Гэта, аднак цяжкая і непатрэбная практычна задача. Прасцей зрабіць для ўсіх прыладаў аднаго тыпа адзіную шкалу такую, каб магчымая хібнасць не перавышала некаторай вызначанай (максімальнай) велічыні. Хібнасці розных прыладаў аднаго тыпу будуць рознымі па знаку і велічыні, але не большымі лімітнай. Значэнні адпаведных лімітных хібнасцей агавораны ГОСТамі і гарантуюцца пры вырабе і праверцы прыладаў. Тады, нягледзячы на тое, што хібнасці канкрэтнай прылады з'яўляюцца сістэматычнымі, у сілу адсутнасці інфармацыі пра гэтую хібнасць (не вядомы ні знак, ні велічыня; вядома толькі, што яна не перавышае лімітнай) яе можна разглядаць і ўлічваць пры разліках як выпадковую. Пры гэтым хібнасць вымярэння некалькі павялічваецца, але значна скарачаюцца затраты часу.
Лімітная хібнасць прылады звычайна ўказваецца ў яе пашпарце. Для адных прыладаў стандартамі задаецца абсалютная хібнасць δ, для іншых – лімітная адносная хібнасць (клас дакладнасці k). Класам дакладнасці вымяральнай прылады называецца (для шматлімітных прыладаў на рабочым ліміце):

$$k = \frac{\delta}{x_{\max}} 100\%.$$

Значок % на прыладах не ставіцца. Для электравымяральных прыладаў магчымы класы: 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 2,5; 4,0. Больш грубыя прылады класа не маюць.
Па вядомаму класу дакладнасці знаходзіцца лімітная хібнасць прылады

$$\delta = \frac{k}{100\%} x_{\max}.$$

Прыклад: Амперметр класа 0,5, разлічаны на максімальную сілу тока $I_{\max} = 2{,}00$ А, вымярае ток, які цячэ праз яго, з хібнасцю, якая не перавышае велічыню

$$\delta = \frac{0{,}5}{100} 2{,}00 = 0{,}010 \text{ А}.$$

Для магазінаў супраціўленняў, індуктыўнасцей, ёмістасцей, клас дакладнасці характэрызуе лімітную адносную хібнасць кожнага элемента ў наборы магазіна (для магазіна з шырокімі лімітамі для розных дыяпазонаў магчымы розныя класы дакладнасці). Таму лімітная абсалютная хібнасць δ

$$\delta = \frac{k}{100\%} x_{уключ}.$$

Лімітная хібнасць δ і клас дакладнасці k задаюцца з давяральнай імавернасцю $P = 0{,}997$. Гэта азначае, што паўшырыня давяральнага інтэрвала, ў якім можа быць заключаная вымяпаемая велічыня, роўна 3σ. У студэнцкім лабараторным практыкуме $P = 0{,}95$, якому адпавядае 2σ. Таму ў практыкуме пры вылічэнні прыладных хібнасцей $\Delta x_{пр}$ неабходна браць не поўную велічыню δ, а толькі $2/3$ ад яе:

$$\Delta x_{пр} = \frac{2}{3}\delta = \frac{2}{3}\frac{k}{100\%} x_{\max}.$$

Для адвольнай надзейнасці P абсалютная хібнасць

$\Delta x_{пр} = \frac{\lambda_P}{3}\delta = \frac{\lambda_P}{3}\frac{k}{100\%} x_{\max}$, дзе λ_P – каэфіцыент, які залежыць ад давяральнай імавернасці P і вызначаецца па табліцы каэфіцыентаў Сцьюдзента.

Прыклад. Электрычнае напружанне вымяраецца з дапамогай вольтметра, разлічанага на лімітнае напружанне $U_{\max} = 15$ В. Клас дакладнасці вольтметра $k = 0{,}5$. Тады абсалютная хібнасць, якую пры вымярэннях можа ўнесці вольтметр:

$\Delta x_{np} = \frac{\lambda_P}{3} \frac{k}{100\%} U_{\max} = \frac{2}{3} \frac{0{,}5}{100} 15 = 0{,}050$ В.

Прылады і меры	Значэнне меры	Лімітная хібнасць
Лінейка металічная	150, 300, 500 мм	0,1 мм
Лінейка металічная	1000 мм	0,2 мм
Лінейка драўляная	200, 250, 300 мм	0,1 мм
Лінейка драўляная	400, 500, 750, 1000 мм	0,5 мм
Лінейкі пластыкавыя	200, 250, 300 мм	1 мм
Гіры для тэхнічных вагаў звычайнай дакладнасці	10, 20, 50, 100 мг	1 мг
Гіры для тэхнічных вагаў звычайнай дакладнасці	200 мг	2 мг
Гіры для тэхнічных вагаў звычайнай дакладнасці	500 мг	4 мг
Гіры для тэхнічных вагаў звычайнай дакладнасці	1 г	6 мг
Гіры для тэхнічных вагаў звычайнай дакладнасці	2 г	8 мг
Гіры для тэхнічных вагаў звычайнай дакладнасці	5 г	12 мг
Мензуркі 2-класа	100, 200 $см^3$	5 $см^3$
Штангенцыркулі з цаной дзялення 0,1 мм	0–155 мм	0,1 мм
Штангенцыркулі з цаной дзялення 0,05 мм	0–200, 0–250, 0–300 мм	0,05 мм
Мікраметры з цаной дзялення 0,01 мм		
Вагі лабараторныя	5–100, 10–200 г	Тры цаны дзялення шкалы
Секундамеры тэхнічныя	30–60 мін	1,5 цаны дзялення шкалы за адзін абарот секунднай стрэлкі
Секундамеры электрычныя	30 мін	0,5 цаны дзялення шкалы за адзін абарот секунднай стрэлкі
Тэрмометры шкляныя вадкасныя	ад –20 да 100 °С	Адна цана дзялення шкалы, калі яна роўная 1, 2, 5 кельвінаў, дзве цаны дзялення, калі яна роўна 0,2; 0,5 кельвіна

Ва ўсіх іншых выпадках, калі не атрымоўваецца вызначыцьлімітную абсалютную хібнасць прылады неабходна браць у якасці δ цану дзялення прылады.

Хібнасць акруглення

Пры вымярэннях адлікі паказанняў прыладаў часта акругляюцца. У выніку ўзнікаюць хібнасці акруглення. Гэта выпадковыя хібнасці. Іх размеркаванне, як правіла, раўнамернае (нераўнамерным яно будзе для прыладаў са шкалой пераменнага маштабу).

Інтэрвал акруглення можа быць розным. Калі адлік здымаецца з дакладнасцю да цэлага дзялення, то інтэрвал акруглення роўны цане дзялення шкалы прылады; калі адлік акругляецца да паловы дзялення, інтэрвал акруглення роўны палове цаны дзялення і г.д. Максімальная хібнасць акруглення, відавочна, не перавышае паловы інтэрвала акруглення, г.зн. велічыні $h/2$. Сапраўды, калі пры адлічванні праводзіцца акругленне да цэлых дзяленняў, то любое паказанне паміж 75,5 і 76,4 будзе акруглена да бліжэйшага цэлага, г.зн. да 76. Хібнасць акруглення (рознасць паміж прынятым адлікам і паказаннем прылады) не перавысіць 0,5, г.зн. паловы інтэрвала акруглення. Паказанні паміж 76,5 і 77,4 будуць прынятыя за 77 (максімальная хібнасць акруглення роўна 0,5) і г.д.

Для даяральнай імавернасці P велічыню $\Delta x_{акр} = P\frac{h}{2}$ прымаюць за абсалютную хібнасць акруглення велічыні x.

Прыклад. Няхай даўжыня некаторага прадмета, вымераная пры дапамозе лінейкі з міліметровымі дзяленнямі, роўна l. Адлік акругляецца да аднаго дзялення, г.зн. да 1 мм. Значыць, велічыня $h = 1$ мм, а абсалютная хібнасць акруглення

$$\Delta l_{акр} = P\frac{h}{2} = 0{,}95\frac{1}{2} \approx 0{,}48 \approx 0{,}5 \text{ мм.}$$

Кожны эксперыментатар імкнецца як можна дакладней выканаць вымярэнні. Аднак трэба акрэслена ўсведамляць, што адлік “на вока” дзесятых далей нават пры аптымальных умовах патрабуе вялікага навыку.

Градуіроўка вымяральных прыладаў звычайна ажыццяўляецца так, каб цана дзялення ляжала ў інтэрвале $[\delta, 2\delta]$. Тады пры нармальным акругленні да паловы цаны дзялення хібнасць акруглення $\Delta x_{акр}$ будзе, ва ўсялякім выпадку, удвая меней за прыборную хібнасць δ $\left(\delta/4 < \Delta x_{акр} < \delta/2\right)$ і таму яе ўнёсак у поўную хібнасць неістотны. Адсюль жа вынікае і прыблізнае практычнае правіла: калі невядома хібнасць вымяральнай прылады, то яе можна ацэначна прыняць роўнай палове цаны дзялення шкалы.

Поўная хібнасць прамога вымярэння

Хібнасць, абумоўленая некалькімі незалежнымі прычынамі, вызначаецца “квадратычным суміраваннем”. Паколькі ў лабараторным практыкуме акрамя паправак, якія ўводзяцца адразу, улічваюцца тры хібнасці: выпадковая $\Delta x_{вып}$, прылады $\Delta x_{пр}$ і акруглення $\Delta x_{акр}$, то поўная абсалютная хібнасць прамога вымярэння

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{вып}^2 + \Delta x_{пр}^2 + \Delta x_{акр}^2}\ .$$

Адносная хібнасць

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{< x >} = \sqrt{\varepsilon_{вып}^2 + \varepsilon_{пр}^2 + \varepsilon_{акр}^2}\ .$$

Пры вылічэнні ўсіх суміруемых хібнасцей даяральная імавернасць выбіраецца аднолькавай (у студэнцкім практыкуме $P = 0{,}95$). Такой жа яна будзе і для поўнай хібнасці. Калі якая-небудзь са складаемых хібнасцей у тры разы меншая за любую іншую, то яе ўклад у агульную суму нязначны і таму такую хібнасць не ўлічваюць.

Прыклад. Поўная апрацоўка вынікаў прамых вымярэнняў.

Няхай вымяраецца ЭРС акумулятара, унутранае супраціўленне якога $r = 1$ Ом. Кантрольныя назіранні паказалі, што ЭРС $\mathrm{E} \approx 12$ В. Таму для вымярэння абраны вольтметр манітаэлектрычнай сістэмы з лімітам $U_{\max} = 15$ В. Клас яго дакладнасці $k = 0{,}5$, супраціўленне $R = 1{,}5$ кОм, колькасць дзяленняў на раўнамернай шкале $N = 150$. Цана дзялення вольтметра $C_U = U_{\max}/N = 0{,}10$ В/дзял.

Першыя тры вымярэнні паказалі, што ў доследзе з’яўляецца раскід дадзеных, абумоўлены выпадковымі хібнасцямі. Таму колькасць назіранняў павялічана да 10. Атрыманыя вынікі прыведзены ў табліцы (у дзяленнях шкалы і ў вольтах):

Нумар назірання	E		ΔE
	дзяленні	В	В
1	120,5	12,05	–0,065
2	122,0	12,20	+0,085
3	121,0	12,10	–0,015
4	120,5	12,05	–0,065
5	121,5	12,15	+0,035
6	122,5	12,25	+0,135
7	121,0	12,10	–0,015
8	120,0	12,00	–0,115
9	121,5	12,15	+0,035
10	121,0	12,10	–0,015
		$<\mathrm{E}>=12{,}115$	$\sum_{i=1}^{n} \Delta\mathrm{E}_i = 0$

Парадак апрацоўкі:

1. Разлічыць сярэдняе арыфметычнае $<\mathrm{E}>=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}_i = 12{,}115$ В.

2. Вызначыць выпадковыя адхіленні $\Delta\mathrm{E}_i = \mathrm{E}_i - <\mathrm{E}>$.

3. Праверыць роўнасць нулю алгебраічнай сумы ўсіх велічынь $\Delta\mathrm{E}_i$.

4. Падлічыць выпадковую хібнасць ($P = 0{,}95$)

$$\Delta\mathrm{E}_{вып} = t_{n,\alpha}\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\Delta\varepsilon_i^2} = 2{,}26\sqrt{\frac{50250\cdot 10^{-6}}{10\cdot 9}} = 0{,}053 \text{ В}.$$

5. Вызначыць хібнасць прыбора (інструментальную)

$$\Delta\varepsilon_{пр} = \frac{\lambda_P}{3}\frac{k}{100\%}U_{\max} = 0{,}050 \text{ В}.$$

6. Знайсці хібнасць акруглення (інтэрвал акруглення $h = 0{,}05$ В, адлік ажыццяўляецца да паловы цаны дзялення шкалы)

$$\Delta\mathrm{E}_{акр} = P\frac{h}{2} = 0{,}024 \text{ В}.$$

7. Вызначыць поўную хібнасць вымярэння

$$\Delta\mathrm{E} = \sqrt{\Delta\mathrm{E}_{вып}^2 + \Delta\mathrm{E}_{пр}^2 + \Delta\mathrm{E}_{акр}^2} \approx 0{,}076 \approx 0{,}08 \text{ В}.$$

8. Вылічыць адносную хібнасць вымярэння

$$\varepsilon = \frac{\Delta\mathrm{E}}{<\mathrm{E}>} = 0{,}006.$$

9. Знайсці папраўку на сістэматычную хібнасць метада: вольтметр вымярае не ЭРС E, а падзенне напружання IR на ўласным супраціўленні R. Таму ўзнікае сістэматычная хібнасць $\delta\mathrm{E}_{сіст} = IR - \mathrm{E}$. Тады, з улікам закона Ома папраўка $\Delta\mathrm{E}_{папр} = -\delta\mathrm{E}_{сіст} = \mathrm{E} - IR = Ir = r\mathrm{E}(R + r) = 0{,}008$ В. Яна на парадак меншая поўнай хібнасці, таму папраўку можна не ўлічваць.

10. Запісаць канчатковы вынік: $\mathrm{E} = (12{,}12 \pm 0{,}08)$ В; $\varepsilon = 0{,}6\%$; $P = 0{,}95$.

Аб колькасці паўторных назіранняў

Трэба адзначыць, што нельга абмяжоўвацца адным вымярэннем. Яно не можа даць сапраўднага і надзейнага выніку. Хібнасць вымярэнняў пры гэтым немагчыма вызначыць. Болей таго, адзіны вынік вымярэнняў сам можа быць хібай.

Некалькі (3–5) праведзеных назіранняў могуць праясніць сітуацыю: калі вынікі супалі (выпадковы хібнасці не праяўляюцца, таму што меншыя за прыладныя), то гэтымі вымярэннямі можна абмежавацца; калі ж у выніках назіраецца раскід (з-за выпадковых хібнасцей), то праводзіцца серыя паўторных вымярэнняў, дамагаюцца за кошт гэтага змяншэння выпадковай хібнасці. З павелічэннем колькасці вымярэнняў выпадковая хібнасць змяншаецца прыблізна як $1/\sqrt{n}$. Пры малых значэннях n памяншэнне выпадковай хібнасці звязана і са змяншэннем каэфіцыента Сцьюдзента. Калі ж раскід паўторных вымярэнняў тым не менш вялікі, то неабходна высветліць і нейтралізаваць прычыну. Калі ж з шэрагу вынікаў адзін рэзка адрозніваецца ад астатніх, то яго ацэньваюць як хібу і выключаюць з апрацоўкі. Колькасць паўторных вымярэнняў тым не менш можа быць зменшана ў некалькіх выпадках: калі для пастаўленай задачы хібнасць увогуле неістотная або вывучаемую з’яву нельга паўтарыць.
Такім чынам, на пытанне аб колькасці вымярэнняў нельга даць адназначнага адказу загадзя, у апісанні лабараторных работ адлюстраваны толькі арыенціры, якія толькі стымулююць пошукавы інтарэс студэнта-эксперыментатара.

Хібнасці творчы працэс!!!!