УСРС – 4

Однофакторный дисперсионный анализ.
Коэффициент детерминации

Описание УСРС – 4

1. Изучить теоретический блок и примеры решения задач.
2. Выполнить индивидуальное практическое задание в соответствии с вариантом.
3. Работа должна включать не только расчетную часть, но и содержательные выводы.
4. Работа должна быть защищена не позже срока, указанного преподавателем.

Теоретический блок и примеры

ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Дисперсионный анализ определяется как статистический метод, предназначенный для оценки влияния различных факторов на результат эксперимента, а также для последующего планирования аналогичных экспериментов. Например, необходимо выяснить, существенно ли различие между партиями некоторого изделия по определенному показателю качества, то есть проверить влияние на качество изделия одного фактора – партии изделия. По числу факторов, влияние которых исследуется, различают однофакторный и многофакторный дисперсионный анализ.

Пусть на количественный нормально распределенный признак ξ воздействует фактор F, который имеет m постоянных уровней $F_1, F_2, ..., F_m$. Одновременно будем рассматривать пример об исследовании влияния технологии обработки почвы на урожайность. Задача, которую предстоит решить, ставится следующим образом: выяснить, влияет выбор технологии обработки почвы на урожайность культуры или нет. Выбор технологии естественно назвать фактором, если m – полное число применяемых технологий, то каждую отдельную технологию F_i, $i=\overline{1,m}$, называют ***уровнем фактора***. Пусть на i-м уровне проведено n_i наблюдений, в результате которых получено $n=\sum_{i=1}^{m} n_i$ значений x_{ij} признака ξ, i – номер уровня фактора, $i=\overline{1,m}$, j – номер испытания на этом уровне, $j=\overline{1,n_i}$. В рассматриваемом примере x_{ij} – урожайность культуры, полученная в j-м году при использовании i-й технологии, $j=\overline{1,n_i}$, где

n_i – число лет, в течение которых производились наблюдения за применением технологии F_i. Сведем все данные в таблицу.

Уровни фактора	Номер испытания								Гр. средн.
	1	2	...	n_1	...	n_2	...	n_m	
F_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n_1}					$\overline{x}_{гр1}$
F_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n_1}	...	x_{2n_2}			$\overline{x}_{гр2}$
...	...	...	...	...	...	...	...		
F_m	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{mn_1}	...	x_{mn_2}	...	x_{mn_m}	$\overline{x}_{грm}$

Пусть $a = M\xi$ – среднее значение случайной величины ξ. Математическую модель однофакторного дисперсионного анализа можно представить в виде

$$x_{ij} = a + \alpha_i + \varepsilon_{ij},$$

где α_i – вклад в величину x_{ij}, обусловленный действием i-го уровня фактора F (урожайность вызванная применением технологии F_i), ε_{ij} – случайная компонента, или возмущение, вызванное влиянием неконтролируемых факторов, то есть вариацией переменной внутри отдельного уровня.

Относительно случайных величин ε_{ij} сделаем предположения:

1. $M(\varepsilon_{ij}) = 0, \ \forall\ i, j$ – систематическая ошибка отсутствует.

2. Случайные ошибки эксперимента ε_{ij} независимы между собой и имеют одинаковую дисперсию, следовательно

$$M(\varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{lk}) = \begin{cases} \sigma^2, \ i = l, \ j = k; \\ 0, \ i \neq l \text{ или } j \neq k. \end{cases}$$

3. Случайные ошибки эксперимента имеют нормальный закон распределения

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0; \sigma^2).$$

С учетом принятых допущений

$$x_{ij} \sim N(a + \alpha_i; \sigma^2).$$

Таким образом, действие фактора F проявляется в том, что для каждого его уровня i, $i = \overline{1, m}$, результаты наблюдений над случайной величиной ξ можно рассматривать как случайную выборку $x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in_i}$ объема n_i из генеральной совокупности случайной величины ξ_i, $i=\overline{1,m}$, причем $\xi_i \sim N(a+\alpha_i; \sigma^2)$.

Отсюда следует, что статистическая гипотеза H_0, предполагающая отсутствие влияния фактора F на случайную величину ξ означает, что $a_k = a + \alpha_k = a$, или $\alpha_k = 0,\ k=\overline{1,m}.$

Итак, задача проверки влияния фактора F на признак ξ по результатам эксперимента сводится к следующей формализованной постановке, если принята модель наблюдений $x_{ij} = a + \alpha_k + \varepsilon_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n_i}$, и сформулированные выше предположения о случайных ошибках эксперимента.

Пусть $\xi_1, \xi_2, ... \xi_m$ – независимые случайные величины и $\xi_i \sim N(a_i; \sigma^2)$, $i=\overline{1,m}$. Пусть для каждого i, $i=\overline{1,m}$, дана случайная выборка $x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in_i}$ из генеральной совокупности случайной величины ξ_i. Требуется по этим данным проверить на заданном уровне значимости α гипотезу $H_0: a_1 = a_2 = ... = a_m = a$ (или, что то же самое, $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$, если $a_k = a + \alpha_k$, $k=\overline{1,m}$).

Для нашего примера каждая случайная величина ξ_i, $i=\overline{1,m}$, характеризует урожайность культуры при использовании i-й технологии обработки почвы. Отсутствие влияния фактора F, то есть выполнение гипотезы H_0, означает, что при использовании любой технологии обработки почвы урожайность одна и та же. Если гипотеза H_0 неверна, то выбор технологии влияет на урожайность культуры.

Проверка гипотезы основана на сопоставлении двух оценок неизвестной дисперсии σ^2. Обозначим

$\bar{x}_{\text{гр}i} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, – групповые средние и

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$ – общую выборочную среднюю.

Несмещенной оценкой для неизвестной дисперсии σ^2 является, как известно, сумма квадратов $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x})^2$, деленная на $n-1$, где $n=\sum_{i=1}^{m} n_i$ – количество всех наблюдений (если на каждом уровне проведено одинаковое количество наблюдений $n_1 = n_2 = ... = n_m = n'$, то $n = n' \cdot m$). Основная идея дисперсионного анализа заключается в разбиении этой суммы квадратов отклонений на несколько компонент, каждая из которых соответствует предполагаемой причине изменения средних значений $\bar{x}_{\text{гр}i}$.

Справедливо тождество:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x})^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(\overline{x}_{гpi}-\overline{x})^2+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x}_{гpi})^2,$$

или

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x})^2=\sum_{i=1}^{m}n_i(\overline{x}_{гpi}-\overline{x})^2+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x}_{гpi})^2.$$

В результате получим следующее тождество:

$$S_{общ}=S_{факт}+S_{ост},$$

где

$S_{общ}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x})^2$ – ***общая*** или ***полная*** сумма квадратов отклонений;

$S_{факт}=\sum_{i=1}^{m}n_i(\overline{x}_{гpi}-\overline{x})^2$ – сумма квадратов отклонений групповых средних от общей средней или ***межгрупповая*** (***факторная***) сумма квадратов отклонений;

$S_{ост}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x}_{гpi})^2$ – сумма квадратов отклонений наблюдений от групповых средних или ***внутригрупповая*** (***остаточная***) сумма квадратов отклонений.

В разложении $S_{общ}=S_{факт}+S_{ост}$ заключена основная идея дисперсионного анализа. Применительно к рассматриваемому примеру данное равенство показывает, что общая вариация показателя урожайности культуры, измеренная суммой $S_{общ}$, складывается из двух компонент – $S_{факт}$ и $S_{ост}$, характеризующих изменчивость показателя урожайности между технологиями ($S_{факт}$) и изменчивость «внутри» технологи ($S_{ост}$).

В дисперсионном анализе анализируются не сами суммы квадратов отклонений, а так называемые *средние квадраты*, являющиеся несмещенными оценками соответствующих дисперсий, которые получаются делением сумм квадратов отклонений на соответствующее число степеней свободы (см. «исправленная» выборочная дисперсия). Число степеней свободы определяется как общее число наблюдений минус число связывающих их уравнений. Поэтому несмещенной оценкой ***межгрупповой дисперсии*** является

$$s^2_{факт}=\frac{S_{факт}}{m-1},$$

так как при расчете $S_{факт}$ используются m групповых средних, связанных между собой одним уравнением. Несмещенной оценкой ***внутригрупповой дисперсии*** является

$$s^2_{ост}=\frac{S_{ост}}{n-m},$$

ибо при расчете $S_{ост}$ используются все n наблюдений, связанных между собой m уравнениями $\bar{x}_{грi}=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}$. В случае однофакторного комплекса $s^2_{факт}$ и $s^2_{ост}$ являются несмещенными и независимыми оценками дисперсии σ^2.

Сравним обе оценки $s^2_{факт}$ и $s^2_{ост}$. Если гипотеза H_0 верна, то ***дисперсионное отношение*** (статистика)

$$F=\frac{s^2_{факт}}{s^2_{ост}}$$

имеет распределение Фишера с $m-1$ и $n-m$ степенями свободы. Следовательно, проверка нулевой гипотезы свелась к проверке существенности различия несмещенных выборочных оценок $s^2_{факт}$ и $s^2_{ост}$ дисперсии σ^2.

Гипотеза H_0 отвергается, если фактически вычисленное значение статистики F больше критического $F_{кр}(\alpha;m-1;n-m)$ и принимается, если $F<F_{кр}(\alpha;m-1;n-m)$.

Применительно к рассматриваемому примеру опровержение гипотезы H_0 означает наличие существенных различий в урожайности культуры в зависимости от выбранной технологии.

Если установлено, что фактор F влияет на результативный признак, то возникает вопрос о степени этого влияния. Для измерения степени влияния фактора на результативный признак используют ***выборочный коэффициент детерминации***, равный

$$R^2=\frac{S_{факт}}{S_{общ}}.$$

Коэффициент детерминации показывает, какая часть общей дисперсии результативного признака объясняется зависимостью признака ξ от фактора F. Тогда $1-R^2$ – доля дисперсии результативного признака, обусловленная случайными факторами. Очевидны следующие свойства коэффициента детерминации:

1) $0\le R^2\le 1$;

2) чем ближе значение R^2 к единице, тем больше степень влияния фактора F на признак ξ.

Замечание. Для вычисления сумм квадратов в случае $n_1=n_2=...=n_m=n'$ часто бывает удобно использовать следующие формулы:

$$S_{факт}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n'}x_{ij}\right)^2}{n'}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n'}x_{ij}\right)^2}{n'm},$$

$$S_{ост}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n'}x_{ij}^{2}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n'}x_{ij}\right)^{2}}{n'},$$

$$S_{общ}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n'}x_{ij}^{2}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n'}x_{ij}\right)^{2}}{n'm}.$$

Пример 1. В таблице приведены данные об урожайности сельскохозяйственной культуры за 6 лет при различных технологиях обработки почвы.

Номер технологии	Годы					
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й
1	140	141	140	141	142	145
2	150	149	150	147		
3	147	147	145	150	150	
4	144	147	142	146		

Выяснить на уровне значимости $\alpha=0{,}05$, зависит ли урожайность сельскохозяйственной культуры от технологии обработки почвы. Установите степень влияния технологии обработки почвы на урожайность.

Решение. Рассчитаем групповые средние и общую среднюю.

Номер технологии	Годы						n_i	$\bar{x}_{грi}$
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й		
1	140	141	140	141	142	145	6	141,5
2	150	149	150	147			4	149
3	147	147	145	150	150		5	147,8
4	144	147	142	146			4	144,75
$\sum$							$n=$ 19	

$$\bar{x}=\frac{140+141+140+\ldots+147+142+146}{19}=145{,}4211.$$

Вычислим суммы квадратов отклонений:

$$S_{факт}=\sum_{i=1}^{m}n_i(\bar{x}_{грi}-\bar{x})^2=6(141{,}5-145{,}4211)^2+4(149-145{,}4211)^2+$$
$$+5(147{,}8-145{,}4211)^2+4(144{,}75-145{,}4211)^2=173{,}582;$$

$$S_{ост} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \overline{x}_{гpi})^2 = (140-141{,}5)^2 + \ldots + (145-141{,}5)^2 +$$

$$+ (150-149)^2 + \ldots + (147-149)^2 +$$

$$+ (147-147{,}8)^2 + \ldots + (150-147{,}8)^2 +$$

$$+ (144-144{,}75)^2 + \ldots + (146-144{,}75)^2 = 57{,}050;$$

$$S_{общ} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \overline{x})^2 = (140-145{,}4211)^2 + \ldots + (145-145{,}4211)^2 +$$

$$+ (150-145{,}4211)^2 + \ldots + (147-145{,}4211)^2 +$$

$$+ (147-145{,}4211)^2 + \ldots + (150-145{,}4211)^2 +$$

$$+ (144-145{,}4211)^2 + \ldots + (146-145{,}4211)^2 = 230{,}632.$$

Результаты сведем в таблицу

Компоненты дисперсии	Суммы квадратов	Число степеней свободы	Средние квадраты	F	R^2
Межгрупповая	173,582	$m-1$=3	$s^2_{факт}$ =57,861	15,215	0,753
Внутригрупповая	57,050	$n-m$=15	$s^2_{ост}$ =3,803		
Общая	230,632	$n-1$=18			

Сделаем выводы. По таблице критических точек распределения Фишера (приложение 8) определим $F_{кр}(0{,}05;3;15) = 3{,}29$. Так как $F = 15{,}215 > F_{кр}(0{,}05;3;15) = 3{,}29$, то нулевая гипотеза отвергается, то есть на уровне значимости $0{,}05$ (с надежностью $0{,}95$, или $95\,\%$) выбор технологии существенно влияет на урожайность. Анализируя значение коэффициента детерминации, можем утверждать, что $75{,}3\,\%$ общего изменения урожайности обусловлены технологией и лишь $24{,}7\,\%$ другими случайными составляющими.

Индивидуальные практические задания

Задание. Для заданного уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ установите влияние типа используемой рекламы на объем продаж товара. Определите степень влияния типа используемой рекламы на объем продаж товара.

1.

	Годы					
Тип рекламы	1991	1992	1993	1994	1995	1996
A	215	224	222	221	206	207
B	215	222	207	214	224	217
C	222	237	221	233	229	232
D	242	242	238	250	239	

2.

	Годы					
Тип рекламы	1992	1993	1994	1995	1996	1997
A	207,33	221,83	241,34	223,13	221,83	221,60
B	239,27	216,28	220,53	207,15	209,76	235,13
C	217,80	222,71	225,32	193,85	216,37	
D	256,51	243,92	234,56	244,94		

3.

	Годы					
Тип рекламы	1991	1992	1993	1994	1995	1996
A	232,35	230,84	225,14	216,20	240,17	222,34
B	225,61	222,26	220,40	235,20	218,61	215,31
C	248,46	229,51	214,23	215,34	235,54	
D	224,88	231,90	238,82	243,59		

4.

	Годы					
Тип рекламы	1993	1994	1995	1996	1997	1998
A	224 85	238 64	222 86	221 81	231 95	215 19
B	215 31	205 01	223 35	189 37	224 08	224 87
C	232 26	240 63	226 25	215 57	233 51	
D	247 09	238 20	238 91	235 53		

5.

	Годы					
Тип рекламы	1992	1993	1994	1995	1996	1997
A	215,19	224,97	235,58	211,15	222,19	217,20
B	213,61	236,47	238,55	212,78	224,66	229,00
C	212,35	214,91	221,44	227,28	230,34	
D	215,42	208,40	227,59	229,52		

6.

	Годы					
Тип рекламы	1991	1992	1993	1994	1995	1996
A	221,82	233,26	225,66	225,59	228,08	213,07
B	205,38	226,84	218,96	216,52	223,42	234,16
C	248,91	221,06	220,78	251,27	219,37	
D	244,76	239,35	233,18	243,94		

7.

	Годы					
Тип рекламы	1990	1991	1992	1993	1994	1995
A	228,08	213,07	201,07	232,94	235,75	229,09
B	223,42	234,16	205,96	234,04	231,84	240,47
C	219,37	217,77	218,48	234,35	232,74	
D	227,00	225,29	243,25	240,81		

8.

	Годы					
Тип рекламы	1991	1992	1993	1994	1995	1996
A	235,75	229,09	215,30	220,50	248,46	218,27
B	231,84	240,47	225,63	214,86	229,73	243,61
C	232,74	225,62	252,79	244,56	234,89	
D	241,19	225,51	248,01	236,42		

9.

	Годы					
Тип рекламы	1992	1993	1994	1995	1996	1997
A	220 15	235 60	234 69	213 86	242 61	229 80
B	201 31	226 23	208 01	212 02	219 59	221 27
C	218 54	219 72	236 49	230 72	214 55	
D	242 49	230 79	252 28	258 23		

10.

	Годы					
Тип рекламы	1993	1994	1995	1996	1997	1998
A	242,61	229,80	218,36	223,89	236,38	235,37
B	203,74	242,10	220,57	229,62	224,19	210,96
C	220,63	210,11	223,19	224,36	234,87	
D	234,83	243,85	244,86	244,71		

11.

	Годы					
Тип рекламы	1992	1993	1994	1995	1996	1997
A	224,19	210,96	233,70	220,25	215,96	205,11
B	212,19	229,79	235,49	220,67	212,68	226,58
C	234,87	242,22	237,09	223,85	224,41	
D	243,65	233,64	244,29	249,91		

12.

	Годы					
Тип рекламы	1991	1992	1993	1994	1995	1996
A	232,63	220,86	216,70	216,35	204,55	220,24
B	205,38	207,78	228,74	232,09	219,36	228,82
C	237,68	227,69	224,84	233,95	218,23	
D	243,08	241,23	243,86	219,11		

13.

	Годы					
Тип рекламы	1990	1991	1992	1993	1994	1995
A	215,96	205,11	232,63	220,86	216,70	216,35
B	219,11	230,07	224,70	213,32	227,08	228,29
C	227,69	224,84	233,95	218,23	221,92	
D	241,23	243,86	219,11	240,53		

14.

	Годы					
Тип рекламы	1991	1992	1993	1994	1995	1996
A	230 07	224 70	213 32	227 08	228 29	219 54
B	229 79	235 49	220 67	212 68	226 58	215 63
C	242 22	237 09	223 85	224 41	234 01	
D	233 64	244 29	249 91	244 29		

15.

	Годы					
Тип рекламы	1992	1993	1994	1995	1996	1997
A	204,55	220,24	205,38	207,78	228,74	232,09
B	225,89	221,60	231,94	219,11	230,07	224,70
C	234,59	233,97	237,68	227,69	224,84	
D	250,22	246,63	243,08	241,23		

16.

	Годы					
Тип рекламы	1993	1994	1995	1996	1997	1998
A	219,36	228,82	241,84	225,77	232,40	211,66
B	213,32	227,08	228,29	219,54	220,41	216,58
C	218,23	221,92	229,96	235,59	231,93	229,57
D	240,53	234,71	241,64	223,11	249,54	230,98

17.

	Годы					
Тип рекламы	1992	1993	1994	1995	1996	1997
A	214,64	214,67	222,74	227,60	212,36	242,42
B	234,41	216,47	224,85	215,05	217,21	233,43
C	221,09	229,87	238,87	225,70	228,47	
D	243,94	239,63	244,09	265,25	234,05	

18.

	Годы					
Тип рекламы	1991	1992	1993	1994	1995	1996
A	242,42	217,98	212,19	229,33	227,39	214,93
B	225,77	232,40	211,66	214,64	214,67	222,74
C	217,21	233,43	216,77	235,69	219,77	
D	213,89	219,45	241,32	225,38		

19.

	Годы					
Тип рекламы	1990	1991	1992	1993	1994	1995
A	239,52	231,84	225,21	233,43	240,23	222,63
B	231,64	229,17	224,81	221,88	231,19	214,54
C	234,14	236,16	234,24	236,58		
D	241,26	247,46	239,55	240,08		

20.

	Годы					
Тип рекламы	1991	1992	1993	1994	1995	1996
A	240,23	222,63	208,66	219,18	232,91	220,15
B	231,19	214,54	221,37	225,85	237,58	230,13
C	237,31	246,79	229,22	227,59	230,99	
D	261,66	241,93	232,66	229,58		

21.

	Годы					
Тип рекламы	1993	1994	1995	1996	1997	1998
A	221	241	223	221	229	213
B	222	225	194	216	227	222
C	224	240	216	227	237	
D	243	236	244	221		

22.

	Годы					
Тип рекламы	1992	1993	1994	1995	1996	1997
A	221	213	239	217	220	204
B	209	235	232	230	224	219
C	228	237	237	248	229	
D	228	237	237	246	221	

23.

	Годы					
Тип рекламы	1991	1992	1993	1994	1995	1996
A	2251	2169	2401	2223	2248	2387
B	2222	2203	2351	2186	2153	2054
C	2295	2140	2153	2355	2322	
D	2319	2336	2435	2560		

24.

	Годы					
Тип рекламы	1992	1993	1994	1995	1996	1997
A	21,78	22,79	22,45	22,56	20,05	20,94
B	21,21	27,05	20,64	21,79	22,30	21,19
C	22,77	23,13	22,17	23,27	22,21	
D	24,80	24,62	23,02	25,19		

25.

	Годы					
Тип рекламы	1990	1991	1992	1993	1994	1996
A	1075	1124	1177	1055	1110	1086
B	1124	1128	1061	1088	1041	1036
C	1190	1131	1185	1126	1139	1108
D	1133	1258	1258	1224	1190	1293

26.

	Годы					
Тип рекламы	1993	1994	1995	1996	1997	1998
A	219,36	228,82	241,84	225,77	232,40	211,66
B	213,32	227,08	228,29	219,54	220,41	216,58
C	218,23	221,92	229,96	235,59	231,93	229,57
D	240,53	234,71	241,64	223,11		

27.

	Годы					
Тип рекламы	1992	1993	1994	1995	1996	1997
A	152,3	152,5	152,8	152,6	152,4	152,4
B	153,4	153,1	153,0	153,2	153,6	153,8
C	152,4	152,9	153,0	153,1	153,2	153,4
D	156,7	157,0	158,2	157,2	158,1	158,2

28.

	Годы					
Тип рекламы	1991	1992	1993	1994	1995	1996
A	345,5	346,5	347,2	347,9	348,1	348,8
B	345,9	346,1	347,2	347,8	348,5	348,7
C	400,1	400,2	400,3	400,6	400,9	401,1
D	365,5	366,1	366,2	366,7	366,8	

29.

	Годы					
Тип рекламы	1990	1991	1992	1993	1994	1995
A	250,0	245,1	240,2	237,2	230,9	228,6
B	250,1	246,2	240,5	236,4	231,2	230,0
C	240,1	245,2	246,3	247,1	248,2	248,9
D	250,3	248,2	247,1	246,2		

30.

	Годы					
Тип рекламы	1991	1992	1993	1994	1995	1996
A	140,23	122,63	108,66	119,18	132,91	120,15
B	131,19	114,54	121,37	125,85	137,58	130,13
C	137,31	146,79	129,22	127,59	130,99	133,55
D	161,66	141,93	132,66	129,58		

Литература

1. Теория вероятностей и математическая статистика: пособие / М.А. Маталыцкий, Т.В. Русилко. – 2-е изд., перераб. и доп. – Гродно: ГрГУ, 2009. – 219 с.