Гродзенскі дзяржаўны універсітэт імя Янкі Купалы
Кафедра агульнай фізікі
Лабараторыя механікі
ауд. 408, 409

Лабараторная работа №8

ВЫЗНАЧЭННЕ МОМАНТУ ІНЕРЦЫІ ДЫСКА

для студэнтаў спецыяльнасці “ФІЗІКА”

Гродна, 2010

ВЫЗНАЧЭННЕ МОМАНТУ ІНЕРЦЫІ ДЫСКА

Мэта работы:

Знаёмства з некаторымі метадамі знаходжання моманту інерцыі цвёрдага цела. Доследнае вызначэнне моманту інерцыі дыска дынамічным метадам і метадам ваганняў.

Прылады і абсталяванне:

Дыск, які мае магчымасць варочацца адносна гарызантальнай восі, якая праходзіць праз яго цэнтр мас, нітка з грузам, груз з вінтом, лінейка, штангенцыркуль, секундамер, тэхнічныя вагі.

Тэарэтычныя асновы

Інертнасць – “супрацiўленне” цела пры спробах прывесці яго ў рух або змяніць велічыню або напрамак хуткасці. У розных целаў гэтая ўласцівасць праяўляецца ў рознай ступені. Так, напрыклад, надаць аднолькавае паскарэнне цагліне значна цяжэй, чым тэніснаму мячыку.

Для апісання інертных уласцівасцей целаў пры пастпальным руху выкарыстоўваецца фізічная велічыня *маса* (дакладней, інертная маса). Для апісання інертных уласцівасцей целаў пры вярчальным руху разглядаецца фізічная велічыня *момант інерцыі*. Такім чынам, *абедзве велічыні з’яўляюцца мерамі інертнасці* адпаведна пры пастпальным і вярчальным руху.

Падсумоўваючы, можна адзначыць: больш важкае (з большай масай) цела з’яўляецца і больш інертным пры пастпальным руху. Аналагічна, цела з большым момантам інерцыі з’яўляецца больш інертным пры вярчальным руху.

Момантам інерцыі J матэрыяльнага пункта (часцінкі) адносна восі вярчэння называецца фізічная велічыня, роўная здабытку масы часцінкі m на квадрат адлегласці r гэтай часцінкі ад восі вярчэння:

$$J = mr^2 . \qquad (1)$$

Для сістэмы матэрыяльных пунктаў (часцінак) момант інерцыі вызначаецца выразам:

$$J = \sum m_i r_i^2 \ , \qquad (2)$$

дзе m_i і r_i – маса і адлегласць i-й часцінкі ад восі вярчэння.

Каб вылічыць момант інерцыі цела адвольнай формы, неабходна спачатку ўмоўна разбіць цела на даволі малыя элементы (матэрыяльныя пункты). Затым знайсці здабытак масы кожнага элемента на квадрат яго адлегласці ад восі вярчэння і падсумаваць усе здабыткі. Такім чынам, момант інерцыі суцэльнага цела вызначаецца выразам:

$$J = \int r^2 dm \, , \qquad (3)$$

дзе dm – маса элементарна малой часцінкі цела, r – адлегласць часцінкі ад восі вярчэння.

З улікам шчыльнасці цела маса $dm = \rho dV$ (dV – элементарны аб'ём, займаемы матэрыяльным пунктам), тады атрымаем:

$$J = \int \rho r^2 dV \, .$$

Даволі лёгка можна вызначыць момант інерцыі, калі цела мае правільную форму і вось вярчэння праходзіць праз цэнтр мас. Для вызначэння моманту інерцыі адносна любой восі карыстаюцца *тэарэмай Гюйгенса-Штэйнера*. Згодна з гэтай тэарэмай момант інерцыі J цела адносна восі, якая не праходзіць праз цэнтр мас, роўны суме моманту інерцыі J_0 адносна паралельнай ёй восі, якая праходзіць праз цэнтр мас, і здабытку масы цела на квадрат адлегласці d паміж восямі:

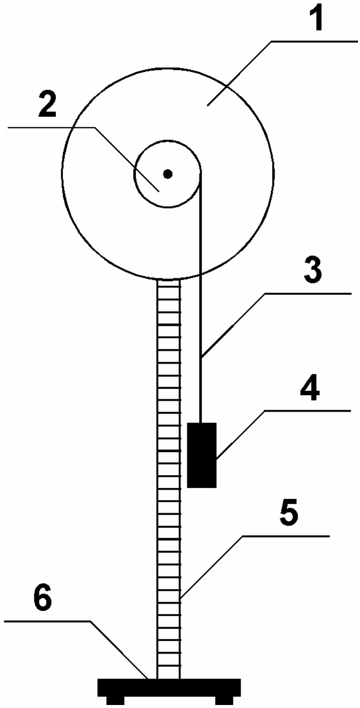
$$J = J_0 + md^2 \, . \qquad (4)$$

Для вызначэння момантаў інерцыі цвёрдых целаў адвольнай формы карыстаюцца рознымі доследнымі метадамі. Прыкладамі такіх метадаў з'яўляюцца дынамічны метад і метад ваганняў.

Практыкаванне 1
ВЫЗНАЧЭННЕ МОМАНТУ ІНЕРЦЫІ ДЫСКА ДЫНАМІЧНЫМ МЕТАДАМ

Доследная прылада:

Прылада для вызначэння моманту інерцыі дыска (малюнак 1) складаецца з дыска 1, які можа круціцца з малым супраціўленнем вакол гарызантальнай восі. Вось праходзіць праз цэнтр дыска, таму дыск знаходзіцца ў стане абыякавай раўнавагі. На восі ўмацаваны шкіў 2 з двума прыступкамі розных радыусаў, на які наматана нітка 3.



Мал. 1. Схема прылады для вызначэння моманту інерцыі дыска дынамічным метадам.

Да яе канца прывязаны груз 4, масу якога можна змяняць колькасцю падбіраемых даважкаў. Адлегласць, якую праходзіць груз падчас падзення да ўдару аб суцэльную платформу 6, вызначаецца з выкарыстаннем лінейкі 5.

Тэорыя метаду

Калі груз масы m падняць на вышыню h, то сістэма атрымае патэнцыяльную энергію mgh. Пры падзенні грузу яго патэнцыяльная энергія ператвараецца ў кінетычную энергію паступальнага руху грузу mgh і кінетычную энергію вярчэння дыска вакол восі $\frac{J\omega^2}{2}$. Па закону захавання энергіі (трэнне і супраціўленне паветра не ўлічваем) можна запісаць:

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \tag{5}$$

дзе J – момант інерцыі дыска разам з валам, υ і ω – лінейная хуткасць грузу і вуглавая хуткасць дыска ў момант удару грузу аб суцэльную платформу.
Хуткасць υ паступальнага руху грузу роўна лінейнай скорасці пунктаў, якія ляжаць на паверхні шківа, таму:

$$\upsilon = \omega r, \tag{6}$$

дзе r – радыус прыступкі шківа. Груз рухаецца раўнапаскорана без пачатковай хуткасці, таму:

$$\upsilon = at, \tag{7}$$

$$h = \frac{at^2}{2}. \tag{8}$$

З выразу (5) з улікам (6), (7), (8) атрымаем канчатковы выраз для разліку моманту інерцыі дыска:

$$J = mr^2\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right), \tag{9}$$

дзе t – час падзення грузу, g – паскарэнне свабоднага падзення.

Парадак выканання работы:

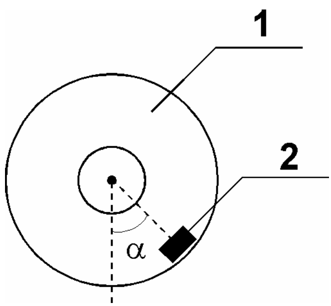
1. Падвесьце груз масы m на нітку, вярчэннем дыска падніміце груз на вышыню h (не меншую за 1,0 м) адносна суцэльнай платформы.
2. Доследным шляхам сінхранізуйце запуск і прыпыненне секундамера з пачаткам і заканчэннем руху грузу.
3. Вымерайце для дадзенай масы грузу час яго падзення не меней за тры разы. Знайдзіце сярэдняе значэнне часу.
4. Штангенцыркулем ажыццявіце вымярэнне радыуса (дыяметра) выкарыстоўваемага шківа з дакладнасцю да міліметра.

5. Пераматаўшы нітку на шкіў іншага радыуса, для той жа адлегласці падзення таксама вызначце сярэдняе значэнне часу падзення з не меней, чым трох вымярэнняў.
6. Выберыце іншую вышыню падзення, змяніце масу грузу і для такіх умоваў правядзіце вымярэнні аналагічна пп. 1–5.
6. Момант інерцыі дыска разлічыце для кожнай серыі доследаў, выкарыстоўваючы выраз (9).
7. Ацаніце хібнасці вымярэнняў. Зрабіце высновы.

Практыкаванне 2
ВЫЗНАЧЭННЕ МОМАНТУ ІНЕРЦЫІ ДЫСКА МЕТАДАМ ВАГАННЯЎ

Доследная прылада:

Для вызначэння моманту інерцыі дыска метадам ваганняў выкарыстоўваецца дыск 1 (малюнак 2), што і ў першым практыкаванні. Да дыска на дзвюх розных адлегласцях можна замацаваць металічны цыліндр 2 з дапамогай вінта.



Мал. 2. Схема прылады для вызначэння моманту інерцыі дыска метадам ваганняў.

Тэорыя метада

Калі да дыска на некаторай адлегласці d ад восі вярчэння замацаваць цыліндр (малюнак 2), то абыякавая раўнавага сістэмы зменіцца на ўстойлівую. Дыск, выведзены са становішча раўнавагі, будзе выконваць ваганні з перыядам T. Пры малых амплітудах ($\alpha \le 10°$) ваганні будуць гарманічнымі:

$$\varphi = \alpha \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \tag{10}$$

дзе φ – вуглавы зрух сістэмы ў любы момант часу t; α – вуглавая амплітуда; $\frac{2\pi t}{T}$ – фаза ваганняў (пачатковая фаза ваганняў роўна 0). Калі прадыферэнцыраваць выраз (10) па часе, то знойдзем вуглавую скорасць:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T}\alpha \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right). \tag{11}$$

Калі сістэма праходзіць стан раўнавагі, яе скорасць максімальная і роўная $\omega_{\max} = \frac{2\pi\alpha}{T}$. Таму максімальная кінетычная энергія сістэмы вызначыцца выразам:

$$E_k = \frac{J + J_1}{2}\left(\frac{2\pi\alpha}{T}\right)^2, \tag{12}$$

дзе J і J_1 – моманты інерцыі дыска і цыліндра адносна восі вярчэння.

Пры максімальным адхіленні ад стану раўнавагі патэнцыяльная энергія сістэмы $E_p = mgh$, дзе h – максімальная вышыня падняцця цыліндра. З малюнка 2 вынікае, што гэтая вышыня звязана з косінусам вугла адхілення і адлегласцю цыліндра ад восі вярчэння:

$$h = d(1 - \cos\alpha) = 2d\sin^2(\alpha/2). \tag{13}$$

Пры малых амплітудах $\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2$, таму выраз для патэнцыяльнай энергіі запішацца ў канчатковым выглядзе:

$$E_p = \frac{mgd\alpha^2}{2}. \tag{14}$$

Калі трэнне і супраціўленне паветра не ўлічваць, то па закону захавання механічнай энергіі вынікае, што патэнцыяльная энергія сістэмы ў першапачатковы момант часу будзе роўны кінетычнай энергіі цыліндра і дыска падчас праходжання становішча раўнавагі ($E_k = E_p$), а гэта значыць, што з улікам выразаў (12) і (14) закон набудзе выгляд:

$$\frac{J + J_1}{2}\left(\frac{2\pi\alpha}{T}\right)^2 = \frac{mgd\alpha^2}{2}, \tag{15}$$

адкуль вынікае канчатковы выраз для разліку моманту інерцыі дыска:

$$J = \frac{mgdT^2}{4\pi^2} - J_1. \tag{16}$$

Момант інерцыі цыліндра J_1 адносна восі вярчэння сістэмы можна знайсці з дапамогай тэарэмы Гюйгенса-Штэйнера:

$$J_1 = m\frac{3r_1^2 + h^2}{12} + md^2, \tag{17}$$

дзе m – маса, r_1 і h – радыус асновы і вышыня цыліндра.

Парадак выканання работы:

1. Замацуйце цыліндр на некаторай адлегласці ад восі вярчэння, адхіліце яго ад стану раўнавагі на невялікі вугал (да $10°$).
2. Секундамерам вызначце час 5–6 поўных ваганняў. Разлічыце перыяд ваганняў.
3. Вызначце лінейныя памеры цыліндра і адлегласць ад яго цэнтра мас да восі вярчэння. Пры дапамозе тэхнічных вагаў вызначце масу цыліндра з вінтом.
4. Па выразе (17) разлічыце момант інерцыі цыліндра (без уліку моманту інерцыі вінта).
5. Па выразе (16) знайдзіце момант інерцыі дыска.
6. Замацуйце цыліндр на іншай адлегласці ад восі вярчэння і паўтарыце пп. 1-2, 4-5.
7. Ацаніце хібнасці вымярэнняў. Зрабіце высновы.

Прыклад апрацоўкі доследных дадзеных у першым практыкаванні:

1. Разлічыце хібнасці прамых вымярэнняў: Хібнасці вызначэння масы груза Δm і ε_m, вышыні Δh і ε_h, дыяметра вала Δd і ε_d вызначаюцца як пры аднаразовым вымярэнні.
2. Вызначце абсалютную і адносную хібнасць прамога вымярэння часу Δt і ε_t.
3. Хібнасць акруглення таблічнай велічыні (паскарэння свабоднага падзення) неабходна прыняць $\Delta g = 0{,}005$ м/с^2, калі сама велічыня была ўзятая з дакладнасцю да сотых. Тады адносная хібнасць акруглення:

$$\varepsilon_g = \frac{\Delta g}{g} = \frac{0{,}005}{9{,}81} \approx 0{,}0005$$

3. Абсалютная хібнасць ускосных вымярэнняў моманту інерцыі вызначаецца па традыцыйнай схеме:

$$\Delta J = \sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial m}\Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial d}\Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial h}\Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial t}\Delta t\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial g}\Delta g\right)^2}\ ;$$

дзе

$$\frac{\partial J}{\partial m} = \frac{d^2}{4}\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right) = \frac{md^2}{4m}\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right) = \frac{J}{m};$$

$$\frac{\partial J}{\partial d} = \frac{2md}{4}\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right) = \frac{2md^2}{4d}\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right) = \frac{2J}{d};$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{2md^2 gt}{4 \cdot 2h} = \frac{2md^2}{4t}\frac{gt^2}{2h}\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right)\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right)^{-1} =$$

$$= \frac{2J}{t}\frac{gt^2}{2h}\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right)^{-1} \approx \frac{2J}{t},$$

(так як $\dfrac{gt^2}{2h} >> 1$).

Аналагічна атрымоўваем:

$$\frac{\partial J}{\partial h} = -\frac{J}{h};\ \frac{\partial J}{\partial g} = \frac{J}{g}.$$

Канчатковы выраз для разліку набудзе выгляд:

$$\Delta J = \sqrt{\left(\frac{J}{m}\Delta m\right)^2 + \left(\frac{2J}{d}\Delta d\right)^2 + \left(\frac{J}{h}\Delta h\right)^2 + \left(\frac{2J}{t}\Delta t\right)^2 + \left(\frac{J}{g}\Delta g\right)^2},$$

дзе $J = \bar{J}$ – сярэдняе значэнне моманту інерцыі, разлічанае з выкарыстаннем сярэдняга значэння часу.

Адносная хібнасць ускосных вымярэнняў моманту інерцыі будзе мець выгляд:

$$\varepsilon_J = \frac{\Delta J}{\bar{J}} = \sqrt{\varepsilon_m^2 + 4\varepsilon_d^2 + \varepsilon_h^2 + 4\varepsilon_t^2 + \varepsilon_g^2}.$$

Канчатковы адказ запішыце ў выглядзе

$J = \left(\bar{J} \pm \Delta J\right)$ кг·м^2.

Пытанні для самакантролю:

1. Што называюць момантам інерцыі матэрыяльнага пункту, сістэмы матэрыяльных пунктаў, суцэльнага цела?
2. Як вылічыць момант інерцыі сіметрычных целаў?
3. Як вызначыць момант інерцыі целаў складанай формы?
4. Як вызначаецца кінетычная энергія вярчальнага руху?
5. Запішаце выраз для кінетычнай энергіі цыліндра, які коціцца па гарызантальнай паверхні?
6. Сфармулюйце тэарэму Гюйгенса-Штэйнера.
7. Сфармулюйце закон захавання механічнай энергіі.