Math24.ru

Дифференциальные Уравнения

Главная

Математический анализ

Пределы и непрерывность
Дифференцирование
Интегрирование
Последовательности и ряды
Двойные интегралы
Тройные интегралы
Криволинейные интегралы
Поверхностные интегралы
Ряды Фурье

Дифференциальные уравнения

Уравнения 1-го порядка
Уравнения 2-го порядка
Уравнения *N*-го порядка
Системы уравнений

Формулы и таблицы

Метод собственных значений и собственных векторов

Понятие о собственных значениях и собственных векторах

Рассмотрим линейную однородную систему n дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которую можно записать в матричном виде как

$$X'(t) = AX(t),$$

где приняты следующие обозначения:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Будем искать нетривиальные решения однородной системы в виде

$$X(t) = \exp(\lambda t)V,$$

где $V \neq 0$ − постоянный n-мерный вектор, который мы определим позже.

Подставляя указанное пробное выражение для $X(t)$ в систему уравнений, получаем:

$$\lambda \exp(\lambda t)V = A\exp(\lambda t)V \quad \text{или} \quad AV = \lambda V.$$

Данное уравнение означает, что при действии линейного оператора A вектор V преобразуется в коллинеарный вектор λV. Вектор, обладающий таким свойством, называется *собственным вектором* линейного преобразования A, а число λ называется *собственным значением*.

Таким образом, мы приходим к выводу, что для того, чтобы векторная функция $X(t) = [\exp(\lambda t)V]$ являлась решением линейной однородной системы, необходимо и достаточно, чтобы число λ было собственным значением, а вектор V − соответствующим собственным вектором линейного преобразования A.

Как видно, решение линейной системы уравнений можно построить алгебраическим методом. Поэтому приведем далее некоторые необходимые сведения из линейной алгебры.

Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного преобразования

Вернемся к полученному выше матрично-векторному уравнению

$$AV = \lambda V.$$

Его можно переписать как

$$AV - \lambda V = 0,$$

где 0 означает нулевой вектор.

Вспомним, что произведение единичной матрицы I порядка n и n-мерного вектора V равно самому вектору:

$$IV = V.$$

Поэтому наше уравнение принимает вид:

$$AV - \lambda IV = 0 \quad \text{или} \quad \left(A - \lambda I\right)V = 0.$$

Из последнего соотношения следует, что определитель матрицы $A - \lambda I$ равен нулю:

$$\det\left(A - \lambda I\right) = 0.$$

Действительно, если предположить, что $det\,(A - \lambda I) \neq 0$, то у этой матрицы будет существовать обратная матрица $(A - \lambda I)^{-1}$. Умножая обе части уравнения слева на обратную матрицу $(A - \lambda I)^{-1}$, получим:

$$\left(A - \lambda I\right)^{-1}\left(A - \lambda I\right)V = \left(A - \lambda I\right)^{-1} \cdot 0, \quad \Rightarrow IV = 0, \quad \Rightarrow V = 0.$$

Это, однако, противоречит определению собственного вектора, который должен быть отличен от нуля. Следовательно, собственные значения λ должны удовлетворять уравнению

$$\det\left(A - \lambda I\right) = 0,$$

которое называется *характеристическим уравнением* линейного преобразования *A*. Многочлен в левой части уравнения называется *характеристическим многочленом* линейного преобразования (или линейного оператора) *A*. Множество всех собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ образует *спектр оператора A*.

Итак, первый шаг в нахождении решения системы линейных дифференциальных уравнений − это решение характеристического уравнения и нахождение всех собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Далее, подставляя каждое собственное значение λ_i в систему уравнений

$$\left(A - \lambda I\right)V = 0$$

и решая ее, находим *собственные векторы*, соответствующие данному собственному значению λ_i.

Заметим, что после подстановки собственных значений система становится *вырожденной*, т.е. некоторые уравнения будут одинаковыми. Это следует из того, что определитель такой системы равен нулю. В результате система уравнений будет иметь бесконечное множество решений, т.е. собственные векторы можно определить с точностью до постоянного коэффициента.

Фундаментальная система решений однородной линейной системы

Раскладывая определитель характеристического уравнения *n*-го порядка, мы получаем в общем случае следующее уравнение:

$$\left(-1\right)^n \left(\lambda - \lambda_1\right)^{k_1}\left(\lambda - \lambda_2\right)^{k_2} \ldots \left(\lambda - \lambda_m\right)^{k_m} = 0,$$

где

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n.$$

Здесь число k_i называется *алгебраической кратностью* собственного значения λ_i. Для каждого такого собственного значения существует s_i линейно независимых собственных векторов. Число s_i называется *геометрической кратностью* собственного значения λ_i. В курсе линейной алгебры доказывается, что геометрическая кратность s_i не превосходит *алгебраическую кратность* k_i, т.е. выполняется соотношение

$$0 < s_i \le k_i.$$

Оказывается, что вид общего решения однородной системы существенно зависит от кратности собственных значений. Рассмотрим возможные случаи, которые здесь возникают.

1. Случай $s_i = k_i = 1$. Все корни характеристического уравнения действительны и различны.

В данном простейшем случае каждому собственному значению λ_i один собственный вектор V_i. Эти векторы образуют множество линейно независимых решений

$$X_1 = \exp\left(\lambda_1 t\right)V_1, \quad X_2 = \exp\left(\lambda_2 t\right)V_2, \quad \ldots, \quad X_n = \exp\left(\lambda_n t\right)V_n,$$

т.е. *фундаментальную систему решений* однородной системы уравнений.

В силу линейной независимости собственных векторов соответствующий *вронскиан* будет отличен от нуля:

$$W_{[X_1,X_2,\ldots,X_n]}(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \exp(\lambda_1 t)V_{11} & \exp(\lambda_2 t)V_{12} & \ldots & \exp(\lambda_n t)V_{1n} \\ \exp(\lambda_1 t)V_{21} & \exp(\lambda_2 t)V_{22} & \ldots & \exp(\lambda_n t)V_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \exp(\lambda_1 t)V_{n1} & \exp(\lambda_2 t)V_{n2} & \ldots & \exp(\lambda_n t)V_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \exp\left[(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)t\right] \begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & \ldots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \ldots & V_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ V_{n1} & V_{n2} & \ldots & V_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Общее решение системы имеет следующий вид:

$$X(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) V_1 + C_2 \exp(\lambda_2 t) V_2 + \ldots + C_n \exp(\lambda_n t) V_n,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ − произвольные числа.

Характеристическое уравнение может иметь *комплексные корни*. Если при этом все коэффициенты матрицы A действительны, то комплексные корни появляются всегда в виде пар комплексно-сопряженных чисел. Предположим, что мы получили пару комплексных собственных значений $\lambda_i = \alpha \pm \beta i$. Данной паре комплексно-сопряженных чисел соответствует пара линейно-независимых действительных решения вида

$$X_1 = \mathrm{Re}\left(\exp\left[(\alpha + \beta i)t\right] V_i\right), \qquad X_2 = \mathrm{Im}\left(\exp\left[(\alpha + \beta i)t\right] V_i\right).$$

Таким образом, действительная и мнимая части комплексного решения образуют пару действительных решений.

2. Случай $s_i = k_i > 1$. Характеристическое уравнение имеет кратные корни, у которых геометрическая и алгебраическая кратности равны.

Этот случай практически не отличается от предыдущего. Несмотря на наличие собственных значений с кратностью более 1, мы можем определить n линейно независимых собственных векторов. В частности, любая *симметрическая матрица* с действительными числами, у которой есть n собственных чисел, будет иметь n собственных векторов. Аналогичным свойством обладают *унитарные матрицы*. В общем случае квадратная матрица размером n x n должна быть *диагонализируемой*, чтобы иметь n собственных векторов.

Общее решение системы n дифференциальных уравнений представляется в виде

$$X(t) = \underbrace{C_{11}\exp(\lambda_1 t)V_1^{(1)} + C_{12}\exp(\lambda_1 t)V_1^{(2)} + \ldots + C_{1k_1}\exp(\lambda_1 t)V_1^{(k_1)}}_{k_1 \text{ членов}} +$$

$$+ \underbrace{C_{21}\exp(\lambda_2 t)V_2^{(1)} + C_{22}\exp(\lambda_2 t)V_2^{(2)} + \ldots + C_{2k_2}\exp(\lambda_2 t)V_2^{(k_2)}}_{k_2 \text{ членов}} + \ldots$$

Здесь полное число слагаемых равно n, C_{ij} − произвольные числа.

3. Случай $s_i < k_i$. Характеристическое уравнение имеет кратные корни, у которых геометрическая кратность меньше алгебраической кратности.

В некоторых матрицах A (такие матрицы называются *дефектными*) собственное число λ_i кратностью k_i может иметь меньше, чем k_i линейно независимых собственных векторов. В этом случае вместо недостающих собственных векторов определяются так называемые *присоединенные векторы*, так чтобы в результате получить множество n линейно независимых векторов и построить соответствующую *фундаментальную систему решений*. Для этой цели обычно применяются два способа:

- Построение фундаментальной системы решений методом неопределенных коэффициентов;
- Построение фундаментальной системы решений с помощью жордановой формы.

Детальное описание этих способов решения приводится отдельно на указанных web-страницах. Ниже мы рассмотрим примеры систем дифференциальных уравнений, соответствующим случаям 1 и 2.

Пример 1

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -2x + 5y, \qquad \frac{dy}{dt} = x + 2y.$$

Решение.
Вычислим собственные значения λ_i матрицы A, составленной из коэффициентов заданных уравнений:

$$\det\left(A - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \left(-2-\lambda\right)\left(2-\lambda\right) - 5 = 0, \quad \Rightarrow \left(\lambda+2\right)\left(\lambda-2\right) - 5 = 0,$$
$$\Rightarrow \lambda^2 - 9 = 0, \quad \Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -3.$$

В данном примере характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня.

Найдем собственный вектор V_1, соответствующий собственному числу $\lambda_1 = 3$. Подставляя $\lambda_1 = 3$, получаем векторно-матричное уравнение для определения V_1:

$$\left(A - \lambda I\right)V_1 = 0.$$

Пусть собственный вектор V_1 имеет координаты $V_1 = (V_{11}, V_{21})^T$ (здесь индекс T означает операцию транспонирования). Тогда предыдущее уравнение можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} -2-3 & 5 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = 0.$$

После перемножения матриц получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} -5V_{11} + 5V_{21} = 0 \\ V_{11} - V_{21} = 0 \end{cases}.$$

Оба уравнения являются линейно зависимыми. Из второго уравнения находим соотношение между координатами собственного вектора: $V_{11} = V_{21}$. Полагаем $V_{21} = 1$. Следовательно, $V_{11} = 1$. Таким образом, собственный вектор V_1 имеет координаты $V_1 = (1,1)^T$.

Аналогично определяем 2-ой собственный вектор V_2, соответствующий $\lambda_2 = -3$. Пусть $V_2 = (V_{21}, V_{22})^T$. Тогда

$$\begin{pmatrix} -2+3 & 5 \\ 1 & 2+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = 0.$$

Получаем систему двух одинаковых уравнений:

$$\begin{cases} V_{21} + 5V_{22} = 0 \\ V_{21} + 5V_{22} = 0 \end{cases}.$$

Отсюда находим координаты собственного вектора V_2:

$$V_{21} = -5V_{22}, \quad V_{22} = 1, \quad V_{21} = -5.$$

Следовательно, $V_2 = (-5,1)^T$.

Таким образом, система уравнений имеет два различных собственных числа и два собственных вектора. Общее решение выражается формулой

$$X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \exp(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \exp(-3t) \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где C_1, C_2 − произвольные числа.

Пример 2

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x - 8y, \qquad \frac{dy}{dt} = 2x + y.$$

Решение.
Будем искать решение системы в виде

$$X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim \exp(\lambda t) V,$$

где λ − собственное значение матрицы A, составленной из коэффициентов уравнения, а V − собственный вектор этой матрицы. Решим характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -8 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow (1-\lambda)^2 + 16 = 0, \quad \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = -16,$$

$$\Rightarrow |\lambda - 1| = \pm 4i, \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm 4i.$$

Мы получили два собственных значения в виде пары комплексно-сопряженных чисел. Найдем собственный вектор V_1 для собственного значения $\lambda_1 = 1 + 4i$ из следующей системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1-(1+4i) & -8 \\ 2 & 1-(1+4i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -4i & -8 \\ 2 & -4i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \begin{cases} -4iV_{11} - 8V_{21} = 0 \\ 2V_{11} - 4iV_{21} = 0 \end{cases}.$$

Оба уравнения являются линейно зависимыми. Из второго уравнения получаем:

$$2V_{11} - 4iV_{21} = 0, \quad \Rightarrow V_{11} = 2iV_{21}, \quad \Rightarrow V_{21} = 1,\ V_{11} = 2i.$$

Итак, собственный вектор V_1 равен:

$$V_1 = \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, комплексному числу $\lambda_1 = 1 + 4i$ соответствует решение вида

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \exp(\lambda_1 t) V_1 = \exp\left[(1+4i)t\right] \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем экспоненциальную функцию по *формуле Эйлера*:

$$\exp\left[(1+4i)t\right] = \exp(t)\exp(4it) = \exp(t)\left[\cos(4t) + i\sin(4t)\right].$$

Решение $X_1(t)$ принимает вид:

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \exp(t)\left[\cos(4t) + i\sin(4t)\right] \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

или после перемножения

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(t)\left[\cos(4t) + i\sin(4t)\right]2i \\ \exp(t)\left[\cos(4t) + i\sin(4t)\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(t)\left[-2\sin(4t) + 2i\cos(4t)\right] \\ \exp(t)\left[\cos(4t) + i\sin(4t)\right] \end{pmatrix}.$$

В комплексном решении действительная и мнимая части являются линейно независимыми. Выделяя их, находим общее решение:

$$\operatorname{Re}\left[X_1(t)\right] = \begin{pmatrix} \exp(t)\left[-2\sin(4t)\right] \\ \exp(t)\cos(4t) \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im}\left[X_1(t)\right] = \begin{pmatrix} \exp(t)\left[2\cos(4t)\right] \\ \exp(t)\sin(4t) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, общее решение системы записывается в виде

$$X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\exp(t)\begin{pmatrix} -2\sin(4t) \\ \cos(4t) \end{pmatrix} + C_2\exp(t)\begin{pmatrix} 2\cos(4t) \\ \sin(4t) \end{pmatrix},$$

где C_1, C_2 − произвольные числа.

Пример 3

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = 3x, \quad \frac{dy}{dt} = 3y.$$

Решение.
Матрица данной системы имеет диагональный вид:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому сразу можно сказать, что собственные векторы равны

$$V_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Построим однако решение, следуя общему алгоритму. Вычислим собственные значения матрицы A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow (\lambda - 3)^2 = 0, \quad \Rightarrow \lambda = 3.$$

Матрица имеет единственное собственное значение с алгебраической кратностью 2. Если подставить найденное число $\lambda_1 = 3$ в систему уравнений для определения собственного вектора V, то получим вырожденный случай:

$$\begin{pmatrix} 3-3 & 0 \\ 0 & 3-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \begin{cases} 0\cdot V_{11} + 0\cdot V_{21} = 0 \\ 0\cdot V_{11} + 0\cdot V_{21} = 0 \end{cases}, \quad \Rightarrow 0\cdot V_{11} + 0\cdot V_{21} = 0.$$

Ясно, что для заданной матрицы A любой ненулевой вектор V будет являться собственным. Поэтому, в качестве базиса из собственных векторов удобно взять следующие два линейно независимых вектора:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что мы получили случай, когда собственное значение $\lambda_1 = 3$ имеет одинаковую алгебраическую и геометрическую кратность $k_1 = s_1 = 2$, что соответствует случаю 2 по нашей классификации.

Общее решение системы уравнений записывается в виде

$$X(t) = C_1\exp(3t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\exp(3t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 4

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y - 3z, \qquad \frac{dy}{dt} = -5x + y - 4z, \qquad \frac{dz}{dt} = -2y + 4z.$$

Решение.

Вычислим собственные значения матрицы A:

$$\det\left(A - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ -5 & 1-\lambda & -4 \\ 0 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладываем определитель по первому столбцу:

$$(1-\lambda)\left[(1-\lambda)(4-\lambda) - 8\right] + 5\left[2(4-\lambda) - \right]6 = 0, \quad \Rightarrow (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda - 4\right) + 5(-2\lambda + 2) = 0,$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda^2} - \underline{\underline{5\lambda}} - \overline{4} - \lambda^3 + \underline{5\lambda^2} + \underline{\underline{4\lambda}} - \underline{\underline{10\lambda}} + \overline{10} = 0, \quad \Rightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0.$$

Можно заметить, что одним из корней данного кубического уравнения будет число $\lambda = 1$. Тогда получаем

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda^2 + 5\lambda + 6\lambda - 6 = 0, \quad \Rightarrow \lambda^2(\lambda - 1) - 5\lambda(\lambda - 1) + 6(\lambda - 1) = 0, \quad \Rightarrow (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right) = 0.$$

Квадратное уравнение, в свою очередь, имеет корни $\lambda = 2,3$. Следовательно, матрица A имеет три различных действительных собственных числа:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

Теперь для каждого собственного числа определим собственный вектор.

Найдем вектор V_1 для числа $\lambda_1 = 1$, решив векторно-матричное уравнение

$$\left(A - \lambda_1 I\right)V_1 = 0.$$

Обозначая $V_1 = (V_{11}, V_{21}, V_{31})^T$, запишем это уравнение в виде

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 2 & -3 \\ -5 & 1-1 & -4 \\ 0 & -2 & 4-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -5 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix} = 0.$$

В результате имеем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 0 + 2V_{21} - 3V_{31} = 0 \\ -5V_{11} + 0 \; - 4V_{31} = 0 \\ 0 - 2V_{21} + 3V_{31} = 0 \end{cases}.$$

В этой системе первое и третье уравнения одинаковы, т.е. ранг матрицы равен 2. Оставим два независимых уравнения и примем V_{31} за свободную переменную. Получаем:

$$\begin{cases} 2V_{21} - 3V_{31} = 0 \\ 5V_{11} + 4V_{31} = 0 \end{cases}, \quad V_{31} = t, \quad \Rightarrow \begin{cases} 2V_{21} = 3t \\ 5V_{11} = -4t \end{cases}, \quad \Rightarrow \begin{cases} V_{21} = \dfrac{3}{2}t \\ V_{11} = -\dfrac{4}{5}t \end{cases}.$$

Итак, собственный вектор V_1 имеет координаты:

$$V_1=\begin{pmatrix}V_{11}\\V_{21}\\V_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}t\\ \frac{3}{2}t\\ t\end{pmatrix}\sim t\begin{pmatrix}-8\\15\\10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-8\\15\\10\end{pmatrix}.$$

где для простоты принято $t = 1$.

Аналогично найдем координаты второго собственного вектора V_2, соответствующего числу $\lambda_2 = 2$.

Полагаем $V_2 = (V_{12}, V_{22}, V_{32})^T$. Тогда имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix}1-2 & 2 & -3\\ -5 & 1-2 & -4\\ 0 & -2 & 4-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_{12}\\V_{22}\\V_{32}\end{pmatrix}=0,\quad\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ -5 & -1 & -4\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_{12}\\V_{22}\\V_{32}\end{pmatrix}=0\quad\text{или}\quad\begin{cases}-V_{12}+2V_{22}-3V_{32}=0\\ -5V_{12}-V_{22}-4V_{32}=0.\\ \quad -2V_{22}+2V_{32}=0\end{cases}$$

Пусть $V_{32} = t$. Из третьего уравнения находим: $V_{22} = V_{32} = t$. Подставляя в первое уравнение, получаем:

$$V_{12}=2V_{22}-3V_{32}=2t-3t=-t.$$

Следовательно, собственный вектор V_2 равен:

$$V_2=\begin{pmatrix}V_{12}\\V_{22}\\V_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t\\t\\t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

При $t = 1$ можно записать: $V_2 = (-1,1,1)^T$.

Вычислим теперь координаты третьего собственного вектора V_3, соответствующего числу $\lambda_3 = 3$.

Обозначив $V_3 = (V_{13}, V_{23}, V_{33})^T$, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix}1-3 & 2 & -3\\ -5 & 1-3 & -4\\ 0 & -2 & 4-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_{13}\\V_{23}\\V_{33}\end{pmatrix}=0,\quad\Rightarrow\begin{pmatrix}-2 & 2 & -3\\ -5 & -2 & -4\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_{13}\\V_{23}\\V_{33}\end{pmatrix}=0\quad\text{или}\quad\begin{cases}-2V_{13}+2V_{23}-3V_{33}=0\\ -5V_{13}-2V_{23}-4V_{33}=0.\\ \quad -2V_{23}+V_{33}=0\end{cases}$$

В качестве свободной переменной выберем $V_{33} = t$. Из последнего уравнения выразим V_{23}:

$$2V_{23}=-V_{33}=-t,\quad\Rightarrow V_{23}=-\frac{t}{2}.$$

Подставляя V_{23}, V_{33} в первое уравнение, получаем:

$$-2V_{13}=-2V_{23}+3V_{33}=-2\left(-\frac{t}{2}\right)+3t=4t,\quad\Rightarrow V_{13}=-2t.$$

Таким образом, собственный вектор V_3 имеет координаты

$$V_3=\begin{pmatrix}V_{13}\\V_{23}\\V_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2t\\-\frac{t}{2}\\t\end{pmatrix}\sim t\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

Общее решение системы записывается в виде

$$X(t)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1\exp(t)\begin{pmatrix}-8\\15\\10\end{pmatrix}+C_2\exp(2t)\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+C_3\exp(3t)\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\end{pmatrix},$$

где C_1, C_2, C_3 − произвольные числа.

Пример 5

Найти общее решение системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -x - 4y + 2z, \quad \frac{dy}{dt} = 3x + y - 2z, \quad \frac{dz}{dt} = x - 4y + z.$$

Решение.
Начнем с определения собственных значений матрицы A:

$$\det\left(A - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 & 2 \\ 3 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Rightarrow \left(-1-\lambda\right)\left[\left(1-\lambda\right)^2 - 8\right] - 3\left[-4\left(1-\lambda\right) + 8\right] + \left[8 - 2\left(1-\lambda\right)\right] = 0,$$

$$\Rightarrow \left(-1-\lambda\right)\left(\lambda^2 - 2\lambda - 7\right) - 3\left(4\lambda + 4\right) + \left(2\lambda + 6\right) = 0,$$

$$\Rightarrow -\underline{\lambda^2} + \underline{\underline{2\lambda}} + \overline{7} - \lambda^3 + \underline{2\lambda^2} + \underline{\underline{7\lambda}} - \underline{\underline{12\lambda}} - \overline{12} + \underline{\underline{2\lambda}} + \overline{6} = 0,$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0.$$

Раскладывая левую часть на множители, получаем:

$$\lambda^2\left(\lambda - 1\right) + \lambda - 1 = 0, \quad \Rightarrow \left(\lambda - 1\right)\left(\lambda^2 + 1\right) = 0.$$

Видно, что характеристическое уравнение имеет один действительный и два комплексных корня (в виде пары комплексно-сопряженных чисел):

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \pm i.$$

Нахождение собственного вектора V_1 для собственного числа $\lambda_1 = 1$ ничем не отличается от предыдущего примера. Координаты вектора $V_1 = (V_{11}, V_{21}, V_{31})^T$ определяются из системы линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} -1-1 & -4 & 2 \\ 3 & 1-1 & -2 \\ 1 & -4 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix} = 0,$$

После перемножения получаем:

$$\begin{cases} -2V_{11} - 4V_{21} + 2V_{31} = 0 \\ 3V_{11} - 2V_{31} = 0 \\ V_{11} - 4V_{21} = 0 \end{cases}, \quad \Rightarrow \begin{cases} V_{11} + 2V_{21} - V_{31} = 0 \\ 3V_{11} - 2V_{31} = 0 \\ V_{11} - 4V_{21} = 0 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} V_{11} + 2V_{21} - V_{31} = 0 \\ -6V_{21} + V_{31} = 0 \\ -6V_{21} + V_{31} = 0 \end{cases}, \quad \Rightarrow \begin{cases} V_{11} + 2V_{21} - V_{31} = 0 \\ -6V_{21} + V_{31} = 0 \end{cases}.$$

Видно, что ранг системы уравнений равен 2. Поэтому мы можем выбрать одну свободную переменную, в качестве которой возьмем $V_{31} = t$. Выразим остальные переменные через t:

$$-6V_{21} + t = 0, \quad \Rightarrow V_{21} = \frac{t}{6}, \quad \Rightarrow V_{11} + 2 \cdot \frac{t}{6} - t = 0, \quad \Rightarrow V_{11} = t - \frac{t}{3} = \frac{2}{3}t.$$

Итак первый собственный вектор имеет координаты

$$V_1 = \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t \\ \frac{1}{6}t \\ t \end{pmatrix} \sim t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь пару комплексно-сопряженных корней $\lambda_{2,3} = \pm i$. Для нахождения компонента общего решения, связанного с этой парой корней, достаточно взять лишь одно число, например, $\lambda_2 = +i$ и построить для него собственный вектор V_2, который, возможно, будет иметь комплексные координаты. Далее мы сконструируем частное решение X_2 вида

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim \exp(\lambda_2 t) V_2$$

и выделим в нем действительную и мнимую части, которые будут представлять два линейно независимых решения. Реализуя данный план, запишем матрично-векторное уравнение для вектора V_2:

$$\begin{pmatrix} -1-i & -4 & 2 \\ 3 & 1-i & -2 \\ 1 & -4 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{32} \end{pmatrix} = 0.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -(1+i)V_{12} - 4V_{22} + 2V_{32} = 0 \\ 3V_{12} + (1-i)V_{22} - 2V_{32} = 0 \\ V_{12} - 4V_{22} + (1-i)V_{32} = 0 \end{cases}.$$

Преобразуем в более удобный вид первое уравнение, умножив его на $-\frac{1}{1+i}$:

$$-(1+i)V_{12} - 4V_{22} + 2V_{32} = 0 \left| \cdot \left(-\frac{1}{1+i}\right), \quad \Rightarrow V_{12} + \frac{4}{1+i}V_{22} - \frac{2}{1+i}V_{32} = 0. \right.$$

Избавимся от комплексных чисел в знаменателях коэффициентов:

$$\frac{4}{1+i} = \frac{4(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{4-4i}{1-i^2} = \frac{4-4i}{2} = 2-2i, \qquad -\frac{2}{1+i} = -1+i.$$

Тогда первое уравнение принимает вид:

$$V_{12} + 2(1-i)V_{22} - (1-i)V_{32} = 0.$$

Снова вернемся к системе уравнений и приведем ее к треугольному виду, чтобы определить ее ранг:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{12} + 2(1-i)V_{22} - (1-i)V_{32} = 0 \\ 3V_{12} + (1-i)V_{22} - 2V_{32} = 0 \\ V_{12} - 4V_{22} + (1-i)V_{32} = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ R_2 - 3R_1, \\ R_3 - R_1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} V_{12} + 2(1-i)V_{22} - (1-i)V_{32} = 0 \\ 0 - 5(1-i)V_{22} + [-2+3(1-i)]V_{32} = 0 \\ 0 + [-4-2(1-i)]V_{22} + 2(1-i)V_{32} = 0 \end{cases},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{12} + (2-2i)V_{22} + (-1+i)V_{32} = 0 \\ (-5+5i)V_{22} + (1-3i)V_{32} = 0 \\ (-6+2i)V_{22} + (2-2i)V_{32} = 0 \end{cases}.$$

Преобразуем второе уравнение:

$$(-5+5i)V_{22} + (1-3i)V_{32} = 0 \left| \cdot \frac{1}{(-5+5i)}, \quad \Rightarrow V_{22} + \frac{1-3i}{(-5+5i)}V_{32} = 0. \right.$$

Здесь коэффициент перед переменной V_{32} равен

$$\frac{1-3i}{(-5+5i)} = \frac{1-3i}{(-5)(1-i)} = \frac{(1-3i)(1+i)}{(-5)(1-i)(1+i)} = \frac{1-3i+i-3i^2}{(-5)(1-i^2)} = \frac{4-2i}{(-5)\cdot 2} = \frac{2-i}{(-5)} = \frac{-2+i}{5}.$$

Следовательно, второе уравнение имеет вид:

$$V_{22} + \frac{-2+i}{5}V_{32} = 0.$$

Аналогичным образом преобразуем третье уравнение:

$$\left(-6+2i\right)V_{22} + \left(2-2i\right)V_{32} = 0 \,\Big|: 2, \quad \Rightarrow \left(-3+i\right)V_{22} + \left(1-i\right)V_{32} = 0 \,\Big|\cdot\left(\frac{1}{-3+i}\right), \quad \Rightarrow V_{22} + \frac{1-i}{-3+i}V_{32} = 0.$$

Вычислим коэффициент перед V_{32}:

$$\frac{1-i}{-3+i} = \frac{\left(1-i\right)\left(-3-i\right)}{\left(-3+i\right)\left(-3-i\right)} = \frac{-3+3i-i+i^2}{9-i^2} = \frac{-4+2i}{9+1} = \frac{-4+2i}{10} = \frac{-2+i}{5}.$$

Тогда третье уравнение записывается как

$$V_{22} + \frac{-2+i}{5}V_{32} = 0,$$

т.е. оно совпадает со вторым уравнением.

Итак, ранг системы равен 2 и ее можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{cases} V_{12} + \left(2-2i\right)V_{22} - \left(1-i\right)V_{32} = 0 \\ V_{22} + \frac{-2+i}{5}V_{32} = 0 \end{cases}.$$

В качестве свободной переменной примем $V_{32} = t$. Выразим через t последовательно другие переменные V_{22} и V_{12}:

$$V_{22} + \frac{-2+i}{5}t = 0, \quad \Rightarrow V_{22} = -\left(\frac{-2+i}{5}\right)t = \frac{2-i}{5}t, \quad \Rightarrow V_{12} + \left(2-2i\right)\left(\frac{2-i}{5}t\right) - \left(1-i\right)t = 0,$$

$$\Rightarrow V_{12} = \left(1-i\right)t - \frac{\left(2-2i\right)\left(2-i\right)}{5}t = \left(1-i-\frac{4-4i-2i+2i^2}{5}\right)t = \left(1-i-\frac{2-6i}{5}\right)t = \frac{5-5i-2+6i}{5}t = \frac{3+i}{5}t.$$

Таким образом, мы определили собственный вектор V_2 с комплексными координатами:

$$V_2 = \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3+i}{5}t \\ \frac{2-i}{5}t \\ t \end{pmatrix} \sim t\begin{pmatrix} 3+i \\ 2-i \\ t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3+i \\ 2-i \\ t \end{pmatrix}.$$

Сконструируем теперь решение X_2 на основе собственного значения λ_2 и собственного вектора V_2 и разложим его на действительную и мнимую компоненты.

$$X_2\left(t\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \exp\left(\lambda_2 t\right)V_2 = \exp\left(it\right)\begin{pmatrix} 3+i \\ 2-i \\ t \end{pmatrix}.$$

Представим exp (it) по формуле Эйлера:

$$\exp\left(it\right) = \cos t + i\sin t.$$

Следовательно,

$$X_2(t) = (\cos t + i\sin t)\begin{pmatrix} 3+i \\ 2-i \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3+i)(\cos t + i\sin t) \\ (2-i)(\cos t + i\sin t) \\ 5(\cos t + i\sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+i\cos t + 3i\sin t - \sin t \\ 2 - i\cos t + 2i\sin t + \sin t \\ 5\cos t + 5i\sin t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3-\sin t \\ 2+\sin t \\ 5\cos t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \cos t + 3\sin t \\ -\cos t + 2\sin t \\ 5\sin t \end{pmatrix}.$$

Вычисленные действительные и мнимые части комплексного векторного решения X_2 являются линейно независимыми. С учетом первого компонента X_1, соответствующего собственному числу λ_1, можно записать общее действительное решение системы в виде

$$X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \exp(t)\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 3-\sin t \\ 2+\sin t \\ 5\cos t \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} \cos t + 3\sin t \\ -\cos t + 2\sin t \\ 5\sin t \end{pmatrix},$$

где C_1, C_2, C_3 − произвольные числа.

Пример 6

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y + z, \quad \frac{dy}{dt} = x + 2y + z, \quad \frac{dz}{dt} = x + y + 2z.$$

Решение.
Определим собственные значения заданной матрицы:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] - 1\cdot\left[(2-\lambda)-1\right] + 1\cdot\left[1-(2-\lambda)\right] = 0,$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) - (-\lambda+1) + (\lambda-1) = 0, \quad \Rightarrow \underline{2\lambda^2} - \underline{\underline{8\lambda}} + 6 - \lambda^3 + \underline{4\lambda^2} - \underline{\underline{3\lambda}} + \underline{\underline{2\lambda}} - 2 = 0,$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = 0.$$

Можно заметить, что данное кубическое уравнение имеет корень $\lambda = 1$. Выделяя одночлен $(\lambda - 1)$, получаем:

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda^2 + 5\lambda + 4\lambda - 4 = 0, \quad \Rightarrow \lambda^2(\lambda-1) - 5\lambda(\lambda-1) + 4(\lambda-1) = 0, \quad \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0.$$

Корни квадратного уравнения равны: $\lambda = 1, 4$. Таким образом, характеристическое уравнение представляется в виде

$$(\lambda-1)^2(\lambda-4) = 0.$$

Исходная матрица системы является *симметрической*. Поэтому она будет иметь три собственных вектора. Это означает, что у корня $\lambda = 1$ алгебраическая и геометрическая кратность одинаковы (и равны 2).

Определим собственные векторы, соответствующие числу $\lambda_{1,2} = 1$. Они находятся из системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \begin{cases} V_{11} + V_{21} + V_{31} = 0 \\ V_{11} + V_{21} + V_{31} = 0, \\ V_{11} + V_{21} + V_{31} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow V_{11} + V_{21} + V_{31} = 0.$$

Видно, что все три уравнения одинаковы. Оставляем одно уравнение и, выбирая в качестве свободных переменных $V_{21} = u$ и $V_{31} = v$, получаем:

$$V_{11} = -V_{21} - V_{31} = -u - v.$$

Отсюда следует, что координаты первого собственного вектора (при $u = 1$, $v = 0$) равны: $V_1 = (-1,1,0)^T$.

Соответственно, координаты второго линейно независимого собственного вектора (при $u = 0$, $v = 1$) составляют: $V_2 = (-1,0,1)^T$.

Теперь определим третий собственный вектор V_3, соответствующий числу $\lambda_3 = 4$:

$$\begin{pmatrix} 2-4 & 1 & 1 \\ 1 & 2-4 & 1 \\ 1 & 1 & 2-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{pmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2V_{13} + V_{23} + V_{33} = 0 \\ V_{13} - 2V_{23} + V_{33} = 0 \\ V_{13} + V_{23} - 2V_{33} = 0 \end{array} \right., \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l|l} V_{13} - 2V_{23} + V_{33} = 0 & \\ V_{13} + V_{23} - 2V_{33} = 0 & R_2 - R_1 \\ -2V_{13} + V_{23} + V_{33} = 0 & R_3 + 2R_1 \end{array} \right.,$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_{13} - 2V_{23} + V_{33} = 0 \\ 0 + 3V_{23} - 3V_{33} = 0 \\ 0 - 3V_{23} + 3V_{33} = 0 \end{array} \right., \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_{13} - 2V_{23} + V_{33} = 0 \\ V_{23} - V_{33} = 0 \end{array} \right..$$

Здесь выбираем в качестве свободной переменную $V_{33} = t$. Другие две координаты равны

$$V_{23} = V_{33}, \quad \Rightarrow V_{23} = t, \quad \Rightarrow V_{13} = 2V_{23} - V_{33} = 2t - t = t.$$

Следовательно, собственный вектор V_3 имеет следующие координаты:

$$V_3 = \begin{pmatrix} V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений выражается формулой

$$X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \exp(t)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \exp(t)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \exp(4t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где C_1, C_2, C_3 − произвольные числа.