

Лабораторная работа № 3

Резонанс в цепях переменного тока

Цель работы: изучение явления резонанса напряжений и токов в цепи переменного тока с последовательным и параллельным соединением R , L и C .

ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ РЕЗОНАНСА НАПРЯЖЕНИЙ

Если неразветвленную цепь с активным сопротивлением, индуктивностью и емкостью в соответствии с рис. 1(а), присоединить к генератору синусоидального напряжения, то в ней установится синусоидальный ток.

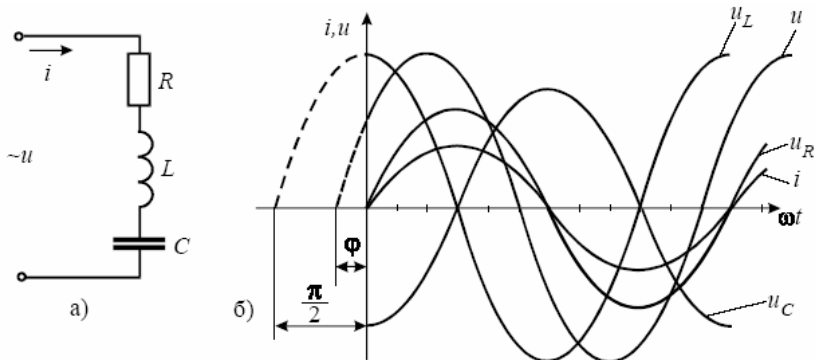


Рис. 1. Схема и временные диаграммы тока и напряжений неразветвленной цепи с R , L , C .

Выберем начало отсчета времени $t = 0$, т.е. примем:

$$i = I_0 \sin \omega t. \quad (1)$$

Напряжение на активном сопротивлении совпадает по фазе с током

$$u_R = i \cdot R = R \cdot I_0 \sin \omega t. \quad (2)$$

Амплитуда этого напряжения $U_{R0} = RI_0$, а действующее значение $U_R = RI$.

Напряжение на индуктивности или индуктивное напряжение опережает по фазе ток на угол $\pi/2$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \omega L \cdot I_0 \sin\left(\omega t + \frac{p}{2}\right). \quad (3)$$

Амплитуда этого напряжения $U_{L0} = \omega L I_0$, а действующее значение $U_L = \omega L I$.

Напряжение на емкости или емкостное напряжение отстает по фазе от тока на угол $p/2$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{\omega C} \cdot I_0 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{p}{2}\right). \quad (4)$$

Амплитуда этого напряжения $U_{C0} = \frac{1}{\omega C} I_0$, а действующее значение $U_C = \frac{1}{\omega C} I$.

На рис. 1(б) изображены волновые, а на рис. 2 векторные диаграммы тока и напряжений рассматриваемой цепи.

Так как элементы цепи R , L , C соединены последовательно, то напряжение на зажимах цепи в любой момент времени равно сумме трех слагаемых:

$$u = u_R + u_L + u_C. \quad (5)$$

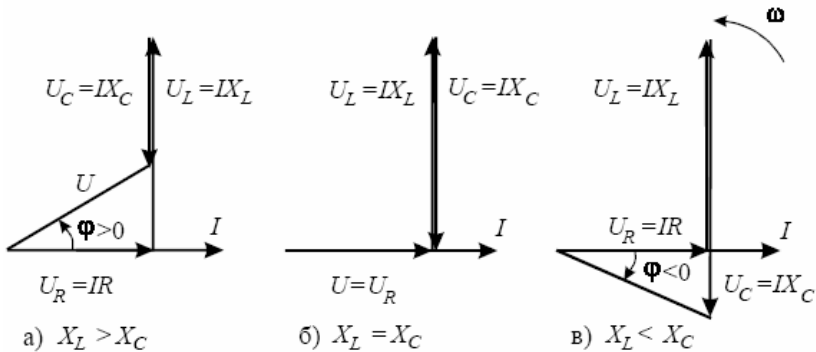


Рис. 2. Векторные диаграммы тока и напряжений для различных соотношений реактивных сопротивлений

Напряжение на индуктивности и емкости сдвинуты относительно друг друга по фазе на полпериода или на угол p , их алгебраическая сумма называется реактивным напряжением:

$$u_p = u_L + u_C . \quad (6)$$

$$\begin{aligned} u_p &= U_{L0} \sin\left(\omega t + \frac{p}{2}\right) + U_{C0} \sin\left(\omega t - \frac{p}{2}\right) = \\ &= (U_{L0} - U_{C0}) \cdot \sin\left(\omega t + \frac{p}{2}\right) = U_{P0} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{p}{2}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя в (5) u_R и u_p , получим:

$$u = U_{R0} \sin \omega t + U_{P0} \sin\left(\omega t + \frac{p}{2}\right) = U_0 \sin(\omega t + j), \quad (8)$$

$$\text{или } u = U_0 \sin(\omega t + j), \quad (9)$$

$$\text{где } U_0 = \sqrt{U_{R0}^2 + (U_{L0} - U_{C0})^2} = \sqrt{U_{R0}^2 + U_{P0}^2}; \quad (10)$$

$$j = \arctg \frac{U_{L0} - U_{C0}}{U_{R0}} = \arctg \frac{U_{P0}}{U_{R0}}. \quad (11)$$

Из приведенных уравнений следует, что в общем случае последовательного соединения активного сопротивления, индуктивности и емкости, напряжение на зажимах цепи опережает ток или отстает на него на угол j в зависимости от того, какое из двух напряжений U_{L0} или U_{C0} больше. Если $U_{L0} = U_{C0}$, угол $j = 0$. Векторные диаграммы напряжений для различных соотношений реактивных сопротивлений приведены на рис. 2.

Разделив в уравнении (10) все амплитудные величины на $\sqrt{2}$, получим выражение для действующих значений напряжения:

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{U_R^2 + U_P^2}. \quad (12)$$

Подставив в формулу (12) вместо напряжений их выражения через токи и сопротивления, найдем

$$U = \sqrt{(IR)^2 + \left(I\omega L - I\frac{1}{\omega C}\right)^2} = I\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (13)$$

$$\text{Здесь } Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad (14)$$

называется полным сопротивлением цепи.

Выражение (13) называют законом Ома для цепи переменного тока.

При построении векторной диаграммы напряжений за исходный принимается вектор тока. Напряжение на активном сопротивлении совпадает по фазе с током, напряжение на индуктивности опережает ток на угол $\frac{P}{2}$, а напряжение на емкости отстает от тока на угол $\frac{P}{2}$. Напряжение на входе цепи является геометрической суммой перечисленных напряжений.

Если стороны треугольника напряжений, в соответствии с рис. 2, разделить на ток, то получим подобный треугольник, катеты которого изображаются в определенном масштабе активное R и реактивное $X = X_L - X_C$ сопротивления, а гипотенуза является полным сопротивлением Z (рис. 3).

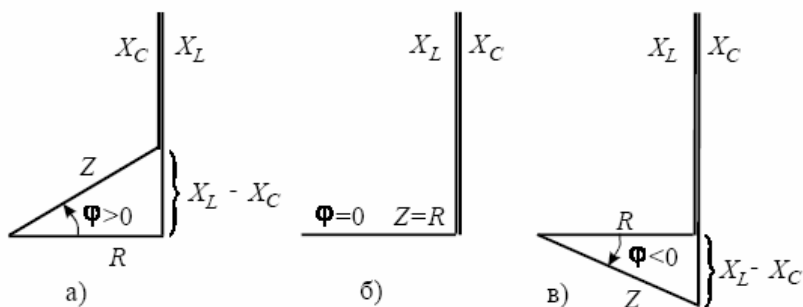


Рис. 3. Треугольники сопротивлений неразветвленной цепи с R , L , C

Явление, при котором в последовательной цепи из элементов R , L , C напряжение на входе цепи совпадает по фазе с током, называют **резонансом напряжений**.

Условием резонанса служит равенство реактивных сопротивлений

$$wL = \frac{1}{wC}, \quad (15)$$

откуда резонансная угловая частота

$$w = w_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (16)$$

Подставляя вместо угловой частоты ее значение, найдем резонансную частоту цепи $f_{рез} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. (17)

При резонансе сопротивление любого из реактивных участков цепи $w_0L = \frac{1}{w_0C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = r$, (18)

принято называть волновым сопротивлением.

Полное сопротивление цепи при резонансе напряжений

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2} = R, \quad (19)$$

т.е. равно активному сопротивлению цепи и, следовательно, наименьшее из всех возможных при изменении частоты w (рис. 3(б)).

Ток в цепи (действующее значение) при резонансе достигает максимума и совпадает с напряжением по фазе. Таким образом:

$$I_{рез} = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{R}. \quad (20)$$

При резонансе индуктивное напряжение $U_{L0} = Iw_0L$ и емкостное $U_{C0} = I \frac{1}{w_0C}$ сдвинуты по фазе на угол π и равны по величине; напряжение на зажимах цепи U равно активному напряжению (рис. 2(б)).

Отношение напряжения на зажимах цепи к напряжению на любом из реактивных участков

$$\frac{U}{U_L} = \frac{U}{U_C} = \frac{IR}{Iw_0L} = \frac{IR}{I \frac{1}{w_0C}} = \frac{R}{X_{L0}} = \frac{R}{X_{C0}} = \frac{R}{r}, \quad (21)$$

$$\text{откуда } U_{L0} = U_{C0} = U \frac{X_{C0}}{R} = U \frac{X_{L0}}{R} = U \frac{r}{R}. \quad (22)$$

При $r > R$ напряжения U_{L0} и U_{C0} больше приложенного к зажимам цепи напряжения в $\frac{r}{R}$ раз. Таким образом, при резонансе напряжений в цепи могут возникать перенапряжения на отдельных участках цепи.

Величина, равная отношению $\frac{r}{R}$, называется добротностью контура и обозначается буквой Q . Равенство напряжений U_{L0} и U_{C0} при сдвиге фаз на половину периода означает, что в любой момент времени мгновенные напряжения на емкости и индуктивности равны по величине, но противоположны по знаку ($U_L = -U_C$), следовательно, в любой момент времени равны по величине и противоположны по знаку мгновенные мощности в реактивных участках цепи

$$P_L = P_C \quad (23)$$

Это равенство означает, что накопление энергии в магнитном поле происходит исключительно за счет энергии электрического поля и наоборот, а энергия, поступающая от источника, преобразуется в тепло только в активном сопротивлении.

Настройка цепи в режим резонанса напряжений может быть выполнена по-разному: в цепи с постоянными значениями L и C , т.е. в цепи с катушкой индуктивности и с постоянным конденсатором, изменением частоты напряжения источника питания до тех пор, пока будет выполняться условие $\omega L = \frac{1}{\omega C}$. Из выражения

$\omega^2 LC = 1$ или $L = \frac{1}{\omega^2 C}$ следует также, что резонанс можно получить при неизменных ω и C , изменяя индуктивность цепи, или при постоянных ω и L , изменяя емкость цепи $\left(C = \frac{1}{\omega^2 L} \right)$.

УПРАЖНЕНИЕ 1

Резонанс в цепи с переменной емкостью

Оборудование: катушка индуктивности (3600 витков); магазин емкостей (1-41 мкФ), сопротивления (30, 60, 100 Ом), амперметр, вольтметр, источник тока.

Цель работы: построение резонансных кривых при различных значениях омического сопротивления и определение соотношений между U_L , U_C и U

В данном упражнении частота и индуктивность остаются постоянными. Схема установки изображена на рис. 4.

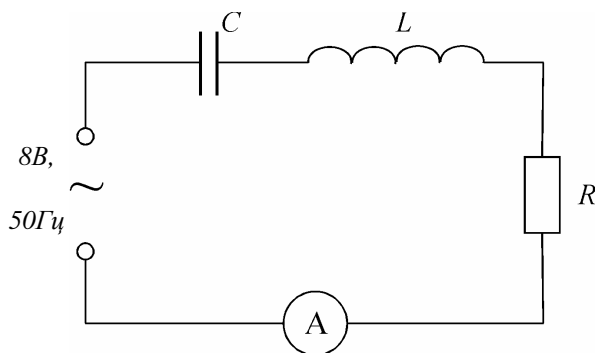


Рис. 4.

По указанию преподавателя измерения проводят с сердечником или без сердечника.

1. Собирают схему (рис. 4), где $R=100\text{Ом}$ и катушка индуктивности L имеет число витков 3600.
2. Включают звуковой генератор в сеть и «Рег.выхода» устанавливают напряжение $U=8\text{В}$, $n=50\text{Гц}$.
3. Включают емкость и через каждый 1 мкФ записывают показания амперметра.
4. Строят график, откладывая по оси абсцисс емкость C , а по оси ординат – соответствующее значение показаний амперметра

5. Вычисляют индуктивность катушки в момент резонанса $L_{рез}$ по формуле (15), где $\omega = 2\pi n$, $n = 50 \text{ Гц}$ - частота промышленного тока.
6. В момент резонанса измеряют вольтметром напряжение на зажимах источника U , U_L , U_C и $U_L + U_C$. Записывают их значения. Убеждаются в том, что $U_L \approx U_C > U$, $U_L + U_C = 0$.
7. Изменяют омическое сопротивление и повторяют измерения.

УПРАЖНЕНИЕ 2

Резонанс при изменении частоты

Оборудование: катушка индуктивности (2400 витков), конденсатор (2-5 мкФ), сопротивления (30, 60, 100 Ом), ламповый вольтметр, генератор.

Цель работы: изучение резонанса напряжений и построение резонансных кривых при различных омических сопротивлениях.

В данном упражнении индуктивность и емкость остаются постоянными, а изменяется частота.

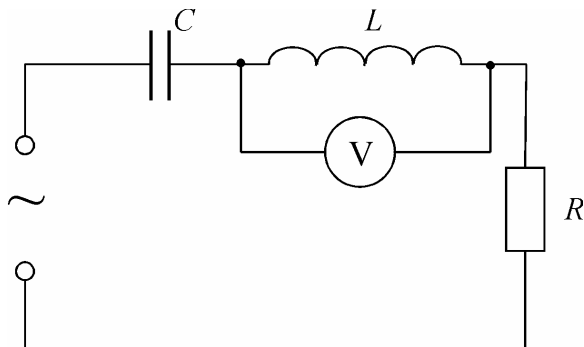


Рис. 5

1. Собирают схему (рис. 5).
2. Включают ламповый вольтметр в сеть и устанавливают предел измерения 30 В.

3. Включают звуковой генератор в сеть и «Рег.выхода» устанавливают напряжение 4-5 В.
4. Вращают рукоятку «Частота», (начиная с 20 Гц), записывают через каждый 1 В значения напряжения по ламповому вольтметру и соответствующие значения частоты n .

В н и м а н и е ! ! ! На звуковом генераторе ручкой «Рег.выхода» величину напряжения все время поддерживать постоянной.

5. Вращением рукоятки «Частота» добиваются резонанса. Измеряют ламповым вольтметром напряжения на индуктивности U_L , на индуктивности и емкости $U_L + U_C$ и измеряют U .
6. Находят отношение $U_{L_{рез}}/U$.
7. Вычисляют индуктивность катушки из условия

$$L_{рез} = \frac{1}{4p^2 n_{рез}^2 C},$$

где $n_{рез}$ - резонансная частота.

8. Строят график зависимости $U_L = f(n)$, откладывая по оси ординат значения напряжения на индуктивности, а по оси абсцисс – соответствующие значения частот.
9. Изменяют омическое сопротивление и повторяют измерения.

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОНАНСА ТОКОВ

Явление резонанса токов наблюдается в разветвленных цепях переменного тока, содержащих ветви с индуктивностью и емкостью. Резонанс представляет собой такой режим цепи, при котором реактивная проводимость всей цепи равна нулю. Соответственно угол сдвиг фаз между напряжением и общим током цепи равен нулю и цепь потребляет только активную мощность.

В настоящей работе исследуется разветвленная цепь из двух параллельных ветвей, в соответствии с рис. 6. В одну ветвь включена катушка индуктивности (R_K, L) , которая моделирует активно-индуктивную нагрузку электрических сетей большинства промышленных предприятий, вторая ветвь состоит из батареи кон-

денсаторов с емкостью C (активное сопротивление конденсаторов настолько мало, что им можно пренебречь).

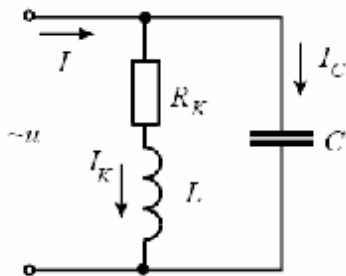


Рис. 6. Разветвленная электрическая цепь переменного тока с реальной катушкой и конденсатором

Условие резонанса в такой цепи – равенство индуктивной проводимости ветви с катушкой (b_L) и емкостной проводимости ветви с конденсаторами (b_C). Так как $b_L = \frac{X_L}{Z_K^2}$ и $b_C = \frac{X_C}{Z_C^2} \approx \frac{1}{X_C}$,

то условие резонанса выражается формулой

$$\frac{wL}{R_K^2 + (wL)^2} = wC. \quad (24)$$

Частота, при которой в контуре с заданными величинами L и C достигается резонанс токов, называется резонансной частотой контура. Тогда

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_K^2}{\frac{L}{C}}} \quad \text{или} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_K^2}{\frac{L}{C}}}.$$

Если пренебречь активным сопротивлением R_K катушки индуктивности (что можно сделать при условии $R_K \ll wL$), уравнение (24) принимает вид $w^2 LC = 1$ (25), откуда следует $w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ или $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. Таким образом, при указанном до-

пущении ($R_K \rightarrow 0$) резонансная частота в разветвленной цепи определяется по такой же формуле, как и резонансная частота в последовательной цепи.

Сопротивление реактивных элементов резонансной цепи в этом случае определяется выражением: $w_0 L = \frac{1}{w_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = r$ и называется волновым или характеристическим сопротивлением.

Так же, как и резонанс напряжений, резонанс токов может быть достигнут при различной частоте питающего напряжения или изменении параметров цепи. Для этого надо соответственно изменить индуктивность L или емкость C , или оба параметра одновременно.

На рис. 7 представлены качественно векторные диаграммы разветвленной цепи R , L и C при постоянных значениях частот и индуктивности и переменной емкости. Аналогичные векторные диаграммы могут быть построены и для случая постоянных частоты и емкости и переменной индуктивности.

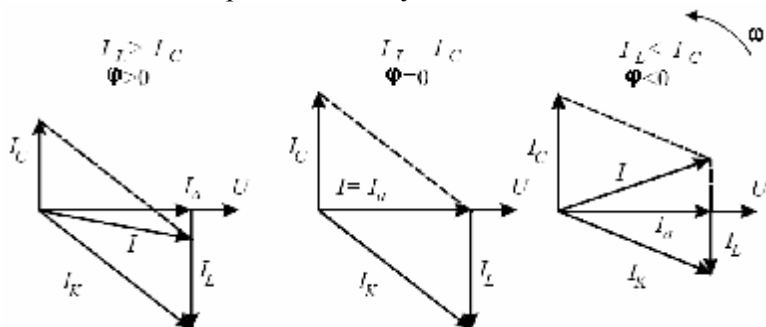


Рис. 7. Векторные диаграммы разветвленной цепи с R , L , C при различных соотношениях индуктивного и емкостного токов

Общий ток цепи выражается формулой $I = U_y = U\sqrt{g^2 + b^2}$ получает при резонансе значение

$$I = U_{y0} = \frac{UR_k}{R_k^2 + (w_0 L)^2}$$

Он будет чисто активным, так как полная проводимость цепи не имеет в этом случае реактивной составляющей.

В зависимости от значений R_k , L и C ток в конденсаторе и индуктивная составляющая тока в катушке при резонансе могут быть во много раз больше общего тока цепи. Эти реактивные токи будут равны друг другу по величине $I_L = I_C$ или

$$U \frac{w_0 L}{R_k^2 + (w_0 L)^2} = U w_0 C \text{ и противоположны по фазе.}$$

Приведенная на рис.6 схема включения статических конденсаторов параллельно приемникам служит для решения очень важной энергетической задачи – повышения коэффициента мощности ($\cos j$) заводских установок. Естественный коэффициент мощности большинства промышленных электрических установок не превышает 0,7-0,8 из-за значительного индуктивного тока, потребляемого асинхронными двигателями, наиболее распространенными на предприятиях. При таком коэффициенте мощности установленная мощность трансформаторов на подстанциях использовалась бы только на 70-80 %, так как активная мощность цепи переменного тока зависит, в том числе, и от $\cos j$

$$P = UI \cos j$$

где $UI = S$ - полная мощность трансформаторов, выражаемая в кВА (киловольт-ампер).

Ток, потребляемый электрической установкой

$$I = \frac{P}{U \cos j}$$

Следовательно, чем меньше $\cos j$, тем больший ток требуется для передачи той же активной мощности P , а значит, необходимо и большее сечение проводов электрической сети. Наконец, потери мощности в электрических сетях составляют

$$\Delta P = I^2 R = \frac{P^2 \cdot R}{U^2 \cdot (\cos j)^2}$$

Значит, при передаче одной и той же активной мощности потери мощности будут обратно пропорциональны квадрату коэффициента мощности.

Таким образом, повышение коэффициента мощности ($\cos j$) на промышленных электрических установках дает следующие преимущества:

- возможность подключения дополнительных приемников при той же мощности трансформаторов, установленных на заводских подстанциях;
- возможность уменьшения при той же передаваемой мощности величины тока и соответственно сечений проводов электрических сетей;
- уменьшение при прочих равных условиях потерь мощности и энергии в электрических сетях.

УПРАЖНЕНИЕ 3

Резонанс токов с переменной емкостью

Оборудование: катушка индуктивности (2400 и 3600 витков), магазин емкости, два амперметра, источник переменного тока, сердечник.

Цель работы: изучение явления резонанса токов в разветвленной цепи переменного тока с элементами L и C в параллельных ветвях и построение резонансных кривых при переменной емкости.

В данном упражнении в катушку индуктивности помещают сердечник и во время работы оставляют без изменения.

1. Собирают схему (рис. 8).
2. Включают звуковой генератор в сеть и «Рег.выхода» устанавливают напряжение 8 В.
3. Изменяют емкость и через каждую микрофараду записывают показания амперметров A_1 и A_2 .
4. Измерения проводят для катушек (2400 и 3600 витков).
5. Строят графики, откладывая по оси абсцисс емкость, а по оси ординат – показания амперметра A_1 .

6. Вычисляют индуктивность катушек с сердечников в момент резонанса по формуле (25).

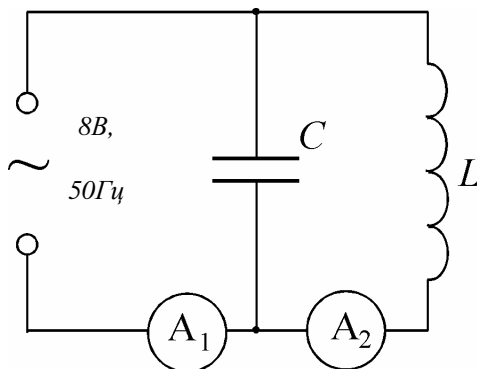


Рис. 8

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулировать закон Ома для цепи переменного тока.
2. Объяснить явление резонанса напряжений, условие резонанса и следствия, вытекающие из явления резонанса.
3. Как определить сдвиг фаз между током и напряжением?
4. Написать аналитическое выражение падения напряжения на катушке и падение напряжения на конденсаторе для резонансной схемы и проанализировать их величины.
5. Как определяется резонансная частота?
6. Изменением каких величин в последовательном колебательном контуре можно достичь резонанса?
7. В каких цепях наблюдается резонанс токов?
8. Что является основным признаком наличия резонанса в разветвленной цепи?
9. В чем заключается условие возникновения резонанса в разветвленной цепи?
10. Как может быть достигнут резонанс токов при заданной частоте?

Литература

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Калашников С.Г. Электричество. М. Физматлит, 2004. – 276 с.
2. Тамм И. Е. Основы теории электричества.- М. : Наука , 1989.- 504с.
3. А.Н. Матвеев. Электричество и магнетизм. Учеб. пособие для студ. вузов.- М. : ОНИКС 21 век: Мир и Образование , 2005.- 463с
4. Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Электричество. : учеб. пособие для студ. физических спец. вузов- 4-е изд., стереотип.- М. : Физматлит: МФТИ , 2002.- 656с.
5. И.Е. Иродов. Электромагнетизм. Основные законы. М., ЛБЗ, 2001.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И.В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. учеб. пособие для вузов- М. : Астрель : АСТ , 2003.- 336с
2. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике, вып. 5,6. Электричество и магнетизм. М., Мир, 1966.