# Math24.ru

## Дифференциальные Уравнения

Главная

**Математический анализ**

Пределы и непрерывность
Дифференцирование
Интегрирование
Последовательности и ряды
Двойные интегралы
Тройные интегралы
Криволинейные интегралы
Поверхностные интегралы
Ряды Фурье

**Дифференциальные уравнения**

Уравнения 1-го порядка
Уравнения 2-го порядка
Уравнения *N*-го порядка
Системы уравнений

**Формулы и таблицы**

### Построение общего решения системы уравнений методом неопределенных коэффициентов

Линейная однородная система *n* дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$X'(t) = AX(t), \quad \text{где} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Здесь $X(t)$ − $n$-мерный вектор, $A$ − квадратная матрица с постоянными коэффициентами размера $n \times n$.

Далее мы опишем общий алгоритм решения данной системы и рассмотрим конкретные случаи, где решение строится *методом неопределенных коэффициентов*.

Будем искать решение заданной системы уравнений в виде вектор-функций

$$X(t) = \exp(\lambda t)V,$$

где $\lambda$ − *собственное значение* матрицы $A$, а $V$ − *собственный вектор* этой матрицы.

Собственные значения $\lambda_i$ находятся из *характеристического уравнения*

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

где $I$ − единичная матрица.

Поскольку корни $\lambda_i$ могут быть кратными, то в общем случае для системы $n$-го порядка это уравнение имеет вид:

$$(-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \ldots (\lambda - \lambda_m)^{k_m} = 0.$$

Здесь выполняется условие

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n.$$

Степень $k_i$ множителя $(\lambda - \lambda_i)$ называется *алгебраической кратностью* собственного числа $\lambda_i$.

Для каждого собственного значения $\lambda_i$ можно определить собственный вектор (или несколько собственных векторов в случае кратного $\lambda_i$), используя формулу

$$(A - \lambda_i I)V_i = 0.$$

Число собственных векторов, ассоциированных с собственным значением $\lambda_i$, называется *геометрической кратностью* $\lambda_i$ (обозначим ее как $s_i$). Таким образом, собственное число $\lambda_i$ характеризуется двумя величинами − алгебраической кратностью $k_i$ и геометрической кратностью $s_i$. Справедливо следующее соотношение:

$$0 < s_i \le k_i,$$

т.е. геометрическая кратность $s_i$ (или число собственных векторов) не превосходит алгебраическую кратность $k_i$ собственного числа $\lambda_i$.

Фундаментальная система решений и, соответственно, общее решение системы существенно зависят от алгебраической и геометрической кратности чисел $\lambda_i$. В простейшем случае $s_i = k_i = 1$, когда собственные значения $\lambda_i$ матрицы $A$ попарно различны и каждому числу $\lambda_i$ соответствует собственный вектор $V_i$, фундаментальная система решений состоит из функций вида

$$\exp\left(\lambda_1 t\right)V_1,\quad \exp\left(\lambda_2 t\right)V_2,\quad \ldots,\quad \exp\left(\lambda_n t\right)V_n.$$

В этом случае общее решение записывается как

$$X\left(t\right) = \begin{pmatrix} x_1\left(t\right) \\ x_2\left(t\right) \\ \vdots \\ x_n\left(t\right) \end{pmatrix} = C_1\exp\left(\lambda_1 t\right)V_1 + C_2\exp\left(\lambda_2 t\right)V_2 + \ldots + C_n\exp\left(\lambda_n t\right)V_n = \sum_{i=1}^{n} C_i\exp\left(\lambda_i t\right)V_i,$$

где $C_i$ − произвольные константы.

Обсудим случай *комплексных корней* характеристического уравнения. Если все коэффициенты в уравнениях являются действительными числами, то комплексные корни будут "рождаться" парами в виде комплексно-сопряженных чисел $\alpha \pm i\beta$. Для построения компонента решения, связанного с такой парой, достаточно взять одно число, например, $\alpha + i\beta$ и определить для него собственный вектор $V$, который также может иметь комплексные координаты. Тогда решение будет представляться комплекснозначной векторной функцией $[\exp(\alpha + i\beta)t]V(t)$. Экспоненциальную функцию можно разложить по *формуле Эйлера*:

$$\exp\left[\left(\alpha + i\beta\right)t\right] = \exp\left(\alpha t\right)\exp\left(i\beta t\right) = \exp\left(\alpha t\right)\left[\cos\left(\beta t\right) + i\sin\left(\beta t\right)\right].$$

В результате часть общего решения, соответствующая паре собственных значений $\alpha \pm i\beta$, будет представляться в виде

$$\begin{aligned} X\left(t\right) &= \exp\left(\alpha t\right)\left[\cos\left(\beta t\right) + i\sin\left(\beta t\right)\right]\left(V_{\text{Re}} + iV_{\text{Im}}\right) = \\ &= \exp\left(\alpha t\right)\left[\cos\left(\beta t\right)V_{\text{Re}} - \sin\left(\beta t\right)V_{\text{Im}}\right] + i\exp\left(\alpha t\right)\left[\cos\left(\beta t\right)V_{\text{Im}} + \sin\left(\beta t\right)V_{\text{Re}}\right] = \\ &= X^{(1)}\left(t\right) + iX^{(2)}\left(t\right). \end{aligned}$$

где $V = V_{RE} + iV_{IM}$ − комплекснозначный собственный вектор. В полученном выражении вектор-функции $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ в действительной и мнимой части образуют два линейно-независимых *действительных решения*.

Как видно, решение для пары комплексно-сопряженных собственных значений строится таким же образом, как и для действительных собственных значений. В конце преобразований нужно лишь явно выделить действительную и мнимую части векторной функции.

Теперь рассмотрим случай *кратных корней* $\lambda_i$. Для простоты будем считать их действительными. Здесь процесс решения снова разветвляется на два сценария.

Если алгебраическая кратность $k_i$ и геометрическая кратность $s_i$ собственного числа $\lambda_i$ совпадают ($k_i = s_i > 1$), то для этого значения $\lambda_i$ существует $k_i$ собственных векторов. В результате собственному числу $\lambda_i$ будет соответствовать $k_i$ линейно-независимых решений вида

$$\exp\left(\lambda_i t\right)V_i^{(1)},\quad \exp\left(\lambda_i t\right)V_i^{(2)},\quad \ldots,\quad \exp\left(\lambda_i t\right)V_i^{(k_i)}.$$

Всего в этом случае система $n$ уравнений будет иметь $n$ собственных векторов, образующих фундаментальную систему решений. Примеры таких систем приведены на странице Метод собственных значений и собственных векторов.

Наиболее интересным является случай кратных корней $\lambda_i$, когда геометрическая кратность $s_i$ меньше алгебраической кратности $k_i$. Это значит, что у нас имеется только $s_i$ ($s_i < k_i$) собственных векторов, ассоциированных с числом $\lambda_i$. Число собственных векторов $s_i$ определяется формулой

$$s_i = n - rank\left(A - \lambda_i I\right),$$

где $rank\,(A - \lambda_i I)$ означает ранг матрицы $A - \lambda_i I$, в которую подставлено значение $\lambda_i$.

Решение, соответствующее $\lambda_i$, можно искать в виде произведения многочлена степени $k_i - s_i$ на экспоненциальную функцию $\exp(\lambda_i t)$:

$$X_i(t) = P_{k_i - s_i}(t)\exp(\lambda_i t), \qquad \text{где} \qquad P_{k_i - s_i}(t) = A_0 + A_1 t + \ldots + A_{k_i - s_i} t^{k_i - s_i}.$$

Здесь $P_{k_i - s_i}(t)$ является векторным многочленом, т.е. каждой из $n$ координат соответствует свой многочлен степени $k_i - s_i$ с некоторыми коэффициентами, подлежащими определению.

Собственно говоря, *метод неопределенных коэффициентов* нужен только в случае кратных корней $\lambda_i$, когда число линейно-независимых собственных векторов меньше алгебраической кратности корня $\lambda_i$.

Чтобы найти векторы $A_0, A_1, \ldots, A_{k_i - s_i}$ для каждого такого собственного числа $\lambda_i$, надо подставить вектор-функцию $X_i(t)$ в исходную систему уравнений. Приравнивая коэффициенты при членах с одинаковыми степенями в левой и правой частях каждого уравнения, получим алгебраическую систему уравнений для нахождения неизвестных векторов $A_0, A_1, \ldots, A_{k_i - s_i}$.

Описанный здесь способ построения общего решения системы однородных дифференциальных уравнений иногда называют также *методом Эйлера*.

**Пример 1**

Найти общее решение линейной системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x - y, \qquad \frac{dy}{dt} = x + 3y.$$

*Решение.*
Вычислим собственные значения $\lambda_i$ матрицы $A$, составленной из коэффициентов данных уравнений:

$$\det\left(A - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \left(1-\lambda\right)\left(3-\lambda\right) + 1 = 0, \quad \Rightarrow 3 - \underline{3\lambda} - \underline{\lambda} + \lambda^2 + 1 = 0,$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \quad \Rightarrow \left(\lambda - 2\right)^2 = 0.$$

Следовательно, матрица $A$ имеет одно собственное число $\lambda_1 = 2$ кратностью $k_1 = 2$. Найдем ранг матрицы $A - \lambda_1 I$. Подставляя в матрицу $A$ значение $\lambda_1 = 2$ и выполняя элементарные преобразования, получаем:

$$\begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \left.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right|_{R_2 + R_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, ранг матрицы $A - \lambda_1 I$ равен 1. Тогда для числа $\lambda_1 = 2$ получаем геометрическую кратность $s_1 = 1$, т.е. мы имеем один собственный вектор:

$$s_1 = n - rank\left(A - \lambda_1 I\right) = 2 - 1 = 1.$$

Общее векторное решение будет выражаться формулой

$$X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_{k_1 - s_1}(t)\exp(\lambda_1 t) = P_1(t)\exp(\lambda_1 t) = (A_0 + A_1 t)\exp(2t).$$

Воспользуемся далее методом неопределенных коэффициентов. Пусть

$$x = (a_0 + a_1 t)\exp(2t), \qquad y = (b_0 + b_1 t)\exp(2t).$$

Производные будут равны

$$\frac{dx}{dt} = a_1 \exp(2t) + 2(a_0 + a_1 t)\exp(2t) = (2a_0 + a_1 + 2a_1 t)\exp(2t),$$
$$\frac{dy}{dt} = b_1 \exp(2t) + 2(b_0 + b_1 t)\exp(2t) = (2b_0 + b_1 + 2b_1 t)\exp(2t).$$

Подставляем функции $x$, $y$ и их производные в исходную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} (2a_0 + a_1 + 2a_1 t)\exp(2t) = (a_0 + a_1 t)\exp(2t) - (b_0 + b_1 t)\exp(2t) \\ (2b_0 + b_1 + 2b_1 t)\exp(2t) = (a_0 + a_1 t)\exp(2t) + 3(b_0 + b_1 t)\exp(2t) \end{cases}.$$

Сокращая на exp ($2t$) и приравнивая коэффициенты при членах $t$ с одинаковыми степенями в левой и правой части, получаем систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов $a_0$, $a_1$, $b_0$, $b_1$:

$$\begin{cases} 2a_0 + a_1 = a_0 - b_0 \\ 2a_1 = a_1 - b_1 \\ 2b_0 + b_1 = a_0 + 3b_0 \\ 2b_1 = a_1 + 3b_1 \end{cases}, \quad \Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + b_0 = 0 \\ a_1 + b_1 = 0 \\ a_0 + b_0 - b_1 = 0 \\ a_1 + b_1 = 0 \end{cases}.$$

В этой системе независимыми являются только два уравнения. Выберем в качестве свободных коэффициенты $a_0 = C_1$ и $a_1 = C_2$. Остальные два числа $b_0$ и $b_1$ выразим через $C_1$ и $C_2$:

$$C_1 + C_2 + b_0 = 0, \quad \Rightarrow b_0 = -C_1 - C_2,$$
$$C_2 + b_1 = 0, \quad \Rightarrow b_1 = -C_2.$$

Таким образом, общее решение системы записывается в виде

$$X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \exp(2t)\begin{pmatrix} a_0 + a_1 t \\ b_0 + b_1 t \end{pmatrix} = \exp(2t)\begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ -C_1 - C_2 - C_2 t \end{pmatrix}.$$

Его удобно переписать в векторной форме:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \exp(2t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \exp(2t)\begin{pmatrix} t \\ -1-t \end{pmatrix} = C_1 \exp(2t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \exp(2t)\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right].$$

**Пример 2**

Найти общее решение системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -2x - 3y - 5z, \qquad \frac{dy}{dt} = x + 4y + z, \qquad \frac{dz}{dt} = 2x + 5z.$$

*Решение.*

Сначала определим собственные числа матрицы данной системы, решив соответствующее характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 & -5 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладываем определитель по третьей строке:

$$2\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 4-\lambda & 1 \end{vmatrix} + (5-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow 2\left[-3+5(4-\lambda)\right] + (5-\lambda)\left[(-2-\lambda)(4-\lambda)+3\right] = 0,$$

$$\Rightarrow 2(-5\lambda+17) + (5-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 5) = 0, \quad \Rightarrow -\underline{\underline{10\lambda}} + \overline{34} + \underline{5\lambda^2} - \underline{\underline{10\lambda}} - \overline{25} - \lambda^3 + \underline{2\lambda^2} + \underline{\underline{5\lambda}} = 0,$$

$$\Rightarrow \lambda^3 - 7\lambda^2 + 15\lambda - 9 = 0.$$

Заметим, что одним из корней кубического уравнения является число $\lambda = 1$. Выделяя сомножитель $(\lambda - 1)$, получаем:

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda^2 + 6\lambda + 9\lambda - 9 = 0, \quad \Rightarrow \lambda^2(\lambda-1) - 6\lambda(\lambda-1) + 9(\lambda-1) = 0,$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 0, \quad \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-3)^2 = 0.$$

Таким образом, матрица системы уравнений имеет два собственных значения: $\lambda_1 = 1$ кратностью 1 и $\lambda_2 = 3$ кратностью 2.

Рассмотрим первый корень $\lambda_1 = 1$ и определим компонент общего решения $X_1$, ассоциированный с этим числом. Для этого вычислим соответствующий собственный вектор $V_1$. Запишем систему уравнений для определения координат вектора $V_1$:

$$\begin{pmatrix} -2-1 & -3 & -5 \\ 1 & 4-1 & 1 \\ 2 & 0 & 5-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix} = 0.$$

Упростим полученную систему:

$$\begin{cases} -3V_{11} - 3V_{21} - 5V_{31} = 0 \\ V_{11} + 3V_{21} + V_{31} = 0 \\ 2V_{11} + 4V_{31} = 0 \end{cases}, \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l|l} V_{11} + 3V_{21} + V_{31} = 0 & \\ -3V_{11} - 3V_{21} - 5V_{31} = 0 & R_2 + 3R_1 \\ 2V_{11} + 4V_{31} = 0 & R_3 - 2R_1 \end{array} \right., \quad \Rightarrow \begin{cases} V_{11} + 3V_{21} + V_{31} = 0 \\ 0 + 6V_{21} - 2V_{31} = 0 \\ 0 - 6V_{21} + 2V_{31} = 0 \end{cases},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{11} + 3V_{21} + V_{31} = 0 \\ 3V_{21} - V_{31} = 0 \end{cases}.$$

Выберем в качестве свободной переменной $V_{31} = t$. Остальные координаты выражаются через $t$ следующим образом:

$$3V_{21} = V_{31} = t, \quad \Rightarrow V_{21} = \frac{t}{3}, \quad \Rightarrow V_{11} = -V_{31} - 3V_{21} = -t - 3\cdot\frac{t}{3} = -2t.$$

Следовательно, собственный вектор $V_1$ равен:

$$V_1 = \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t/3 \\ t \end{pmatrix} \sim t\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, собственное число $\lambda_1 = 1$ вносит следующий вклад в общее решение:

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \exp(\lambda_1 t) V_1 = C_1 \exp(t)\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим собственное число $\lambda_2 = 3$ с алгебраической кратностью $k_2 = 2$. Выясним ранг матрицы после подстановки в нее значения $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} -2-3 & -3 & -5 \\ 1 & 4-3 & 1 \\ 2 & 0 & 5-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 1 & \\ 2 & 0 & 2 & R_2 - 2R_1 \\ -5 & -3 & -5 & R_3 + 5R_1 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как видно, $rank\,(A - \lambda_2 I) = 2$. Следовательно, число $\lambda_2 = 3$ характеризуется геометрической кратностью $s_2 = 1$ и имеет один собственный вектор:

$$s_2 = n - rank\left(A - \lambda_2 I\right) = 3 - 2 = 1.$$

Будем искать решение, связанное с собственным значением $\lambda_2$, в виде функции

$$X_2\left(t\right) = P_{k_2 - s_2}\left(t\right)\exp\left(\lambda_2 t\right) = \left(A_0 + A_1 t\right)\exp\left(3t\right),$$

где векторный многочлен $P_{k_2 - s_2}(t)$ имеет степень $k_2 - s_2 = 1$. Полагая

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ d_0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ d_1 \end{pmatrix},$$

запишем формулы для каждой координаты $X_2$:

$$x = \left(a_0 + a_1 t\right)\exp\left(3t\right), \quad y = \left(b_0 + b_1 t\right)\exp\left(3t\right), \quad z = \left(d_0 + d_1 t\right)\exp\left(3t\right).$$

Производные этих функций равны:

$$\frac{dx}{dt} = a_1 \exp\left(3t\right) + 3\left(a_0 + a_1 t\right)\exp\left(3t\right), \quad \frac{dy}{dt} = b_1 \exp\left(3t\right) + 3\left(b_0 + b_1 t\right)\exp\left(3t\right),$$
$$\frac{dz}{dt} = d_1 \exp\left(3t\right) + 3\left(d_0 + d_1 t\right)\exp\left(3t\right).$$

Подставляя данные выражения в исходную систему и сокращая на множитель exp (3$t$), имеем:

$$\begin{cases} a_1 + 3\left(a_0 + a_1 t\right) = -2\left(a_0 + a_1 t\right) - 3\left(b_0 + b_1 t\right) - 5\left(d_0 + d_1 t\right) \\ b_1 + 3\left(b_0 + b_1 t\right) = a_0 + a_1 t + 4\left(b_0 + b_1 t\right) + d_0 + d_1 t \\ d_1 + 3\left(d_0 + d_1 t\right) = 2\left(a_0 + a_1 t\right) + 5\left(d_0 + d_1 t\right) \end{cases}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $t$ в левой и правой части, получаем систему 6 уравнений с неизвестными $a_0$, $a_1$, $b_0$, $b_1$, $d_0$, $d_1$:

$$\begin{cases} a_1 + 3a_0 = -2a_0 - 3b_0 - 5d_0 \\ 3a_1 = -2a_1 - 3b_1 - 5d_1 \\ b_1 + 3b_0 = a_0 + 4b_0 + d_0 \\ 3b_1 = a_1 + 4b_1 + d_1 \\ d_1 + 3d_0 = 2a_0 + 5d_0 \\ 3d_1 = 2a_1 + 5d_1 \end{cases}, \quad \Rightarrow \begin{cases} 5a_0 + a_1 + 3b_0 + 5d_0 = 0 \\ 5a_1 + 3b_1 + 5d_1 = 0 \\ a_0 + b_0 - b_1 + d_0 = 0 \\ a_1 + b_1 + d_1 = 0 \\ 2a_0 + 2d_0 - d_1 = 0 \\ a_1 + d_1 = 0 \end{cases}.$$

В этой системе уравнений лишь два коэффициента являются независимыми. Это следует из того, собственное число $\lambda_2 = 3$ имеет алгебраическую кратность 2 и, поэтому, должно иметь два линейно-независимых решения. Выберем в качестве свободных переменных $a_0$ и $a_1$, обозначив

$$a_0 = C_2, \quad a_1 = 2C_3.$$

где $C_2$, $C_3$ − произвольные числа, а множитель 2 введен, чтобы избавиться от дробей. Остальные коэффициенты легко выражаются через $C_2$ и $C_3$ и представляются в виде:

$$a_0 = C_2, \quad b_0 = C_3, \quad d_0 = -C_3 - C_2, \quad a_1 = 2C_3, \quad b_1 = 0, \quad d_1 = -2C_3.$$

Тогда часть общего решения, обусловленная собственным числом $\lambda_2 = 3$, записывается как

$$\begin{cases} x(t) = (a_0 + a_1 t)\exp(\lambda_2 t) = (C_2 + 2C_3 t)\exp(3t) \\ y(t) = (b_0 + b_1 t)\exp(\lambda_2 t) = C_3 \exp(3t) \\ z(t) = (d_0 + d_1 t)\exp(\lambda_2 t) = (-C_3 - C_2 - 2C_3 t)\exp(3t) \end{cases}$$

Перепишем это решение в векторной форме:

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \exp(3t)\begin{pmatrix} C_2 + 2C_3 t \\ C_3 \\ -C_3 - C_2 - 2C_3 t \end{pmatrix} = C_2 \exp(3t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 \exp(3t)\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ -1-2t \end{pmatrix} =$$

$$= C_2 \exp(3t)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_3 \exp(3t)\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right].$$

Объединяя вместе все найденные компоненты, получим общее решение исходной системы в виде:

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t) = C_1 \exp(t)\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \exp(3t)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_3 \exp(3t)\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right].$$

**Пример 3**

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -6x + 5y, \quad \frac{dy}{dt} = -2x - y + 5z, \quad \frac{dz}{dt} = x - 3y + 4z.$$

*Решение.*
Начнем с вычисления собственных значений матрицы данной системы. Решаем характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 5 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 5 \\ 1 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладываем определитель по первой строке:

$$(-6-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 5 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow (-6-\lambda)\left[(-1-\lambda)(4-\lambda) + 15\right] - 5\left[-2(4-\lambda) - 5\right] = 0,$$

$$\Rightarrow (\lambda+6)(\lambda^2 - 3\lambda + 11) + 5(2\lambda - 13) = 0, \quad \Rightarrow \lambda^3 + \underline{6\lambda^2} - \underline{3\lambda^2} - \underline{\underline{18\lambda}} + \underline{\underline{11\lambda}} + 66 + \underline{\underline{10\lambda}} - 65 = 0,$$

$$\Rightarrow \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0, \quad \Rightarrow (\lambda+1)^3 = 0.$$

Итак, матрица имеет одно собственное значение $\lambda_1 = -1$ с алгебраической кратностью $k_1 = 3$. Найдем ранг матрицы при $\lambda_1 = -1$ и геометрическую кратность $s_1$:

$$\begin{pmatrix} -6+1 & 5 & 0 \\ -2 & -1+1 & 5 \\ 1 & -3 & 4+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{matrix} 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{matrix}\right\| \begin{matrix} \\ R_2 + R_1 \\ R_3 + 2R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -6 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $rank\,(A - \lambda_1 I) = 2$. Соответственно, геометрическая кратность (а также количество собственных векторов) для собственного числа $\lambda_1 = -1$ составляет

$$s_1 = n - rank(A - \lambda_1 I) = 3 - 2 = 1.$$

С учетом этого, общее решение $X$ будем искать в виде векторной функции

$$X(t) = P_{k_1 - s_1}(t)\exp(\lambda_1 t) = (A_0 + A_1 t + A_2 t^2)\exp(-t).$$

Пусть векторы $A_0, A_1, A_2$ имеют координаты

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ d_0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

Запишем координатные функции и найдем их производные:

$$x(t) = \left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right)\exp(-t),$$
$$y(t) = \left(b_0 + b_1 t + b_2 t^2\right)\exp(-t),$$
$$z(t) = \left(d_0 + d_1 t + d_2 t^2\right)\exp(-t),$$
$$\frac{dx}{dt} = \left(a_1 + 2a_2 t\right)\exp(-t) - \left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right)\exp(-t),$$
$$\frac{dy}{dt} = \left(b_1 + 2b_2 t\right)\exp(-t) - \left(b_0 + b_1 t + b_2 t^2\right)\exp(-t),$$
$$\frac{dz}{dt} = \left(d_1 + 2d_2 t\right)\exp(-t) - \left(d_0 + d_1 t + d_2 t^2\right)\exp(-t).$$

Подставляя в исходную систему и сокращая обе части каждого уравнения на экспоненциальную функцию $\exp(-t)$, получаем:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 t - a_0 - a_1 t - a_2 t^2 = -6\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) + 5\left(b_0 + b_1 t + b_2 t^2\right) \\ b_1 + 2b_2 t - b_0 - b_1 t - b_2 t^2 = -2\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) - \left(b_0 + b_1 t + b_2 t^2\right) + 5\left(d_0 + d_1 t + d_2 t^2\right) \\ d_1 + 2d_2 t - d_0 - d_1 t - d_2 t^2 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 - 3\left(b_0 + b_1 t + b_2 t^2\right) + 4\left(d_0 + d_1 t + d_2 t^2\right) \end{cases}.$$

Приравнивая члены при одинаковых степенях $t$ слева и справа, получаем систему 9 уравнений:

$$\begin{cases} a_1 - a_0 = -6a_0 + 5b_0 \\ 2a_2 - a_1 = -6a_1 + 5b_1 \\ -a_2 = -6a_2 + 5b_2 \\ b_1 - b_0 = -2a_0 - b_0 + 5d_0 \\ 2b_2 - b_1 = -2a_1 - b_1 + 5d_1 \\ -b_2 = -2a_2 - b_2 + 5d_2 \\ d_1 - d_0 = a_0 - 3b_0 + 4d_0 \\ 2d_2 - d_1 = a_1 - 3b_1 + 4d_1 \\ -d_2 = a_2 - 3b_2 + 4d_2 \end{cases}, \quad \Rightarrow \begin{cases} 5a_0 + a_1 - 5b_0 = 0 \\ 5a_1 + 2a_2 - 5b_1 = 0 \\ a_2 - b_2 = 0 \\ 2a_0 + b_1 - 5d_0 = 0 \\ 2a_1 + 2b_2 - 5d_1 = 0 \\ 2a_2 - 5d_2 = 0 \\ a_0 - 3b_0 + 5d_0 - d_1 = 0 \\ a_1 - 3b_1 + 5d_1 - 2d_2 = 0 \\ a_2 - 3b_2 + 5d_2 = 0 \end{cases}.$$

В этой системе содержится лишь три независимых переменных. Это следует из того, что общее решение $X$ должно содержать 3 линейно-независимых функции. Выберем в качестве независимых переменных

$$a_0 = C_1, \quad a_1 = C_2, \quad a_2 = C_3.$$

Остальные переменные выразим через $C_1, C_2, C_3$:

$$5b_0 = 5a_0 + a_1 = 5C_1 + C_2, \quad \Rightarrow b_0 = C_1 + \frac{1}{5}C_2;$$
$$5b_1 = 5a_1 + 2a_2 = 5C_2 + 2C_3, \quad \Rightarrow b_1 = C_2 + \frac{2}{5}C_3;$$
$$b_2 = a_2 = C_3;$$
$$5d_0 = 2a_0 + b_1 = 2C_1 + C_2 + \frac{2}{5}C_3, \quad \Rightarrow d_0 = \frac{2}{5}C_1 + \frac{1}{5}C_2 + \frac{2}{25}C_3;$$
$$5d_1 = 2a_1 + 2b_2 = 2C_2 + 2C_3, \quad \Rightarrow d_1 = \frac{2}{5}C_2 + \frac{2}{5}C_3;$$
$$5d_2 = 2a_2 = 2C_3, \quad \Rightarrow d_2 = \frac{2}{5}C_3.$$

Итак, общее решение можно записать в виде

$$x(t)=\left(a_0+a_1t+a_2t^2\right)\exp(-t)=\left(C_1+C_2t+C_3t^2\right)\exp(-t),$$

$$y(t)=\left(b_0+b_1t+b_2t^2\right)\exp(-t)=\left(C_1+\frac{C_2}{5}+\left(C_2+\frac{2}{5}C_3\right)t+C_3t^2\right)\exp(-t),$$

$$z(t)=\left(d_0+d_1t+d_2t^2\right)\exp(-t)=\left(\frac{2}{5}C_1+\frac{1}{5}C_2+\frac{2}{25}C_3+\left(\frac{2}{5}C_2+\frac{2}{5}C_3\right)t+\frac{2}{5}C_3t^2\right)\exp(-t).$$

Представим это решение в векторной форме, выделив явно линейно независимые векторы:

$$X(t)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\exp(-t)\begin{pmatrix}C_1+C_2t+C_3t^2\\ C_1+\frac{C_2}{5}+C_2t+\frac{2}{5}C_3t+C_3t^2\\ \frac{2}{5}C_1+\frac{1}{5}C_2+\frac{2}{25}C_3+\frac{2}{5}C_2t+\frac{2}{5}C_3t+\frac{2}{5}C_3t^2\end{pmatrix}=$$

$$=C_1\exp(-t)\begin{pmatrix}1\\1\\2/5\end{pmatrix}+C_2\exp(-t)\begin{pmatrix}t\\t\\1/5+2/5t\end{pmatrix}+C_3\exp(-t)\begin{pmatrix}t^2\\2/5t+t^2\\2/25+2/5t+2/5t^2\end{pmatrix}.$$

Перенормируем числа $C_1$, $C_2$, $C_3$, чтобы избавиться от дробных координат:

$$C_1\to 5C_1,\quad C_2\to 5C_2,\quad C_3\to 25C_3.$$

Тогда ответ записывается в виде:

$$X(t)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1\exp(-t)\begin{pmatrix}5\\5\\2\end{pmatrix}+C_2\exp(-t)\begin{pmatrix}5t\\5t\\1+2t\end{pmatrix}+C_3\exp(-t)\begin{pmatrix}25t^2\\10t+25t^2\\2+10t+10t^2\end{pmatrix}=$$

$$=C_1\exp(-t)\begin{pmatrix}5\\5\\2\end{pmatrix}+C_2\exp(-t)\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\5\\2\end{pmatrix}\right]+C_3\exp(-t)\left[\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\10\\10\end{pmatrix}+t^2\begin{pmatrix}25\\25\\10\end{pmatrix}\right].$$

Заметим, что общее решение содержит 3 линейно независимых вектора:

$$V_1=\begin{pmatrix}5\\5\\2\end{pmatrix},\quad V_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad V_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Остальные векторы будут коллинеарны указанным. Среди этих трех векторов вектор $V_1$ является собственным, а векторы $V_2$, $V_3$ называются *присоединенными*. При этом форма общего решения определяется структурой т.н. *жордановой матрицы* для данной системы. Более подробно эта техника рассматривается на странице Построение общего решения системы уравнений с помощью жордановой формы