КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №4

ПРОГРАММА

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Интегрирование дифференциальных уравнений 1-го порядка с разделяющимися переменными, однородных, линейных, уравнения Бернулли и в полных дифференциалах.

Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача коши. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка.

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Свойства линейного дифференциального оператора. Линейно-зависимые и линейно-независимые системы функций. Определитель Вронского.

Линейные однородные дифференциальные уравнения, условие линейной независимости их решения. Фундаментальная система решений. Структура общего решения. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянным коэффициентом.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Структура общего решения. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянным коэффициентом со специальной правой частью.

Нормальные системы дифференциальных уравнений. Автономные системы. Геометрический смысл решения. Фазовое пространство. Задача Коши для нормальной системы. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Метод исключения для решения нормальных систем дифференциальных уравнений.

Системы линейных дифференциальных уравнений, свойства решений. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Понятие о качественных методах исследования систем дифференциальных уравнений.

Литература

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука, 1980, 1988.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М.: Высш. школа, 1986.
3. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. В 2 ч. Ч. 1,2.— Мн.: Выш. школа, 1985.
4. Кудрявцев Д.Л. Краткий курс математического анализа. - М.: Йаука, 1989.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления-. Учебник для втузов. В 2 т. - М.: Наука, 1985. - Т. 1,2.
6. Щипачев В.С. Высшая математика. - Мн.: Выш. школа, 1985.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В общем случае дифференциальное уравнение первого порядка может быть записано в виде:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{4.1}$$

или, если разрешить его относительно y', в нормальной форме

$$y' = f(x, y) \tag{4.2}$$

Решением дифференциального уравнения называется такая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество.

Общим решением уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, c)$, которая при любом значении постоянной *c* является решением данного уравнения.

Теорема Коши. Если функция $f(x, y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{df\,(x,y)}{dy}$ в области D, содержащей $m(x_0, y_0)$, тогда найдется интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, на котором существует единственное решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (4.2), удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$.

Пару чисел (x_0, y_0) называют начальными условиями. Решения, которые получаются из общего решения $y = \varphi(x, c)$ при определенном значении произвольной постоянной c, называются частными.

Задача нахождения частного решения, удовлетворяющего начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$, называется задачей Коши.

4.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

называется дифференциальным уравнением с разделенными переменными. Его общим интегралом будет $\int P(x)dx + \int Q(y)dy = c$, где c – произвольная постоянная.

Уравнение вида

$$M_1(x)M_2(x)dx + N_1(y)N_2(y)dy = 0 \tag{4.4}$$

или

$$y' = \frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y)$$

(4.5)

а также уравнения, которые с помощью алгебраических преобразований приводятся к уравнениям(4.4) или (4.5) называются дифференциальными уравнениями с разделяющими переменными.

Разделение переменных в уравнениях (4.4) и (4.5) выполняется следующим образом: если $N_1\,(x) \neq 0, M_2\,(y) \neq 0$, то разделим обе части уравнения (4.4) на $N_1\,(x)M_2\,(y)$. Если $f_2(y) \neq 0$, то умножим обе части уравнения (4.5) на dx и разделим на $f_2(y)$. В результате получим уравнения с разделенными переменными вида

$$\frac{M_1\,(x)}{N_1\,(x)}dx + \frac{N_2\,(y)}{M_2\,(y)}dy = 0;$$

$$f_1(x)dx = \frac{dy}{f_2(y)}$$

Для нахождения всех решений полученных уравнений нужно проинтегрировать обе части полученных соотношений.

Пример 4.1. Решить уравнение

$$y' = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$$

Решение. Заменим$y' = \frac{dy}{dx}$. Разделив переменные и интегрируя, получим

$$\frac{ydy}{1+\,y^2} = \frac{dx}{x(1+x^2)}; \ \int\frac{ydy}{1+\,y^2} = \int\frac{dx}{x(1+x^2)} + C$$

Разложим подынтегральную дробь на простейшие:

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+D}{1+x^2}\,, \qquad A = 1, \qquad B = -1, \qquad D = 0.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln|C|$$

$$\frac{1}{2}\ln|(1+x^2)(1+y^2)| = 2\ln|Cx|$$

$(1+x^2)(1+y^2) = c^2x^2$ – общий интеграл уравнения. Разрешая относительно y, имеем общее решение уравнения

$$y = \pm\sqrt{\frac{C^2x^2}{(1+x^2)} - 1}$$

4.2. Однородные уравнения

Функция $f(x,y)$называется однородной функцией n-го измерения относительно переменных xи y, если при любом t справедливо тождество

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y) \tag{4.6}$$

Например: $f(x,y) = x^3 + 3x^2y$ –однородная функция третьего измерения относительно переменных .x и y,так как

$$f(tx,ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2(ty) = t^3(x^3 + 3x^2y) = t^3t(x,y)$$

Функция$\varphi(x,y) = \frac{x-y}{x+2y}$ является однородней функцией нулевого измерения, так как $\varphi(tx,ty) = t^0\varphi(x,y) = \varphi(x,y)$. Функция $\varphi(x,y) = x^3 + 3x^2y - x$ однородной не является, так как для нее условие (4.6) не выполняется ни при каком n.

Дифференциальное уравнение в нормальной форме $y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$ называется однородным относительно переменныхx и y, если $f(x,y)$–однородная функция нулевого измерения.

Дифференциальное уравнение в дифференциальной форме

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

называется однородным, если функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – однородные функцииодного и того же измерения. При помощи подстановки$y = ux$, где $u(x)$ – неизвестная функция, однородное уравнение преобразуется к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 4.2. Решить дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$$

Решение. Это однородное уравнение, так как$f(x,y) = \frac{y^2}{x^2} - 2$– однородная функция нулевого измерения. Положим $y = ux$, $y' = u'x + u$.

Тогда $u'x + u = u^2 - 2$, $u'x = u^2 - u - 2$.

$$\frac{dy}{dx}x = u^2 - u - 2, \qquad \frac{du}{u^2 - u - 2} = \frac{dx}{x} -$$
уравнение с разделенными переменными. Интегрируя, получим

$$\int \frac{du}{(u-\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}} = \int \frac{dx}{x}\,, \qquad \frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-2}{u+1}\right| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$\left|\frac{u-2}{u+1}\right| = C^3x^3\,, \qquad \frac{\frac{y}{x}-2}{\frac{y}{x}+1} = Cx^3, \qquad y - 2x = Cx^3(y+x) -$$

общий интеграл данного уравнения. Разрешая относительно y, получим общее решение

$$y = \frac{x(2 + Cx^3)}{1 - Cx^3}\,.$$

Пример 4.3. Найти частное решение уравнения решение уравнения

$$(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0,$$

удовлетворяющее начальному условию $y_{x=0} = 1$.

Решение. $M(x,y) = 2xy,\ N(x,y) = y^2 - 3x^2$ —однородные функции второго измерения. Подстановка $y = ux, y' = u'x + u$приводит уравнение к виду

$$\frac{(u^2-3)du}{u(1-u^2)} = \frac{dx}{x}\,.$$

Интегрируя, получим

$$\int \frac{(u^2-3)du}{u(1-u)(1+u)} = \int \frac{dx}{x}, \qquad \frac{u^2-3}{u(1-u)(1+u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1-u} + \frac{D}{1+u},$$

$$A = -3, \qquad B = -1, \qquad D = 1.$$

$$-3\ln|u| + \ln|1-u| + \ln|1+u| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$\left|\frac{1-u^2}{u^3}\right| = |Cx|, \qquad \frac{1-\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y^3}{x^3}} = Cx, \qquad C = \ln|C|$$

$x^2 - y^2 = Cy^3$ —общий интеграл данного уравнения. Найдем частный интеграл, удовлетворяющий условию

$y_{x=0} = 1,\ 0 - 1 = C,\ C = -1,$

$y^3 = y^2 - x^2$ —частное решение уравнения.

4.3. Линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка

Линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка имеет вид

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{4.7}$$

Такое уравнение можно решать с помощью замены

$$y = u(x)v(x)$$

где$u(x)$ и $y(x)$ $-$неизвестные функции

Тогда $\frac{dv}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$ и уравнение (4.7) примет вид

$$v\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dv}{dx} + P(x)v\right) = Q(x) \tag{4.8}$$

Функцию *v*подбираем так, чтобы выражение в скобках было равно нулю, то есть в качестве *v*возьмем одно из частных решений уравнения

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0.$$

Подставляя выражение $v = v(x)$в уравнение (4.8), получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$v\frac{du}{dx} = Q(x)$$

Найдя общее решение этого уравнения в виде $u = u(x, C)$, получим общее решение уравнения (4.3) $y = u(x, C)v(x)$.

Пример 4.4.Найти общее решение уравнения

$$y' - y \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x}$$

Полагаем $y = u(x)v(x)$, тогда $y' = u'v + v'u$ и данное уравнение примет вид

$$u'v + v'u - uv \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x}$$

$$u'v + u(v' - v \operatorname{ctg} x) = \frac{1}{\sin x} \tag{4.9}$$

Решая уравнение $v' - v\mathrm{ctg}x = 0$, найдем одно из его частных решений

$$\frac{dv}{dx} = v\operatorname{ctg} x, \qquad \frac{dv}{v} = \operatorname{ctg} x dx,$$
$$\ln|v| = \ln|\sin x| \Rightarrow v = \sin x$$

Подставляя vв уравнение (4.9), получим

$$u' \sin x = \frac{1}{sinx}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin^2 x},$$
$$du = \frac{dx}{\sin^2 x} \Rightarrow u = -\operatorname{ctg} x + C$$

Общее решение исходного уравнения
$$y = uv = (-\operatorname{ctg} x + C)\sin x = -\cos x + C\sin x$$

4.4. Уравнение Бернулли

Уравнение Бернулли имеет вид

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m, \text{где } m \neq 0,\ m \neq 1$$

Такое уравнение можно проинтегрировать с помощью подстановки $y = uv$ или свести к линейному уравнению с помощью замены $z = y^{1-m}$.

Пример 4.5. Решить уравнение
$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x^2}{y}$$

Полагая у $= uv$, приводим уравнение к виду

$$v\left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{x}\right) + \left(\frac{dv}{dx}u - \frac{x^2}{uv}\right) = 0 \tag{4.10}$$

Уравнение $\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0$ имеет частное решение u=x.

Подставляя u в (4.10), получаем уравнение

$$\frac{dv}{dx}x - \frac{x^2}{xv} = 0, \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}$$

Его общее решение $v = \pm\sqrt{2x + C}$. Общее решение исходного уравнения$y = x(\pm\sqrt{2x + C})$.

Пример 4.6. Решить уравнение Бернулли относительно $x = x(y)$.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{2y} - \frac{1}{2x}$$

Полагая$x = uv$, получим

$$v\left(\frac{du}{dy} - \frac{u}{2y}\right) + \left(\frac{dv}{dy}u + \frac{1}{2uv}\right) = 0 \tag{4.11}$$

Уравнение $\frac{du}{dy} - \frac{u}{2y} = 0$имеет частное решение$u = \sqrt{y}$. Подставляя значение и в уравнение (4.11), перейдем к уравнению

$$\frac{dv}{dy}\sqrt{y} + \frac{1}{2v\sqrt{y}} = 0 \Rightarrow v^2 = \ln\left|\frac{C}{y}\right|$$

Отсюда $x = \sqrt{y}\ln^{1/2}\left|\frac{C}{y}\right|, \qquad x^2 = y\ln\left|\frac{C}{y}\right|$

4.5. Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах

Уравнение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{4.12}$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, то есть

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$непрерывно дифференцируемы поy и x соответственно в односвязной области D.

Теорема. Для того, чтобы уравнение (4.12) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \forall(x,y) \in D$$

Решение уравнения (4.12) в полных дифференциалах можно записать в виде

$$u(x, y) = C$$

Функция $u(x, y)$может быть найдена из системы

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \tag{4.13}$$

Общий интеграл уравнения (4.12) можно представить в виде

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy = C,$$

где$(x_0, y_0) \in D$

Пример 4.7. Решить уравнение

$$e^x(x\sin y + y\cos y)dx + e^x(x\cos y - y\sin y)dy = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y), \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y).$$

Следовательно, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдем функцию$u(x, y)$. Система (4.13) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x(x\sin y + y\cos y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = e^x(x\cos y - y\sin y)$$

Из первого уравнения этой системы находим

$$u(x, y) = \int e^x(x\sin y + y\cos y)\, dx + \varphi(y) =$$

$$= e^x x\sin y - e^x \sin y + e^x y\cos y + \varphi(y),$$

где$\varphi(y)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Подставляя $u(x,y)$ во второе уравнение системы, имеем

$$e^x x\cos y - e^x \cos y + e^x \cos y - e^x y\sin y + \varphi'(y) =$$

$$= e^x x\cos y - e^x y\sin y \Longrightarrow \varphi^{'(y)} = 0 \Longrightarrow \varphi(y) = C.$$

Следовательно, $u(x,y) = e^x(x\sin y - \sin y + y\cos y) + C$.
Общий интеграл уравнения имеет вид

$$e^x(x\sin y - \sin y + y\cos y) + C = 0$$

4.6. Дифференциальные уравнения высших порядков. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

или если оно разрешено относительно $y^{(n)}$, то $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$. Задача нахождения решения $y = \varphi(x)$ данного уравнения, удовлетворяющего начальным условиям

$$y_{x=x_0} = y_0, \qquad y'_{x=x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}{}_{x=x_0} = y_0{}^{(n-1)},$$

называется задачей Коши.

Укажем некоторые виды дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

1. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$. После n-кратного интегрирования получается общее решение.

2. Уравнение не содержит искомой функции и ее производных до порядка $(k$-1) включительно:

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Порядок такого уравнения можно понизить на k единиц заменой $y^k(x) = P(x)$. Уравнение примет вид

$$F\left(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}\right) = 0$$

Из последнего уравнения, если это возможно, определяем $p = f(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$ а затем находим y из уравнения $y^k = f(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$ кратным интегрированием.

3. Уравнение не содержит независимой переменной

$$F\left(y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Подстановка $y' = z(y)$позволяет понизить порядок уравнения на 1.

Все производные $y', y'', \dots, y^{(n)}$выражаются через производные от новой неизвестной функции$z(y)$ по y:

$$y' = z, \qquad y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z, \quad y''' = \frac{d^2 z}{dy^2} z^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 z$$

и т. д. Подставив эти выражения в уравнение вместо$y, y'', \dots y^{(n)}$, получим дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка.

Замечание. При решении задачи Коши во многих случаях нецелесообразно находить общее решение уравнения; начальные условия лучше использовать непосредственно в процессе решения.

Пример 4.8.Решить задачу Коши

$$yy'' = y^4 + (y')^2, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

Решение.Данное уравнение не содержит независимую переменную, поэтому полагаем$y' = z(y)$. Тогда $y'' = z\frac{dz}{dy}$иуравнение принимает вид$yz\frac{dz}{dy} - z^2 = y^4$.

Пусть$yz \neq 0$, тогда мы получаем уравнение Бернулли относительно $z = z(y)$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{z}{y} + \frac{y^3}{z}$$

Решая его, находим$z = \pm y\sqrt{y^2 + C_1}$. Из условия $y' = z = 0$при $y = 1$имеем$C_1 = -1$, следовательно$z = \pm y\sqrt{y^2 - 1}$или$\frac{dy}{dx} = \pm y\sqrt{y^2 - 1}$.Интегрируя этодифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, имеем $arccos\frac{1}{y} \pm x = C_2$. Полагая $y = 1$ и$x = 0$, получим$C_2 = 0$,откуда$\frac{1}{y} = cos\, x$ или$y = sec\, x$.

Остаюсь заметить, что случай $yz = 0$не дает решений поставленной задачи Коши.

5. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

5.1. Линейное однородное дифференциальное уравнение *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \tag{5.1}$$

где$a_1=\mathrm{const}, a_1\in R$.

Для нахождения общего решения уравнения (5.1) составляется характеристическое уравнение

$$k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0 \tag{5.2}$$

и находятся его корни$k_1,k_2,\ldots,k_n$. Возможны следующие случаи:

1. Все корни $k_1,k_2,\ldots,k_n$ характеристического уравнения (5.2) действительны и различны. Общее решение уравнения (5.1) выражается формулой

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}+\ldots+C_ne^{k_nx} \tag{5.3}$$

2. Характеристическое уравнение имеет пару однократных комплексно-сопряженных корней$k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$.В формуле (5.3) соответствующая пара членов $C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$заменяется слагаемым

$$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

3. Действительный корень k_1уравнения (5.2) имеет кратностьr $(k_1=k_2= =\ldots=k_r)$.. Тогда соответствующие rчленов Место для формулы. в формуле (5.3) заменяются слагаемым

$$e^{k_1x}(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_rx^{r-1})$$

4. Пара комплексно сопряженных корней $k_{1,2}=\alpha\pm\beta$уравнения(5.2) имеет кратность r. В этом случае соответствующие r пар членов $C_1e^{k_1x}+\ldots+C_{2r}e^{k_2x}$ в формуле (5.3) заменяются слагаемым

$$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\ldots+C_rx^{r-1})\cos\beta x+(C_{r+1}+C_{r+2}x+\ldots+C_{2n}x^{r-1})\sin\beta x]$$

Пример 5.1. Решить уравнение$y^{IV}-5y''+4y=0$. Характеристическое уравнение $k^4-5k^2+4=0$имеет корни$k_{1,2}=1\pm 2i, k_{3,4}=\pm 2$.Общее решение дифференциального уравнения

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}$$

Пример 5.2. Решить уравнение$y''-2y'+5y=0$. Характеристическое уравнение $k^2-2k+5=9$имеет корни $k_{1,2}=1\pm 2i$. Общее решение имеет вид

$$y=e^x(C_1\,cos\,2x+C_2\,sin\,2x)$$

Пример 5.3. Решить уравнение$y''-2y'+y=0$. Характеристическое уравнение $k^2-2k+1=0$ имеет 2-кратный корень $k_{1,2}=1$, поэтомуобщее решение имеет вид

$$\mathrm{y}=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}(\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2x)$$

Пример 5.4. Решить уравнение$y^V+8y''+16y'=0$.Характеристическое уравнение $k^5+8k^2+16k=0$имеет корни $k_1=0$, $k_{2,3}=2i$, $k_{4,5}=-2i$.Общее решение уравнения

$$y=C_1+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x+C_4\cos 2x+C_5\sin 2x$$

5.2.Линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\boldsymbol{y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)} \tag{5.4}$$

где$\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{f(x)}$ – непрерывная функция.

Пусть

$$\mathbf{y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n} \tag{5.5}$$

общее решение однородного уравнения (5.1), соответствующего уравнению (5.4). Метод вариации постоянных состоит в том, что общее решение уравнения (5.4) ищется в виде

$$y=\mathrm{C}_1(\mathrm{x})\mathrm{y}_1+\mathrm{C}_2(\mathrm{x})\mathrm{y}_2+\ldots+\mathrm{C}_\mathrm{n}(\mathrm{x})\mathrm{y}_\mathrm{n}$$

где $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ – неизвестные функции. Эти функции определяютсяиз системы

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C'_2(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0; \\ C'_1(x)y_1' + C'_2(x)y_2' + \ldots + C'_n(x)y_n' = 0; \\ \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\, y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x), \end{cases}$$

где $C_1' = \frac{dC_1(x)}{dx}$ – производные функций $C_1(x)$. Для уравнения второгопорядка$y'' + p + q = f(x)$ данная система имеет вид

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C'_2(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C'_2(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

Пример 5.5. Решить уравнение

$$y'' - y' = \frac{1}{1+e^x}$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет корни $k_1 = 0$, $k_2 = 1$. Поэтому общее решение однородного уравнения будет таким: $y = C_1 + C_2 e^x$. Положим $C_1 = C_1(x)$ и $C_2 = C_2(x)$. Запишемсистему для определения$C'_1 = C'_1(x)$ и $C'_2 = C'_2(x)$:

$$\begin{cases} C'_1(x)y_1 + C'_2(x)e^x = 0; \\ C'_2(x)e^x = \dfrac{1}{1+e^x} \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$C'_2(x) = \frac{1}{e^x(1+e^x)}, \qquad C'_1(x) = \frac{1}{1+e^x}$$

откуда

$$C'_1(x) = -\int \frac{dx}{1+e^x} = -\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = \int \frac{d(e^{-x}+1)}{e^{-x}+1} = \ln|e^{-x}+1| + \tilde{C}_1$$

$$C'_2(x) = \int \frac{dx}{e^x(1+e^{-x})} = \int \frac{e^{-2x}}{e^{-x}+1}dx = \int \frac{(e^{-x})^2 - 1}{e^{-x}+1}dx + \int \frac{dx}{e^{-x}+1} =$$

$$= \int (e^{-x} - 1)dx + \int \frac{dx}{e^{-x}+1} = -e^{-x} - x + \int \frac{e^x dx}{1+e^x} =$$
$$= -e^{-x} - x + \ln|e^x + 1| + \tilde{C}_2$$

где $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 -$ произвольные постоянные.

Общее решение запишется так:

$$y = \ln(e^{-x} + 1) + \tilde{C}_1 + e^x(-e^{-x} - x\ln(1 + e^x) + \tilde{C}_{2)}$$

6. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ СО СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x) \tag{6.1}$$

где $a_1 \in R,\ f(x) -$ непрерывная функция. Соответствующим однородным уравнением будет

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \tag{6.2}$$

Пусть

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{6.3}$$

характеристическое уравнение для уравнения (6.2). Общее решение y уравнения (6.1) равно сумме общего решения $\bar{y}$соответствующего однородного уравнения (6.2) и какою-либо частного решения y^*неоднородного уравнения (6.1), то есть

$$y = \bar{y} + y^*$$

1) Если правая часть уравнения (6.1) имеет вид$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, где $P_n(x) -$ многочлен степени n, то частное решение уравнения (6.1) может быть найдено в виде

$$y^* = x' e^{\alpha x} Q(x),$$

где $Q(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$ $-$некоторый многочлен степени n с неопределенными коэффициентами, а r - число, показывающее, сколько раз α является корнем характеристического уравнения для соответствующего однородного уравнения (6.2).

Пример 6.1. Найти общее решение уравнения

$$y'' - y = xe^{2x}$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение $k^2 - 1 = 0$соответствующего однородного уравнения. Его корни$k_1 = 1,\ k_2 = -1$. Так как число $\alpha = 2$ корнем характеристического уравнения не является, то $r = 0$. Степень многочлена в правой части равна единице. Поэтому частное решение ищем в виде

$$\mathbf{y^* = (ax + b)e^{2x}}$$

Находим $y' = (2ax + 2b + a)e^{2x}$, $y'' = (4ax + 4b + 4a)e^{2x}$и, подставляя y'', y'и yв уравнение, получим (после сокращения на e^{2x})

$$4a + 4ax + 4b - ax - b = x$$

Откуда находим:

$$\begin{array}{c|ll} x & 3a = 1, & a = 1/3 \\ x^0 & 4a + 3b = 0, & b = -4/9 \end{array}$$

Искомое частное решение имеет вид

$$y^* = \frac{1}{9}(3x - 4)e^{2x}$$

а общее решение уравнения будет

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{9}(3x - 4)e^{2x}$$

2) Если правая часть уравнения (6.1) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + \ Q_m\,(x)\sin\beta x) \tag{6.4}$$

где$P_n(x)$ и $Q_m(x)$ −многочлены n- й и m-йстепени соответственно, тогда:

а) если числа $\alpha \pm \beta$не являются корнями характеристического уравнения (6.3), то частное решение уравнения (6.1) ищется в виде

$$y^* = e^{\alpha x}(u_S(x)\cos\beta x + v_S\,(x)\sin\beta x) \tag{6.5}$$

где u_S и v_S —многочлены степени s с неопределенными коэффициентами и$s = max\{n, m\}$;

6) если числа $\alpha \pm \beta$являются корнями краткости r характеристическою уравнения (6.3), то частное решение уравнения (6.1) ищется в виде

$$\boldsymbol{y^* = x^r e^{\alpha x}(u_S(x)\cos\beta x + v_S\,(x)\sin\beta x)} \tag{6.5}$$

гдеu_S и v_Sмногочлены степени s с неопределенными коэффициентами $s = max\{n, m\}$.

Замечания.

1. Если в (6.4) $P_n(x) \equiv 0$ или$Q_m(x) \equiv 0$, то частное решение $y*$ также ищется в виде (6.5), (6.6), где$s = m$ (или $s = n$).

2. Если уравнение (6.1) имеет вид$L(y) = f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение $y*$ такого уравнения можно искать в виде $y^* = {y_1}^* + {y_2}^*$, где ${y_1}^*$ —частное решение уравнения $L(y) = f_1(x)$, а ${y_2}^*$ —частное решение уравнения$L(y) = f_2(x)$.

Пример 6.2. Найти общее решение уравнения

$$y'' - y' = e^x + e^{2x} + x$$

Решение. Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$y'' + y' = 0$$

характеристическое уравнение $k^2 - k = 0$ имеет корни$k_1 = 0,\ k_2 = 1.$ Общее решение однородного уравнения:

$$y = C_1 + C_2 e^x$$

Правая часть данного уравнения есть сумма

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = e^x + e^{2x} + x$$

Поэтому находим частные решения для каждого из трех уравнений:

$$y'' - y' = e^x, \qquad y'' - y' = e^{2x}, \qquad y'' - y' = x$$

Частное решение первого уравнения ищем в виде${y_2}^* = Axe^x$, так как $\alpha =$

1является однократным корнем характеристического уравнения и $P_n(x) = x$ −многочлен нулевой степени. Поскольку

$$y_1{}^{*'} = Ae^x + Axe^x, \qquad y_1{}^{*''} = Ae^x + Ae^x + Axe^x = 2Ae^x + Axe^x$$

то, подставляя эти выражения в первое уравнение,

$$2Ae^x + Axe^x - Ae^x - Axe^x = e^x \text{ или } Ae^x = e^x \Longrightarrow A = 1 \text{ и } y_1{}^* = xe^x$$

Частное решение второго уравнения будем находить в виде$y_1{}^* = Ae^{2x}$, так как в правой части второго уравнения $\alpha = 2$не является корнем характеристическою уравнения и $P_n(x) = x$ −многочлен нулевой степени.

Определяя, как и выше, постоянную A, получим $y_2{}^* = \frac{1}{2}e^{2x}$.Частное решение третьего уравнения будем находить в виде$y_3{}^* = x(Ax + B)$,так как в правой части третьего уравнения $\alpha = 0$является однократным корнем характеристического уравнения и $P_n(x) = x$многочленпервой степени. Поскольку$y_3{}^{*'} = 2Ax + B$, $y_3{}^{*''} = 2A$,то, подставляя эти выражения в третье уравнение, имеем$2A - 2ax - B - B = x$. Приравнивая коэффициенты при xи свободные члены в левой и правой частях равенства, получаем систему$-2A = 1,\ BA - B = 0$, откуда находим$A = -\frac{1}{2}, B = -1$.

Следовательно, $y_3{}^* = -x(\frac{1}{2}x + 1)$

Суммируя частные решения, получаем частное решение $y*$ исходного уравнения $y^* = y_1{}^* + y_3{}^* = xe^x + \frac{1}{2}e^{2x} - x(\frac{1}{2}x + 1)$. Тогда общее решение данного неоднородного уравнения будет

$$y = y + y^* = C_1 + C_2e^x + xe^x + \frac{1}{2}e^{2x} - x\left(\frac{1}{2}x + 1\right) =$$

$$= C_1 + (C_2 + x)e^x + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - x$$

Пример 6.3. Найти частное решение уравнения$y'' + y = 4x\cos x$, удовлетворяющее начальным условиям$y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$имеет корни $k_1 = i,\ k_2 = -i$. Поэтому общим решением соответствующего однородного уравнения$y'' + y = 0$ будет $y = C_1\cos x + C_2\sin x$. Для первой части данного уравнения $\alpha = 0,\ \beta = 1$, $P_n(x) = 4x$ −многочлен первой степени $(n = 1)$, $Q_m(x) = 0 -$ многочлен нулевой степени $(m = 0)$; $s = max\{1,0\} = 1, \alpha + i\beta = i -$ являются корнями характеристического уравнения. Поэтому частное решение данного уравнения находим в виде $y^* = x\,((Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x)$ или $y^* == (Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x$.

Находим

$\mathrm{y^{*'} = (Ax + B)\cos x + (2Cx + D)\sin x -}$

$\mathrm{-(Ax^2 + Bx)\sin x + (Cx^2 + Dx)\cos x =}$

$\mathrm{= (2Ax + B + Cx^2 + Dx)\cos x + (2Cx + D + Ax^2 - Bx)\sin x;}$

$\mathrm{y^{*''} = (2A + 2Cx + Dx)\cos x - (2Ax + B + Cx^2 + Dx)\sin x +}$

$\mathrm{+(2C - 2Ax - B)\sin x + (2Cx + D - Ax^2 - Bx)\cos x =}$

$= (2A + 4Cx + 2D - Ax^2 - Bx)\cos x + (2C - 4Ax - 2B - Cx^2 - Dx)\sin x$

Подставляя$y^*, y^{*'}, y^{*''}$ в заданное уравнение, имеем

$(2A + 2ACx + 2D - Ax^2 - Bx)\cos x + (2C - 4Ax - 2B - Cx^2 - Dx)\sin x +$

$+(Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x = 4x\cos x$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$, $\sin x$, $x\cos x$, $x\sin x$в обеих частях равенства, получаем систему

$$\begin{array}{r|l} \cos x & 2A + 2D = 0 \\ \sin^0 x & 2C - 2B = 0 \\ x\cos x & 4C - B + B = 0 \\ x\sin x & -4A - D + D = 0 \end{array}$$

Решая эту систему, находим$A = 0, B = 1, C = 1, D = 0$.

Тогда

$$y^* = x\cos x + x^2\sin x$$

Общее решениебудет$y = y + y^* = C_1\cos x + C_2\sin x + x\cos x + x^2\sin x$.Находим $y' = -C_1\sin x + C_2\cos x + \cos x - x\sin x + 2x\sin x + x^2\cos x$. Так как$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, то $0 = C_1, C_1 = C_2 + 1$. Таким образом,$C_1 = 0, C_2 = 0$. Подставляя значения $C_1 = 0, C_2 = 0$в общее решение, получим частное решение$y = x\cos x + x^2\sin x$.

Пример 6.4. Определить вид частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения, если известны корни $k_1 = 3 - 2i, k_2 = 3 + 2i -$ его характеристического уравнения и праваячасть

$$f(x) = e^{3x}(\cos 2x + \sin 2x)$$

Решение. В правой части $\alpha = 3, \beta = 2, P_n(x) = 1, Q_m(x) = 1$ −многочлены нулевой степени, $\alpha \pm \beta i = 3 \pm 2i$ являются корнями характеристического уравнения. Поэтому частное решение будет иметь вид

$$y^* = xe^{3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

где A и B −неопределенные коэффициенты.

7. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА

7.1. Нормальная система n-го порядка обыкновенных дифференциальных уравнений

Нормальная система n-го порядка обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n); \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n); \\ \qquad\qquad \dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n); \end{cases}$$

где t–независимая переменная, $x_1, x_2, \dots, x_n$ −неизвестные функции от $t, f_1, f_2, \dots, f_n$ − заданные функции.

Метод исключения неизвестных состоит в том, что данная система приводится к одному дифференциальному уравнению n-го порядка с одной неизвестной функцией (или к нескольким уравнениям, сумма порядков которых равна n). Для этого последовательно дифференцируют одно из уравнений системы и исключают все неизвестные функции, кроме одной.

Пример 7.1. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{t}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{y(x + 2y - 1)}{t(x - 1)}$$

и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $x(1) = -1$, $y(1) = 4$.

Решение. Дифференцируем первое уравнение по t:

$$x'' = \frac{y' t - y}{t^2}$$

Заменяя здесь y'ее значением из второго уравнения системы и подставляя $y = x't$, найденное из первого уравнения, получим после упрощения уравнение второго порядка $x'' = \frac{2(x')^2}{x-1}$.

Интегрируем это уравнение, предварительно понижая порядок:

$$x' = p, \qquad p = p(x), \qquad x'' = \frac{dp}{dx}p, \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{2p}{x - 1}, \qquad \frac{dp}{p} = \frac{2dx}{x - 1},$$

$$p = C_1(x - 1)^2, \qquad \frac{dx}{dt} = C_1(x - 1)^2, -\frac{1}{x - 1} = C_1 t + C_2,$$

$$x = \frac{C_1 t + C_2 - 1}{C_1 t + C_2}$$

Дифференцируя эту функцию и подставляя в выражение $y = x't$ получим:

$$y = \frac{C_1 t}{(C_1 t + C_2)^2}$$

Общим решением заданной системы дифференциальных уравнений будет

$$x = \frac{C_1 t + C_2 - 1}{C_1 t + C_2}, \qquad y = \frac{C_1 t}{(C_1 t + C_2)^2}$$

Для нахождения частного решения подставим начальные условия $x(1) = -1, y(1) = 4$. Получим $-1 = \frac{C_1 + C_2 - 1}{C_1 + C_2}, 4 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$, откуда $C_1 = 1, C_2 = -\frac{1}{2}$

Следовательно, искомым частным решением системы будут функции

$$x = \frac{2t-3}{2t-1}, \qquad y = \frac{4t}{(2t-1)^2}$$

Пример 7.2. Найти общее решение системы

$$\frac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^{'}, \qquad \frac{dy}{dt} = x - 6y - e^{-2t}$$

Решение. Дифференцируем первое уравнение:$x^{''} = 2y^{'} - 5x^{'} + e'$. Заменяем y' ее значением из второго уравнения и подставляем затем$y = \frac{1}{2}(x^{'} + 5x - e')$. Получим линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$x^{''} + 11x^{'} + 28x = 2e^{-2t} + 7e'$$

Его общее решение

$$x = C_1e^{-4t} + C_2e^{-7t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{7}{40}e'$$

(получено как сумма общего решения $x = C_1e^{-4t} + C_2e^{-7t}$соответствующегооднородного уравнения и частого решения $x^* = \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{7}{40}e'$неоднородного уравнения).

Подставляя x и x'в выражение дляy, получим

$$y = \frac{1}{2}(x^{'} + 5x - e') = \frac{1}{2}C_1e^{-4t} + C_2e^{-7t} + \frac{3}{10}e^{-2t} + \frac{1}{40}e'$$

Общее решение исходной системы имеет вид

$$x = C_1e^{-4t} + C_2e^{-7t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{7}{40}e'$$

$$y = \frac{1}{2}C_1e^{-4t} + C_2e^{-7t} + \frac{3}{10}e^{-2t} + \frac{1}{40}e'$$

7.2.Линейная однородная система *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Линейная однородная система n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

где $a_y = const,\ a_y \in R,\ x_i$ –неизвестные функции от t.

Данную систему можно записать в матричной форме

$$\frac{dx}{dt} = AX$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \ldots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}$$

При решении линейной системы дифференциальных уравнений методом Эйлера частные решения системы ищутся в виде$X = Ve^{kt}$, где $V \neq 0$ –матрица-столбец, k – число.

Если корни $k_1, k_2, \ldots, k_n$ характеристического уравнения $det(A - kE) = 0$действительны и различны, общее решение системы имеет вид

$$X = C_1V_1e^{k_1t} + C_2V_2e^{k_2t} + \ldots + C_nV_ne^{k_nt}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ –произвольные постоянные; V – собственный вектор-столбец матрицы Aсоответствующий числу k то есть $(A - k_jE)V_1 = 0$, где E – единичная матрица.

Замечание. Если $k_m, \bar{k}_m$ – пара простых комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения, то им соответствуют два действительных частных решения$Re(V_m, e^{k_mt})$; $lm(V_m, e^{k_mt})$, где $Re\,z\,, lm\,z$ – действительные и мнимые части z.

Пример 7.3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y + 2z \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y - 2z \\ \frac{dz}{dt} = x + 5y - 3z \end{cases}$$

и частное решение, удовлетворяющее условиям$x(0) = 1, y(0) = -2, z(0) = 0$

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-k & -2 & 2 \\ 1 & 4-k & -2 \\ 1 & 5 & -3k \end{vmatrix} = 0, (k^2-k-2)(1-k) = 0,\ k_1 = -1, k_2 = 1, k_3 = 2$$

Находим собственный вектор V_1, соответствующий корню$k_1 = -1$:

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1-(-1) & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -(-1)-2 \\ 1 & 5 & -3\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2v_1 - 2v_2 + 2v_3 = 0 \\ v_1 + 5v_2 - 2v_3 = 0 \\ v_1 + 5v_2 - 2v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} v_2 = -v_1 \\ v_3 = -2v_1 \\ v_1 \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Аналогично находим собственные векторы

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

соответствующие$k_2 = 1, k_3 = 2$.

Общее решение системы

$$X = C_1V_1e^{k_1t} + C_2V_2e^{k_2t} + C_3V_3e^{k_3t} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t} + C_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t};$$

или

$$\begin{aligned} x &= C_1e^{-t} + C_2e^{t}; \\ y &= -C_1e^{-t} - C_2e^{t} + C_3e^{2t}; \\ z &= -2C_1e^{-t} - C_2e^{t} + C_3e^{2t}. \end{aligned}$$

Для нахождения частного решения подставим в общее решение $t = 0, x = 1, y = -2, z = 0$и определим C_1, C_2, C_3 из полученной системы:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ -2 = -C_1 - C_2 + C_3 \Rightarrow C_1 = -2, C_2 = 3, C_3 = -1 \\ C = -2C_1 - C_2 + C_3 \end{cases}$$

Искомое частное решение

$$x = -2e^{-t} + 3e^{t}, y = 2e^{-t} - 3e^{t} - e^{2t}, z = 4e^{-t} - 3e^{t} - e^{2t}$$

Пример 7.4. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-k & -3 \\ 3 & 2-k \end{vmatrix} = 0, \qquad k^2 - 4k + 13 = 0$$

имеет корни $k_1 = 2 + 3i, k_2 = 2 - 3i$. Находим собственный вектор$V_1 = \binom{v_1}{v_2}$, соответствующий корню $k_1 = 2 + 3i$, из системы $\begin{cases} -3iv_1 - 3v_2 = 0 \\ 3v_1 - 3iv_2 = 0 \end{cases}$. Полагая $v_1 = 1$, получим $v_2 = -i \Longrightarrow V_1 = \binom{1}{-i}$. Составим выражение

$$V_1 e^{k_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(2+3i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{2t}(\cos 3t + i \sin 3t) = \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos 3t + i \sin 3t) \\ e^{2t}(\cos 3t - i \sin 3t) \end{pmatrix}$$

Здесь использована формула $e^{(\alpha+i\beta)} = e^{\alpha t}(\cos \alpha t + i \sin \beta t)$.Согласно замечанию, два частных решения исходной системы имеют вид

$$\mathrm{Re}(V_1 e^{k_1 t}) = \begin{pmatrix} e^{2t} \cos 3t \\ e^{2t} \sin 3t \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Im}(V_1 e^{k_1 t}) = \begin{pmatrix} e^{2t} \cos 3t \\ -e^{2t} \sin 3t \end{pmatrix}$$

Общим решением системы будет

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 Re(V_1 e^{k_1 t}) + C_2 \mathrm{Im}(V_1 e^{k_1 t}) = C_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \cos 3t \\ e^{2t} \sin 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \cos 3t \\ -e^{2t} \sin 3t \end{pmatrix}$$

или

$$x = C_1 e^{2t} \cos 3t + C_2 e^{2t} i \sin 3t$$

$$y = C_1 e^{2t} \cos 3t - C_2 e^{2t} i \sin 3t$$

7.3. Задачи динамики, приводящие к решению

дифференциальных уравнений

К задачам динамики точки, приводящим к решению дифференциальных уравнений, относятся те задачи, в которых определяется движение точки по заданным силам. Силы, действующие на точку, могут быть как постоянными, так и заданными функциями времени, координат, скорости, то есть

$$F_x = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z});$$

$$F_y = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z});$$

$$F_z = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

Решение таких задач сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений движения точки:

в координатной форме

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x; \\ m\ddot{y} = F_y; \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$$

(7.1)

или в естественной форме

$$m\frac{dv}{dt}F_x;$$
$$m\frac{v^2}{\rho}F_h;$$
$$D = F_B$$

(7.2)

В этих уравнениях подF понимается равнодействующая всех сил, в том числе и реакций связей, если точка не свободна. При интегрировании системы уравнений (7.1) в общем случае появляется шесть произвольных постоянных, которые определяются по начальным условиям. Под начальными условиями движения точки понимаются значения координат и проекций скорости точки в начальный момент движения, то есть при t=0

$$x = x_0, \qquad v_x = \dot{x}_0;$$
$$y = y_0, \qquad v_y = \dot{y}_0;$$
$$z = z_0, \qquad v_z = \dot{z}_0.$$

Если движение точки происходит в плоскости, то число уравнений

(7.1) сокращается до двух, а число начальных условий – до четырех. При движении точки по прямой будем иметь одно дифференциальное уравнение и два начальных условия.

При решении задач второго типа полезно придерживаться следующей последовательности.

1. Составить дифференциальное уравнение движения,

а) выбрать координатные оси, поместив их начало в начальное положение точки, если движение точки является прямолинейным, то одну из координатных осей следует проводить вдоль линии движения точки;

б) изобразить движущуюся точку в произвольный текущий момент tи показать на рисунке все действующие на нее силы, в том числе и реакции связей, при наличии сил, зависящих от скорости, вектор скорости направить предположительно так, чтобы все его проекции на выбранные оси были положительными;

в) найти сумму проекций всех сил па выбранные оси и подставить в эту сумму в правые части уравнений (7.1).

2. Проинтегрировать полученные дифференциальные уравнения. Интегрирование проводится соответствующими методами, зависящими от вида полученных уравнений.

3. Установить начальные условия движения материальной точки и по ним определить произвольные постоянные интегрирования.

4. Из полученных в результатеинтегрирования уравнений определить искомые величины.

Замечание 1. При интегрировании дифференциальных уравнений иногда целесообразно определить значения произвольных постоянных по мере их появления.

Пример 7.5. Автомобиль массой mдвижется прямолинейно из состояния покоя и имеет двигатель, который развивает постоянную тягу F. направленную в сторону движения, до полного сгорания горючего в момент времени T, после чего автомобиль движется по инерции до остановки. Найти пройденный путь. Силу сопротивления считать постоянной и равной R. Изменением массы автомобиля пренебречь.

Решение. Весь путь S складывается из $S_1 = |AC|$, на котором действует сила F до полного сгорания горючего, и$S_2 = |CB|$, который автомобиль идет по инерции.

На пути$AC m\dot{x} = F - R (7.3)$

на пути $CB \;\; m\ddot{x} = -R$ (7.4)

Решим дифференциальное уравнение (7.3): $\int m d\dot{x} = \int (F - R) dt,$

$m\dot{x} = (F - R)t + C_1,$ при $t = 0, \dot{x} = 0,$ отсюда

$C_1 = 0 \Longrightarrow m\dot{x} = (F - R)t$

Интегрируя получим $mx = \frac{(F-R)t^2}{2} + C_2$, отсюда $t = 0$, $x = 0$, отсюда $C_2 = 0$, $x = \frac{(F-R)t^2}{2m}$. Определим путьS_1, который пройдет до полного сгорания горючего в момент$t = T$: $S_1 = x = \frac{(F-R)t^2}{2m}$. Решимуравнение (7.4): $m\ddot{x} = -R \int m d\dot{x} = -\int R dt, m\dot{x} = -Rt + C_3$. При t=0скорость xбудет равна скорости, которую имеет автомобиль в момент T сгорания горючего и которая из формулы (7.5) равна $m\dot{x} = (F-R)T, \dot{x} = \frac{(F-R)T}{m}$

Используя эти начальные условия, найдемC_3:

$$m = \frac{(F-R)T}{m} = R * 0 + C_3, C_3 = (F-R)T$$

Подставляя C_3, имеем $m\dot{x} = -Rt_0 + (F-R)T$ (7.6)

$$mx = -\frac{Rt^2}{2} + (F-R)Tt + C_4 \text{ при } t = 0, x = 0$$

Отсюда $C_4 = 0, x = \frac{4}{m}\left[-\frac{Rt^2}{2} + (F-R)Tt\right]$.

Чтобы найти путь S_2, надо знать время tдвижения автомобиля по инерции до остановки ($x = 0$).

Из (7.6) получим

$$0 = -Rt + (F-R), t = \frac{(P-R)}{R}T$$

$$S_2 = x = \frac{1}{m}\left[\frac{-R + (F-R)^2T^2}{2\bar{R}^2} + \frac{(F-R)^2T^2}{\bar{R}}\right] = \frac{T^2(F-R)^2}{2Rm} - \text{ путь, пройденный}$$

по инерции;

$$S = S_1 + S_2 = \frac{(F-R)T^2}{2m} + \frac{(F-R)^2T^2}{2Rm} = \frac{T^2(F-R)^2F}{2Rm} - \text{искомый путь.}$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Найти общее решение уравнения или общий интеграл данного дифференциального уравнения.

1. $e^{x+3y}dy = xdx$	2. $y'\sin x = y\ln y$
3. $y' = (2x-1)\mathrm{ctg}\, y$	4. $\sec^2 x\,\mathrm{tg}\, ydy + \sec^2 y\,\mathrm{tg}\, xdx = 0$
5. $(1+e^x)ydy - e^y dx = 0$	6. $(y^2+3)dx - \frac{e^x}{x}ydy = 0$
7. $\sin y\cos xdy = \cos y\sin xdx$	8. $y' = (2y+1)\mathrm{tg}\, x$
9. $(\sin(x+y)+\sin(x-y))dx + \frac{dy}{\cos y} = 0$	10. $(1+e^x)yy' = e^x$
11. $\sin x\mathrm{tg}ydx - \frac{dy}{\sin x} = 0$	12. $3e^x\sin ydx + (1-e^x)\cos ydy = 0$
13. $y' = \frac{e^{2x}}{\ln y}$	14. $3^{x^2+y}dy + xdx = 0$
15. $(\cos(x-2y)+\cos(x+2y))y' = \sec x$	16. $y' = e^{x^2}x(1+y^2)$
17. $\mathrm{ctg}x\cos^2 ydx + \sin^2 x\mathrm{tg}ydy = 0$	18. $\sin x \cdot y' = y\cos x + 2\cos x$
19. $1 + (1+y')e^y = 0$	20. $y'\mathrm{ctg}\, x + y = 2$
21. $\frac{e^{-x^2}dy}{x} + \frac{dx}{\cos^2 y} = 0$	22. $e^x\sin ydx + \mathrm{tg}\, ydy = 0$
23. $(1+e^{3y})xdx = e^{3y}dy$	24. $(\sin(2x+y)-\sin(2x-y))dx = \frac{dy}{\sin y}$
25. $\cos ydx = 2\sqrt{1+x^2}dy + \cos y\sqrt{1+x^2}\,dy$	26. $y'\sqrt{1-x^2} - \cos^2 y = 0$
27. $e^x\mathrm{tg}ydx = (1-e^x)\sec^2 ydy$	28. $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$
29. $\cos^3 y\cdot y' - \cos(2x+y) = \cos(2x-y)$	30. $3^{y^2-x^2} = \frac{yy'}{x}$

2. Найти общее решение уравненияили общий интеграл данного дифференциального уравнения.

1. $y - xy' = x\sec\frac{y}{x}$	2. $(y^2+3x^2)dy + 2xydx = 0$
3. $(x+2y)dx - xdy = 0$	4. $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$
5. $(y^2+2xy)dx + x^2dy = 0$	6. $y^2 + x^2y' = xyy'$
7. $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}$	8. $xy' = y - xe^{y/x}$
9. $xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$	10. $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$
11. $\left(y+\sqrt{xy}\right)dx = xdy$	12. $xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y$
13. $y = x(y' - \sqrt[x]{e^y})$	14. $y' = \frac{y}{x} - 1$
15. $y'x + x + y = 0$	16. $ydx + \left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = 0$

17. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2 dx}$

18. $(4x^2 + 3xy + y^2)dx + (4y^2 + 3xy + $
$+ x^2)dy = 0$

19. $(x-y)ydx - x^2 dy = 0$

20. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$

21. $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2$

22. $\left(2\sqrt{xy} - y\right)dx + xdy = 0$

23. $xy' + y\left(\ln\frac{y}{x} - 1\right) = 0$

24. $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$

25. $(y^2 - 2xy)dx - x^2 dy = 0$

26. $(x + 2y)dx + xdy = 0$

27. $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0$

28. $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$

29. $x^2 y' = y(x + y)$

30. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

3. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y'' + y' = 2x - 1$
2. $y'' - 2y' - 8y = 12\sin 2x - 36\cos 2x$
3. $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$
4. $y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}$
5. $y'' + 6y' + 10y = 74e^{3x}$
6. $y'' - 3y' + 2y = 3\cos x + 19\sin x$
7. $y'' - 8y' + 12y = 36x^4 - 96x^3 +$
$+24x^2 + +16x - 2$
8. $y'' + 8y' + 25y = 18e^{5x}$
9. $y'' - 9y' + 20y = 126e^{-2x}$
10. $y'' + 36y = 36 + 66x - 36x^3$
11. $y'' + y = -4\cos x - 2\sin x$
12. $y'' + 2y' - 24y = 6\cos 3x - 33\sin 3x$
13. $y'' + 6y' + 13y = -75\sin 2x$
14. $y'' + 5y' = 39\cos 3x - 105\sin 3x$
15. $y'' - 4y' + 29y = 104\sin 5x$
16. $y'' + 16y = 8\cos 4x$
17. $y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 27$
18. $y'' - 12y' + 40y = 2e^{6x}$
19. $y'' + 2y' + 37y = 37x^2 - 33x + 74$
20. $2y'' + 7y' + 3y = 222\sin 3x$
21. $y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x}$
22. $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$
23. $y'' - 2y' = 6 + 12x - 24x^2$
24. $y'' - 6y' + 34y = 18\cos 5x + 60\sin 5x$
25. $y'' + 2y' + y = 4x^3 + 24x^2 + 22x - 4$
26. $y'' - 4y' = 8 - 16x$
27. $y'' - 2y' + y = 4e^x$
28. $y'' - 8y' + 20y = 16(\sin 2x - \cos 2x)$
29. $y'' + 5y' = 72e^{2x}$
30. $y'' - 5y' - 6y = 3\cos x + 19\sin x$

4. Решить следующие задачи.

4.1. Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: площадь треугольника, образованного касательной к кривой, перпендикуляром, опущенным из точки касания на ось абсцисс, и осью абсцисс, есть величина постоянная, равна b^2.

4.2. Записать уравнение кривой, если известно, что точка пересечения любой касательной к кривой с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат.

4.3. Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной к кривой и перпендикуляром, опущенным из точки касания на ось абсцисс, есть величина постоянная, равная $3a^2$.

4.4. Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: площадь треугольника, ограниченного касательной, осью абсцисс и отрезком от начала координат до точки касания, есть величина постоянная, равная a^2.

4.5. Записать уравнение кривой, если известно, что расстояние от любой касательной до начала координат равно абсциссе точки касания.

4.6. Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания.

4.7. Записать уравнения кривых, для которых сумма катетов треугольника, образованного касательной, перпендикуляром, опущенным из точки касания на ось абсцисс, и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная a.

4.8. Записать уравнения кривых, для которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, равную 2/3 абсциссы точки касания.

4.9. Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: длина отрезка оси абсцисс, отсекаемого касательной и нормалью, проведенными из произвольной точки кривой, равна $2l$.

4.10. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(2,4)$ и обладающей следующим свойством: длина отрезка, отсекаемого на оси абсцисс касательной, проведенной в любой точке кривой, равна кубу абсциссы точки касания.

4.11. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(1,5)$ и обладающей следующим свойством: длина отрезка, отсекаемого на оси ординат любой касательной, равна утроенной абсциссе точки касания/

4.12. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(1,2)$ и обладающей следующим свойством: отношение ординаты любой ее точки к абсциссе этой точки пропорционально угловому коэффициенту касательной к искомой кривой, проведенной в той же точке. Коэффициент пропорциональности равен 3.

4.13. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(2,-1)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке пропорционален квадрату ординаты точки касания. Коэффициент пропорциональности равен 6.

4.14.Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(1, 2)$, если известно, что произведение углового коэффициента касательной в любой ее точке и суммы координат точки касания равно удвоенной ординате этой точки.

4.15. Записать уравнение кривой, для которой треугольник, образованный осью Oy, касательной и радиусом-вектором точки касания, является равнобедренным.

4.16. Записать уравнение кривой, обладающей следующим свойством: длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную, равна абсциссе точки касания.

4.17. Записать уравнение кривой, для которой угловой коэффициент касательной в какой-либо ее точке в nраз больше углового коэффициента прямой, соединяющей эту точку с началом координат.

4.18. Записать уравнение кривой, обладающей следующим свойством: отрезок касательной к кривой, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

4.19. Записать уравнение кривой, для которой длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной в какой-либо точке кривой, равна расстоянию отэтой точки до начала координат.

4.20. Записать уравнение кривой, для которой произведение абсциссы какой-либо ее точки и длины отрезка, отсекаемого нормалью в этой точке на оси Oy, равно удвоенному квадрату расстояния от этой точки до начала координат.

4.21. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(0,-2)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен утроенной ординате этой точки.

4.22. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(2, 0)$ и обладающую следующим свойством: отрезок карательной между точкой касания и осью Oy имеет постоянную длину, равную 2.

4.23. Записать уравнение кривой, все касательные к которой проходят через начало координат.

4.24. Записать уравнение кривой, каждая касательная к которой пересекает прямую $y = 1$ в точке с абсциссой, равной удвоенной абсциссе точки касания.

4.25. Записать уравнение кривой, обладающей следующим свойством: если через любую ее точку провести прямые, параллельные осям координат, до пересечения с этими осями, то площадь полученного прямоугольника делится кривой на две части, причем площадь одной из них вдвое больше площади другой.

4.26. Записать уравнение кривой, если касательная к ней отсекает на осиOy отрезок, равный по длине$\frac{1}{n}$ – й сумме координат точки касания.

4.27. Записать уравнения кривых, для которых длина отрезка, отсекаемого нормалью в точке $M(x, y)$ на оси Ox, равна y^2/x.

4.28. Записать уравнения кривых, для которых длина отрезка, отсекаемого касательной на оси Oy, равна квадрату абсциссы точки касания.

4.29. Записать уравнения кривых, для которых длина отрезка отсекаемого нормалью в точке $M(x, y)$ на оси Oy равна x^2/y.

4.30. В точке с ординатой 2 кривая наклонена к оси Oy под углом 45°. Любая ее касательная отсекает на оси абсцисс отрезок, равный по длине квадрату ординаты точки касания. Записать уравнение данной кривой.

5. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений.

1. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = -x + 8y \\ y' = x + y \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = -2x - 3y \\ y' = -x \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + 4y \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -6x - 3y \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = -2x \\ y' = y \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = 4x + 6y \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = 8x - 3y \\ y' = 2x + y \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 5x + 4y \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = 4x + 5y \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x + 8y \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = x + 5y \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$

24. $\begin{cases} x' = 2x + 8y \\ y' = x + 4y \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = 5x + 8y \\ y' = 3x + 3y \end{cases}$

26. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 8x + y \end{cases}$

27. $\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$

28. $\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = x - 6y \end{cases}$

29. $\begin{cases} x' = 6x + 3y \\ y' = -8x - 5y \end{cases}$

30. $\begin{cases} x' = 4x - 8y \\ y' = -8x + 4y \end{cases}$