ВВЕДЕНИЕ

ПОГРЕШНОСТИ В ЛАБОРАТОРНОМ ПРАКТИКУМЕ ПО ОПТИКЕ

Основная задача практикума состоит в экспериментальном исследовании закономерностей оптических явлений и приобретении навыков самостоятельной исследовательской работы с использованием оптических методов и приборов.

Постановка опытов всегда сопровождается измерениями. *Измерение* — сравнение физической величины с однородной величиной, принятой за единицу измерения. Значение физической величины, найденное путем измерения, называется *результатом измерения*. Измерения разделяют на *прямые* и *косвенные*. При прямых измерениях определяемая величина сравнивается с единицей измерения непосредственно или при помощи измерительного прибора. При косвенных измерениях искомая величина находится на основании результатов прямых измерений величин, которые связаны с искомой величиной определенной функциональной зависимостью.

При измерении любой физической величины мы никогда не получаем её истинного значения. Результат измерения даст нам только приближенное значение искомой величины. Абсолютной погрешностью измерения Δx называется отклонение результата измерения x от истинного значения измеряемой величины x_0:

$$\Delta x = x - x_0 \ .$$

Чтобы можно было судить, какая из физических величин измеряется более точно, вводится ещё *относительная погрешность*, которая выражается отношением абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой величины, т.е.

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0} \cdot 100\,\% \ . \qquad (1)$$

1. Типы погрешностей

Различают следующие типы погрешностей: *систематические*, *случайные* и *промахи*.

Систематические погрешности. К систематическим погрешностям относятся: *инструментальные погрешности*, вызванные несовершенством средств измерения и влиянием внешних факторов, *погрешности метода измерений*, или *теоретические погрешности*, *субъективные погрешности*, обусловленные особенностями экспериментатора и т.д. Эти погрешности сохраняют свое значение и знак от опыта к опыту, они не зависят от числа измерений.

Случайные погрешности проявляются в том, что при повторении измерений одного и того же объекта, выполняемых с помощью одного и того же прибора, мы часто не получаем одинаковых данных. Это происходит потому, что на измерения оказывают влияние многочисленные факторы, не поддающиеся контролю и изменявшиеся от одного измерения к другому. К числу таких факторов относятся случайные вибрации отдельных частей прибора, различные не учитываемые изменения в среде (температура, оптические, электрические свойства, влажность и т.д.). Возникающие при этом погрешности называются *случайными*. Случайные погрешности всегда присутствуют в эксперименте. При отсутствии систематических погрешностей они служат причиной разброса повторных измерений относительно истинного значения.

2. Вычисление ошибок прямых измерений

При проведении прямого измерения определяют наиболее вероятное значение измеряемой величины, учитывают поправки на систематическую ошибку, вычисляют случайную и приборную погрешность, погрешность округления и полную погрешность измерения.

1. *Наиболее вероятное значение* измеряемой величины определяется как среднее арифметическое значений, найденных при многократных наблюдениях:

$$\langle x\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ . \qquad (2)$$

Если установлена причина какой-либо систематической ошибки, то ее устраняют путем введения поправки $\Delta x_{попр}$. В таком случае исправленная величина

$$x_{испр} = x_{изм} + \Delta x_{попр} \ . \qquad (3)$$

Для надежной оценки случайных погрешностей необходимо провести достаточно большое количество наблюдений n. Допустим, что получены результаты $x_1, x_2, ..., x_n$.

Разность x_i-$<x>=\Delta x_i$ называется *случайным отклонением* результата ***i***-го наблюдения от среднего. Отклонения Δx_i могут быть положительными и отрицательными, большими и малыми. При достаточно большом числе наблюдений n с вероятностью 68% отклонение Δx_i лежит в интервале [-σ; +σ], где σ — *стандартное отклонение* (дисперсия). Для [-2σ; +2σ] эта вероятность равна 95%, а для [-3σ; +3σ] — 99,7%. Для любого значения вероятности P доверительный интервал $[-\lambda_P\sigma;+\lambda_P\sigma]$ определяется числовым множителем λ_P, зависящим от P.

В теории вероятностей показывается, что *стандартное отклонение* σ определяется по отклонениям $\Delta x_i=x_i-x_0$:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_0\right)^2} \ . \qquad (4)$$

Таким образом, стандартное отклонение σ определяют как ожидаемую ошибку каждого отдельного, единичного наблюдения. Знание величины σ дает возможность оценивать вероятность получения при одноразовом наблюдении той или иной величины ошибки.

Величина

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2} \qquad (5)$$

называется *средней квадратичной погрешностью* отдельного наблюдения. Стандартное отклонение $\sigma \approx S$, и чем больше число наблюдений n, тем точнее это приближенное равенство (при $n ® \mu$, $<x>\to x_0$, $\sigma=S$).

Среднее арифметическое совокупности результатов наблюдений, безусловно, точнее характеризует значение измеряемой величины, чем результат только одного наблюдения, поскольку положительные и отрицательные ошибки частично компенсируются. Поэтому стандартное отклонение среднего результата σ_n меньше σ. Следовательно, средняя квадратичная погрешность окончательного результата опыта

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2} \ . \qquad (6)$$

Тогда *полуширина доверительного интервала* $\Delta x = \lambda_P S_n$. Практически нецелесообразно (и невозможно) проводить большое число наблюдений для определения одной величины. В учебных лабораториях, как правило, $n \sim 10$. Это приводит к необходимости при заданной надежности расширить интервал Δx, т.е. увеличить множитель λ_P. Причем для различных значений n это увеличение будет разным. Поэтому множитель λ_P приходится заменить на новый $t_{n,P}$, называемый *коэффициентом Стьюдента* (см. табл.). В пределе при $n \to \infty$ коэффициент $t_{n,P} \to t_{\infty,P} \to \lambda_P$.

С учетом коэффициента Стьюдента случайная погрешность результата, определяющая полуширину доверительного интервала около среднего значения измеряемой величины,

$$\Delta x_{сл} = t_{n,P}\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2} \ . \qquad (7)$$

Это основная формула для расчета случайных погрешностей прямых измерений.

Таблица

Коэффициенты Стьюдента, t_{nP}

Число испытаний, n	Вероятность, P			
	0,5	0,9	0,95	0,99
2	1,60	6,31	12,7	63,7
3	0,82	2,92	4,30	9,92
4	0,77	2,35	3,18	5,94
5	0,74	2,13	2,78	4,60
6	0,73	2,02	2,57	4,03
7	0,72	1,94	2,45	3,71
8	0,71	1,89	2,36	3,50
9	0,71	1,86	2,31	3,36
10	0,70	1,83	2,26	3,25
15	0,69	1,76	2,14	2,98
20	0,69	1,73	2,09	2,86
∞	0,68	1,65	1,96	2,59

3. Погрешность прибора

В лабораторной работе мы имеем дело с величинами, которые измеряются непосредственно, т.е. значения этих величин отсчитываются со шкалы измерительного прибора. Такие измерения называются *прямыми*. Погрешности измерений могут быть различного типа: это ошибка прибора, ошибка округления и другие систематические и случайные ошибки. Могут быть случаи, когда один из этих типов погрешностей превышает все остальные. В этом случае нужно определить только ту, которая вносит главный вклад в ошибку измерений.

Погрешности разных приборов одного типа могут быть разными по знаку и по величине, но не большими *предельной*. Значения соответствующих предельных погрешностей оговорены нормативными документами и гарантируются при изготовлении и проверке приборов. Тогда, несмотря на то, что погрешность конкретного прибора является систематической, в силу отсутствия информации об этой ошибке (не известны ни знак, ни ее величина; известно только, что она не превышает предельной) ее можно рассматривать и учитывать при расчетах как случайную.

Предельная погрешность прибора обычно указывается в его паспорте. Для одних приборов стандартами задается *предельная абсолютная погрешность* δ, а для других — *предельная относительная погрешность* (*класс точности* k). Классом точности измерительного прибора называется выраженное в процентах отношение предельной абсолютной погрешности прибора δ к максимальному значению измеряемой им величины $x_{макс}$ (для многопредельных приборов на рабочем пределе):

$$k = \frac{\delta}{x_{макс}} 100\% \ . \qquad (8)$$

Значок % на приборах не ставится. Для электроизмерительных приборов возможны классы: 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 2,5; 4,0. Более грубые приборы класса не имеют. По известному классу точности находится предельная абсолютная погрешность прибора

$$\delta = \frac{k}{100\%} x_{макс} \ . \qquad (9)$$

Обычно, когда указывается ошибка прибора δ, под этой величиной понимают половину интервала, внутри которого может быть заключена измеряемая величина с вероятностью P=0,997, при этом условно принимают, что функция ее распределения подчиняется нормальному закону. Тогда δ=3σ. В учебных лабораториях ограничиваются значением P=0,95, которому соответствует приборная погрешность

$$\Delta x_{n,p} = \frac{2}{3}\delta = \frac{2}{3}\frac{k}{100\%}x_{макс} . \qquad (10)$$

Для произвольной надежности P абсолютная погрешность

$$\Delta x_{n,p} \approx \frac{\lambda_P}{3}\delta = \frac{\lambda_P}{3}\frac{k}{100\%}x_{макс} . \qquad (11)$$

где коэффициент λ_P, зависящий от доверительной вероятности P, определяется по приведенной таблице.

Когда считываем показания со шкалы приборов, то возникает систематическая ошибка, обусловленная ошибкой прибора и *ошибкой округления*. Мы вынуждены округлять до целого самого мелкого деления шкалы или половины его. В случае округления считаем, что систематическая ошибка имеет равномерное распределение.

Интервал округления h может быть различным. Если отсчет снимается с точностью до целого деления, то интервал округления равен цене деления шкалы прибора; если отсчет округляется до половины деления, интервал округления равен половине цены деления и т.д.

Максимальная погрешность округления, очевидно, не превышает половины интервала округления, т.е. величины h/2.

Для доверительной вероятности P величину

$$\Delta x_{окр} = P\frac{h}{2}$$

принимают за абсолютную погрешность округления при измерении величины x.

На хороших измерительных приборах цена деления шкалы согласована с классом точности. В этом случае за общую погрешность можно взять ошибку, определенную из класса точности.

4. Полная погрешность при прямом измерении

В теории вероятностей показывается, что погрешность, обусловленная несколькими независимыми причинами, определяется «квадратичным суммированием». Поскольку в учебных лабораториях, кроме поправок, вводимых в результат сразу, учитываются три погрешности: случайная $\Delta x_{сл}$, прибора $\Delta x_{пр}$ и округления $\Delta x_{окр}$, то полная абсолютная погрешность прямого измерения

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{сл}^2 + \Delta x_{пр}^2 + \Delta x_{окр}^2} . \qquad (12)$$

Относительная погрешность

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{< x >}100\% = \sqrt{\varepsilon_{сл}^2 + \varepsilon_{пр}^2 + \varepsilon_{окр}^2} . \qquad (13)$$

При вычислении всех суммируемых погрешностей доверительная вероятность P выбирается одинаковой (как правило, принимают P=0,95).

5. Порядок обработки результатов прямых измерений

1. Рассчитать среднее арифметическое $\langle x \rangle$ по формуле (2).
2. Определить случайные отклонения Δx_i.
3. Проверить равенство нулю алгебраической суммы всех значений Δx_i.
4. Рассчитать случайную погрешность (при P=0,95) по формуле (7).
5. Определить приборную погрешность $\Delta x_{пр}$.
6. Найти погрешность округления $\Delta x_{окр}$.
7. Определить полную погрешность измерения Δx по формуле (12).
8. Вычислить относительную погрешность измерения ε по формуле (13).
9. Оценить возможную поправку на систематическую погрешность метода.
10. Окончательный результат записать в виде $x=\langle x \rangle \pm \Delta x$, $\varepsilon = N\%$; P=0,95.

6. Ошибки косвенных измерений

В большинстве случаев представляет интерес величина, которая не измеряется непосредственно на опыте, но которую можно выразить как функцию непосредственно измеряемых величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (14)$$

В этом случае говорят о *косвенных измерениях*. Обычно предполагается, что все аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются независимыми и измеряются независимыми способами. Наиболее вероятное значение функции y при таких измерениях получается при подстановке средних значений аргументов:

$$y_{изм}=f(\langle x_1\rangle,\langle x_2\rangle, \ldots, \langle x_n\rangle).$$

Погрешность величины $y_{изм}$ определяют по формуле

$$\Delta y_{изм} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{df}{dx_i}\Delta x_i\right)^2}\ , \qquad (15)$$

где Δx_i — абсолютные погрешности величин x_i, df/dx_i — частные производные функции y по аргументам x_i, вычисленные при средних значениях $\langle x_1\rangle,\langle x_2\rangle, \ldots, \langle x_n\rangle$. Доверительная вероятность P для всех погрешностей Δx_i задается одинаковой, обычно равной 0,95. Такой же она будет и для величины Δy.

Относительную погрешность определяют по формуле:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{y}\frac{df}{dx_i}\Delta x_i\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d\ln f}{dx_i}\Delta x_i\right)^2}\ . \qquad (16)$$

В частном случае, если аргументы Δx_i входят в функцию в виде сомножителей, вычисления проще начинать с определения относительной погрешности ε_y. Абсолютную погрешность в таком случае определяют по относительной погрешности:

$$\Delta y=\varepsilon_y y\ .$$

7. Порядок обработки результатов косвенных измерений

1. Для каждой серии измеряемых величин, входящих в определение искомой величины, проводится обработка, как описано в п. 5. При этом для всех измеряемых величин задается одно и то же значение доверительной вероятности (0,95).

2. Находится выражение для абсолютной погрешности по формуле (15) в соответствии с конкретным видом функциональней зависимости.
3. Окончательный результат записывается в виде

$$y_{изм}=f(\langle x_1\rangle,\langle x_2\rangle, \ldots, \langle x_n\rangle)\pm\Delta y.$$

4. Определяется относительная погрешность

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta y}{y}100\%\ . \qquad (16)$$

8. Построение графиков

При обработке полученного экспериментального материала для того, чтобы получить наглядное представление о зависимости одной физической величины от другой, часто прибегают к построению графиков. Графиками пользуются также для быстрого нахождения значения одной величины (функции) по данному значению другой величины (аргумента). Точность, с которой можно находить значения по графику, ограничивается точностью построения графика и составляет обычно 0,5% измеряемой величины. Кроме того, иногда пользуются графическими методами вычислений, которые, хотя и не дают большой точности, но являются наглядными и простыми.

Для построения графиков чаще всего используют прямоугольную (декартову) систему координат, в которой положение точки на плоскости определяется двумя координатами x и y. Иногда, если в исследуемой задаче имеется какая-либо выделенная точка (центр симметрии), результаты измерений удобнее изображать в полярной системе координат, в которой положение точки определяется радиус-вектором ρ, проведенным к этой точке из начала координат 0 (полюса), и углом, который составляет радиус-вектор с некоторым избранным направлением.

Значения функции (зависимой величины) откладываются по вертикальной оси, значения аргумента — по горизонтальной. Перед построением графика следует, исходя из пределов, в которых заключены значения функции и аргумента, выбрать разумные масштабы по оси абсцисс и по оси ординат. Эти масштабы выбираются произвольно, независимо друг от друга, но так, чтобы график не был слишком мелким или растянутым по одной из осей. Иногда интервал, в котором заключены значения функции или аргумента, лежит далеко от нуля. В этом случае целесообразно начинать деления на соответствующей оси не с нуля, а с некоторого значения, лишь немногим меньшего, чем наименьшее значение, которое надо отложить на этой оси.

Масштабные деления наносят на оси, около них пишут соответствующие цифры. У концов осей пишут обозначения этих величин с указанием единиц измерения. Иногда вдоль осей пишут полностью названия откладываемых величин. Далее, на график острым твердым карандашом наносят соответствующие точки. Для большей наглядности их обычно обводят кружками. Если хотят выделить некоторые точки (например, значения одной и той же физической величины, получаемые разными методами), то, кроме кружков, ставят прямоугольники, квадратики и т.д.

В том случае, когда ошибка аргумента мала до сравнению с ошибкой в значении функции, на графике величину ошибки функции изображают вертикальным отрезком, на середине которого находится экспериментальная точка. Длина отрезка равна удвоенной величине ошибки в данном масштабе. Отрезок сверху и снизу ограничивается точками.

Кривую на графике следует проводить, не просто, соединяя точки друг с другом, а выбирая среди точек так называемое преимущественное направление. Эта кривая должна быть по возможности плавной и проходить таким образом, чтобы примерно одинаковое число точек находилось бы над кривой и под ней. При проведении кривой выявляется некоторый разброс точек, обусловленный наличием ошибок измерений. Чем меньше ошибки измерений, тем лучше точки ложатся на кривую. При этом отдельные грубые просчеты и явно ошибочные измерения легко обнаружить, так как соответствующие им точки будут расположены далеко от кривой. Примерный вид графика приведен на рисунке 1.

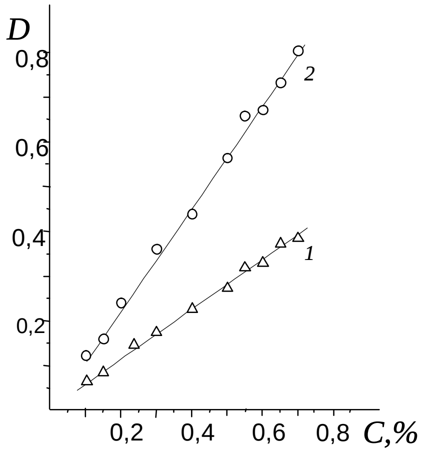


Рис.1. Пример построения графика зависимости оптической силы от концентрации раствора, измеренной в кювете толщиной 20 мм (*1*) и 40 мм (*2*)

9. Округление и запись результатов измерений.

При выполнении вычислений в лабораторном практикуме абсолютная погрешность округляется до одной значащей цифры; при этом округления производят с избытком. Однако если первой значащей цифрой является единица, то при округлении приводят две значащие цифры. Например, $\Delta f = 0{,}053$ м $\approx 0{,}06$ м; $\Delta\lambda = 12{,}4$ нм ≈ 13 нм. Это правило округления распространяется и на относительные погрешности.

При записи результатов измерений необходимо руководствоваться следующими правилами:

1. Результат измерения величины необходимо записывать вместе с его погрешностью и доверительной вероятностью. Например, $\lambda = (635 \pm 8)$ нм, P=0,95.
2. Конечный результат округляется так, чтобы его последняя цифра и значащая цифра абсолютной погрешности принадлежали к одному и тому же разряду.
3. Если в ответе имеется множитель 10^n, то показатель степени n в результате и его абсолютной погрешности должен быть одинаковым. Например, $h=(2{,}1\pm0{,}2)\cdot10^{-2}$мм.
4. Измеряемая величина и абсолютная погрешность выражаются в одних единицах измерений.

10. Оформление отчетов.

В отчетах (протоколах) лабораторных работ указывают:

1) номер и название работы и отдельных ее упражнений;
2) цель работы;
3) схематический рисунок установки, схемы, чертежи с обозначениями отдельных элементов и приборов, пояснения этих обозначений;
4) расчетные формулы (для искомых величин и погрешностей) с пояснениями обозначений;
5) предварительную оценку погрешности измерения;
6) таблицы с данными, полученными в эксперименте.

В таблицах указывают обозначение и единицу измерения каждой физической величины. В случае отсутствия каких-либо данных ставят прочерк *(но не нуль!)*. Если числовые значения какой-то физической величины имеют общий множитель, например, вида $10^{\pm n}$, то в таблицу удобно записывать не саму величину, а уменьшенную или увеличенную в 10^n раз. Например, вместо давления $p=1{,}1\cdot 10^5$ Па в таблицу заносят величину, в 10^5 раз меньшую: $p\cdot 10^{-5}=1{,}1$ Па.

В обозначении соответствующего столбца таблицы в этом случае указывают новую величину ($p\cdot 10^5$, Па), а в самом столбце записывают только значащие числа (1,1) без многократного повторения множителя. Показания измерительных приборов часто удобно сначала записывать в делениях шкалы, а в соседнем столбце — в единицах измеряемой величины;

7) расчет искомой величины по средним значениям параметров, входящих в расчетную формулу;
8) расчет погрешностей;
9) графики;
10) окончательный результат измерений;
11) выводы и замечания.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

СВЕТОВЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ НА ФОТОМЕТРИЧЕСКОЙ СКАМЬЕ

Цель работы: ознакомление с простейшими фотометрическими измерениями силы света.

1. Энергия и интенсивность электромагнитных волн.

При распространении электромагнитной волны происходит перенос энергии, подобно тому, как это имеет место при распространении механической волны.

Из курса электричества известно, что *объёмная плотность энергии* w представляет собой сумму плотностей собственно электромагнитной энергии и энергии материальной среды, обусловленной электромагнитным полем.

При линейной зависимости между $\vec{E}$ и $\vec{D}$, а также $\vec{H}$ и $\vec{B}$ (это имеет место в вакууме и линейных средах) имеем

$$w=\frac{\vec{E}\cdot\vec{D}}{2}+\frac{\vec{H}\cdot\vec{B}}{2}\ , \qquad (1)$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — соответственно вектор напряжённости электрического и магнитного поля, $\vec{D}$ — вектор электрического смещения (индукции), $\vec{B}$ — вектор индукции магнитного поля. Между $\vec{E}$ и $\vec{D}$, а также между $\vec{H}$ и $\vec{B}$ существует связь, которая в случае изотропной линейной среды задается выражениями

$$\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \quad \text{и} \quad \vec{B}=\mu\mu_0\vec{H}\ ,$$

где ε_0 и μ_0 — соответственно диэлектрическая и магнитная постоянная, ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемость среды.

Первое слагаемое в равенстве (1) представляет собой объёмную плотность электрической энергии в среде, второе — объёмную плотность магнитной энергии, т.е.

$$w=w_{эл}+w_{м}.$$

В свою очередь в электромагнитной волне, распространяющейся в вакууме, для величин $w_{эл}$ и $w_{м}$ можно записать

$$w_э=\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \qquad (2а)$$

и

$$w_м=\frac{\varepsilon_0 c^2 B^2}{2}=\frac{\mu_0 H^2}{2}\ , \qquad (2б)$$

где c — электродинамическая постоянная, равная скорости распространения электромагнитной волны в вакууме:

$$c=1\Big/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\ .$$

Известно, что в электромагнитной волне $w_э=w_м$, поэтому

$$w=\varepsilon_0 E^2=\varepsilon_0 c^2 B^2. \qquad (3)$$

Дифференцирование по времени выражения (1) приводит к *уравнению непрерывности* для плотности энергии электромагнитного поля:

$$\frac{dw}{dt} = -div\vec{S}\,, \qquad (4)$$

где вектор $\vec{S}$ называется *вектором Пойнтинга*

$$\vec{S} = \varepsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B}\,, \qquad (5)$$

или

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}\ .$$

Вектор Пойнтинга $\vec{S}$ *имеет смысл плотности потока электромагнитной энергии, т.е. определяет мощность, переносимую волной через некоторую единичную площадку, ориентированную перпендикулярно направлению ее распространения*.

Уравнение (4) выражает закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Проинтегрируем обе части уравнения (4) по некоторому объему V, ограниченному замкнутой поверхностью σ. Интеграл по объему в правой части преобразуем с помощью известной теоремы Остроградского-Гаусса в интеграл по поверхности σ, ограничивающей этот объем:

$$\frac{d}{dt}\int_V w dV = -\oint_\sigma \vec{S} d\vec{\sigma}\ . \qquad (6)$$

Уравнение (6), представляющее интегральную форму уравнения непрерывности, показывает, что изменение энергии электромагнитного поля в некотором объеме V, не содержащем зарядов и токов (поскольку при его выводе предполагалось, что они равны нулю), равно потоку энергии в этот объем через охватывающую его замкнутую поверхность σ.

В бегущей плоской электромагнитной волне, задаваемой уравнениями

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)} \qquad (7а)$$

и

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)}\,, \qquad (7б)$$

векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ ортогональны друг к другу и вместе с волновым вектором $\vec{k}$ образуют правую тройку векторов. Поэтому направление вектора Пойнтинга $\vec{S}$ для таких волн в вакууме или изотропной среде совпадает с направлением вектора $\vec{k}$, т.е. энергия переносится в направлении, перпендикулярном поверхностям

постоянной фазы. Учитывая ортогональность векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$, а также, что $E=cB$, можно записать

$$S = \varepsilon_0 c E^2 = \varepsilon_0 c^3 B^2\,.$$

Принимая во внимание (3), получим $S=cw$ — выражение, устанавливающее связь между объемной плотностью электромагнитной энергии и плотностью ее потока.

Поскольку величины $\vec{E}$ и $\vec{B}$ являются функциями времени и пространственных координат, то

$$S = S(\vec{r},t) = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}\left[1 + cos\,2\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)\right]. \qquad (8)$$

Для оптического диапазона циклическая частота ω имеет значение ~10^{15} $с^{-1}$. В связи с этим колебания величины потока энергии, совершаемые с частотой 2ω, в силу инерционности используемых для измерений фотоприемников, зафиксировать невозможно. Поэтому физический интерес представляет лишь среднее по времени значение величины S, которое обычно называют *интенсивностью* I:

$$I = \langle S\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau S(t)dt\,, \qquad (9)$$

где τ — некоторый промежуток времени, значительно больший периода световых колебаний: $\tau >> 2\pi/\omega$.

Из (8) и (9) получим

$$I = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2} = \frac{c B_0^2}{2\mu_0}\,. \qquad (10а)$$

Для изотропной среды, характеризуемой диэлектрической и магнитной проницаемостью, соответственно ε и μ

$E=uB$, или $nE=cB$

и равенство (10а) можно записать

$$I = \frac{\varepsilon_0 c n E_0^2}{2}\,, \qquad (10б)$$

где n — показатель преломления, причем $n = c/u = \sqrt{\varepsilon\mu}$.

Таким образом, интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды электромагнитной волны:

$$I \propto E_0^2 \text{ и } I \propto B_0^2 .$$

Вектор $\vec{S}$ в фотометрии называют световым вектором. Однако в оптике часто световым вектором называют вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$, поскольку многие воздействия электромагнитных волн на приемник (фотоэффект, выделение тепла, различные фотохимические процессы и др.) связаны именно с этой величиной.

Для монохроматических волн произведение E на комплексно сопряжённую величину E^* равно:

$$EE^* = E_0^2 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = E_0^2 .$$

Таким образом, если в выражении (7а) под E и E_0 понимать величины им пропорциональные (соответственно E' и E_0'), определяемые как $E_0' = \sqrt{\varepsilon_0 cn} E_0$ и $E' = \sqrt{\varepsilon_0 cn} E$, то можно записать

$$I = \frac{E'E'^*}{2} = \frac{(E_0')^2}{2} . \quad (11)$$

Поскольку n для данной среды является константой, то интенсивность, таким образом, можно определять выражением (11).

2. Энергетические и световые фотометрические величины

Раздел оптики, в котором рассматривается измерение энергии, переносимой электромагнитными волнами оптического диапазона, называется *фотометрией*. Для измерения энергии в фотометрии используются 2 метода: *объективный и визуальный, или субъективный*. В первом случае величина энергии измеряется на основании воздействия электромагнитной волны на фотоприёмник, причём сигнал, вырабатываемый фотоприёмником, является зависимым от энергии или интенсивности электромагнитной волны. При использовании визуального метода величины, характеризующие энергию волны, оцениваются по зрительному восприятию человека. В зависимости от используемого метода измерения используются два типа фотометрических величин: *энергетические и световые*.

2.1. Энергетические фотометрические величины

Основной энергетической величиной в фотометрии является *энергетический поток излучения*. Энергетический поток излучения Φ_e (поток излучения) характеризует среднюю мощность излучения, которая переноситься электромагнитной волной через некоторую поверхность σ:

$$\Phi_e = \langle P \rangle = \int_\sigma \langle S \rangle d\sigma , \quad (12)$$

где $\langle P \rangle$ — среднее значение мощности.

Энергетическая освещённость Ξ — отношение потока излучения, который падает на площадку, к величине ее площади:

$$\Xi = \frac{\Phi_e}{\sigma} . \quad (13)$$

Если падающий поток распределён на площадке неравномерно, то равенство (13) определяет среднюю освещённость. Под освещенностью в окрестности некоторой точки следует понимать величину

$$\Xi_e = \frac{d\Phi_e}{d\sigma} , \quad (14)$$

где $d\sigma$ — некоторая элементарная площадка, в пределах которой световой поток можно считать постоянным.

Величина $H=\Xi t$ называется *энергетической экспозицией*. Она характеризует интегральный эффект, производимый электромагнитной волной на фотоприёмник.

Для характеристики точечных источников излучения используют величину, которую называют *энергетической силой излучения* J_e и которая равна отношению величины потока излучения, излучаемого внутрь телесного угла $d\Omega$, к величине этого угла (рис. 1):

$$J_e = \frac{d\Phi_e}{d\Omega} . \quad (15)$$

Мерой телесного угла является отношение площади σ_0 участка, вырезаемого на поверхности сферы конусом с вершиной в ее центре, к квадрату ее радиуса (рис.2): $\Omega = \frac{\sigma_0}{R^2}$.

Телесный угол, опирающийся на произвольно ориентированную площадку $d\sigma$, определяется выражением:

$$d\Omega = \frac{d\sigma \cos\varphi}{R^2}\ , \qquad (15а)$$

где R — расстояние от точки наблюдения до площадки $d\sigma$, φ — угол между нормалью к площадке и направлением на источник (см. рис.1).

Источники, у которых сила излучения одинакова по всем направлениям, называются *изотропными*. Для таких источников

$$J_e = \frac{\Phi_e}{\Omega}\ .$$

Поскольку полный телесный угол равен 4π, то световой по-

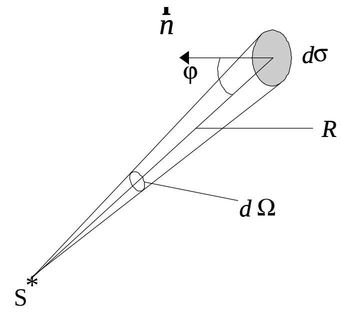


Рис.1. Определение телесного угла, опирающегося на произвольно ориентированную площадку

ток, излучаемый изотропным источником по всем направлениям, будет равен

$$(\Phi_e)_{полн} = 4\pi J_e\ .$$

Используя формулы (14), (15) и (15а), можно записать

$$\Xi_e = \frac{J_e d\Omega}{d\sigma} = \frac{J_e \cos\varphi}{R^2}\ , \qquad (16)$$

где R — расстояние от источника до площадки $d\sigma$ (рис. 1).

Таким образом, *освещенность, создаваемая точечным источником, прямо пропорциональна косинусу угла между направлением падающих лучей и нормалью к освещаемой поверхности и обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника*. Вторая часть данного утверждения выражает известный в фотометрии *закон обратных квадратов*.

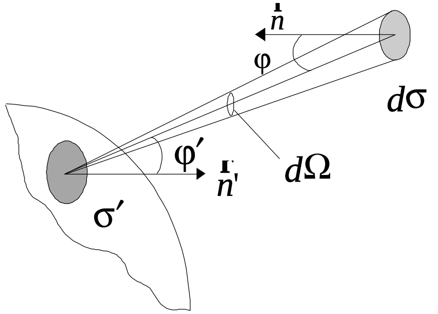
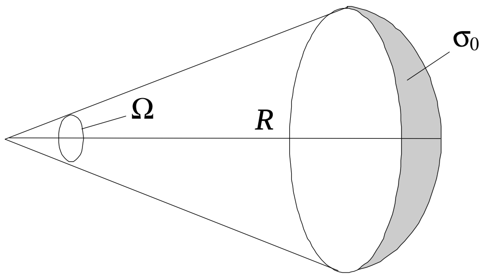


Рис. 3. К определению яркости протяженного источника

Для характеристики протяжённых источников используют понятия энергетической яркости и светимости. *Энергетическая яркость* — это отношение потока, который излучается единичной видимой поверхностью источника $\sigma'\cos\varphi'$ в телесный угол $d\Omega$, к величине этого угла (рис. 3):

$$B_e(\varphi') = \frac{d\Phi_e}{\sigma' \cos\varphi' d\Omega}, \qquad (17)$$

Яркость можно определить также как силу света, создаваемую единичной видимой площадкой источника:



2. К определению телесного угла, опирающегося на шаровой сегмент

$$B_e(\varphi') = \frac{J_e}{\sigma' \cos\varphi'} \ . \qquad (18)$$

Источники, яркость которых не зависит от направления излучения, т.е. $B_e(\varphi')=B_e$, называют *ламбертовыми*. Для *ламбертовых* источников

$$J_e=J_0\cos\varphi', \qquad (19)$$

где $J_0=B_e\sigma'$ – сила излучения, создаваемая источником в направлении $\varphi'=0^\circ$. Равенство (19) выражает известный в фотометрии *закон Ламберта*.

Энергетическая светимость M_e равна отношению полного энергетического потока, испускаемого протяженным источником по всем направлениям, к величине его площади, т.е.

$$M_e = \frac{\Phi_e}{\sigma'} \ . \qquad (20)$$

Используя выражение (17), можно записать

$$M_e = \int B_e(\varphi')\cos\varphi' d\Omega \ .$$

Для ламбертовых источников

$$M_e=\pi B_e \ . \qquad (21)$$

2.2. Световые величины

Для практических целей часто важно не только тепловое действие электромагнитных волн, но и вызываемые ими зрительные ощущения. Как известно, зрительные ощущения вызывает электромагнитное излучение с длиной волны 380 — 760 нм, которое обычно называют *светом*. Для количественной характеристики интенсивности используют световые или фотометрические величины. В этом случае измерения осуществляют путем визуального сравнения (уравнивания) яркостей или освещенностей двух фотометрических полей: эталонного и исследуемого. Таким образом, для световых измерений необходимо использовать эталонный источник света. Наиболее удобным является *эталон силы света* в виде нагретых до высокой температуры твердых тел. В качестве эталона служит абсолютно черный излучатель*, который находится при температуре плавления платины (T=2045 К). Он состоит из закрытой снизу керамической трубки диаметром около 2 мм и длиной 40 мм (рис. 4). Трубка помещена в тигель для расплава, заполненный чистой платиной. Для термоизоляции тигель помещен в сосуд с порошком тория. Платина расплавляется переменным индукционным током, величина которого в обмотке

* Примером абсолютно черных излучателей могут быть сажа, поверхность Солнца.

подбирается такой, чтобы поддерживать платину при температуре кристаллизации, т.е. 2045 К.

Трубка и тигель сверху закрыты крышкой с отверстием, через которое выходит излучение. Это излучение направляется на поверхность, выполняющую роль фотометра. Сила света исследуемого источника определяется путем сравнения освещенностей поверхности данным источником и эталонным.

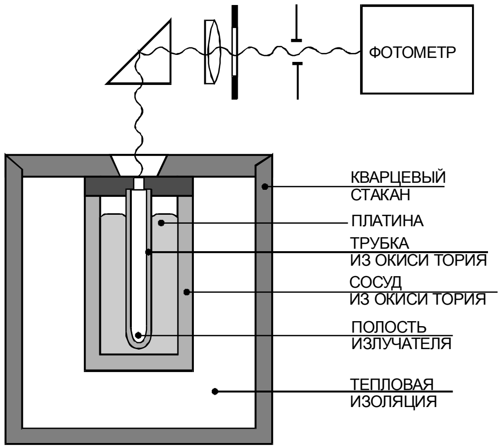


Рис. 4. Эталон силы света

Единицей силы света служит *кандела* (от лат. candela — свеча). Кандела равна силе света, испускаемого с поверхности площадью 1/600 000 м^2 (1/60 см^2) черного излучателя в перпендикулярном направлении при температуре затвердевания платины и давлении, равном 101 325 Па. Кандела относится к числу основных физических величин. На ее основе определяются другие световые величины.

Световой поток равен силе света, испускаемого источником в телесный угол $d\Omega$:

$d\Phi = Jd\Omega$.

За единицу светового потока в системе СИ принимается *люмен* (лм). Он равен световому потоку, излучаемому изотропным источником в одну канделу внутрь телесного угла в один стерадиан:

1лм=1кд1ср .

Остальные световые величины — освещенность, яркость и другие — определяются аналогично энергетическим величинам. Отметим, что в данном случае используется световой поток, оцениваемый по зрительному ощущению «среднего» глаза.

Для измерения освещенности используется единица *люкс* (лк); люкс равен освещенности поверхности площадью в 1м^2 при световом потоке падающего на него излучения, равном 1лм:

1лк=1лм/1м^2.

Единицей измерения яркости является кандела на 1м^2(кд/м^2).

Излучение одной и той же мощности в различных интервалах длин волн вызывает различные зрительные ощущения яркости источника. Наиболее ярким представляется излучение на длине волны 555 нм (зеленая область видимого спектра). Характеристикой, определяющей чувствительность «среднего» глаза человека для монохроматического излучения различных длин волн, является *спектральная световая эффективность*. Она равна отношению светового потока Φ_λ к потоку энергии излучения $\Phi_{e\lambda}$, создающего этот световой поток, т.е.

$$V_\lambda = \frac{\Phi_\lambda}{\Phi_{e\lambda}} .$$

Световая эффективность принимает максимальное значение для длины волны 555 нм. Отношение спектральной световой эффективности V_l при данной длине волны к ее максимальному значению (V_{555}) называют *относительной спектральной световой эффективностью*:

$$K_\lambda = \frac{V_\lambda}{V_{555}} .$$

Спектральная зависимость K_λ, называемая *кривой видности*, приведена на рис.5.

Если известна спектральная плотность энергетического потока излучения источника $\Phi_{e\lambda}$ ($\Phi_{e\lambda}=d\Phi_e/d\lambda$), то спектральную плотность соответствующего светового потока можно определить из соотношения :

$$\Phi_\lambda = V_{555} K_\lambda \Phi_{e\lambda} . \quad (22)$$

Полный световой поток определяется интегрированием выражения

$$\Phi = V_{555} \int K_\lambda \Phi_{e\lambda} d\lambda . \quad (23)$$

Формулы (22) и (23) определяют связь энергетических и световых величин. Величина V_{555} называется *световым эквивалентом излучения*, она принимается равной 683 лм/Вт, т.е. энергетический поток в 1Вт вызывает зрительное ощущение, соответствующее 683 лм. Величину $M_{555}=1/V_{555}$ называют *энергетическим механическим эквивалентом света*,

$M_{555}=1{,}46\cdot10^{-3}$ Вт/лм.

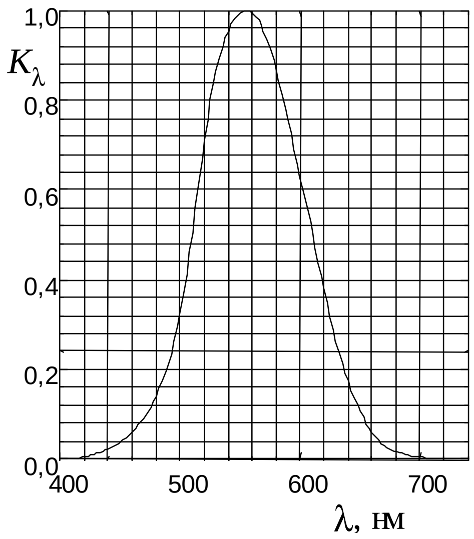


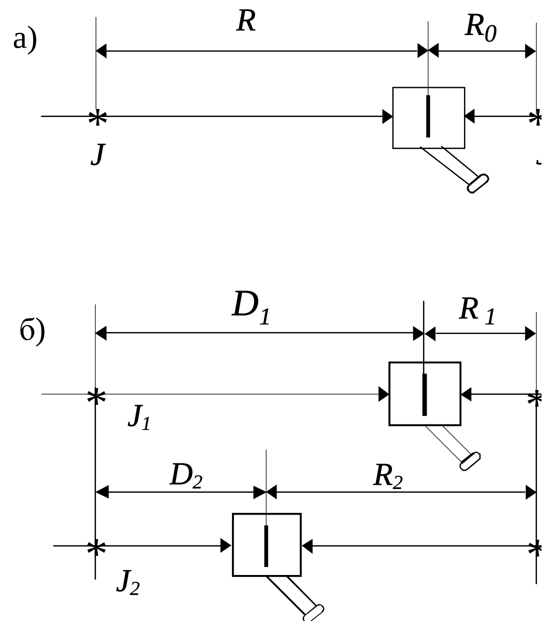
Рис. 5. Кривая видности

Таким образом, основной характеристикой источника света является величина, называемая силой света. Измерение силы света можно произвести путём измерения количества световой энергии (абсолютный метод). Такой метод измерения иногда может представлять некоторые трудности. Поэтому часто измерение силы света какого-либо источника производят путём сравнения этого источника света с другим источником, сила света которого заранее измерена каким-либо абсолютным методом. Этим методом пользуются в настоящей работе.

Для достижения фотометрического равновесия при сравнении силы света источников, как и при других световых измерениях на скамье, измеряется расстояние между источниками и приёмной пластиной фотометрической головки или любого уста-

новленного на скамье фотометра. Если полагать, что обе стороны приёмной пластины расположены симметрично и имеют одинаковый коэффициент отражения, то при световом равновесии будут равны освещённости обеих сторон пластины. Зная расстояния от приёмной пластины до освещающих её источников света, можно сравнить силу света этих источников. Если сила света одного из них известна, то определится и сила света второго источника.

Практическая часть



Способы измерения силы света

Обычно пользуются одним из следующих способов сравнения силы света двух источников.

Первый способ (рис. 6а). Сравниваемые источники с силой света J и J_0 устанавливаются на скамье по обе стороны фотометрической головки и неподвижно закрепляются. Светового равновесия добиваются путём перемещения фотометрической головки относительно источника света. При этом отсчитывают расстояние от одного и от другого источников до приёмной пластины головки, соответственно R и R_0. Отношение силы света источников равно отношению квадратов измеренных расстояний:

$$\frac{J}{J_0} = \frac{R^2}{R_0^2} \ . \qquad (24)$$

Если пластина фотометрической головки имеет неодинаковые для её двух сторон коэффициенты отражения или различные потери света, проходящего через оптическую систему головки двумя разными путями, то половину установок на фотометрическое равновесие производят при одном положении головки, а другую — с головкой, повёрнутой на 180° вокруг своей оси. В этом случае для вычисления силы света источника пользуются более сложной формулой:

$$\frac{J}{J_0} = \frac{R_1 R_2}{R_{01} R_{02}} \ , \qquad (25)$$

где R_1 и R_{01} — расстояния от источников света до испытательной пластины при одном положении головки; R_2 и R_{02} — расстояния от источников света до испытательной пластины при повёрнутой головке.

Второй способ (рис. 6б). Сначала один, затем другой сравниваемые источники света J и J_0 устанавливаются по одну сторону фотометрической головки. С другой стороны головки на фотометрической скамье как при первом, так и при втором источниках, устанавливается одна и та же лампа, называемая лампой сравнения. Сила света лампы сравнения в формулу для вычисления отношения сил света первого и второго источников не входит. При этом способе измерений исключаются ошибки, связанные с несимметричностью фотометрической головки и не требуется никаких поворотов головки или приёмной пластины.

Если лампа сравнения закреплена на скамье, а первый и второй источники света устанавливаются на одно и то же место на скамье и также при измерениях неподвижно закрепляются, то светового равновесия достигают перемещением по скамье фотометрической головки. Отношение сил света первого и второго источников подсчитывается по следующей формуле:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2^2 D_1^2}{R_1^2 D_2^2} \ , \qquad (26)$$

где R_2 и R_1 — расстояние от сравниваемых источников света J_2 и J_1 до приёмной пластины фотометрической головки; D_2 и D_1 — расстояния от лампы сравнения до приёмной пластины головки, когда установлены соответственно первый и второй источники света.

Иногда предпочитают закреплять неподвижно фотометрическую головку и испытуемые источники и светового равновесия добиваются перемещением лампы сравнения. Тогда вместо (26) следует пользоваться более простой формулой

Рис. 6. Два способа измерения силы света

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{D_1^2}{D_2^2} \ .$$

Здесь обозначения сохраняются прежними.

Пользуясь фотометрической головкой, можно на скамье измерять не только силу света, но и другие фотометрические характеристики. При выполнении световых измерений на фотометрической скамье часто вместо фотометрической головки пользуются тем или иным зрительным фотометром. Одна часть поля сравнения фотометра освещается внешним источником света, укреплённым на скамье, тогда как другая часть фотометрического поля освещается источником, находящимся в корпусе фотометра. В этом случае приходится измерять только расстояние от внешнего источника света до приёмной пластины фотометра. Большинство измерений, выполняемых на скамье с помощью фотометрической головки или того или иного зрительного или фотоэлектрического фотометра, заканчиваются расчётами, в которых пользуются *законом обратных квадратов*. Этим законом можно пользоваться, пренебрегая отступлениями от него, пока размеры источника света малы по сравнению с расстоянием между источником света и приёмной пластиной фотометра или фотоэлемента. Если отношение диаметра круга, в который вписывается светящееся тело, к расстоянию до приемной площадки равно 1:10, то

ошибка отступления от закона квадратов не превышает 0,25%, но не приближается к 1% при отношении, равном 1:5.
Полное описание фотометрической скамьи приведено в отдельном руководстве.

Для установления светового равенства в поле зрения фотометра существует три способа.

Первый способ. При выведенных контрастных пластинках находят такое положение фотометра относительно источников света, при котором всё поле кажется равно освещённым. Этот способ обладает тем недостатком, что с его помощью нельзя установить разность освещённостей отдельных частей поля зрения, если эта разность меньше некоторой величины, определяемой свойствами глаза наблюдателя.

Второй способ. При выведенных контрастных пластинках находят два положения фотометра относительно источников света, при которых начинает становиться возможным заметить глазом разницу в освещённости отдельных частей поля зрения. За положение, соответствующее световому равенству, принимают положение фотометра, среднее между двумя указанными положениями. Этот способ даёт результаты несколько более точные, чем первый.

Третий способ. При введённых контрастных пластинках добиваются такого положения фотометра, при котором затемнённые трапеции кажутся равно затемнёнными по сравнению со всем полем зрения, и никаких других границ освещённости отдельных участков поля зрения окулярной трубы не видно. *Этот способ является наиболее точным.*

Из рассмотрения оптической схемы фотометра (см. техническое описание) видно, что свет, попадающий в окулярную трубку от правой и левой сторон рассеивающей пластины, проходит не совсем одинаковые оптические пути (свет от левой стороны пластины претерпевает одно лишнее отражение). Следовательно, ослабление световых пучков на этих путях также будет различно. Отсюда следует, что световому равенству в поле зрения окулярной трубы фотометра не будет соответствовать равная освещённость обеих сторон освещённой пластинки.

Для того, чтобы исключить ошибку, возникающую в связи с указанной особенностью описанного фотометра, в его конструкции предусмотрена возможность вращения камеры фотометра так, что при повороте стороны рассеивающей пластины, которая раньше была обращена вправо, становится обращённой влево, и наоборот. Для правильного нахождения положения фотометра, соответствующего равной освещённости обеих сторон рассеивающей пластины, следует найти два положения фотометра, соответствующие световому равенству поля зрения окулярной трубы при прямом и перевёрнутом положении камеры фотометра, и определить среднее значение. Этот приём даёт тем более точный результат, чем меньше разнятся по силе света сравниваемые источники.

Упражнение 1. ***Измерение силы света лампы накаливания***

Порядок выполнения упражнения

1. Изучить по настоящему описанию теоретическую часть работы и два способа измерения силы света.

2. Внимательно ознакомиться по прилагаемому техническому описанию с устройством и принципом действия фотометрической скамьи и её отдельных узлов (скамьи, передвижной каретки, фотометрической головки, измерителя расстояния, держателей источников света).

3. Сравниваемые лампы располагают на концах скамьи перед краевыми экранами. Фотометр помещается на скамье приблизительно посередине между лампами.

4. По прилагаемому техническому описанию (стр. 5) производят центровку деталей и приборов и одновременно проверяют правильность расположения экранов.

5. С помощью измерителя расстояний определяют поправку для каждой лампы (см. техническое описание фотометрической скамьи, стр. 13—15). Поправка определяется при прямом и перевёрнутом положении фотометра (на 180°).

Примечание. При измерении поправок нельзя нарушать центровку фотометра и ламп, их можно перемещать только вдоль скамьи. По высоте регулируются только измеритель расстояний.

6. После определения поправок фотометр и лампы располагают на скамье так, как указано в пункте 3.

7. Добиваются светового равенства путем перемещения фотометра по первому способу.

8. Записывают отсчёты положения на скамье измеряемого источника, фотометра и эталонного источника, соответствующие световому равенству.

9. Отсчётов, соответствующих световому равенству, берут десять, т.е. пять при прямом и пять при перевёрнутом положении фотометра.

10. Данные измерений заносят в таблицу 1.

Таблица 1

Положение фотометра	№ измерения	Отсчет эталонного источника, n_1	Отсчет фотометра, n_0	Отсчет измеряемого источника, n_2	Поправка, Δ_1 и Δ_2	Расстояние, $R_0=(n_0-n_1)\pm\Delta$	Расстояние, $R=(n_2-n_0)\pm\Delta$	Сила света, $J=J_0\cdot\frac{R^2}{R_0^2}$
Прямое	1. 2. 3. 4. 5.							
Перевернутое	1. 2. 3. 4. 5.							
$J_{ср}$								
$\Delta J_{ср}$								
$\Delta J_р/J_{ср}$								
$J=J_{ср}\pm\Delta J_{ср}$								

Упражнение 2. ***Изучение светового поля лампы накаливания***

Сила света несимметричного источника света зависит от направления, в котором распространяется свет.

Сила света по данному направлению определяется соотношением (19), приведенном в теоретической части работы.

Пользуясь полярными координатами для плоской картины, получим, что сила света является функцией полярного угла: $J=J(\alpha)$.

Графически неизотропный источник света можно охарактеризовать, отложив из некоторой начальной точки 0 во всех направлениях радиусы-векторы, длина которых в каждом направлении пропорциональна силе света $J(\alpha)$ в том же направлении. Огибающая этих радиус-векторов даёт представление о силе света источника в различных направлениях.

Порядок выполнения упражнения

Изучение светового поля производится для лампы накаливания 12 В 21 *кд*, используемой в первом упражнении в качестве эталонной. В этом случае лампу вынимать нельзя, тогда поправки остаются те же. При смене или при повторной установке источника света нужно снова производить центровку ламп и определять поправки.

1. Помещают лампу 12 В 21 *кд* на оптической скамье на поворотном приспособлении (держатель с лимбом). *Лампой сравнения является лампа 220В 40 Вт.*

2. Производят измерение силы света через каждые 20° поворота лампы (от 0° до 360°), по одному измерению при каждом угле поворота.

3. Результаты измерений записывают в таблицу 2.

Получив таким образом распределение силы света, даваемого лампочкой в различных направлениях при повороте её относительно фотометра на 180°, вычерчивают кривую распределения силы света в полярных координатах, строят кривую распределения силы света вокруг лампочки накаливания следующим образом: проводят девять пересекающихся под равными углами прямых так, чтобы получилось 18 лучей, исходящих из некоторой точки A.

Таблица 2

Угол, α									
Отсчет фотометра, n_0									
$R_0=(n_1-n_0)\pm\Delta$									
$R=(n_0-n_2)\pm\Delta$									
$J=J_0\dfrac{R^2}{R_0^2}$									

Примечание. n_1 — отсчет источника, принятого за эталонный, n_2 — отсчет определяемого источника.

Контрольные вопросы

1. Какой физический смысл имеет вектор Пойнтинга?
2. Что следует понимать под интенсивностью электромагнитных волн?
3. Какие два типа фотометрических величин вы знаете?
4. Назовите энергетические фотометрические величины.
5. Как определяются световые фотометрические величины?
6. Какими величинами характеризуются протяженные источники света?
7. Как осуществляется переход от энергетических величин к световым?
8. Определите световую эффективность η (в ваттах на люмен) используемой вами эталонной лампы (21 В, 21 кд), учитывая, что она имеет токовую мощность 100Вт.
9. Объясните полученную в упражнении 2 диаграмму направленности излучения лампы.
10. Изобразите схему фотометра и объясните принцип его действия.
11. Какой физический смысл имеет механический эквивалент света?
12. Почему видимый диапазон электромагнитных волн является наиболее подходящим для зрения? Почему максимум кривой видности приходится на 555 нм (зеленый свет)?
13. Почему световая эффективность используемых ламп накаливания является очень низкой (не более 2%)? Как можно ее повысить?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ПОГЛОЩЕНИЯ СВЕТА

Цель работы: изучить законы поглощения, принцип измерения поглощения света с помощью фотоколориметра КФК-2 и определить коэффициенты пропускания и оптические плотности растворов.

1. Электромагнитные волны в веществе

Рассмотрим систему уравнений Максвелла:

ВВЕДЕНИЕ

ПОГРЕШНОСТИ В ЛАБОРАТОРНОМ ПРАКТИКУМЕ ПО ОПТИКЕ

Основная задача практикума состоит в экспериментальном исследовании закономерностей оптических явлений и приобретении навыков самостоятельной исследовательской работы с использованием оптических методов и приборов.

Постановка опытов всегда сопровождается измерениями. *Измерение* — сравнение физической величины с однородной величиной, принятой за единицу измерения. Значение физической величины, найденное путем измерения, называется *результатом измерения*. Измерения разделяют на *прямые* и *косвенные*. При прямых измерениях определяемая величина сравнивается с единицей измерения непосредственно или при помощи измерительного прибора. При косвенных измерениях искомая величина находится на основании результатов прямых измерений величин, которые связаны с искомой величиной определенной функциональной зависимостью.

При измерении любой физической величины мы никогда не получаем её истинного значения. Результат измерения даст нам только приближенное значение искомой величины. Абсолютной погрешностью измерения Δx называется отклонение результата измерения x от истинного значения измеряемой величины x_0:

$$\Delta x = x - x_0 \ .$$

Чтобы можно было судить, какая из физических величин измеряется более точно, вводится ещё *относительная погрешность*, которая выражается отношением абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой величины, т.е.

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0} \cdot 100\,\% \ . \tag{1}$$

1. Типы погрешностей

Различают следующие типы погрешностей: *систематические*, *случайные* и *промахи*.

Систематические погрешности. К систематическим погрешностям относятся: *инструментальные погрешности*, вызванные несовершенством средств измерения и влиянием внешних факторов, *погрешности метода измерений*, или *теоретические погрешности*, *субъективные погрешности*, обусловленные особенностями экспериментатора и т.д. Эти погрешности сохраняют свое значение и знак от опыта к опыту, они не зависят от числа измерений.

Случайные погрешности проявляются в том, что при повторении измерений одного и того же объекта, выполняемых с помощью одного и того же прибора, мы часто не получаем одинаковых данных. Это происходит потому, что на измерения оказывают влияние многочисленные факторы, не поддающиеся контролю и изменявшиеся от одного измерения к другому. К числу таких факторов относятся случайные вибрации отдельных частей прибора, различные не учитываемые изменения в среде (температура, оптические, электрические свойства, влажность и т.д.). Возникающие при этом погрешности называются *случайными*. Случайные погрешности всегда присутствуют в эксперименте. При отсутствии систематических погрешностей они служат причиной разброса повторных измерений относительно истинного значения.

2. Вычисление ошибок прямых измерений

При проведении прямого измерения определяют наиболее вероятное значение измеряемой величины, учитывают поправки на систематическую ошибку, вычисляют случайную и приборную погрешность, погрешность округления и полную погрешность измерения.

1. *Наиболее вероятное значение* измеряемой величины определяется как среднее арифметическое значений, найденных при многократных наблюдениях:

$$\langle x\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \; . \tag{2}$$

Если установлена причина какой-либо систематической ошибки, то ее устраняют путем введения поправки $\Delta x_{попр}$. В таком случае исправленная величина

$$x_{испр} = x_{изм} + \Delta x_{попр} \; . \tag{3}$$

Для надежной оценки случайных погрешностей необходимо провести достаточно большое количество наблюдений n. Допустим, что получены результаты x_1, x_2, ..., x_n.

Разность x_i-<x>=Δx_i называется *случайным отклонением* результата i-го наблюдения от среднего. Отклонения Δx_i могут быть положительными и отрицательными, большими и малыми. При достаточно большом числе наблюдений n с вероятностью 68% отклонение Δx_i лежит в интервале [-σ; +σ], где σ — *стандартное отклонение* (дисперсия). Для [-2σ; +2σ] эта вероятность равна 95%, а для [-3σ; +3σ] — 99,7%. Для любого значения вероятности P доверительный интервал [$-\lambda_P\sigma$;$+\lambda_P\sigma$] определяется числовым множителем λ_P, зависящим от P.

В теории вероятностей показывается, что *стандартное отклонение* σ определяется по отклонениям $\Delta x_i = x_i - x_0$:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_0\right)^2} \; . \tag{4}$$

Таким образом, стандартное отклонение σ определяют как ожидаемую ошибку каждого отдельного, единичного наблюдения. Знание величины σ дает возможность оценивать вероятность получения при одноразовом наблюдении той или иной величины ошибки.

Величина

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2} \tag{5}$$

называется *средней квадратичной погрешностью* отдельного наблюдения. Стандартное отклонение $\sigma \approx S$, и чем больше число наблюдений n, тем точнее это приближенное равенство (при n®μ, <x>$\rightarrow x_0$, σ=S).

Среднее арифметическое совокупности результатов наблюдений, безусловно, точнее характеризует значение измеряемой величины, чем результат только одного наблюдения, поскольку положительные и отрицательные ошибки частично компенсируются. Поэтому стандартное отклонение среднего результата σ_n меньше σ. Следовательно, средняя квадратичная погрешность окончательного результата опыта

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}\ . \qquad (6)$$

Тогда *полуширина доверительного интервала* $\Delta x=\lambda_P S_n$. Практически нецелесообразно (и невозможно) проводить большое число наблюдений для определения одной величины. В учебных лабораториях, как правило, n~10. Это приводит к необходимости при заданной надежности расширить интервал Δx, т.е. увеличить множитель λ_P. Причем для различных значений n это увеличение будет разным. Поэтому множитель λ_P приходится заменить на новый $t_{n,P}$, называемый *коэффициентом Стьюдента* (см. табл.). В пределе при n ® μ коэффициент $t_{n,P}$ ® $t_{\mu,P}$ ® λ_P.

С учетом коэффициента Стьюдента случайная погрешность результата, определяющая полуширину доверительного интервала около среднего значения измеряемой величины,

$$\Delta x_{сл} = t_{n,P}\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}\ . \qquad (7)$$

Это основная формула для расчета случайных погрешностей прямых измерений.

Таблица

Коэффициенты Стьюдента, t_{nP}

Число испытаний, n	Вероятность, P			
	0,5	0,9	0,95	0,99
2	1,60	6,31	12,7	63,7
3	0,82	2,92	4,30	9,92
4	0,77	2,35	3,18	5,94
5	0,74	2,13	2,78	4,60
6	0,73	2,02	2,57	4,03
7	0,72	1,94	2,45	3,71
8	0,71	1,89	2,36	3,50
9	0,71	1,86	2,31	3,36
10	0,70	1,83	2,26	3,25
15	0,69	1,76	2,14	2,98
20	0,69	1,73	2,09	2,86
∝	0,68	1,65	1,96	2,59

3. Погрешность прибора

В лабораторной работе мы имеем дело с величинами, которые измеряются непосредственно, т.е. значения этих величин отсчитываются со шкалы измерительного прибора. Такие измерения называются *прямыми*. Погрешности измерений могут быть различного типа: это ошибка прибора, ошибка округления и другие систематические и случайные ошибки. Могут быть случаи, когда один из этих типов погрешностей превышает все остальные. В этом случае нужно определить только ту, которая вносит главный вклад в ошибку измерений.

Погрешности разных приборов одного типа могут быть разными по знаку и по величине, но не большими *предельной*. Значения соответствующих предельных погрешностей оговорены нормативными документами и гарантируются при изготовлении и проверке приборов. Тогда, несмотря на то, что погрешность конкретного прибора является систематической, в силу отсутствия информации об этой ошибке (не известны ни знак, ни ее величина; известно только, что она не превышает предельной) ее можно рассматривать и учитывать при расчетах как случайную.

Предельная погрешность прибора обычно указывается в его паспорте. Для одних приборов стандартами задается *предельная абсолютная погрешность* δ, а для других — *предельная относительная погрешность* (*класс точности* k). Классом точности измерительного прибора называется выраженное в процентах отношение предельной абсолютной погрешности прибора δ к максимальному значению измеряемой им величины $x_{макс}$ (для многопредельных приборов на рабочем пределе):

$$k = \frac{\delta}{x_{макс}}100\%\ . \qquad (8)$$

Значок % на приборах не ставится. Для электроизмерительных приборов возможны классы: 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 2,5; 4,0. Более грубые приборы класса не имеют. По известному классу точности находится предельная абсолютная погрешность прибора

$$\delta = \frac{k}{100\%}x_{макс}\ . \qquad (9)$$

Обычно, когда указывается ошибка прибора δ, под этой величиной понимают половину интервала, внутри которого может быть заключена измеряемая величина с вероятностью P=0,997, при этом условно принимают, что функция ее распределения подчиняется нормальному закону. Тогда δ=3σ. В учебных лабораториях ограничиваются значением P=0,95, которому соответствует приборная погрешность

$$\Delta x_{п,р} = \frac{2}{3}\delta = \frac{2}{3}\frac{k}{100\%}x_{макс} . \qquad (10)$$

Для произвольной надежности P абсолютная погрешность

$$\Delta x_{п,р} \approx \frac{\lambda_P}{3}\delta = \frac{\lambda_P}{3}\frac{k}{100\%}x_{макс} . \qquad (11)$$

где коэффициент λ_P, зависящий от доверительной вероятности P, определяется по приведенной таблице.

Когда считываем показания со шкалы приборов, то возникает систематическая ошибка, обусловленная ошибкой прибора и *ошибкой округления*. Мы вынуждены округлять до целого самого мелкого деления шкалы или половины его. В случае округления считаем, что систематическая ошибка имеет равномерное распределение.

Интервал округления h может быть различным. Если отсчет снимается с точностью до целого деления, то интервал округления равен цене деления шкалы прибора; если отсчет округляется до половины деления, интервал округления равен половине цены деления и т.д.

Максимальная погрешность округления, очевидно, не превышает половины интервала округления, т.е. величины h/2.

Для доверительной вероятности P величину

$$\Delta x_{окр} = P\frac{h}{2}$$

принимают за абсолютную погрешность округления при измерении величины x.

На хороших измерительных приборах цена деления шкалы согласована с классом точности. В этом случае за общую погрешность можно взять ошибку, определенную из класса точности.

4. Полная погрешность при прямом измерении

В теории вероятностей показывается, что погрешность, обусловленная несколькими независимыми причинами, определяется «квадратичным суммированием». Поскольку в учебных лабораториях, кроме поправок, вводимых в результат сразу, учитываются три погрешности: случайная $\Delta x_{сл}$, прибора $\Delta x_{пр}$ и округления $\Delta x_{окр}$, то полная абсолютная погрешность прямого измерения

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{сл}^2 + \Delta x_{пр}^2 + \Delta x_{окр}^2} . \qquad (12)$$

Относительная погрешность

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{< x >}100\% = \sqrt{\varepsilon_{сл}^2 + \varepsilon_{пр}^2 + \varepsilon_{окр}^2} . \qquad (13)$$

При вычислении всех суммируемых погрешностей доверительная вероятность P выбирается одинаковой (как правило, принимают P=0,95).

5. Порядок обработки результатов прямых измерений

1. Рассчитать среднее арифметическое $<x>$ по формуле (2).
2. Определить случайные отклонения Δx_i.
3. Проверить равенство нулю алгебраической суммы всех значений Δx_i.
4. Рассчитать случайную погрешность (при P=0,95) по формуле (7).
5. Определить приборную погрешность $\Delta x_{пр}$.
6. Найти погрешность округления $\Delta x_{окр}$.
7. Определить полную погрешность измерения Δx по формуле (12).
8. Вычислить относительную погрешность измерения ε по формуле (13).
9. Оценить возможную поправку на систематическую погрешность метода.
10. Окончательный результат записать в виде $x=<x>\pm\Delta x$, $\varepsilon=N\%$; P=0,95.

6. Ошибки косвенных измерений

В большинстве случаев представляет интерес величина, которая не измеряется непосредственно на опыте, но которую можно выразить как функцию непосредственно измеряемых величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{14}$$

В этом случае говорят о *косвенных измерениях*. Обычно предполагается, что все аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются независимыми и измеряются независимыми способами. Наиболее вероятное значение функции y при таких измерениях получается при подстановке средних значений аргументов:

$$y_{изм}=f(\langle x_1\rangle, \langle x_2\rangle, \ldots, \langle x_n\rangle).$$

Погрешность величины $y_{изм}$ определяют по формуле

$$\Delta y_{изм} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{df}{dx_i}\Delta x_i\right)^2}, \tag{15}$$

где Δx_i — абсолютные погрешности величин x_i, df/dx_i — частные производные функции y по аргументам x_i, вычисленные при средних значениях $\langle x_1\rangle, \langle x_2\rangle, \ldots, \langle x_n\rangle$. Доверительная вероятность P для всех погрешностей Δx_i задается одинаковой, обычно равной 0,95. Такой же она будет и для величины Δy.

Относительную погрешность определяют по формуле:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{y}\frac{df}{dx_i}\Delta x_i\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d\ln f}{dx_i}\Delta x_i\right)^2}. \tag{16}$$

В частном случае, если аргументы Δx_i входят в функцию в виде сомножителей, вычисления проще начинать с определения относительной погрешности ε_y. Абсолютную погрешность в таком случае определяют по относительной погрешности:

$$\Delta y=\varepsilon_y y.$$

7. Порядок обработки результатов косвенных измерений

1. Для каждой серии измеряемых величин, входящих в определение искомой величины, проводится обработка, как описано в п. 5. При этом для всех измеряемых величин задается одно и то же значение доверительной вероятности (0,95).

2. Находится выражение для абсолютной погрешности по формуле (15) в соответствии с конкретным видом функциональней зависимости.
3. Окончательный результат записывается в виде

$$y_{изм}=f(\langle x_1\rangle, \langle x_2\rangle, \ldots, \langle x_n\rangle)\pm\Delta y.$$

4. Определяется относительная погрешность

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta y}{y}100\% . \tag{16}$$

8. Построение графиков

При обработке полученного экспериментального материала для того, чтобы получить наглядное представление о зависимости одной физической величины от другой, часто прибегают к построению графиков. Графиками пользуются также для быстрого нахождения значения одной величины (функции) по данному значению другой величины (аргумента). Точность, с которой можно находить значения по графику, ограничивается точностью построения графика и составляет обычно 0,5% измеряемой величины. Кроме того, иногда пользуются графическими методами вычислений, которые, хотя и не дают большой точности, но являются наглядными и простыми.

Для построения графиков чаще всего используют прямоугольную (декартову) систему координат, в которой положение точки на плоскости определяется двумя координатами x и y. Иногда, если в исследуемой задаче имеется какая-либо выделенная точка (центр симметрии), результаты измерений удобнее изображать в полярной системе координат, в которой положение точки определяется радиус-вектором ρ, проведенным к этой точке из начала координат 0 (полюса), и углом, который составляет радиус-вектор с некоторым избранным направлением.

Значения функции (зависимой величины) откладываются по вертикальной оси, значения аргумента — по горизонтальной. Перед построением графика следует, исходя из пределов, в которых заключены значения функции и аргумента, выбрать разумные масштабы по оси абсцисс и по оси ординат. Эти масштабы выбираются произвольно, независимо друг от друга, но так, чтобы график не был слишком мелким или растянутым по одной из осей. Иногда интервал, в котором заключены значения функции или аргумента, лежит далеко от нуля. В этом случае целесообразно начинать деления на соответствующей оси не с нуля, а с некоторого значения, лишь немногим меньшего, чем наименьшее значение, которое надо отложить на этой оси.

Масштабные деления наносят на оси, около них пишут соответствующие цифры. У концов осей пишут обозначения этих величин с указанием единиц измерения. Иногда вдоль осей пишут полностью названия откладываемых величин. Далее, на график острым твердым карандашом наносят соответствующие точки. Для большей наглядности их обычно обводят кружками. Если хотят выделить некоторые точки (например, значения одной и той же физической величины, получаемые разными методами), то, кроме кружков, ставят прямоугольники, квадратики и т.д.

В том случае, когда ошибка аргумента мала до сравнению с ошибкой в значении функции, на графике величину ошибки функции изображают вертикальным отрезком, на середине которого находится экспериментальная точка. Длина отрезка равна удвоенной величине ошибки в данном масштабе. Отрезок сверху и снизу ограничивается точками.

Кривую на графике следует проводить, не просто, соединяя точки друг с другом, а выбирая среди точек так называемое преимущественное направление. Эта кривая должна быть по возможности плавной и проходить таким образом, чтобы примерно одинаковое число точек находилось бы над кривой и под ней. При проведении кривой выявляется некоторый разброс точек, обусловленный наличием ошибок измерений. Чем меньше ошибки измерений, тем лучше точки ложатся на кривую. При этом отдельные грубые просчеты и явно ошибочные измерения легко обнаружить, так как соответствующие им точки будут расположены далеко от кривой. Примерный вид графика приведен на рисунке 1.

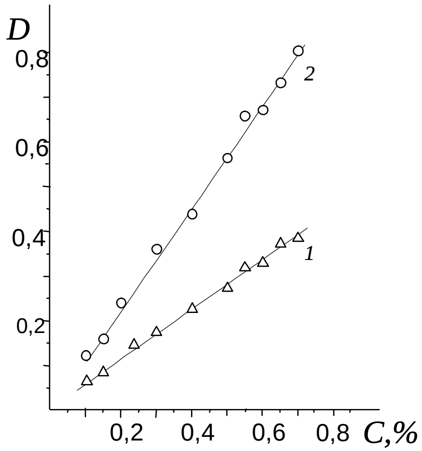


Рис.1. Пример построения графика зависимости оптической силы от концентрации раствора, измеренной в кювете толщиной 20 мм (*1*) и 40 мм (*2*)

9. Округление и запись результатов измерений.

При выполнении вычислений в лабораторном практикуме абсолютная погрешность округляется до одной значащей цифры; при этом округления производят с избытком. Однако если первой значащей цифрой является единица, то при округлении приводят две значащие цифры. Например, $\Delta f = 0{,}053$ м $\approx 0{,}06$ м; $\Delta\lambda = 12{,}4$ нм ≈ 13 нм. Это правило округления распространяется и на относительные погрешности.

При записи результатов измерений необходимо руководствоваться следующими правилами.

1. Результат измерения величины необходимо записывать вместе с его погрешностью и доверительной вероятностью. Например, $\lambda = (635 \pm 8)$ нм, P=0,95.
2. Конечный результат округляется так, чтобы его последняя цифра и значащая цифра абсолютной погрешности принадлежали к одному и тому же разряду.
3. Если в ответе имеется множитель 10^n, то показатель степени n в результате и его абсолютной погрешности должен быть одинаковым. Например, h=(2,1±0,2)·10^{-2}мм.
4. Измеряемая величина и абсолютная погрешность выражаются в одних единицах измерений.

10. Оформление отчетов.

В отчетах (протоколах) лабораторных работ указывают:

1) номер и название работы и отдельных ее упражнений;
2) цель работы;
3) схематический рисунок установки, схемы, чертежи с обозначениями отдельных элементов и приборов, пояснения этих обозначений;
4) расчетные формулы (для искомых величин и погрешностей) с пояснениями обозначений;
5) предварительную оценку погрешности измерения;
6) таблицы с данными, полученными в эксперименте.

В таблицах указывают обозначение и единицу измерения каждой физической величины. В случае отсутствия каких-либо данных ставят прочерк *(но не нуль!)*. Если числовые значения какой-то физической величины имеют общий множитель, например, вида $10^{\pm n}$, то в таблицу удобно записывать не саму величину, а уменьшенную или увеличенную в 10^n раз. Например, вместо давления $p=1{,}1\cdot10^5$ Па в таблицу заносят величину, в 10^5 раз меньшую: $p\cdot10^{-5}=1{,}1$ Па.

В обозначении соответствующего столбца таблицы в этом случае указывают новую величину ($p\cdot10^5$, Па), а в самом столбце записывают только значащие числа (1,1) без многократного повторения множителя. Показания измерительных приборов часто удобно сначала записывать в делениях шкалы, а в соседнем столбце — в единицах измеряемой величины;

7) расчет искомой величины по средним значениям параметров, входящих в расчетную формулу;
8) расчет погрешностей;
9) графики;
10) окончательный результат измерений;
11) выводы и замечания.