

*Гродзенскі дзяржаўны ўніверсітэт імя Янкі Купалы
Кафедра агульнай фізікі
Лабараторыя механікі
ауд. 408*

Лабараторная работа №12

**СКЛАДАННЕ ЎЗАЕМНА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ
ВАГАННЯЎ. ФІГУРЫ ЛІСАЖУ**

для студэнтаў спецыяльнасці “ФІЗІКА”

Гродна, 2011

СКЛАДАННЕ ЎЗАЕМНА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ВАГАННЯЎ. ФІГУРЫ ЛІСАЖУ

Мэта работы:

Доследнае вызначэнне невядомай частаты ваганняў, а таксама хуткасці гуку ў паветры з выкарыстаннем фігур Лісажу..

Прылады і абсталяванне:

Асцылограф, крыніца пераменнага напружання, гукавы генератар, мікрафон, дынамік, лінейка.

Тэарэтычныя асновы

Цела, якое вагаецца, можа на сам рэч удзельнічаць адначасова ў некалькіх вагальных працэсах. Тады неабходна знайсці выніковае ваганне. Іншымі словамі, ваганні трэба скласці. Калі цела ажыццяўляе адначасова два гарманічныя ваганні ў двух узаемна-перпендыкулярных напрамках, то атрымліваюцца закнутыя траекторыі, якія называюцца *фігурамі Лісажу*.

Выгляд фігуры залежыць ад суадносіны паміж перыядамі (частотамі), фазамі і амплітудамі абодвух ваганняў. Фігуры Лісажу ўпісваюцца ў прамавугольнік, цэнтр якога супадае з пачаткам каардынат, а бакі паралельныя восям каардынат і размешчаны па абодва бакі ад іх на адлегласцях, роўных амплітудам ваганняў.

Разгледзім вынік складання двух узаемна перпендыкулярных ваганняў:

$$\begin{cases} x = x_0 \cos(\omega_x t); \\ y = y_0 \cos(\omega_y t + \phi). \end{cases} \quad (1)$$

Сістэма ўраўненняў (1) уяўляе сабой ураўненнем крывой, зададзенай у параметрычным выглядзе, дзе x_0 , y_0 і ω_x , ω_y – амплітуды і цыклічныя частоты адпаведных ваганняў, ϕ – пачатковая рознасць фаз ваганняў.

Практыкаванне 1. Вызначэнне невядомай частаты ваганняў з дапамогай фігур Лісажу

Для знаходжання ўраўнення траекторыі неабходна выключыць з (1) параметр (час) t . У агульным выпадку гэта ёсць дастаткова складаная матэматычная працэдура, таму абмяжуемся разглядаць некаторых прыватных выпадкаў.

Калі частоты ваганняў аднолькавыя ($\omega_x = \omega_y = \omega$), то ураўненнем траекторыі цела, якое ажыццяўляе адначасова два гарманічныя ўзаемна перпендыкулярныя ваганні, з'яўляецца ўраўненне эліпса:

$$\begin{cases} \frac{x}{x_0} = \cos(\omega t); \\ \frac{y}{y_0} = \cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t)\cos\varphi - \sin(\omega t)\sin\varphi. \end{cases} \quad (2)$$

Робім замену ў другім ураўненні сістэмы, атрымаем:

$$\frac{y}{y_0} = \frac{x}{x_0}\cos\varphi - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2} \sin\varphi$$

адкуль

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - 2\frac{x}{x_0}\frac{y}{y_0}\cos\varphi = \sin^2\varphi. \quad (3)$$

1. Ваганні адбываюцца ў аднолькавых фазах ($\varphi = 0$). У гэтым выпадку ўраўненне (3) прыме выгляд:

$$\left(\frac{x}{x_0} - \frac{y}{y_0}\right)^2 = 0 \text{ або } y = \frac{y_0}{x_0}x. \quad (4)$$

Такім чынам эліпс выраджаецца ў прамую (ляжыць у 1 і 3 чвэрцях), ураўненне якой (4). Калі рознасць фаз $\varphi = \pi$, то ў гэтым выпадку эліпс таксама выраджаецца ў прамую (ляжыць у 2 і 4 чвэрцях).

2. Ваганні адбываюцца з рознасцю фаз $\pi/2$. Тады ураўненне (3) будзе мець выгляд:

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} = 1 \quad (5)$$

Атрыманая крывая з’яўляецца эліпсам, восі якога супадаюць з восямі каардынат. Калі ж пры гэтым амплітуды ваганняў аднолькавыя, то эліпс пераўтвараецца ў акружнасць $x^2 + y^2 = R^2$.

3. Пры любых іншых рознасцях фаз паміж ваганнямі ураўненне (3) задае эліпс, восі якога маюць адвольны напрамак на плоскасці ў дачыненні да абранай сістэмы каардынат.

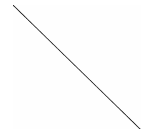
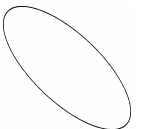
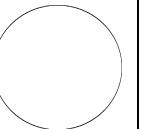
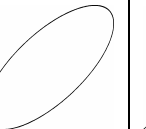
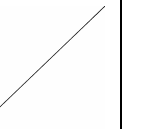

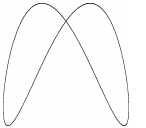
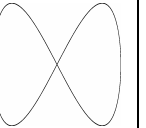
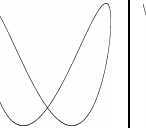
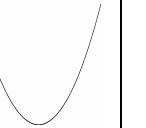
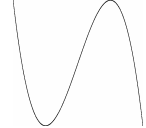
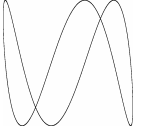
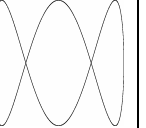
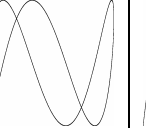
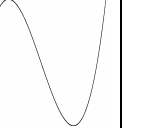
Неабходна адзначыць, што калі частоты складаных ваганняў супадаюць недакладна, то рознасць фаз з цягам часу змяняецца, значыць эліпс увесць час дэфармуецца (карціна нестабільная, “плыве”).

Калі ж частоты складаных ваганняў неаднолькавыя, а іх стасунак з’яўляецца рацыянальным лікам, то праз прамежак часу, роўны найменшаму кратнаму абодвух перыядаў, цела вяртаецца ў зыходнае становішча – атрымліваюцца фігуры Лісажу больш складанай формы. Некаторыя з фігур з розным стасункам частот ваганняў прадстаўлены ў табліцы.

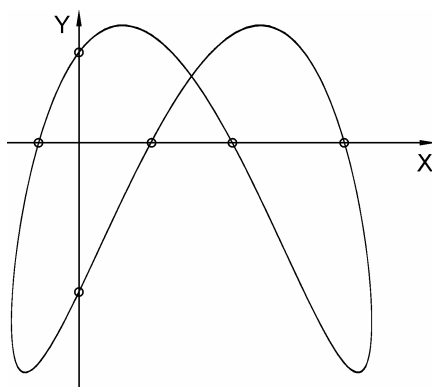
Можна паказаць, што
$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{T_x}{T_y} = \frac{n_x}{n_y}. \quad (6)$$

Калі частата аднаго з ваганняў вядомая, то па выглядзе фігур Лісажу можна вызначыць асцылаграфічным метадам частату другога. Калі падаваць на гарызантальна адхіляючыя пласціны асцылографа напружанне з вядомай частатой (напрыклад, прамысловай частатой у Беларусі $\nu = 50$ Гц), а на вертыкальна адхіляючыя пласціны напружанне з невядомай частатой, то для яе разліку можна выкарыстаць выраз:

$$\frac{\nu_y}{\nu_x} = \frac{n_x}{n_y}, \text{ тады } \nu_y = \nu_x \frac{n_x}{n_y} \quad (7)$$

$\frac{\omega_x}{\omega_y}$	Рознасць фаз ваганняў				
	0°	45°	90°	135°	180°
1:1					
1:2					
1:3					

Правіла для знаходжання невядомых частот наступнае: неабходна правесці праз дадзеную фігуру дзве адвольныя узаемна-перпендыкулярныя прамыя паралельныя каардынатым восям OX і OY , як паказана на малюнку 1.



Мал. 1.

Далей неабходна падлічыць лік пунктаў перасячэння крывой з кожнай прамой n_x і n_y .

У дадзеным выпадку $\frac{n_x}{n_y} = \frac{4}{2}$, адпаведна невядомая частата

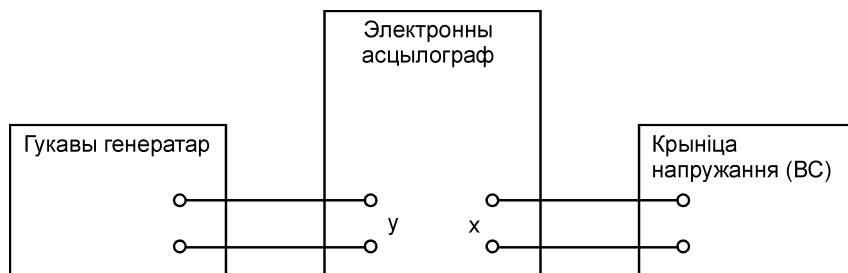
вагання разлічваецца па выразе (7).

Для таго, каб не страціць пры падліку пункты неабходна пазбягаць перасячэння абраных прамых з пунктамі перасячэння галінаў фігуры Лісажу (там прамая перасякаецца фігурай двойчы).

У дадзенай рабоце параўнанне частот выконваецца з дапамогай электроннага асцылографа, на вертыкальна адхіляючыя пласціны якога падаецца напружанне ад крыніцы ваганняў гукавой частаты (гукавога генератара), а на гарызантальна адхіляючыя пласціны напружанне сеткі пераменнага току з частатой $\nu = 50$ Гц ($\omega = 2\pi\nu$).

Доследная прылада

Для выканання работы неабходна сабраць схему, адлюстраваную на малюнку 2, дзе з дапамогай лабаранта або выкладчыка неабходна падлучыць гукавы генератар, электронны асцылограф і крыніцу пераменнага напружання, якая выдае пераменны сігнал прамысловай частаты ў Беларусі ($\nu = 50$ Гц).



Мал. 2.

Парадак выканання работы:

1. Сабярыце схему (малюнак 2).
2. Высвельце пытанні па рабоце з прыладамі з выкладчыкам або лабарантам.

3. Уключыце ў сетку асцылограф і крыніцу пераменнага напружання. Сфакусіруйце і выведзіце светлую прамую лінію, даўжыня якой залежыць ад велічыні падаваемага напружання.
4. Уключыце ў сетку гукавы генератар. Дабівайцеся з'яўлення на экране фігур Лісажу.
5. Вярчаючы рэгулятар частаты гукавога генератара, дабівайцеся з'яўлення ўстойлівай карціны.
6. Вызначце лік пунктаў перасячэння крывой у напрамках восяў $OX (n_x)$ і $OY (n_y)$ і па выразе (7) разлічыце невядомую частату вагання пры дадзеных умовах, улічваючы, што з крыніцы напружання падаецца пераменны сігнал з частатой 50 Гц.
7. Параўнайце разлічаную частату з паказаннямі частаты на лімбе рэгулятара.
8. Замалюйце выгляд фігур Лісажу для рознасці фаз складаемых ваганняў 0° , 45° , 90° , 135° і 180° па ўзоры, прадстаўленым у табліцы.
9. Паўтарыце выкананне пп. 5–8 для шасці розных фігур Лісажу.

Практыкаванне 2. Вызначэнне скорасці гуку ў паветры.

Хуткасць сінусаідальнай гукавой хвалі звязана з даўжынёй хвалі і частатой вядомым выразам

$$v = \lambda \nu \quad (8)$$

Гэты выраз і ляжыць у аснове выканання практыкавання па вызначэнні скорасці гуку.

Гукавая хваля атрымліваецца з дапамогай дынаміка, сілкуемага ад гукавога генератара. Яна пераўтвараецца мікрафонам у пераменны электронны сігнал. Пераменныя сігналы з гукавога генератара і мікрафона падаюцца на ўваходы асцылографа. Назіраецца вынік складання двух узаемна перпендыкулярных ваганняў аднолькавай частаты на экране асцылографа – фігуры Лісажу.

Фаза, ў якой гукавая хваля даходзіць да мікрафона, залежыць ад адлегласці паміж дынамікам і мікрафонам. Гэтая адлегласць можа змяняцца па жаданню. Вымяраючы адлегласць паміж пунктамі, у якіх гукавая хваля мае аднолькавую фазу, вызначаюць даўжыню

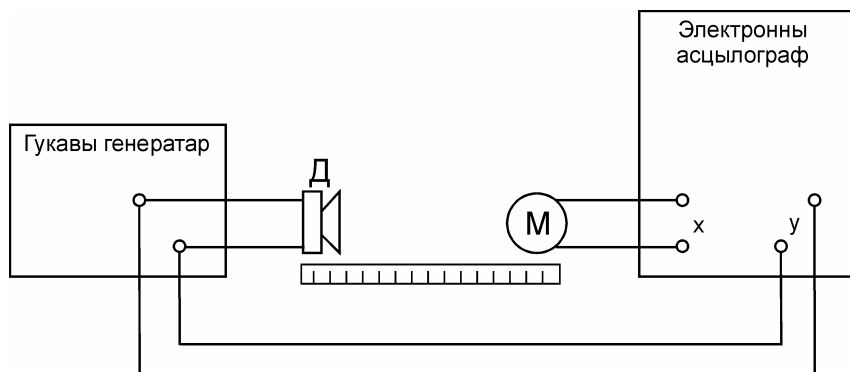
гукавой хвалі. Частата ваганняў задаецца гукавым генератарам і адлічваецца па яго шкале. Вызначэнне фазы ваганняў ажыццяўляюцца па фігурах Лісажу.

Як ясна з папярэдняга, у агульным выпадку на экране асцылографа павінен быць бачны эліпс. Калі ж падобраць становішча мікрафона, пры якім эліпс выраджаецца ў прамую, а затым змяніць адлегласць паміж дынамікам і мікрафонам на $\lambda/2$, то на экране ізноў узнікне прамая лінія, якая праходзіць на гэты раз праз іншыя квадранты. Пры далейшым змяшчэнні прамая паступова будзе пераўтварацца ў эліпс, а затым ізноў становіцца прамой і г.д.

Такім чынам, з дапамогай фігур Лісажу можна непасрэдна вымяраць даўжыню гукавой хвалі ў паветры і па выразе (8) вызначыць хуткасць гуку ў паветры.

Доследная прылада

Схема доследнай прылады адлюстравана на малюнку 3.



Мал. 3.

Дынамік Д, які з'яўляецца крыніцай гукавой хвалі, сілкуецца сінусаідальным токам ад гукавога генератара. Гэтыя хвалі дасягаюць мікрафона М і пераўтвараюцца ім у напружанне, якое

паступае на адхіляючыя пласціны электроннага асцылографа ЭА. Напружанне на другую пару адхіляючых пласцін падаецца непасрэдна з выходных клем гукавога генератара. Мікрафон і дынамік могуць свабодна перамяшчацца ўздоўж лінейкі.

Парадак выканання работы:

1. Сабярыце схему згодна малюнку 3.
2. Уключыце асцылограф і гукавы генератар.
3. Размясціце на лінейцы адзін насупраць аднаго дынамік і мікрафон, і павольна адсоўваючы мікрафон ад дынаміка, адзначце становішчы, пры якім эліпс на экране асцылографа сцягваецца ў лінію.
4. Вызначце адлегласць паміж мікрафонам і дынамікам, улічыўшы, што яна роўна даўжыні хвалі, калі пункты хвалі вагаюцца ў аднолькавай фазе, г.зн. на экране асцылографа атрымліваюцца аднолькавыя фігуры Лісажу (прамыя лініі аднолькавага напрамку). Адлегласць паміж дынамікам і мікрафонам будзе роўна палавіне даўжыні хвалі, калі дзве паслядоўна атрыманыя прамыя на экране асцылографа будуць мець розныя напрамкі.
5. Знайдзіце некалькі (3–4) такіх становішчы для адной і той жа частаты і вымерайце адпаведныя адлегласці (даўжыні хвалі) паміж дынамікам і мікрафонам.
6. Зрабіце даследаванні для трох адвольных частот.
7. Пабудуйце графік залежнасці каардынаты мікрафона ад нумара становішча, у якім эліпс пераўтвараецца ў прамую лінію.
8. Для кожнай частаты разлічыце хуткасць гуку ў паветры па выразе (8).
9. Ацаніце хібнасці вымярэнняў.
10. Зрабіце вывад.

ЗАЎВАГА! Неабходна адзначыць, што рэальная карціна на экране асцылографа некалькі адрозніваецца ад ідэалізаванай. Нелінейнае скажэнне, якое ўносіцца апаратурай, прыводзіць да таго, што як вертыкальны так і гарызантальны зрух праменя аказваюцца не зусім сінусаідальнымі. Па гэтай прычыне фігуры Лісажу могуць і не

пераўтварацца ў прамую лінію. У такім выпадку перамяшчайце мікрафон да тых пор, пакуль плошча, абмежаваная фігурай Лісажу, не стане мінімальнай.

ЗАЎВАГА! Часам мембрана тэлефона пачынае вагацца не з той частотой, якую дае гукавы генератар, а ўдвая або яшчэ большай (узбуджаецца на другой або больш высокай гармоніцы). Фігура Лісажу пры гэтым мае від не эліпса, а больш складанай фігуры. Калі такое ўзбуджэнне адбываецца, рэкамендуецца зменшыць выходную магутнасць гукавога генератара або перайсці да вымярэнняў на іншай частаце.

Пытанні для самакантролю:

1. Запішыце ўраўненне гарманічных ваганняў.
2. Дайце азначэнні амплітуды, цыклічнай частаты, фазы, пачатковай фазы, перыяду ваганняў.
3. Як атрымаць ураўненне траекторыі пункта $y(x)$ пры складанні двух узаемна перпендыкулярных ваганняў?
4. Што такое фігуры Лісажу? Пры якіх абставінах яны ўзнікаюць?
5. Пры якіх абставінах пры складанні ўзаемна перпендыкулярных ваганняў траекторыя атрымліваецца прамой лініяй, эліпсам, акружнасцю?
6. Якія ваганні складаюцца ў лабараторнай рабоце? Што ажыццяўляе ваганне?