Задачи Штурма-Лиувилля в простейшем случае

1. I рода слева – I рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевыми условиями I-го рода:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(l) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0;$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0;$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0;$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, l = \pi n$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

  $$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

  $$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = -c_1$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda}\, x$. Поэтому из второго краевого условия $X(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 x$. Поэтому из второго краевого условия $X(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

задачи (1.1).

2. II рода слева – II рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевыми условиями II-го рода:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}'(0) = \mathbf{X}'(l) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0;$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0;$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0;$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = -c_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\,l = \pi k$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$X_n(x) = \frac{2}{l}\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$
(множитель $\frac{2}{l}$ появляется, чтобы система этих функций превратилась из ортогональной в ортонормированную)

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = c_2$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda}\,x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 2c_1\sqrt{-\lambda}\operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}\,x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2$. Второе краевое условие $X'(l) = 0$ выполнено, поэтому задача Штурма–Лиувилля (**??**)–(**??**) имеет собственное число, равное нулю: $\lambda_0 = 0$. Ему соответствует собственная функцяя $X_0(x) \equiv \frac{1}{l}$.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений
$$\lambda_0 = 0, \quad X_0(x) \equiv 1; \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$
задачи (2.1).

3. I рода слева – II рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевым условием I-го рода на левом конце отрезка $[0,\ l]$ и II-го рода – на правом:
$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda\mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(l) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$
Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \lambda\mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид
$$X(x) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,x) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,x) \qquad \text{при } \lambda > 0;$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x} \qquad \text{при } \lambda < 0;$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0;$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\,x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\,l = \pi k - \frac{\pi}{2}$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_1 = -c_2$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda}\, x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 2c_1\sqrt{-\lambda} \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 x$. Второе краевое условие $X'(l) = 0$ означает тогда, что $c_1 = 0$, поэтому задача Штурма–Лиувилля (3.1) не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right), \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

задачи (3.1).

4. II рода слева – I рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевым условием II-го рода на левом конце отрезка $[0,\, l]$ и I-го рода – на правом:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(l) = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \ \lambda > 0;$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \ \lambda < 0;$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \ \lambda = 0;$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X(p) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, p = \pi\left(-\frac{1}{2} + k\right)$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}\right)^2, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_k(x) = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2p} x\right), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}'(0) = 0$, что $c_1 = c_2$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = 2c_1 \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda}\, x$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(p) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений при $\lambda < 0$.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = c_2$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(p) = 0$ получаем, что $c_2 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений при $\lambda = 0$.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}\right)^2, \quad \mathbf{X}_k(x) = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2p} x\right), \quad k \in \mathbb{N} \tag{4.4}$$

задачи (4.1).

5. I рода слева – III рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевым условием I-го рода на левом конце отрезка $[0,\, l]$ и III-го рода – на правом:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(l) + hX(l) = 0, \qquad h > 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при} \;\; \lambda > 0;$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при} \;\; \lambda < 0;$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при} \;\; \lambda = 0;$$

- При $\lambda > 0$ из краевого условия $X(0) = 0$ следует, что

  $$c_2 = 0, \;\; \Rightarrow \;\; X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) \;\; \Rightarrow \;\; X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, x).$$

  Поэтому из второго краевого условия $X'(l) + hX(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, \cos(\sqrt{\lambda}\, l) + h \sin(\sqrt{\lambda}\, l) = 0$, откуда (очевидно, косинус не может быть равен нулю, т.к. тогда синус равнялся бы (± 1), и равенство не было бы выполнено)

  $$\sqrt{\lambda} = -h\, \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}\, l)$$

  Это уравнение, как легко увидеть из графика, имеет бесконечно много решений λ_n, $n \in \mathbb{N}$. Сами эти решения явным образом выписать нельзя, но любое может быть найдено со сколь угодно большой точностью численно. Мы их искать не будем, удовлетворившись знанием, что они есть, и их можно найти.
  Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

  $$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \qquad \sqrt{\lambda} = -h\, \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}\, l), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

  $$X_n(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

- При $\lambda < 0$ задача Штурма–Лиувилля никогда не имеет нетривиальных решений.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = c_1)$, и второе краевое условие $X'(l) + hX(l) = 0$ даёт требование $c_1 + c_1 l = 0$, откуда $c_1 = 0$, и у данной задачи нет нетривиальных решений при $\lambda = 0$.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \;\; \sqrt{\lambda} = -h\, \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}\, l), \qquad X_n(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right), \quad n \in \mathbb{N} \tag{5.2}$$

задачи (5.1).

6. II рода слева – III рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевым условием II-го рода на левом конце отрезка $[0, l]$ и III-го рода – на правом:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda\mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}'(0) = \mathbf{X}'(l) + hX(l) = 0, \qquad h > 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \lambda\mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при} \;\; \lambda > 0;$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при} \;\; \lambda < 0;$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при} \;\; \lambda = 0;$$

- При $\lambda > 0$ имеем
$$X'(x) = c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\, x) - c_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\, x)$$
И из краевого условия $X'(0) = 0$ следует, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2\cos(\sqrt{\lambda}\, x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = -c_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) + hX(l) = 0$ получаем, что $-\sqrt{\lambda}\, \sin(\sqrt{\lambda}\, l) + h\cos(\sqrt{\lambda}\, l) = 0$, откуда (очевидно, косинус не может быть равен нулю, т.к. тогда синус равнялся бы (± 1), и равенство не было бы выполнено)
$$\sqrt{\lambda}\ \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}\, l) = h$$
Это уравнение, как легко увидеть из графика, имеет бесконечно много решений λ_n, $n \in \mathbb{N}$. Сами эти решения явным образом выписать нельзя, но любое может быть найдено со сколь угодно большой точностью численно. Мы их искать не будем, удовлетворившись знанием, что они есть, и их можно найти.
Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \qquad \sqrt{\lambda_n}\ \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}\, l) = h, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$X_n(x) = \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

- При $\lambda < 0$ задача Штурма–Лиувилля никогда не имеет нетривиальных решений.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 0$), и второе краевое условие $X'(l) + hX(l) = 0$ даёт требование $c_2 = 0$, т.е. данная задача Штурма–Лиувилля при $\lambda = 0$ также не имеет нетривиальных решений.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \;\; \sqrt{\lambda_n}\ \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}\, l) = h, \qquad X_n(x) = \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right), \quad n \in \mathbb{N} \tag{6.2}$$

задачи (6.1).

7. III рода слева – I рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевым условием III-го рода на левом конце отрезка $[0, l]$ и I-го рода – на правом:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}'(0) - hX(0) = X(l) = 0, \qquad h > 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при} \;\; \lambda > 0;$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при} \;\; \lambda < 0;$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при} \;\; \lambda = 0;$$

- При $\lambda > 0$ имеем
$$X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, x) - c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$$
И из краевого условия $\mathbf{X}'(0) + hX(0) = 0$ следует, что
$$\sqrt{\lambda}\, c_1 - h\, c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda} = h \frac{c_2}{c_1}.$$
С другой стороны, из второго краевого условия $X(l) = 0$ получаем, что
$$c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, l) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, l) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{c_2}{c_1} = -\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}\, l).$$
Из двух последних равенств, наконец, получаем:
$$\sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}\, l), \qquad \qquad \sqrt{\lambda} c_1 - h c_2 = 0.$$
Уравнение $\sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}\, l)$, как легко увидеть из графика, имеет бесконечно много решений λ_n, $n \in \mathbb{N}$. Сами эти решения явным образом выписать нельзя, но любое может быть найдено со сколь угодно большой точностью численно. Мы их искать не будем, удовлетворившись знанием, что они есть, и их можно найти.
Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \qquad \sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}\, l), \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$X_n(x) = h \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right) + \sqrt{\lambda} \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

- При $\lambda < 0$ задача Штурма–Лиувилля никогда не имеет нетривиальных решений.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}'(0) - hX(0) = 0$, что $c_1 - hc_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2(hx + 1)$, и второе краевое условие $X(l) = 0$ даёт требование $c_2(hl + 1) = 0$. Отсюда $c_2 = c_1 = 0$ (поскольку $hl > 0$ по условию задачи), и у данной задачи нетривиальных решений, соответствующих $\lambda = 0$ нет.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\begin{cases} \lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \;\; \sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}\, l), \\ X_n(x) = h \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right) + \sqrt{\lambda} \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{7.2}$$

задачи (7.1).

8. III рода слева – II рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевым условием III-го рода на левом конце отрезка $[0, l]$ и II-го рода – на правом:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}'(0) - h\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(l) = 0, \qquad h > 0. \end{cases} \tag{8.1}$$

Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0;$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0;$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0;$$

- При $\lambda > 0$ имеем
$$X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, x) - c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$$
И из краевого условия $\mathbf{X}'(0) + hX(0) = 0$ следует, что
$$\sqrt{\lambda}\, c_1 - h\, c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda} = h \frac{c_2}{c_1}.$$
С другой стороны, из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что
$$c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, l) - c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, l) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{c_2}{c_1} = \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}\, l).$$
Из двух последних равенств, наконец, получаем:
$$\sqrt{\lambda} = h \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}\, l), \qquad \sqrt{\lambda} c_1 = h c_2.$$
Уравнение $\sqrt{\lambda} = h \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}\, l)$, как легко увидеть из графика, имеет бесконечно много решений λ_n, $n \in \mathbb{N}$. Сами эти решения явным образом выписать нельзя, но любое может быть найдено со сколь угодно большой точностью численно. Мы их искать не будем, удовлетворившись знанием, что они есть, и их можно найти.
Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \quad \sqrt{\lambda} = h \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}\, l), \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$X_n(x) = h \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right) + \sqrt{\lambda} \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

- При $\lambda < 0$ задача Штурма–Лиувилля никогда не имеет нетривиальных решений.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}'(0) - hX(0) = 0$, что $c_1 - hc_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2(hx + 1)$, и второе краевое условие $X(l) = 0$ даёт требование $c_2(hl + 1) = 0$. Отсюда $c_2 = c_1 = 0$ (поскольку $hl > 0$ по условию задачи), и у данной задачи нетривиальных решений, соответствующих $\lambda = 0$ нет.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\begin{cases} \lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения } \sqrt{\lambda} = h \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}\, l), \\ X_n(x) = h \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right) + \sqrt{\lambda} \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{8.2}$$

задачи (9.1).

9. III рода слева – III рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевыми условиями III-го рода:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}'(0) - H\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(l) + h\mathbf{X}(l) = 0, \qquad H, h > 0. \end{cases} \tag{9.1}$$

Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0;$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0;$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0;$$

- При $\lambda > 0$ имеем
$$X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, x) - c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$$
И из краевого условия $\mathbf{X}'(0) - HX(0) = 0$ следует, что
$$\sqrt{\lambda}\, c_1 - H\, c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda} = H\frac{c_2}{c_1}.$$
С другой стороны, из второго краевого условия $\mathbf{X}'(l) + h\mathbf{X}(l) = 0$ получаем, что
$$\sqrt{\lambda} \left(c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, l) - c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, l) \right) + h \left(c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, l) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, l) \right) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$c_1 \left(\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, l) + h \sin(\sqrt{\lambda}\, l) \right) + c_2 \left(-\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + h \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \right) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{c_2}{c_1} = \frac{\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, l) + h \sin(\sqrt{\lambda}\, l)}{\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, x) - h \cos(\sqrt{\lambda}\, x)}.$$
Из двух последних равенств получаем:
$$\frac{\sqrt{\lambda}}{H} = \frac{\frac{\sqrt{\lambda}}{h} \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}\, l) + 1}{\frac{\sqrt{\lambda}}{h} - \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}\, l)},$$
откуда
$$\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}\, l) \cdot \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H} + \frac{\sqrt{\lambda}}{h} \right) = \frac{\lambda}{Hh} - 1 = \frac{\sqrt{\lambda}}{h} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \right).$$
Итак,
$$\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}\, l) = \frac{\sqrt{\lambda}}{h} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \right) \cdot \frac{Hh}{\sqrt{\lambda}\,(H+h)}$$
и, наконец,
$$\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}\, l) = \frac{H}{H+h} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \right). \tag{9.2}$$
Другим способом уравнение для нахождения λ можно получить из
$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, l) + h \sin(\sqrt{\lambda}\, l)}{\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, x) - h \cos(\sqrt{\lambda}\, x)} = -\operatorname{tg}\left(\alpha + \sqrt{\lambda}\, l \right),$$
где
$$\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + h^2}.$$

Тогда, вспомнив, что $\sqrt{\lambda} = H\frac{c_2}{c_1}$, получим:

$$\sqrt{\lambda} = -H\,\mathrm{tg}\left(\alpha + \sqrt{\lambda}\,l\right), \qquad \alpha = \arcsin\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + h^2}. \tag{9.3}$$

Каждое из уравнений (9.2) и (9.3), как легко увидеть из графика, имеет бесконечно много положительных решений λ_n, $n \in \mathbb{N}$.
Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \qquad \mathrm{ctg}(\sqrt{\lambda}\,l) = \frac{H}{H+h}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = H\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) + \sqrt{\lambda}\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

- При $\lambda < 0$ задача Штурма–Лиувилля никогда не имеет нетривиальных решений.
- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}'(0) - HX(0) = 0$, что $c_1 - Hc_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2(Hx + 1)$, и второе краевое условие $\mathbf{X}'(l) + h\mathbf{X}(l) = 0$ даёт требование $c_2(H + hHl + h) = 0$. Отсюда $c_2 = c_1 = 0$ (поскольку $H, h, l > 0$ по условию задачи), и у данной задачи нетривиальных решений, соответствующих $\lambda = 0$ нет.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\begin{cases} \lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \;\; \mathrm{ctg}(\sqrt{\lambda}\,l) = \frac{H}{H+h}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}}\right) \\ X_n(x) = H\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) + \sqrt{\lambda}\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{9.4}$$

задачи (9.1).

10. Разложение функций в ряд Фурье по собственным функциям задач Штурма – Лиувилля

Теорема 10.1 (В.А. Стеклов).

Усл. $\{\mathbf{X}_k\}_{k=1}^{\infty}$ – *ортогональная система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля.*

Утв. $\forall f(x) \in C^2[a,b]$, *удовлетворяющей краевым условиям,* $\exists\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\mathbf{X}_k(x),$$

причём последний ряд сходится к $f(x)$ *абсолютно и равномерно на* $[a,b]$, *а для* c_k *верно представление*

$$c_k = \frac{(f, \mathbf{X}_k)}{\|\mathbf{X}_k\|^2} = \frac{\int\limits_a^b f(x)\mathbf{X}_k(x)dx}{\int\limits_a^b \mathbf{X}_k^2(x)dx}$$

Доказательство. Выведем формулу для вычисления c_k.
В силу общих свойств рядов Фурье, их (как сходящиеся равномерно на любом отрезке, где нет точек разрыва $f(x)$) можно интегрировать почленно. Поэтому, в силу ортогональности системы $\{\mathbf{X}_k\}$ в $L_2[0,\,l]$:

$$(\mathbf{X}_k,\ \mathbf{X}_n)_{L_2[0,\,l]} \equiv \int\limits_0^l \mathbf{X}_k(x)\mathbf{X}_n(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad k \neq n; \\ \|\mathbf{X}_n\|^2, & \text{при} \quad k = n. \end{cases} \tag{10.1}$$

Преположим, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\mathbf{X}_k(x)$ действительно сходится на $[0,\,l]$ к функции $f(x)$, то есть верно равенство:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\mathbf{X}_k(x), \qquad x \in [0,\,l].$$

Домножим это равенство на $\mathbf{X}_n$ в смысле скалярного произведения в $L_2[0,\,l]$, то есть

- домножим его на $\mathbf{X}_n$ и
- проинтегрируем по $[0,\,l]$.

В силу (10.1), получим

$$(f,\ \mathbf{X}_n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\left(\mathbf{X}_k,\ \mathbf{X}_n\right) = c_n\left(\mathbf{X}_n,\ \mathbf{X}_n\right) = c_n\|\mathbf{X}_n\|^2.$$

Отсюда сразу получается доказываемая формула

$$c_k = \frac{(f, \mathbf{X}_k)}{\|\mathbf{X}_k\|^2}.$$

□

В силу данной теоремы, нам достаточно один раз вычислить $\|\mathbf{X}_k\|^2$ для каждой задачи Штурма-Лиувилля, чтобы знать вид коэффициентов разложения c_k.

11. Коэффициенты разложения функций в ряд Фурье по собственным функциям задач Штурма – Лиувилля

11.1. I–I

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \int\limits_0^l \sin^2\left(\frac{\pi k x}{l}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi k x}{l}\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\Big|_0^l - \underbrace{\frac{l}{2\pi k}\sin\left(\frac{2\pi k x}{l}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}}_{=0} \right) = \frac{l}{2}.$$

11.2. I–II

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \int\limits_0^l \sin^2\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2l}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(1-\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{l}\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\Big|_0^l - \underbrace{\frac{l}{\pi(2k-1)}\sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{l}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}}_{=0}\right) = \frac{l}{2}.$$

11.3. I–III

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \int\limits_0^l \sin^2\left(\sqrt{\lambda_k}\,x\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(1-\cos\left(2\sqrt{\lambda_k}\,x\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(x\Big|_0^l - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\,\sin\left(2\sqrt{\lambda_k}\,x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}\right) =$$

$$= \left[\sqrt{\lambda_k} = -h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_k}\,l)\right] = \frac{1}{2}\cdot\left(l + \frac{2\sin(\sqrt{\lambda_k}\,l)\cos(\sqrt{\lambda_k}\,l)}{2h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_k}\,l)}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(l + \frac{\cos^2(\sqrt{\lambda_k}\,l)}{h}\right) =$$

$$= \left[\cos^2\beta = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\beta},\quad \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_k}\,l) = -\frac{\sqrt{\lambda_k}}{h}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left(l + \frac{1}{h\left(1+\frac{\lambda_k}{h^2}\right)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(l + \frac{h}{h^2+\lambda_k}\right) = \frac{l\,(h^2+\lambda_k)+h}{2\,(h^2+\lambda_k)}.$$

11.4. II–I

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \int\limits_0^l \cos^2\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2l}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(1+\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{l}\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\Big|_0^l + \underbrace{\frac{l}{\pi(2k-1)}\sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{l}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}}_{=0}\right) = \frac{l}{2}.$$

11.5. II–II

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \int\limits_0^l \cos^2\left(\frac{\pi kx}{l}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(1+\cos\left(\frac{2\pi kx}{l}\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\Big|_0^l + \underbrace{\frac{l}{2\pi k}\sin\left(\frac{2\pi kx}{l}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}}_{=0}\right) = \frac{l}{2}.$$

11.6. II–III

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \int\limits_0^l \cos^2\left(\sqrt{\lambda_k}\, x\right) dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(1+\cos\left(2\sqrt{\lambda_k}\, x\right)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(l + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \sin\left(2\sqrt{\lambda_k}\, x\right)\Big|_{x=0}^{x=l}\right) = \frac{1}{2}\left(l + \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_k}\, l\right)}{2\sqrt{\lambda_k}}\right).$$

откуда, пользуясь тождествами $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, получаем:

$$l + \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_k}\, l\right)}{2\sqrt{\lambda_k}} = \left[\sqrt{\lambda_k} = \frac{h}{\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_k}\, l)}\right] = l + \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\, l\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_k}\, l\right)}{h}\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_k}\, l) =$$

$$= l + \frac{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_k}\, l\right)}{h} = l + \frac{1-\cos^2\left(\sqrt{\lambda_k}\, l\right)}{h} = \left[\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right] =$$

$$= l + \frac{1 - \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_k}\, l\right)}}{h} = \left[\operatorname{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_k}\, l\right) = \frac{h^2}{\lambda_k}\right] = l + \frac{1-\frac{\lambda_k}{\lambda_k+h^2}}{h} =$$

$$= l + \frac{h^2}{h\left(\lambda_k+h^2\right)} = \frac{l\left(\lambda_k+h^2\right)+h}{\lambda_k+h^2}.$$

В итоге для коэффициентов $\alpha_n \equiv A_n$ получаем равенство:

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{l\left(\lambda_k+h^2\right)+h}{\lambda_k+h^2}.$$

11.7. III–I

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \int\limits_0^l \left(h\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\; x\right) + \sqrt{\lambda_k}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}\; x\right)\right)^2 dx = \left[\alpha = \arccos\frac{h}{\sqrt{h^2+\lambda_k}}\right] =$$

$$= \left(h^2+\lambda_k\right)\int\limits_0^l \sin^2\left(\sqrt{\lambda_k}\; x+\alpha\right) dx = \frac{h^2+\lambda_k}{2}\int\limits_0^l \left(1-\cos\left(2\sqrt{\lambda_k}\; x+2\alpha\right)\right) dx =$$

$$= \frac{h^2+\lambda_k}{2}\cdot\left(x\Big|_0^l - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\ \sin\left(2\sqrt{\lambda_k}\; x+2\alpha\right)\Big|_{x=0}^{x=l}\right) =$$

$$= \frac{h^2+\lambda_k}{2}\cdot\left(l\ -\ \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k}\; l)\cos 2\alpha + \cos(2\sqrt{\lambda_k}\; l)\sin 2\alpha - \sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}\right).$$

Преобразуем выражения $\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k}\; l)\cos 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}$ и $\frac{\cos(2\sqrt{\lambda_k}\; l)\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}$:

$$\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k}\; l)\cos 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \left[\sqrt{\lambda_k}\ = -h\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_k}\; l)\right] = \frac{2\sin(\sqrt{\lambda_k}\; l)\cos(\sqrt{\lambda_k}\; l)}{-2h\operatorname{tg}\left(\sqrt{\lambda_k}\; l\right)}\cos(2\alpha) =$$

$$= -\frac{1}{h}\cos^2(\sqrt{\lambda_k}\; l)\cos(2\alpha) = \left[\cos^2\beta = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\beta}\right] = -\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{1+\frac{\lambda_k}{h^2}}\cos(2\alpha) =$$

$$= \left[\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{h^2-\lambda_k}{h^2+\lambda_k}\right] = -\frac{h}{h^2+\lambda_k}\cdot\frac{h^2-\lambda_k}{h^2+\lambda_k}.$$

$$\frac{\cos(2\sqrt{\lambda_k}\ l)\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \left[\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\beta} - 1 = \frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}\right] =$$
$$= \frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_k}\ l\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_k}\ l\right)}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \left[\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_k}\ l) = -\frac{\sqrt{\lambda_k}}{h}\right] = \frac{h^2-\lambda_k}{h^2+\lambda_k}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} =$$
$$= \left[\frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \frac{h}{h^2+\lambda_k}\right] = \frac{h}{h^2+\lambda_k}\cdot\frac{h^2-\lambda_k}{h^2+\lambda_k}.$$

Таким образом,

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{h^2+\lambda_k}{2}\cdot\left(l\ -\ \frac{-\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}\right) = \frac{h^2+\lambda_k}{2}\cdot\left(l\ +\ \frac{h}{h^2+\lambda_k}\right) = \frac{l\,(h^2+\lambda_k)+h}{2}.$$

11.8. III–II

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \int\limits_0^l \left(h\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\ x\right) + \sqrt{\lambda_k}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}\ x\right)\right)^2 dx = \left[\alpha = \arccos\frac{h}{\sqrt{h^2+\lambda_k}}\right] =$$
$$= \left(h^2+\lambda_k\right)\int\limits_0^l \sin^2\left(\sqrt{\lambda_k}\ x+\alpha\right)dx = \frac{h^2+\lambda_k}{2}\int\limits_0^l \left(1-\cos\left(2\sqrt{\lambda_k}\ x+2\alpha\right)\right)dx =$$
$$= \frac{h^2+\lambda_k}{2}\cdot\left(x\Big|_0^l - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\ \sin\left(2\sqrt{\lambda_k}\ x+2\alpha\right)\Big|_{x=0}^{x=l}\right) =$$
$$= \frac{h^2+\lambda_k}{2}\cdot\left(l\ -\ \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k}\ l)\cos 2\alpha + \cos(2\sqrt{\lambda_k}\ l)\sin 2\alpha - \sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}\right).$$

Преобразуем выражения $\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k}\ l)\cos 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}$ и $\frac{\cos(2\sqrt{\lambda_k}\ l)\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}$:

$$\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k}\ l)\cos 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \left[\sqrt{\lambda_k}\ = h\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda_k}\ l)\right] = \frac{2\sin(\sqrt{\lambda_k}\ l)\cos(\sqrt{\lambda_k}\ l)}{2h\operatorname{ctg}\left(\sqrt{\lambda_k}\,l\right)}\cos(2\alpha) =$$
$$= \frac{1}{h}\sin^2(\sqrt{\lambda_k}\ l)\cos(2\alpha) = \left[\sin^2\beta = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\beta}\right] = \frac{1}{h}\cdot\frac{1}{1+\frac{\lambda_k}{h^2}}\cos(2\alpha) =$$
$$= \left[\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{h^2-\lambda_k}{h^2+\lambda_k}\right] = \frac{h}{h^2+\lambda_k}\cdot\frac{h^2-\lambda_k}{h^2+\lambda_k}.$$

$$\frac{\cos(2\sqrt{\lambda_k}\ l)\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \left[\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta = 1\ -\ \frac{2}{1+\operatorname{ctg}^2\beta} = -\frac{1-\operatorname{ctg}^2\beta}{1+\operatorname{ctg}^2\beta}\right] =$$
$$= -\frac{1-\operatorname{ctg}^2\left(\sqrt{\lambda_k}\ l\right)}{1+\operatorname{ctg}^2\left(\sqrt{\lambda_k}\ l\right)}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \left[\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda_k}\ l) = \frac{\sqrt{\lambda_k}}{h}\right] = -\frac{h^2-\lambda_k}{h^2+\lambda_k}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} =$$
$$= \left[\frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \frac{h}{h^2+\lambda_k}\right] = -\frac{h}{h^2+\lambda_k}\cdot\frac{h^2-\lambda_k}{h^2+\lambda_k}.$$

Таким образом,

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{h^2+\lambda_k}{2}\cdot\left(l\ -\ \frac{-\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}\right) = \frac{h^2+\lambda_k}{2}\cdot\left(l\ +\ \frac{h}{h^2+\lambda_k}\right) = \frac{l\,(h^2+\lambda_k)+h}{2}.$$

11.9. III–III

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \int\limits_0^l \left(H\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\,x\right) + \sqrt{\lambda_k}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}\,x\right)\right)^2 dx = \left[\alpha = \arccos\frac{H}{\sqrt{H^2+\lambda_k}}\right] =$$

$$= \left(H^2+\lambda_k\right)\int\limits_0^l \sin^2\left(\sqrt{\lambda_k}\,x+\alpha\right)dx = \frac{H^2+\lambda_k}{2}\int\limits_0^l \left(1-\cos\left(2\sqrt{\lambda_k}\,x+2\alpha\right)\right)dx =$$

$$= \frac{H^2+\lambda_k}{2}\cdot\left(x\Big|_0^l - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\,\sin\left(2\sqrt{\lambda_k}\,x+2\alpha\right)\Big|_{x=0}^{x=l}\right) =$$

$$= \frac{H^2+\lambda_k}{2}\cdot\left(l\, - \,\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k}\,l)\cos 2\alpha + \cos(2\sqrt{\lambda_k}\,l)\sin 2\alpha - \sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}\right).$$

Преобразуем выражения $\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k}\,l)\cos 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}$ и $\frac{\cos(2\sqrt{\lambda_k}\,l)\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}$:

$$\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k}\,l)\cos 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \left[\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda_k}\,l) = \frac{1}{H+h}\cdot\frac{\lambda_k - Hh}{\sqrt{\lambda_k}}\right] =$$

$$= \frac{H+h}{\lambda_k-Hh}\cdot\frac{2\sin(\sqrt{\lambda_k}\,l)\cos(\sqrt{\lambda_k}\,l)}{2\operatorname{tg}\left(\sqrt{\lambda_k}\,l\right)}\cos(2\alpha) = \frac{H+h}{\lambda_k-Hh}\cdot\cos^2(\sqrt{\lambda_k}\,l)\cdot\cos(2\alpha) =$$

$$= \left[\cos^2\beta = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{\operatorname{ctg}^2\beta}{1+\operatorname{ctg}^2\beta}\right] =$$

$$= \frac{H+h}{\lambda_k-Hh}\cdot\frac{(\lambda_k-Hh)^2}{\lambda_k\,(H+h)^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{(\lambda_k-Hh)^2}{\lambda_k(H+h)^2}}\cdot\cos(2\alpha) =$$

$$= \left[\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{H^2-\lambda_k}{H^2+\lambda_k}\right] = \frac{(H+h)\,(\lambda_k-Hh)}{\lambda_k\,(H+h)^2+(\lambda_k-Hh)^2}\cdot\frac{H^2-\lambda_k}{H^2+\lambda_k}.$$

$$\frac{\cos(2\sqrt{\lambda_k}\,l)\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \left[\cos 2\beta = 1-2\sin^2\beta = 1\, - \,\frac{2}{1+\operatorname{ctg}^2\beta} = -\frac{1-\operatorname{ctg}^2\beta}{1+\operatorname{ctg}^2\beta}\right] =$$

$$= -\frac{1-\operatorname{ctg}^2\left(\sqrt{\lambda_k}\,l\right)}{1+\operatorname{ctg}^2\left(\sqrt{\lambda_k}\,l\right)}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \left[\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda_k}\,l) = \frac{\lambda_k-Hh}{\sqrt{\lambda_k}(H+h)}\right] =$$

$$= -\frac{\lambda_k\,(H+h)^2-(\lambda_k-Hh)^2}{\lambda_k\,(H+h)^2+(\lambda_k-Hh)^2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} =$$

$$= \left[\frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \frac{H}{H^2+\lambda_k}\right] = -\frac{\lambda_k\,(H+h)^2-(\lambda_k-Hh)^2}{\lambda_k\,(H+h)^2+(\lambda_k-Hh)^2}\cdot\frac{H}{H^2+\lambda_k}.$$

Поэтому

$$\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k}\ l)\cos 2\alpha + \cos(2\sqrt{\lambda_k}\ l)\sin 2\alpha - \sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} =$$

$$= \frac{(H+h)(\lambda_k - Hh)}{\lambda_k (H+h)^2 + (\lambda_k - Hh)^2} \cdot \frac{H^2 - \lambda_k}{H^2 + \lambda_k} - \frac{\lambda_k (H+h)^2 - (\lambda_k - Hh)^2}{\lambda_k (H+h)^2 + (\lambda_k - Hh)^2} \cdot \frac{H}{H^2 + \lambda_k} - \frac{H}{H^2 + \lambda_k} =$$

$$= \frac{(H+h)(\lambda_k - Hh)(H^2 - \lambda_k) - H\left(\lambda_k (H+h)^2 - (\lambda_k - Hh)^2\right) - H\left(\lambda_k (H+h)^2 + (\lambda_k - Hh)^2\right)}{\left(\lambda_k (H+h)^2 + (\lambda_k - Hh)^2\right)(H^2 + \lambda_k)} =$$

$$= \frac{(H+h)(\lambda_k - Hh)(H^2 - \lambda_k) - 2H\lambda_k (H+h)^2}{\underbrace{\left(\lambda_k (H+h)^2 + (\lambda_k - Hh)^2\right)}_{=(H^2+\lambda_k)(h^2+\lambda_k)}(H^2 + \lambda_k)} =$$

$$= \frac{(H+h)\Big(-\lambda_k^2 + \lambda_k H(H+h) - H^3 h - 2H\lambda_k (H+h)\Big)}{(H^2 + \lambda_k)^2 (h^2 + \lambda_k)} =$$

$$= \frac{-(H+h)\Big(\lambda_k^2 + \lambda_k H(H+h) + H^3 h\Big)}{(H^2 + \lambda_k)^2 (h^2 + \lambda_k)} = \frac{-(H+h)(\lambda_k + Hh)(\lambda_k + H^2)}{(H^2 + \lambda_k)^2 (h^2 + \lambda_k)}.$$

Наиболее простой вид это выражение принимает при $H = h$. В этом случае (он встречается в № 653, 658, 693)

$$\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k}\ l)\cos 2\alpha + \cos(2\sqrt{\lambda_k}\ l)\sin 2\alpha - \sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = -\frac{2h}{h^2 + \lambda_k}.$$

Итак, в общем случае (при $H \neq h$)

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{l\,(H^2 + \lambda_k)^2 (h^2 + \lambda_k) + (H+h)(\lambda_k + Hh)(\lambda_k + H^2)}{2\,(H^2 + \lambda_k)(h^2 + \lambda_k)}.$$

А в случае $H = h$

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{l\,(h^2 + \lambda_k) + 2h}{2}.$$

12. Таблица собственных чисел и функций задач Штурма – Лиувилля с различными краевыми условиями

Кр. усл.	Собственные числа и функции
I – I	$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$
I – II	$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$
I – III	$\begin{cases} \lambda_n > 0 \quad - \text{ решения уравнения } \sqrt{\lambda} = -h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}\,l), \\ X_n(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$
II – I	$\lambda_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}\right)^2, \quad \mathbf{X}_k(x) = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}x\right), \quad k \in \mathbb{N}$
II – II	$\lambda_0 = 0, \quad X_0(x) \equiv 1; \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$
II – III	$\begin{cases} \lambda_n > 0 \quad - \text{ решения уравнения } \sqrt{\lambda_n}\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}\,l) = h, \\ X_n(x) = \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$
III – I	$\begin{cases} \lambda_n > 0 \quad - \text{ решения уравнения } \sqrt{\lambda} = -h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}\,l), \\ X_n(x) = h\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) + \sqrt{\lambda}\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$
III – II	$\begin{cases} \lambda_n > 0 \quad - \text{ решения уравнения } \sqrt{\lambda} = h\,\mathrm{ctg}(\sqrt{\lambda}\,l), \\ X_n(x) = h\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) + \sqrt{\lambda}\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$
III – III	$\begin{cases} \lambda_n > 0 \quad - \text{ решения уравнения } \mathrm{ctg}(\sqrt{\lambda}\,l) = \frac{H}{H+h}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}}\right) \\ X_n(x) = H\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) + \sqrt{\lambda}\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

13. Таблица норм собственных функций задач Штурма – Лиувилля с различными краевыми условиями

Кр. усл.	$\|\mathbf{X}_k\|^2$
I – I	$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{l}{2}$
I – II	$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{l}{2}$
I – III	$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{l\left(h^2+\lambda_k\right)+h}{2(h^2+\lambda_k)}$
II – I	$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{l}{2}$
II – II	$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{l}{2}$
II – III	$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{l\left(\lambda_k+h^2\right)+h}{\lambda_k+h^2}$
III – I	$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{l\left(h^2+\lambda_k\right)+h}{2}$
III – II	$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{l\left(h^2+\lambda_k\right)+h}{2}$
III – III	$\begin{cases} \|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{l\left(H^2+\lambda_k\right)^2\left(h^2+\lambda_k\right)+(H+h)(\lambda_k+Hh)\left(\lambda_k+H^2\right)}{2(H^2+\lambda_k)(h^2+\lambda_k)} \\ \text{в случае } H=h \qquad \|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{l\left(h^2+\lambda_k\right)+2h}{2} \end{cases}$