Гродзенскі дзяржаўны універсітэт імя Янкі Купалы
Кафедра агульнай фізікі
Лабараторыя механікі
ауд. 408

Лабараторная работа №17

ВЫВУЧЭННЕ ЗАКОНАЎ ВЯРЧАЛЬНАГА РУХУ

для студэнтаў спецыяльнасці “ФІЗІКА”

Гродна, 2010

ВЫВУЧЭННЕ ЗАКОНАЎ ВЯРЧАЛЬНАГА РУХУ

Мэта работы: *Доследны аналіз асноўнага закону дынамікі вярчальнага руху.*

Прылады і абсталяванне: *Маятнік (крыж) Абербека, набор цыліндраў і грузаў.*

Тэарэтычныя асновы

Цвёрдае цела (абсалютна цвёрдае цела) – цела, адлегласць паміж часцінкамі якога не змяняецца (нязменная сістэма матэрыяльных пунктаў).

Вярчальны рух цвёрдага цела вакол нерухомай восі – рух, пры якім усе пункты цела, змешчаныя на адной простай, якая называецца воссю вярчэння, застаюцца нерухомымі, а астатнія пункты апісваюць канцэнтрычныя акружнасці з цэнтрамі на восі вярчэння. Гэтыя акружнасці размешчаны перпендыкулярна восі вярчэння.

Для апісання вярчальнага руху цвёрдага цела ўводзяцца велічыні, якія адносяцца да ўсяго цела цалкам, а не да яго асобных пунктаў: вугал павароту, вуглавыя скорасць і паскарэнне.

Асноўнае ўраўненне дынамікі вярчальнага руху мае выгляд:

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}, \qquad (1)$$

дзе $\vec{M}$ – момант дзеючых адносна восі вярчэння сіл, J – момант інерцыі цела адносна восі вярчэння, $\vec{\varepsilon}$ – вектар вуглавога паскарэння.

Ураўненне (1) неабходна запісваць для вярчальнага руху ў праекцыях на вось вярчэння з улікам дамоўленасцей: момант сілы мае дадатную праекцыю, калі пад дзеяннем гэтай сілы цела паварочваецца вакол восі ў бок гадзіннікавай стрэлкі, і наадварот. Напрамак вектара вуглавой скорасці вызначаецца правілам правага свярдзёлка.

Пры вярчэнні цвёрдага цела адносна нерухомай восі ураўненне дынамікі (1) можна запісаць у іншым выглядзе:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}\ , \qquad (2)$$

дзе $\vec{L}$ – вектар моманту імпульсу.

Ураўненне (2) мае назву **ураўнення момантаў**.

Пры вярчэнні цвёрдага цела яго момант інерцыі не залежыць ад часу (велічыня пастаянная), а вуглавое паскарэнне па азначэнні:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}\,. \qquad (3)$$

З улікам азначэння (3), ураўненне (1) у скалярным выглядзе:

$$J\frac{d\omega}{dt} = M\ . \qquad (4)$$

З ураўнення (4) вынікае тры наступных выпадкі.

Пры пастаянным моманце інерцыі ($J = const$) вуглавое паскарэнне прама прапарцыянальна моманту сіл, гэта значыць:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{M_1}{M_2}\,. \qquad (5)$$

Адзін і той жа момант сіл ($M = const$) надае целу вуглавое паскарэнне, якое адваротна прапарцыянальна яго моманту інерцыі:

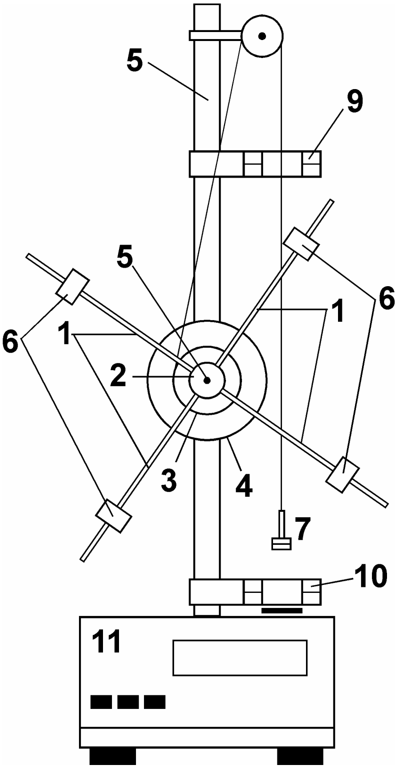
$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{J_2}{J_1}\,. \qquad (6)$$

Калі вуглавыя паскарэнні цел аднолькавыя ($\varepsilon = const$), то адносіна момантаў інерцыі такая ж, як і адносіна момантаў сіл:

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{M_1}{M_2}\,. \qquad (7)$$

Доследная прылада

У дадзенай рабоце для вывучэння асноўнага закону дынамікі вярчальнага руху выкарыстоўваецца прылада (крыж) Абербека агульны выгляд якога адлюстраваны на малюнку 1.



Мал. 1. Агульны выгляд крыжа Абербека.

Крыж складаецца з чатырох стрыжняў 1, замацаваных пад прамым вуглом адзін да аднаго на цыліндры 2, які мае магчымасць вярцецца разам з двума шківамі 3 і 4 рознага дыяметру адносна гарызантальнай агульнай восі 5.
Перамяшчэнне чатырох грузаў 6 уздоўж стрыжняў дазваляе змяняць момант інерцыі ўсёй сістэмы.
На шківы можа намотвацца нітка, да канца якой можна прымацоўваць груз 7 рознай масы. Пад дзеяннем сілы нацяжэння ніткі ўся сістэма можа прыводзіцца ў рух.
Уся сістэма размяшчаецца на металічнай калоне 8, на якой змяшчаюцца два кранштэйны з фотаэлектрычнымі датчыкамі 9 і

10. Час руху грузу (адпаведна і крыжа Абербека) ад верхняга 9 да ніжняга 10 датчыка фіксуецца электронным секундамерам, дысплей якога знаходзіцца на пярэдняй панелі асновы 11.

Тэорыя метаду

Каб дастасаваць суадносіны (5)–(7) да выкарыстоўваемай у рабоце доследнай прылады, неабходна адпаведным чынам выразіць вуглавое паскарэнне ε, момант сіл M і момант інерцыі J.

Калі груз масай m, які рухаецца пастулальна з некаторай вышыні h за час t з пастаянным паскарэннем

$$a = \frac{2h}{t^2}, \qquad (8)$$

то такім жа будзе лінейнае паскарэнне любога пункту на паверхні шківа (так як рухаюцца разам).

Вуглавое паскарэнне вярчэння сістэмы з улікам азначэння і выразу (8) набудзе выгляд:

$$\varepsilon = \frac{a}{r_0} = \frac{2h}{r_0 t^2}, \qquad (9)$$

дзе r_0 – радыус шківа.

На сістэму дзейнічае момант сіл нацяжэння ніткі, які ўласна, і з'яўляецца прычынай вярчэння. Па азначэнні момант сілы:

$$M = Tr_0, \qquad (10)$$

дзе T – модуль сілы нацяжэння ніткі.

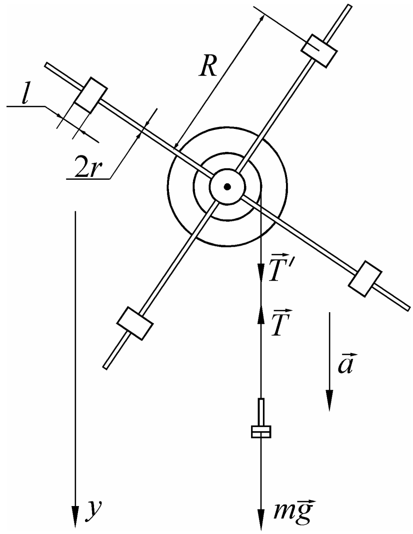
Так як груз масай m рухаецца пастулальна, то для апісання яго руху можна прымяніць ураўненне дынамікі пастулальнага руху (Другі закон Ньютана) у вектарным выглядзе (глядзі малюнак 2):

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}. \qquad (11)$$

У праекцыях на абраную вось закон (11) набудзе выгляд:

$-T + mg = ma$, або

$$T = m(g - a). \qquad (12)$$



Мал. 2. Да разліку моманту інерцыі крыжа Абербека.

З улікам суадносін (8) і (12) выраз (10) набудзе канчатковы выгляд:

$$M = mr_0\left(g - \frac{2h}{t^2}\right). \qquad (13)$$

Момант інерцыі сістэмы складаецца з момантаў інерцыі шківаў $J_ш$, стрыжняў $J_с$ і цыліндраў $J_ц$:

$$J = J_ш + J_с + J_ц\,. \qquad (14)$$

Сума момантаў інерцыі шківаў і стрыжняў ($J_ш + J_с = J_0$) вызначаецца доследна, для чаго са стрыжняў здымаюць усе цыліндры і прыводзяць сістэму ў вярчальны рух пад дзеяннем грузу масай m.

З (4), (9) і (13) можна атрымаць выраз для доследнага вызначэння моманту інерцыі сістэмы крыжа са шківамі і стрыжняў:

$$J_0 = mr_0^2\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right). \qquad (15)$$

Момант інерцыі цыліндраў можна разлічыць, карыстаючыся тэарэмай Гюйгенса-Штэйнера:

$$J = J_C + m'a^2\,, \tag{16}$$

дзе J_C – момант інерцыі цела адносна восі, якая праходзіць праз цэнтр цяжару і паралельна восі вярчэння, m' – маса цыліндра, a – адлегласць паміж азначанымі восямі.

Калі лічыць цыліндры матэрыяльнымі пунктамі, то тэарэма (16) для разліку моманту інерцыі чатырох цыліндраў адносна восі вярчэння крыжа Абербека, размешчаных на адлегласці R ад восі (малюнак 2) набудзе выгляд:

$$J_ц = 4\left(J'_ц + m'R^2\right), \tag{17}$$

дзе $J'_ц$ – момант інерцыі кожнага цыліндра адносна ўласнага цэнтра мас.

Карыстаючыся вядомымі выразамі для разліку моманту інерцыі правільных геаметрычных целаў, атрымаем:

$$J'_ц = \frac{1}{12}m'l^2 + \frac{1}{4}m'\left(r_1^2 + r_2^2\right), \tag{18}$$

дзе l – даўжыня цыліндра, r_1 і r_2 – знешні і ўнутраны радыусы цыліндра (малюнак 2).

Поўны момант інерцыі сістэмы складаецца з алгебраічнай сумы момантаў інерцыі ўсіх целаў адносна восі вярчэння:

$$J = J_0 + m'\left(4R^2 + \frac{l^2}{3} + r_1^2 + r_2^2\right). \tag{19}$$

З улікам атрыманых суадносін выразы (5)–(7) можна запісаць інакш.

Калі становішчы цыліндраў застаюцца нязменнымі ($J = const$), і да ніткі паслядоўна прымацоўваць грузы m_1 і m_2, то (5) з улікам (9) і (13) набудзе выгляд:

$$\frac{m_1\left(gt_1^2 - 2h\right)}{m_2\left(gt_2^2 - 2h\right)} = 1\,. \tag{20}$$

Калі груз m пакінуць нязменным, то мамант сілы, які дзейнічае з боку ніткі, да якой прывязаны груз, з’яўляецца пастаянным

($M = const$). Калі змяняць становішча цыліндраў на стрыжнях (значыць, змяніць момант інерцыі сістэмы) і вызначыць час t_1 і t_2 апускання грузу, то суадносіна (6) набудзе выгляд:

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{J_0 + m'\left(4R_1^2 + \frac{l^2}{3} + r_1^2 + r_2^2\right)}{J_0 + m'\left(4R_2^2 + \frac{l^2}{3} + r_1^2 + r_2^2\right)}. \qquad (21)$$

Калі для двух розных грузаў m_1 і m_2 знайсці такія становішчы цыліндраў на стрыжнях, каб час руху быў аднолькавы ($t_1 = t_2 = t$), то ў гэтым выпадку вуглавое паскарэнне вярчэння сістэмы будзе аднолькавым ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$). З улікам вызначанага а таксама выразаў (13) і (19) суадносіна (7) набудзе выгляд:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{J_0 + m'\left(4R_1^2 + \frac{l^2}{3} + r_1^2 + r_2^2\right)}{J_0 + m'\left(4R_2^2 + \frac{l^2}{3} + r_1^2 + r_2^2\right)}. \qquad (22)$$

Парадак выканання работы:

1. Зніміце цыліндры са стрыжняў.
2. Прымацуйце да канца ніткі груз некаторай масы m_1 (вызначце самастойна).
3. Прымацуйце другі канец ніткі да аднаго са шківоў.
4. Намотваючы нітку на шкіў, падніміце груз такім чынам, каб ніжні край грузу сумясціць дакладна з рыскай на корпусе верхняга фотаэлектрычнага датчыка, размешчанага на верхнім кранштэйне.
5. Вызначце па шкале калоны вышыню h.
6. Націсніце “ПУСК” і вымерайце час падзення.
7. Паўтарыце вымярэнні часу апускання грузу не менш за тры разы.
8. Знайдзіце сярэдняе значэнне часу апускання грузу.
9. Па выразе (15) разлічыце момант інерцыі J_0.
10. Пункты 2–9 паўтарыце, прымацаваўшы груз масай m_2.

11. Пераматайце нітку на шкіў іншага дыяметра і паўтарыце выкананне пп. 2–10.
12. Вызначце сярэдняе значэнне моманту інерцыі $\langle J_0 \rangle$ крыжа Абербека без цыліндраў.

13. Замацуйце цыліндры на аднолькавай адлегласці ад восі вярчэння крыжа.
14. Наматайце нітку на адзін са шківоў.
15. Пры фіксаваным становішчы цыліндраў вызначце час t_1 апускання грузу масы m_1.
16. Паўтарыце вымярэнне часу апускання грузу не менш за тры разы.
17. Знайдзіце сярэдняе значэнне часу апускання.
18. Пункты 15–17 паўтарыце, пераматаўшы нітку на другі шкіў і вызначыўшы сярэдняе значэнне часу апускання t_2 грузу масай m_2.
19. Праверце выкананне суадносіны (20), разлічыўшы вынікі ў левай частцы з дакладнасцю да тысячных долей.

20. Для аднаго і таго ж грузу m, прымацаванага да ніткі, і вызначанага становішча цыліндраў вызначце сярэдняе значэння часу апускання грузу, вымераўшы тройчы гэты час.
21. Паўтарыце выканання п. 20 для іншага становішча цыліндраў на стрыжнях.
22. Паўтарыце выкананне пп. 20–21 пераматаўшы нітку на другі шкіў.
23. Праверце выкананне суадносіны (21), разлічыўшы вынікі з дакладнасцю да тысячных долей.

24. Для розных грузаў масамі m_1 і m_2 знайдзіце такія становішчы цыліндраў, для якіх час апускання грузаў будзе аднолькавым $t_1 = t_2$.
25. Праверце выкананне суадносіны (22), разлічыўшы вынікі з дакладнасцю да тысячных долей.

26. Ацаніце хібнасці вымярэнняў.
27. Зрабіце высновы.

Пытанні для самакантролю:

1. Сфармулюйце закон дынамікі вярчальнага руху.
2. Вызначце тры магчымыя вынікі, якія атрымліваюцца з закона дынамікі.
3. Дайце азначэнне велічыням, якія апісваюць вярчальны рух цвёрдага цела: моманту інерцыі, моманту сілы.
4. Атрымайце выраз (15).