Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

Алексеев А.Д., Кудряшов С.Н.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

(учебное пособие)

Ростов-на-Дону
2008

Алексеев Анатолий Дмитриевич — доцент кафедры дифференциальных уравнений ЮФУ.

Кудряшов Станислав Никифирович — доцент кафедры дифференциальных уравнений ЮФУ.

Уравнения с частными производными в примерах и задачах.

Учебное пособие, Ростов-на-Дону, 2008, 98 стр. Данное учебное пособие является результатом значительной переработки четырех методических указаний Алексеева А.Д. , Радченко Т.Н. , Рогожина В.С. и Хасабова Э.Г. , опубликованных в УПЛ РГУ в 1992 году. Добавлено много новых задач, приведены подробные решения стандартных задач. Расширена теоретическая часть.

В пособии рассматриваются задачи на классификацию дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, приведению их к каноническому виду, нахождению общего решения и решения задачи Коши для уравнений гиперболического типа.

Оно будет полезно при изучении теоретического курса "Уравнения математической физики"студентами факультета механики, математики и компьютерных наук, физического факультета и факультета высоких технологий.

1. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

В этом разделе рассматриваются дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка, линейные относительно вторых производных, следующего вида:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})=0. \tag{1.1}$$

Здесь $u=u(x,y)$ - искомая функция, $A=A(x,y), B=B(x,y), C=C(x,y)$, $f(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})$ - заданные функции, причем A, B, C в рассматриваемых областях непрерывны вместе со своими производными.

Выражение $\Delta=B^2-AC$ называется дискриминантом этого уравнения. Если в некоторой области D плоскости xy выполняется неравенство $\Delta>0$, уравнение (1.1) называется **гиперболическим** в этой области. При $\Delta=0$ в области D уравнение (1.1) называется **параболическим**, а при $\Delta<0$ в $D-$ **эллиптическим** в области D.

Заменой переменных x, y на новые ξ,η по формулам

$$\xi=\varphi_1(x,y),\ \ \eta=\varphi_2(x,y) \tag{1.2}$$

при соответствующем выборе функций $\varphi_1(x,y),\quad \varphi_2(x,y)$ в каждом из указанных трех случаев уравнение (1.1) может быть приведено к так называемому **каноническому** виду, а именно, к виду

$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=F(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta})$ в случае гиперболического,

$\frac{\partial^2 u}{\partial^2\eta}=F(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta})$ в случае параболического и

$\frac{\partial^2 u}{\partial^2\xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2\eta}=F(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta})$ в случае эллиптического уравнения (при этом уравнение (1.1) часто заметно упрощается).

При осуществлении указанной замены переменных понадобится выражение x и y через ξ и η. Т. е. система уравнений (1.2) должна быть разрешимой относительно x и y. Известно, что условием такой разрешимости является неравенство

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y)} = det \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad (1.3)$$

Поэтому при выборе функций $\varphi_1, \quad \varphi_2$ мы должны заботиться о том, чтобы в рассматриваемой области они удовлетворяли этому неравенству.

Для нахождения функций $\varphi_1(x, y), \quad \varphi_2(x, y)$, при которых замена переменных (1.2) приводит уравнение (1.1) к каноническому виду, составляется следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$Ady^2 - 2Bdxdy + Cdx^2 = 0 \qquad (1.4).$$

Оно называется **характеристическим** для уравнения (1.1).

Если $A(x, y) \equiv C(x, y) \equiv 0$ в области D, то $B(x, y) \neq 0$ в D (иначе уравнение (1.1) не является уравнением второго порядка в этой области). Тогда уравнение (1.1) является гиперболическим в указанной области и после деления на B(x,y) приобретает канонический вид. Поэтому в дальнейшем нас будут интересовать случаи, когда в D или $A \neq 0$, или $C \neq 0$.

При $A \neq 0$ уравнение (1.4)разрешается относительно dy и распадается на два уравнения

$$Ady - (B + \sqrt{\Delta})dx = 0 \qquad (1.5_1)$$

$$Ady - (B - \sqrt{\Delta})dx = 0 \qquad (1.5_2)$$

(при $C \neq 0$ уравнение (1.4)распадается на два уравнения

$$Cdx - (B + \sqrt{\Delta})dy = 0, \quad Cdx - (B - \sqrt{\Delta})dy = 0).$$

1) Пусть уравнение (1.1) в области D является **гиперболическим** ($\Delta > 0$) и, для определенности $A \neq 0$. Тогда уравнения (1.5_1) и (1.5_2) различны и действительны. В этом случае для приведения уравнения (1.1) к каноническому виду следует в формулах (1.2) в качестве $\varphi_1(x,y)$ взять какой-нибудь интеграл уравнения (1.5_1), а в качестве $\varphi_2(x,y)$ - какой-нибудь интеграл уравнения (1.5_2) (или наоборот), так чтобы для них выполнялось неравенство (1.3). Такой выбор интегралов указанных уравнений всегда возможен.

Если общее решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка разрешено относительно произвольной постоянной, то есть записано в виде равенства $\varphi(x,y) = C$, то это равенство называется общим интегралом рассматриваемого уравнения, а входящая в него функция $\varphi(x,y)$ - интегралом этого уравнения.

2) В случае **параболического** уравнения ($\Delta = 0$) уравнения (1.5_1) и (1.5_2) одинаковы и имеют вид:

$$Ady - Bdx = 0. \tag{1.5}$$

В этом случае для приведения уравнения (1.1) к каноническому виду в качестве одной из функций

$$\varphi_1(x,y), \quad \varphi_2(x,y)$$

следует взять какой-нибудь интеграл уравнения (1.5). Другую же из этих функций можно выбрать произвольно, но так, чтобы выполнялось неравенство (1.3) (можно показать, что в качестве этой другой функции всегда годится или x, или y).

3) Если $\Delta < 0$ в области D, т.е. уравнение (1.1) **эллиптическое** в этой области, то коэффициенты $B \pm \sqrt{\Delta}$ в уравнениях (1.5_1) и (1.5_2) комплексны. Поэтому комплексны и интегралы этих уравнеий. Для приведения уравнения (1.1) к каноническому виду в этом случае достаточно взять какой-нибудь ин-

теграл $\varphi(x,y)$ любого из уравнений (1.5_1), (1.5_2) и в формулах (1.2) положить $\varphi_1(x,y) = Re\varphi(x,y)$, $\quad \varphi_2(x,y) = Im\varphi(x,y)$ (или наоборот).

При замене переменных (1.2) производные функции u по старым переменным x, y, как известно из анализа, выражаются через ее производные по новым переменным ξ, $\quad \eta$ по следующим формулам:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\frac{\partial \xi}{\partial x})^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(\frac{\partial \eta}{\partial x})^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \qquad (1.6)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\frac{\partial \xi}{\partial y})^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(\frac{\partial \eta}{\partial y})^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}.$$

Подробное обоснование описанного метода можно найти, например, в И.Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частных производными, 1961 г.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При нахождении функций $\varphi_1(x,y)$, $\quad \varphi_2(x,y)$ полезно иметь в виду следующий известный из теории дифференциальных уравнений факт:

если $\varphi(x,y)$ есть интеграл уравнения $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (уравнения (1.5_1), (1.5_2), (1.5) именно таковы), то $\Phi(\varphi(x,y))$, где $\Phi(z)$ - любая дифференцируемая функция, также является интегралом этого уравнения.

Например, если $ln(x + y - 5)$ является интегралом указанного уравнения, то функция x+y также является интегралом этого уравнения. В самом деле, $x + y = e^{ln(x+y-5)} + 5$, а функция $\Phi(z) = e^z + 5$ дифференцируема при любом z.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогичное рассуждение относится и к уравнениям параболического типа. Так, если $\varphi(x, y) = c$ общий интеграл уравнения (1.5), то в качестве замены берем

$$\xi = \varphi(x, y)$$

или

$$\xi = \Phi(\varphi(x, y)),$$

где $\Phi(z)$ тоже, что и выше. Пусть, например, (1.5) записалось в виде

$$3xdy + ydx = 0.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{3x}$$

или

$$\ln|y| = -\frac{lnx}{3} + \ln c.$$

Отсюда общий интеграл запишется в виде $y\sqrt[3]{x} = c$. Но замена $\xi = y\sqrt[3]{x}$ неудобна. Лучше $\xi = (y\sqrt[3]{x})^3$ или $\xi = y^3x$. При подстановке последней редакции ξ "хлопот" будет поменьше.

Для уравнения эллиптического типа изменять $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ нельзя. Максимум допустимого умножить на -1 для удобства. Смотрите следующий пример 1.

Рассмотрим некоторые примеры задач.

ПРИМЕР 1. Уравнение

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{1.7}$$

привести к каноническому виду в области $x \neq 0, \quad y \neq 0$.

Имеем: $\Delta = B^2 - AC = x^2y^2 - 2x^2y^2 < 0$ в указанной области. Следовательно, в этой области заданное уравнение является эллиптическим. Составляем для него характеристическое уравнение:

$$y^2dy^2 - 2xydxdy + 2x^2dx^2 = 0.$$

Разрешая его относительно dy, получаем два уравнения:

$$ydy - (1+i)xdx = 0 \text{ и } ydy - (1-i)xdx = 0.$$

Найдем интеграл какого-нибудь из этих уравнений (например, первого). Так как

$$-y^2 + (1+i)x^2 = C$$

есть общее решение этого уравнения, его интегралом является комплексная функция

$$\varphi(x,y) = x^2 - y^2 + ix^2.$$

Как указывалось выше, для приведения заданного уравнения к каноническому виду достаточно произвести замену переменных:

$$\xi = Re\varphi(x,y) = x^2 - y^2, \quad \eta = Im\varphi(x,y) = x^2. \tag{1.8}$$

Легко видеть, что условие (1.3) для этих функций выполняется. Производя замену (1.8), мы по формулам (1.6) получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}2x + \frac{\partial u}{\partial \eta}2x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y\frac{\partial u}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\frac{\partial u}{\partial \xi} + 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -4xy(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\frac{\partial u}{\partial \xi} + 2\frac{\partial u}{\partial \eta} + 4x^2(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}).$$

Подставив полученные выражения в (1.7) и заменив x и y на ξ и η по формулам (1.8), мы приходим к следующему каноническому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\eta - \xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Иногда после приведения к каноническому виду уравнение настолько упрощается, что его оказывается возможным решить. Прежде чем привести такие примеры, рассмотрим следующее уравнение (похожее на обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными),

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = f(\xi)g(v), \tag{1.9}$$

где $v = v(\xi, \eta)$ - искомая, а $f(\xi)$ и $g(v)$ - заданные функции. Пусть $d_\xi v = \frac{\partial v}{\partial \xi} d\xi$ есть частный дифференциал (дифференциал функции v при $d\eta = 0$, т.е. вызванный приращением $d\xi$ одной лишь переменной ξ) по ξ функции $v(\xi, \eta)$. Тогда частная производная $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ может быть представлена в виде отношения двух дифференциалов: $\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{d_\xi v}{d_\xi}$. Это позволяет нам уравнению (1.9) придать следующий вид: $\frac{d_\xi v}{g(v)} - f(\xi)d\xi = 0$. А так как

$$d_\xi \int \frac{dv}{g(v)} = \frac{\partial}{\partial \xi}(\int \frac{dv}{g(v)})d\xi = (\frac{d}{dv}\int \frac{dv}{g(v)})\frac{\partial v}{\partial \xi}d\xi = \frac{d_\xi v}{g(v)}$$

и

$$d\int f(\xi)d\xi = f(\xi)d\xi,$$

его можно записать следующим образом:

$$d_\xi \int \frac{dv}{g(v)} - d\int f(\xi)d\xi = 0. \qquad (1.9^1)$$

а) пусть функция $v = \widetilde{v}(\xi, \eta)$, есть какое-нибудь решение уравнения (1.9^1) (а, следовательно, и уравнения (1.9)). Тогда справедливо

$$d_\xi(\int \frac{dv}{g(v)}|_{v=\widetilde{v}(\xi,\eta)}) - d\int f(\xi)d\xi = d_\xi(\int \frac{dv}{g(v)}|_{v=\widetilde{v}(\xi,\eta)} - \int f(\xi)d\xi) \equiv 0, \quad (1.10)$$

А это значит, что выражение в скобках не зависит от ξ, т.е.

$$\int \frac{dv}{g(v)}|_{v=\widetilde{v}(\xi,\eta)} - \int f(\xi)d\xi \equiv C(\eta), \qquad (1.11)$$

где $C(\eta)$ - произвольная функция. Равенство же (1.11) означает, что решение $\widetilde{v}(\xi, \eta)$ уравнения (1.9) определяется неявно равенством

$$\int \frac{dv}{g(v)} - \int f(\xi)d\xi = C(\eta). \qquad (1.12)$$

б) пусть, наоборот, $\widetilde{v}(\xi, \eta)$ есть функция, определенная неявно равенством (1.12) при какой-нибудь функции $C(\eta)$. Тогда верно (1.11), а, следовательно, и (1.10). Но это значит, что $\widetilde{v}(\xi, \eta)$ является решением (1.9).

Из а) и б) следует, что решениями уравнения (1.9) являются функции $v(\xi, \eta)$, определяемые равенством (1.12) при любой функции $C(\eta)$, и только они. В этом смысле равенство (1.12) в неявном виде задает общее решение уравнения (1.9).

ПРИМЕР 2. Решить уравнение

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x\frac{\partial u}{\partial x} - 2y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{1.13}$$

в области $x \neq 0, \quad y \neq 0$.

В указанной области справедливо $\Delta = x^2y^2 > 0$. Следовательно, в этой области уравнение (1.13) гиперболическое. Для приведения его к каноническому виду составим характеристическое уравнение $x^2dy^2 - y^2dx^2 = 0$, которое распадается на пару различных уравнений $xdy - ydx = 0$ и $xdy + ydx = 0$. Общие интегралы этих уравнений соответственно таковы: $xy = C$ и $\frac{y}{x} = C$. Функции же $\varphi_1(x,y) = xy$ и $\varphi_2(x,y) = \frac{y}{x}$ являются их интегралами. Поэтому в результате замены переменных

$$\xi = xy, \quad \eta = \frac{y}{x} \tag{1.14}$$

уравнение (1.9) будет приведено к каноническому виду.

Вычисляем частные производные по формулам (1.6)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}y - \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{y}{x^2} \qquad | \times 2x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}x + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{1}{x} \qquad | \times -2y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}y^2 - 2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{y^2}{x^4} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{2y}{x^3} \qquad | \times x^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{1}{x^2} \qquad | \times -y^2.$$

Смешанную производную, естественно, не вычисляем. Подставляем найденные производные в уравнение (1.13) и приведем подобные члены

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(x^2y^2 - x^2y^2) + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(-2y^2 - 2y^2) +$$
$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(\frac{y^2}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}) + \frac{\partial u}{\partial \xi}(2xy - 2xy) + \frac{\partial u}{\partial \eta}(\frac{2y}{x} - \frac{2y}{x} - \frac{2y}{x}) = 0$$

после очевидных преобразований получаем

$$-4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{2y}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2xy}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

С учетом, что $\xi = xy$, окончательно имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \tag{1.15}$$

Обозначим $\frac{\partial u}{\partial \eta} = v(\xi, \eta)$. Тогда (1.15)

принимает вид $\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{v}{2\xi} = 0$.

Это есть уравнение типа (1.9). На основании (1.12) его общее решение определяется равенством $\int \frac{dv}{v} + \frac{1}{2}\int \frac{d\xi}{\xi} = C(\eta)$. Отсюда

$$v = \frac{1}{\sqrt{\xi}}e^{C(\eta)} = \frac{\omega(\eta)}{\sqrt{\xi}}. \tag{1.16}$$

(вследствие произвольности $C(\eta)$ функция $\omega(\eta)$ также является произвольной). Решение уравнения (1.15) получается отсюда интегрированием по η: $u = \int \frac{\omega(\eta)}{\sqrt{\xi}}d\eta + \psi(\xi)$. Вместо произвольной постоянной мы написали здесь произвольную функцию $\psi(\xi)$, так как указанная функция u удовлетворяет уравнению (1.16) при произвольной $\psi(\xi)$, в чем легко убедиться. Обозначив $\int \omega(\eta)d\eta = \varphi(\eta)$, где функция $\varphi(\eta)$ - снова произвольна, мы получаем общее решение уравнения (1.15) в виде $u = \frac{1}{\sqrt{\xi}}\varphi(\eta) + \psi(\xi)$. Возвращаясь к переменным x, y по формулам (1.14), выводим общее решение исходного уравнения (1.13): $u = \frac{1}{\sqrt{xy}}\varphi(\frac{y}{x}) + \psi(xy)$. Напоминаем, что функции φ и ψ здесь произвольны.

ПРИМЕР 3. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1.17}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{y=0} = 3x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 0. \tag{1.18}$$

На всей плоскости xy справедливо $\Delta = 1 + 3 > 0$. Следовательно, на всей плоскости уравнение (1.17) является гиперболическим, а его характеристическое уравнение $dy^2 - 2dxdy - 3dx^2 = 0$ распадается на два уравнения $dy = -dx$ и $dy = 3dx$. $x + y = C$ и $y - 3x = C$—их общие интегралы, а функции $x + y$ и $y - 3x$ - интегралы этих уравнений. Поэтому к каноническому виду приводит следующая замена переменных:

$$\xi = x + y, \quad \eta = y - 3x. \tag{1.19}$$

В результате этой замены мы получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{1.20}$$

Обозначив $\frac{\partial u}{\partial \xi} = v(\xi, \eta)$, мы приводим его к виду $\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$, откуда заключаем, что функция v от η не зависит, то есть имеет вид: $v = \omega(\xi)$, где $\omega(\xi)$ — произвольная функция. Таким образом, для функции u мы имеем уравнение $\frac{\partial u}{\partial \xi} = \omega(\xi)$. Интегрируя по ξ, находим общее решение уравнения (1.20)

$$u = \int \omega(\xi) d\xi + \psi(\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\xi)$$

. Здесь обе функции $\varphi(\xi), \quad \psi(\xi)$ произвольные. Возвращаясь к переменным x, y, получаем общее решение уравнения (1.17):

$$u(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(y - 3x). \tag{1.21}$$

Наша задача состоит в том, чтобы из бесконечного множества решений (1.21), выделить то, которое удовлетворяет условиям (1.18). Иными словами, мы должны найти вполне определенные функции φ и ψ, при которых функция u удовлетворяет условиям (1.18). Из (1.21) имеем $\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi^{'}(x + y) + \psi^{'}(y - 3x)$. Полагая здесь и в (1.21) $y = 0$, из (1.18) получаем:

$$\varphi(x) + \psi(-3x) = 3x^2, \tag{1.22}$$

$$\varphi^{'}(x) + \psi^{'}(-3x) = 0. \tag{1.23}$$

Из последнего равенства желательно получить уравнение, в которое вместо производных $\varphi^{'}(x), \quad \psi^{'}(-3x)$ входили бы функции $\varphi(x), \quad \psi(-3x)$. Казалось бы, этой цели можно достичь, изменив в (1.23) сумму производных на производную суммы функций. Но этому мешает то обстоятельство, что штрихи в (1.23) означают производные указанных функций по их аргументам ($\varphi^{'}(x)$ есть производная по x, $\psi^{'}(-3x)$ - производная по -3x). Поэтому вначале в (1.23) перейдем к производным по одному и тому же переменному (например, по x). Имеем: $\frac{d\psi(-3x)}{dx} = \frac{d\psi(-3x)}{d(-3x)} \cdot \frac{d(-3x)}{dx} = \psi^{'}(-3x) \cdot (-3)$,
откуда $\psi^{'}(-3x) = -\frac{1}{3}\frac{d\psi(-3x)}{dx}$. Теперь (1.23) принимает вид

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} - \frac{1}{3}\frac{d\psi(-3x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\varphi(x) - \frac{1}{3}\psi(-3x)) = 0.$$

Отсюда

$$\varphi(x) - \frac{1}{3}\psi(-3x) = C. \tag{1.24}$$

Из (1.22) и (1.24) находим

$$\varphi(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}C, \quad \psi(-3x) = \frac{9x^2}{4} - \frac{3}{4}C.$$

Наконец, положив $-3x = z$, получаем $\psi(z) = \frac{z^2}{4} - \frac{3}{4}C$. Требуемые функции φ и ψ найдены. Подставляя их в (1.21), мы получим искомое решение задачи $u(x,y) = \frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{3}{4}C + \frac{(y-3x)^2}{4} - \frac{3}{4}C = 3x^2 + y^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Осложнения, связанные с неодинаковостью аргументов функций φ и ψ в (1.22) и (1.23), устранятся, и решение поставленной задачи упростится, если произвольную функцию ψ в(1.21) мы представим в виде сложной функции $\widetilde{\psi}(\omega(y-3x))$, где $\widetilde{\psi}$ - произвольная, а ω - определенная функция, причем последняя выбирается так, чтобы $\widetilde{\psi}(\omega(y-3x))$ при $y=0$ принимала вид $\widetilde{\psi}(x)$. В нашем случае, очевидно, следует положить $\omega(z) = \frac{-z}{3}$. Тогда общее решение уравнения (1.17) будет иметь вид

$$u(x,y) = \varphi(x+y) + \widetilde{\psi}(-\frac{y-3x}{3}) = \varphi(x+y) + \widetilde{\psi}(x - \frac{y}{3}),$$

а поэтому вместо (1.22) и (1.23) мы получим

$$\varphi(x) + \widetilde{\psi}(x) = 3x^2$$

и $\varphi'(x) - \frac{1}{3}\widetilde{\psi}'(x) = (\varphi(x) - \frac{1}{3}\widetilde{\psi}(x))' = 0$.Той же цели мы могли бы достичь, если бы в(1.19) вместо $\eta = y - 3x$, мы взяли $\eta = x - \frac{y}{3}$, воспользовавшись ЗАМЕЧАНИЕМ 1.

ПРИМЕР 4. Найти решение уравнения

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - 3y^2\frac{\partial u}{\partial y^2} = 0, \qquad (1.25)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{y=1} = f_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = f_1(x), \qquad (1.26)$$

где $f_0(x)$, $f_1(x)$ - заданные функции.

В области $x \neq 0, \quad y \neq 0$ справедливо $\Delta = 4x^2y^2 > 0$, следовательно, в указанной области уравнение (1.25) является гиперболическим. Его характеристическое уравнение $x^2dy^2 + 2xydxdy - 3y^2dx^2 = 0$ распадается на два уравнения

$$xdy - ydx = 0 \quad \text{и} \quad xdy + 3ydx = 0.$$

Функции $\frac{y}{x}$ и x^3y являются интегралами этих уравнений соответственно. Поэтому для приведения уравнения (1.25) к каноническому виду произведем замену переменных $\xi = \frac{y}{x}$ и $\eta = x^3y$. В результате этой замены мы получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{4\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0. \qquad (1.27)$$

При $\frac{\partial u}{\partial\xi} = v$ оно принимает вид $\frac{\partial v}{\partial\eta} - \frac{v}{4\eta} = 0$. Это есть уравнение типа (1.9). В соответствии с (1.12) его общее решение имеет вид $\int\frac{dv}{v} - \frac{1}{4}\int\frac{d\eta}{\eta} = C(\xi)$, откуда $v = \eta^{\frac{1}{4}}C_1(\xi)$. Общее решение уравнения (1.27) получается из уравнения $\frac{\partial u}{\partial\xi} = \eta^{\frac{1}{4}}C_1(\xi)$ интегррованием по ξ: $\quad u = \eta^{\frac{1}{4}}\int C_1(\xi)d\xi + C_2(\eta) = \eta^{\frac{1}{4}}C_3(\xi) + C_2(\eta)$ (функции $C(\xi), \quad C_1(\xi), \quad C_2(\eta), \quad C_3(\xi)$ - произвольные). Возвращаясь к переменным x, y, мы получаем общее решение уравнения (1.25):

$$u(x,y) = x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}C_3(\frac{y}{x}) + C_2(x^3y). \qquad (1.28)$$

Теперь наша задача состоит в том, чтобы из бесконечного множества функций C_2 и C_3 выбрать такие, при которых (1.28) будет удовлетворять условиям (1.26).

Когда в соответствии с (1.26) мы положим в (1.28) $y = 1$, аргументы функций C_2 и C_3окажутся равными $\frac{1}{x}$ и x^3. А это, как видно из предыдущего примера, вызовет определенные осложнения. Поэтому произвольные функции C_2 и C_3 мы, имея в виду ЗАМЕЧАНИЕ 3, заменим другими произвольными функциями, положив $C_3(\frac{y}{x}) = \varphi(\omega_1(\frac{y}{x}))$ и $C_2(x^3y) = \psi(\omega_2(x^3y))$, где функции φ и ψ произвольны, а ω_1 и ω_2 выберем так, чтобы аргументы функций φ и ψ при $y = 1$ оба оказались равными x. Для этого следует положить $\omega_1(z) = \frac{1}{z}$ и $\omega_2(z) = z^{\frac{1}{3}}$. Действительно, тогда мы будем иметь $C_3(\frac{y}{x}) = \varphi(\frac{x}{y})$ и $C_2(x^3y) = \psi(x^3y^{\frac{1}{3}}) = \psi(xy^{\frac{1}{3}})$. Теперь общее решение уравнения (1.25) получает более подходящий вид

$$u(x,y) = x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}\varphi(\frac{x}{y}) + \psi(xy^{\frac{1}{3}}). \qquad (1.28^1)$$

Отсюда находим $\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{4}x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}\varphi(\frac{x}{y}) - x^{\frac{7}{4}}y^{-\frac{7}{4}}\varphi^{'}(\frac{x}{y}) + \frac{1}{3}xy^{-\frac{2}{3}}\psi(xy^{\frac{1}{3}}).$$

Полагая здесь и в (1.28^1) y=1, мы из (1.26) получаем

$$x^{\frac{3}{4}}\varphi(x) + \psi(x) = f_0(x),$$

$$\frac{1}{4}x^{\frac{3}{4}}\varphi(x) - x^{\frac{7}{4}}\varphi^{'}(x) + \frac{1}{3}x\psi^{'}(x) = f_1(x). \qquad (1.29)$$

Исключая из этой системы уравнений функции $\psi(x)$, мы приходим к следующему уравнению относительно функции $\varphi(x)$:

$$\varphi^{'}(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}f_0^{'}(x) - \frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}f_1(x).$$

Отсюда

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}f_0(x) + \frac{3}{4}\int x^{-\frac{7}{4}}(\frac{1}{4}f_0(x) - f_1(x))dx + C \qquad (1.30)$$

(слагаемое с $f_0'(x)$ мы проинтегрировали по частям). Мы увидим далее, что последующие формулы получат более компактный вид, если неопределенный интеграл в (1.30) мы заменим интегралом от той же функции с переменным верхним пределом. Тогда будем иметь

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}f_0(x) + \frac{3}{4}\int_{x_0}^{x} z^{-\frac{7}{4}}(\frac{1}{4}f_0(z) - f_1(z))dz + C, \qquad (1.31)$$

x_0 - произвольное фиксированное число. Как известно, интегралы в формулах (1.30), (1.31) могут отличаться друг от друга только на постоянное число, что ввиду наличия в этих формулах произвольного постоянного C ничего не меняет.

Из (1.29) и (1.31) находим

$$\psi(x) = \frac{3}{4}f_0(x) - \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}}\int_{x_0}^{x} z^{-\frac{7}{4}}(\frac{1}{4}f(z_0) - f_1(z))dz - Cx^{\frac{3}{4}}.$$

Подставляя найденные функции φ и ψ в (1.28^1), получаем решение поставленной задачи:

$$u(x,y) = x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}(\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}f_0(\frac{x}{y}) + \frac{3}{4}\int_{x_0}^{\frac{x}{y}} z^{-\frac{7}{4}}(\frac{1}{4}f(z_0) - f_1(z))dz + C) +$$

$$+\frac{3}{4}f_0(xy^{\frac{1}{3}}) - \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}\int_{x_0}^{xy^{\frac{1}{3}}} z^{-\frac{7}{4}}(\frac{1}{4}f(z_0) - f_1(z))dz - Cx^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{4}yf_0(\frac{x}{y}) + \frac{3}{4}f_0(xy^{\frac{1}{3}}) + \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}\int_{xy^{\frac{1}{3}}}^{\frac{x}{y}} z^{-\frac{7}{4}}(\frac{1}{4}f(z_0) - f_1(z))dz.$$

В случае гиперболического уравнения его частное решение может быть найдено также по заданию искомой функции на паре независимых характеристик этого уравнения (характеристикой уравнения (1.1) называется кривая $\varphi(x, y)$=С, где $\varphi(x, y)$ есть какой-нибудь интеграл характеристического уравнения (1.4), а С - любая постоянная. Характеристики $\varphi_1(x, y) = C_1$, $\varphi_2(x, y) = C_2$ называются независимыми, если независимы интегралы $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, т.е. если для них выполняется неравенство (1.3)).

Рассмотрим еще один пример.

ПРИМЕР 5. Найти решение уравнения

$$2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{y=1} = x^2 - 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = x^3. \tag{1.32}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$-2xdxdy - 3ydx^2 = 0, \tag{1.33}$$

$$(2xdy + 3ydx)dx = 0,$$

Приравниваем по очереди нулю сомножители. Равенство $2xdy + 3ydx = 0$ является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя их, получим

$$\frac{2dy}{y} + \frac{3dx}{x} = 0.$$

Интегрируем каждое слагаемое

$$2ln|y| + 3ln|x| = lnC_1,$$

отсюда

$$x^3y^2 = C_1.$$

Далее $dx = 0$ и $x = C_2$ Первый вариант замены $\xi = x^3y^2$, $\eta = x$.

Функция ξ ,как и в предыдущем примере, на прямой $y = 1$ принимает значение $\xi|_{y=1} = x^3$, что мало согласуется с данными (1.32), но мы не меняем ее, а как и в примере 4 запишем удобное общее решение. Это преобразование вполне будет оправдано простой заменой переменных. Вычисляем производные при $\xi = x^3y^2$, $\eta = x$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}3x^2y^2 + \frac{\partial u}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}2x^3y; \qquad | \times 3$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}6x^5y^3 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}2x^3y + \frac{\partial u}{\partial \xi}6x^2y; \qquad | \times 2x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}4x^6y^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}2x^3. \qquad | \times -3y$$

Подставим найденные производные в данное уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(12x^6y^3 - 12x^6y^3) + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}4x^4y + \frac{\partial u}{\partial \xi}(12x^3 - 6x^3y + 6x^3y) = 0.$$

После приведения подобных членов получаем

$$4x^4y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 12x^3y\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0,$$

сокращаем на $4x^4y$ и меняем x на η

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{3}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

Пусть $v = \frac{\partial u}{\partial \xi}$ тогда $\frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{3v}{\eta}$.

Воспользуемся равенством (1.12) , поменяв в нем местами ξ и η,

$$\int \frac{dv}{v} = -3\int \frac{d\eta(\xi)}{\eta} + lnC(\xi);$$

$$ln|v| = -3ln|\eta| + lnC(\eta).$$

Теперь

$$v = \frac{C(\xi)}{\eta^3}; \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{C(\xi)}{\eta^3}.$$

Далее

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{\eta^3}\int C(\xi)d\xi + \varphi(\eta) = \frac{1}{\eta^3}\psi(\xi) + \varphi(\eta).$$

Здесь $C(\xi)$,$\varphi(\eta)$ и $\psi(\xi)$ произвольные функции

$$\psi(\xi) = \int C(\xi)d\xi.$$

Переходим к переменным x и y

$$u(x,y) = \frac{1}{x^3}\psi(x^3y^2) + \varphi(x).$$

Преобразуем $\psi(x^3y^2)$ к произвольной функции от аргумента $\xi_1 = xy^{\frac{2}{3}}$

$$\psi(x^3y^2) = \psi((xy^{\frac{2}{3}})^3) = g((xy^{\frac{2}{3}})) = g(\xi_1).$$

Итак

$$u(x,y) = \frac{1}{x^3}g(xy^{\frac{2}{3}}) + \varphi(x). \tag{1.34}$$

Подберем функции g и φ из рассчета удовлетворить начальным условиям (1.32).

Найдем предварительно производную $\frac{\partial u}{\partial y}$ из равенства (1.34)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x^3}g'_{\xi_1}(xy^{\frac{2}{3}})x\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}. \tag{1.35}$$

Подставим $y = 1$ в равенство (1.34) и (1.35) и удовлетворим условиям (1.32)

$$\frac{1}{x^3}g(x) + \varphi(x) = x^2 - 2,$$

$$\frac{1}{x^3}g'(x)x\frac{2}{3} = x^3, \quad g'(x) = \frac{3}{2}x^5.$$

Интегрируем последнее равенство

$$g(x) = \frac{x^6}{4} + C.$$

Далее $\varphi(x) = x^2 - 2 - \frac{1}{x^3}(\frac{x^6}{4} + C)$.

Подставляем, найденные выражение для $g(x)$ и $\varphi(x)$ в (1.34), изменив аргумент в $g(x)$ значение x на $xy^{\frac{2}{3}}$

$$u(x,y) = \frac{1}{x^3}\frac{(xy^{\frac{2}{3}})^6}{4} + \frac{C}{x^3} + x^2 - 2 - \frac{x^3}{4} - \frac{C}{x^3}.$$

После небольших упрощений—окончательный результат

$$u(x,y) = \frac{x^3(y^4-1)}{4} + x^2 - 2.$$

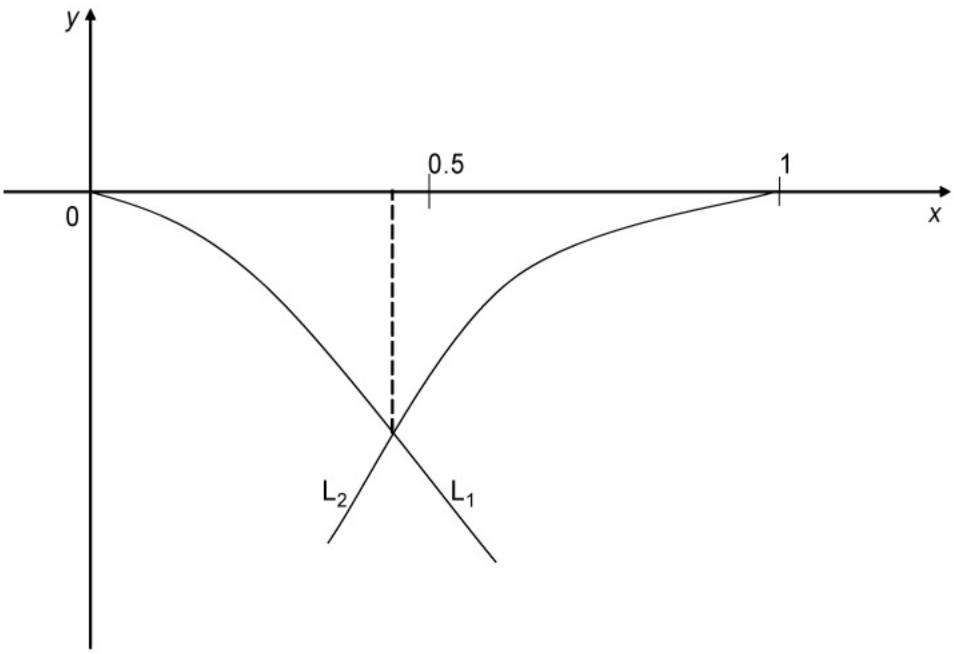
ПРИМЕР 6. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (y < 0), \tag{1.36}$$

если $u(x,y) = \varphi_1(x)$ на характеристике $x - 2\sqrt{-y} = 0$, $\quad (L_1)$

и $u(x,y) = \varphi_1(x)$ на характеристике $x + 2\sqrt{-y} = 0, \quad (L_2)$,

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ - функции, заданные соответственно на отрезках $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, причем $\varphi_1(\frac{1}{2}) = \varphi_2(\frac{1}{2})$ (см. рисунок).



Легко видеть, что подстановкой $\xi = x - 2\sqrt{-y}, \quad \eta = x + 2\sqrt{-y}$ уравнение (1.36) приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0.$$

Поэтому (см. пример 3) его общее решение таково

$$u(x,y) = \theta_1(x - 2\sqrt{-y}) + \theta_2(x + 2\sqrt{-y}), \tag{1.37}$$

где θ_1и θ_2- произвольные функции. Наша задача состоит в том, чтобы выбрать такие θ_1 и θ_2, при которых функция (1.37) удовлетворяет условиям задачи. На характеристике L_1, то есть, при $2\sqrt{-y} = x$, мы по условию имеем

$$\theta_1(0) + \theta_2(2x) = \varphi_1(x). \tag{1.38}$$

Аналогично, на L_2, то есть, при $2\sqrt{-y} = 1 - x$, справедливо

$$\theta_1(2x - 1) + \theta_2(1) = \varphi_2(x). \tag{1.39}$$

Из (1.39), полагая $2x - 1 = z$, получаем

$$\theta_1(z) = \varphi_2(\frac{z+1}{2}) - \theta_2(1), \tag{1.40}$$

а из (1.38) при $z = 2x$ получаем

$$\theta_2(z) = \varphi_1(\frac{z}{2}) - \theta_1(0).$$

Требуемые функции θ_1 и θ_2 найдены. Подставляем их в (1.37):

$$u(x,y) = \varphi_2(\frac{x - 2\sqrt{-y} + 1}{2}) + \varphi_2(\frac{x + 2\sqrt{-y}}{2}) - (\theta_1(0) + \theta_2(1)). \tag{1.41}$$

Положим в (1.40) $z = 0$: $\theta_1(0) = \varphi_2(\frac{1}{2}) - \theta_2(1)$, откуда $\theta_1(0) + \theta_2(1) = \varphi_2(\frac{1}{2})$. Так что искомое решение задачи приобретает вид: u(x,y)=$\varphi_1(\frac{x+2\sqrt{-y}}{2}) + \varphi_2(\frac{x-2\sqrt{-y}+1}{2}) - \varphi_2(\frac{1}{2})$.

ЗАДАЧИ.

Определить тип заданного уравнения в заданной области:

1.1. $(y+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

в прямоугольнике $1 < x < 3, \quad 0 < y < 1$.

1.2. $y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(x+y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$

в круге $x^2 + (y-6)^2 < 1$.

1.3. $2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x\frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

в квадрате $|x| < 1, \quad |y| < 1$.

1.4. $(x+y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + xu = 0$

в круге $(x-5)^2 + y^2 < 1$.

1.5. $(x+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x^2\frac{\partial u}{\partial x} + (y-3)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$

в квадрате $0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$.

1.6. $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2(x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1-xy)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

в полосе $2 < x + y < 5$.

1.7. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

в кольце $1 < x^2 + y^2 < 7$.

1.8. $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial u}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

в квадрате $0 < x < 2, \quad 0 < y < 2$.

1.9. $6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

в квадрате $1 < x < 2, \quad 2 < y < 3$.

1.10. $2x\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (x^2 - 2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$
в круге $x^2 + y^2 < 1$.

1.11. $5x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y\frac{\partial u}{\partial x} - u = 0$
в прямоугольнике $1 < x < 3, \quad 4 < y < 8$.

1.12. То же уравнение в прямоугольнике $5 < x < 9, \quad -1 < y < 1$.

Указать одну из подстановок, приводящих данное уравнение к каноническому виду, указать тип уравнения и ожидаемый канонический вид:

1.13. $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

1.14. $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

1.15. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 10\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 25\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

1.16. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y\frac{\partial u}{\partial y} - x\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

1.17. $e^{2y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xe^y\frac{\partial u^2}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

1.18. $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x(2y - 1)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

1.19. $9y^4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6y^2 sinx\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + sin^2x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

1.20. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (4 + y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.21. $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (e^x - y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - e^x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.22. $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + xtgx)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + tgx\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.23. $cos^2y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2sinxcosy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + sin^2x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.24. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2x^2 - y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.25. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2cos^2y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + cos^4y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.26. $sin^2y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cos^2x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.27. $x^4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x^2y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

1.28. $sin^4x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2sin^2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} + sinx\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

1.29. $e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2e^{-2x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

1.30. $cos^4x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + sin^4y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.31. $tg^2x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2ytgx\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.32. $e^{2y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3e^y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + e^y\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.33. $x^4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.34. $sin^2 y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4siny\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2cosy\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.35. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ctgx\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + ctg^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - cosx\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

1.36. $tg^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ctg^2 y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - sinx\frac{\partial u}{\partial x} + 2cosy\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.37. $(x+y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + (y-x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.38. $(x^2+9)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.39. $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x + x^2 + 2y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + (x^2+2y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.40. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (1 + xy + x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + (xy+1)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

Привести к каноническому виду

1.41. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$

1.42. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.43. $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.44.$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 8\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.45. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.46. $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.47. $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.48. $9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.49. $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.50. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.51. $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.52. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.53. $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.54. $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 6(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) = 0.$

1.55. $9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.56. $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3(\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y}) = 0.$

1.57. $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 7(\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y}) = 0.$

1.58. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0.$

1.59. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.60. $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.61. $\frac{x}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{y}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.62. $(1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.63. $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4x^3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

1.64. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 12y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.65. $4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.66. $e^y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1+e^y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.67. $4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.68. $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.69. $cos^2y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2cosy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - xcos^2y\frac{\partial u}{\partial x} + (tgx - xcosy)\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.70. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2sinx\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - cos^2x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.71. $siny\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+(\frac{siny}{x}-ctgy)\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.72. $9x^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-6xy\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.73. $x^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-2xsiny\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+sin^2y\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0.$

1.74. $x^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+cos^4y\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

1.75. $sin^2y\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2siny\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+cosy\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

1.76. $e^{2y}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+3e^y\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.77. $y^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{4}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.78. $y^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-2ye^x\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+e^{2x}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-y^2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{e^{2x}}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.79. $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-4x\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+8x^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.80. $y^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+4yx^2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+4x^4\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+2x^2\frac{\partial u}{\partial x}+4xy\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.81. $cos^2y\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-4cosy\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+2siny\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

1.82. $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+e^y\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+\frac{5}{4}e^{2y}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{5}{4}e^{2y}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.83. $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-2cosx\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}-sin^2x\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0.$

1.84. $sin^2x\frac{\partial^2u}{\partial x^2} - 2ysinx\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2} = 0.$

1.85. $cth^2x\frac{\partial^2u}{\partial x^2} - 2ycthx\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.86. $tg^2x\frac{\partial^2u}{\partial x^2} - 2ytgx\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2} + tg^3x\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

Привести уравнения к каноническому виду в каждой из областей, где тип уравнения сохраняется:

1.87. $y\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u}{\partial y^2} = 0.$

1.88. $\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2u}{\partial y^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad \alpha = const$

1.89. $y\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2u}{\partial y^2} = 0.$

1.90. $x\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2u}{\partial y^2} = 0.$

1.91. Найти общее решение уравнений в задачах :
а) 1.41, б) 1.42, в) 1.43, г) 1.44, д) 1.46, е) 1.48, ж) 1.49,
з) 1.50, и) 1.52, к) 1.53, л) 1.55, м) 1.57, н) 1.59, о) 1.60,
п) 1.66, р) 1.71.

Найти общее решение следующих уравнений:

1.92. $\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y} - 5\frac{\partial^2u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.93. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - sinx\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (sinx - ctgx)\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

1.94. $4x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 7\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

1.95. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + 2(x-1)\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.96. $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

1.97. $2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.98. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

1.99. $x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 5\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.100. $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

1.101. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2cosx\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + cos^2x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x} + (2cosx + sinx)\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.102. $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$

1.103. $4x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.104. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.105. $t^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$

1.106. $3x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

1.107. $3x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.108. $2x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

1.109. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2sinx\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - cos^2x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + (sinx + cosx + 1)\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.110. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2sinx\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - cos^2x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cosx\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.111. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2sinx\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3 + cos^2x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - cosx\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.112. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2sinx\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3 + cos^2x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + (2 - sinx - cosx)\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.113. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.114. $3x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 16xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 16y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 15x\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

1.115. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{x}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{x^2}{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y^2-x^2}{y^3}\frac{\partial u}{\partial y} - x^3 = 0.$

1.116. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{x^2+y}(\frac{\partial u}{\partial x} - 2x\frac{\partial u}{\partial y}) + 1 = 0.$

В следующих задачах требуется найти решения указанных уравнений при задаваемых начальных условиях :

1.117. Уравнение задачи 1.41; $u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = -x - 1.$

1.118. Уравнение задачи 1.57; $u|_{x=0} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 3y.$

1.119. Уравнение задачи 1.53; $u|_{x=0} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 5y.$

1.120. Уравнение задачи 1.46; $u|_{x=0} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 4y.$

1.121. Уравнение задачи 1.44; $u|_{y=0} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 3x + 1.$

1.122. Уравнение задачи 1.49; $u|_{y=0} = 3x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 2x + 6.$

1.123. $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad u|_{y=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = F(x).$

1.124. $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad u|_{y=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = F(x).$

1.125. $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad u|_{y=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = F(x).$

1.126. $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 7\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad u|_{y=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = F(x).$

1.127. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial}y + 6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad u|_{y=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = F(x).$

1.128. Уравнение задачи 1.60; $u|_{y=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \psi(x).$

1.129. Уравнение задачи 1.92; $u|_{y=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = F(x).$

1.130. Уравнение задачи 1.96; $u|_{x=1} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = 2y^3.$

1.131. Уравнение задачи 1.97; $u|_{y=1} = x^4, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = 3x^3.$

1.132. Уравнение задачи 1.100; $u|_{x=1} = 3y^4, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{y=0} = 2y^5.$

1.133. Уравнение задачи 1.102; $u|_{x=1} = 2y + 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = y.$

1.134. Уравнение задачи 1.103; $u|_{y=1} = 4x^3, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = 8x.$

1.135. Уравнение задачи 1.107; $u|_{y=1} = x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = 15x^2.$

1.136. Уравнение задачи 1.103; $u|_{y=1} = x^2 + 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = 4.$

1.137. Уравнение задачи 1.107; $u|_{y=1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = 6x^2\sqrt[3]{x}.$

1.138. Уравнение задачи 1.94; $u|_{x=1} = 3y^5, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = 2y^{11}.$

1.139. Уравнение задачи 1.99; $u|_{y=1} = 4x^4, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = 2x^8.$

1.140. Уравнение задачи 1.106; $u|_{x=1} = 4y^3, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = y^7.$

1.141. Уравнение задачи 1.108; $u|_{x=1} = y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = 2y^7.$

1.142. Уравнение задачи 1.106; $u|_{x=1} = 1 + y^4, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = y^4.$

1.143. Уравнение задачи 1.108; $u|_{x=1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = y^5.$

1.144. $2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - 3y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0;\quad u|_{y=1} = 2 + 3x^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = x^4$

1.145. $3x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0;\quad u|_{x=1} = y^5 + 3,\quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = 2y^2 - y$

1.146. $3x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - 4y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\quad u|_{y=1} = 3x^2 + 2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = 1 - 2x$

1.147. $2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - 5y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\quad u|_{y=1} = 3x^2 + 1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = 5x + 2$

1.148. $4x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\quad u|_{x=1} = 1,\quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = 3y^3$

1.149. $3x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\quad u|_{x=1} = 3y^2,\quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = 1 - y$

1.150. $3x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - 2y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0,\quad u|_{y=1} = 3x^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = 4 - x^2$

1.151. $4x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 7\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\quad u|_{x=1} = 3y,\quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = 2y^2$

1.152. Уравнение задачи 1.105; $u|_{t=1} = 2x^2,\quad \frac{\delta u}{\delta t}|_{t=1} = x^2.$

1.153. Уравнение задачи 1.113; $u|_{y=1} = 1 + 2x^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = 4x^2.$

1.154. Уравнение задачи 1.114; $u|_{y=1} = 5x^4 - 3x^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = 10x^4 - 9x^2.$

1.155. Уравнение задачи 1.105; $u|_{t=1} = 2\sqrt{x},\quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=1} = \sqrt{x}.$

1.156. $4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0,\quad u|_{x=1} = 2y,\quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = 0$

1.157. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 9y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 6x\frac{\partial u}{\partial x} + 6y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u|_{y=1} = 3x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = x^2.$

1.158. Уравнение задачи 1.113; $u|_{y=1} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = x.$

1.159. Уравнение задачи 1.114; $u|_{x=1} = 2y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = \frac{20}{3}y^2.$

1.160. Уравнение задачи 1.109; $u|_{y=-cosx} = 1 + 2sinx, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=-cosx} = sinx.$

1.161. Уравнение задачи 1.110; $u|_{y=-cosx} = 1 + cosx, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=-cosx} = 0.$

1.162. Уравнение задачи 1.111; $u|_{y=cosx} = sinx, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=cosx} = \frac{1}{2}e^x.$

1.163. Уравнение задачи 1.112; $u|_{y=cosx} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=cosx} = e^{\frac{x}{2}}cosx.$

Уравнение (1.1) приведено к каноническому виду при помощи указанной подстановки (ξ, η). Завершить пример, определив частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

1.164. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 2\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = 2x + 3y, \quad \eta = 4x - 5y, \quad u|_{x=0} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 2.$

1.165. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = 3x + 8y, \quad \eta = 4x - 5y, \quad u|_{x=0} = 5, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 7.$

1.166. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 4\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = 3x + 7y, \quad \eta = 4x - 5y, \quad u|_{x=0} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 2.$

1.167. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 3\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = 3x - 4y, \quad \eta = 5x + 6y, \quad u|_{x=0} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 3.$

1.168. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - 3\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad \xi = 2x + 3y, \quad \eta = 5x - 4y, \quad u|_{x=0} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 1.$

1.169. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - 2\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0, \quad \xi = 5x - 6y, \quad \eta = x + 2y, \quad u|_{x=0} = 4, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 1.$

1.170. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0, \quad \xi = 2x - 3y, \quad \eta = 3x + 4y, \quad u|_{x=0} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 1.$

1.171. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + 3\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0, \quad \xi = 4x - 3y, \quad \eta = 5x + 2y, \quad u|_{x=0} = 3, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 5.$

1.172. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - 3\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0, \quad \xi = 3x - 4y, \quad \eta = 3x + 5y, \quad u|_{x=0} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 1.$

1.173. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + 2\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0, \quad \xi = 2x + 3y, \quad \eta = 3x + 5y, \quad u|_{y=0} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 3.$

1.174. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - 4\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad \xi = 3x + y, \quad \eta = 2y - 5x, \quad u|_{y=0} = 3x + 5, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 4.$

1.175. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0, \quad \xi = x^2y^3, \quad \eta = y, \quad u|_{x=1} = 3y^3 + 5, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = 3y + 1.$

1.176. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad \xi = x^2y^3, \quad \eta = x, \quad u|_{y=1} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{y=1} = 3x^2 + 1.$

1.177. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{2}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad \xi = y^2x^3, \quad \eta = x, \quad u|_{y=1} = 2x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = 3x + 1.$

1.178. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{4}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad \xi = xy^3, \quad \eta = y, \quad u|_{x=1} = 3y, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = 2 + 3y.$

1.179. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad \xi = x^3y^2, \quad \eta = x, \quad u|_{y=1} = 2x^3, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = 3x.$

1.180. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{4}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad \xi = y^3x, \quad \eta = y, \quad u|_{x=1} = 1 + 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = 3y^2.$

1.181 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{5}{3}\frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad \xi = x^3y^4, \quad \eta = y, \quad u|_{x=1} = 3y^5 \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = 3y^4$

1.182. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{4}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad \xi = x^3y^4, \quad \eta = y, \quad u|_{x=1} = y \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = 3y + 2$

1.183. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{3}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad \xi = x^3y^2, \quad \eta = y, \quad u|_{x=1} = 3y^2 \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = 3y + 2$

1.184. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{9}{2\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad \xi = y^2x^3, \quad \eta = x, \quad u|_{y=1} = x^3 \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{y=1} = x^2 - 2$

1.185 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{2}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad \xi = x^2y^3, \quad \eta = x, \quad u|_{y=1} = x^2 + 1 \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{y=1} = x$

1.186. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{4}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad \xi = x^3y^4, \quad \eta = x, \quad u|_{y=1} = 4x^2 \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{y=1} = 6x$

В следующих залдачах требуется найти решения заданных уравнений по заданным значениям $\varphi(x), \quad \psi(x)$ искомых решений на кусках пары независимых характеристик:

1.187. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u(x,y) = \varphi(x)$ на $y + x = 0$,

$$u(x,y) = \psi(x) \text{ на } y - x = 0,$$

$$\varphi(0) = \psi(0).$$

1.188. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(x,y) = \varphi(x)$ на $y - x = 0$,

$$u(x,y) = \psi(x) \text{ на } 5x - y = 0,$$

$$\varphi(0) = \psi(0).$$

1.189. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(x,y) = \varphi(x)$ на $y = 5x + 3$,

$$u(x,y) = \psi(x) \text{ на } y = x - 1,$$

$$\varphi(-1) = \psi(-1).$$

1.190. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 8\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(x,y) = \varphi(x)$ на $y + 4x = 0,$

$$u(x,y) = \psi(x) \text{ на } y + 2x + 2 = 0,$$

$$\varphi(1) = \psi(1).$$

1.191. $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(x,y) = \varphi(x)$ на $x - y - 1 = 0,$

$$u(x,y) = \psi(x) \text{ на } x + 3y + 1 = 0,$$

$$\varphi(\tfrac{1}{2}) = \psi(\tfrac{1}{2}).$$

1.192. $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(x,y) = \varphi(x)$ на $x + 2y + 1 = 0,$

$$u(x,y) = \psi(x) \text{ на } 3x + 2y + 2 = 0,$$

$$\varphi(-\tfrac{1}{2}) = \psi(-\tfrac{1}{2}).$$

1.193. $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(x,y) = \varphi(x)$ на $x + 3y + 2 = 0,$

$$u(x,y) = \psi(x) \text{ на } 2x - y - 1 = 0,$$

$$\varphi(\tfrac{1}{7}) = \psi(\tfrac{1}{7}).$$

1.194. $25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(x,y) = \varphi(x)$ на $2x - 5y - 4 = 0,$

$$u(x,y) = \psi(x) \text{ на } x + 5y + 3 = 0,$$

$$\varphi(\tfrac{1}{3}) = \psi(\tfrac{1}{3}).$$

1.195. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 8\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(x,y) = \varphi(x)$ на $4x - y + 3 = 0,$

$$u(x,y) = \psi(x) \text{ на } 2x + y - 4 = 0,$$

$$\varphi(\tfrac{1}{6}) = \psi(\tfrac{1}{6}).$$

1.196. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad u(x,y)=\varphi(x)$ на $2x+y+1=0,$

$$u(x,y)=\psi(x) \text{ на } 3x-y-2=0,$$

$$\varphi(\tfrac{1}{5})=\psi(\tfrac{1}{5}).$$

1.197. $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-7\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad u(x,y)=\varphi(x)$ на $4x+y+1=0,$

$$u(x,y)=\psi(x) \text{ на } x-2y+4=0,$$

$$\varphi(-\tfrac{2}{3})=\psi(-\tfrac{2}{3}).$$

1.198. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad (x>0), \quad u(x,y)=\varphi(x)$ на $y-1=0,$

$$u(x,y)=\psi(x) \text{ на } x^2-y=0,$$

$$\varphi(1)=\psi(1).$$

1.199. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad (y>0), \quad u(x,y)=\varphi(x)$ на $y-x^2=0,$

$$u(x,y)=\psi(x) \text{ на } x-2=0,$$

$$\varphi(2)=\psi(4).$$

1.200. $2y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0, \quad (x>0), \quad u(x,y)=\varphi(x)$ на $y-\sqrt{x}=0,$

$$u(x,y)=\psi(x) \text{ на } y-2=0,$$

$$\varphi(4)=\psi(4).$$

1.201. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=0, (x>0), \quad u(x,y)=\varphi(x)$ на $y-x^2=0,$

$$u(x,y)=\psi(x) \text{ на } y+x^2-2=0,$$

$$\varphi(1)=\psi(1).$$

1.202. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2shx\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{chx}\frac{\partial u}{\partial y}-thx\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad u(x,y)=\varphi(x)$ на $y-e^x=0,$

$$u(x,y)=\psi(x) \text{ на } y-e^{-x}=0,$$

$$\varphi(0) = \psi(0).$$

2 УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА. МЕТОД ФУРЬЕ.

В данном разделе мы приведем задачи, решаемые методом Фурье для уравнений гиперболического типа , к которым сводятся физические процессы колебательного характера. Рассмотрим в начале одномерные по геометрическим координатам: колебания струны и продольные колебания стержня.

2.1 Уравнения колебания струны.

Струна — туго натянутая нить, практически не растяжимая, но легко изгибаемая. Пусть она имеет длину ℓ и в положении равновесия занимает отрезок $[0, \ell]$ на оси Ox. Изучаются малые поперечные колебания. Вводим неизвестную функцию $u(x,t)$ равную отклонению точки с абсциссой x от положения равновесия в момент времени t. Известны физические параметры струны: ρ — линейная плотность, T — натяжение струны, $p(x,t)$ — внешняя сила, рассчитанная на единицу длины . Без вывода (см. книги [1] и [2]) приведем уравнение колебания (пока без учета сопротивления окружающей среды)

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t). \tag{1.1}$$

Если предположить, что сопротивление среды пропорционально скорости движения точек струны, то есть равно $k\dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad k > 0$, то уравнение (1.1) перепишется так:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k\frac{\partial u}{\partial t} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t) \tag{1.2}$$

Малые колебания струны обычно характеризуются соотношением $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \approx 0$. Легко показать, что величина T , натяжение струны в положении равновесия, практически не зависит в процессе колебания ни от времени t , ни от координаты x (это является следствием предположения $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \approx 0$). Будем в дальнейшем считать струну однородной, а это означает постоянство плотности ρ. Поделим уравнение (1.1) на ρ и введем параметр $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, после чего оно примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t), \tag{1.3}$$

где $g(x,t) = p(x,t)/\rho$.

Та же операция с уравнением (1.2) дает такой результат

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\nu \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t). \tag{1.4}$$

Здесь для удобства положили $2\nu = k/\rho$. Если внешняя сила отсутствует, $p(x,t) \equiv 0$, то колебания называются собственными или свободными. Они описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.5}$$

в предположении, что среда колебания не препятствует движению струны. Аналогично преобразуется и равенство (1.4).

Для всех представленных уравнений ставится задача Коши: найти решение уравнений, удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = f(x), \tag{1.6}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x). \tag{1.7}$$

Первое требование означает, что задается начальное отклонение, первичная форма струны, второе — задается начальная скорость. Это условие реализуется на практике как удар по струне молоточком, форма которого и скорость определяется функцией $F(x)$.

Учитывая конечные размеры струны, в точках $x = 0$ и $x = l$ задаются краевые условия — закрепленные концы, то есть отклонения граничных точек равны нулю для любого значения времени $t > 0$. Аналитически они записываются следующим образом

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{1.8}$$

Технически можно осуществить и мягкое или свободное закрепление одного из концов, например, $x = l$, когда он без трения перемещается по прямой, перпендикулярной оси x в плоскости колебания $x0u$. В этом случае проекция сил натяжения на ось Ox, $(\overrightarrow{T})_u$, будет равняться нулю и, можно показать, что выполняется условие

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,|_{x=\ell} = 0. \tag{1.9}$$

Аналогичное условие, если свободен конец $x = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,|_{x=0} = 0. \tag{1.10}$$

Если конец движется с сопротивлением пропорциональном отклонению, то такое краевое условие называют упругим. В этом случае имеют место зависимости

$$\frac{\partial u}{\partial x} - h_1 u\bigg|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + h_2 u\bigg|_{x=\ell} = 0, \quad h_1, h_2 > 0, \tag{1.10$_1$}$$

Граничные условия вида (1.8), (1.9), (1.10) и (1.10_1) называются однородными. На практике можно столкнуться с неоднородными условиями, например, подвижные концы, когда точки $x = 0$ или $x = l$ перемещаются по заданным законам. В этом случае (1.8) перепишутся так

$$u(0,t) = \varphi(t), u(\ell,t) = \psi(t). \tag{1.11}$$

Собирая все вместе, сформулируем начально краевую задачу о колебании однородной струны . В области $0 < x < l, t > 0$ найти решение уравнения (1.1) или (1.5), удовлетворяющее начальным условиям $(1,6)$, (1.7) и двум краевым условиям (1.8) (или (1.9), (1.10) и так далее).

Если начально-краевая задача однородная, то для ее решения можно применить метод Фурье (по-другому метод разделения переменных), изложению которого посвящен данный раздел. Если задача неоднородная, то существуют несложные приемы сведения ее к однородному случаю, об этом поговорим позже, после того как рассмотрим основные однородные задачи.

В качестве примера исследуем задачу о собственных колебаниях струны, закрепленной на концах. Повторимся, но четко поставим задачу.

Пример 1. В области $0 < x < l$, $t > 0$ найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.5}$$

удовлетворяющее условиям:

$$u(0,t) = 0, \tag{1.8_1}$$

$$u(\ell,t) = 0, \tag{1.8_2}$$

$$u(x,0) = f(x), \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x). \tag{1.7}$$

Здесь $f(x)$ и $F(x)$ достаточно гладкие функции на $[0,\ell]$, удовлетворяющие условиям

$$f(0) = f(\ell) = 0; \quad F(0) = F(\ell) = 0.$$

Задачу решаем методом Фурье. На первом этапе ищем нетривиальные, частные решения уравнения (1.5) в виде произведения $u(x,t) = X(x)T(t)$, удовлетворяющее только краевым условиям.

Имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)T''(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t).$$

Неизвестные множители должны удовлетворять равенству

$$X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t)$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{1.12}$$

Соотношение (1.12) является тождественным совпадением двух функций от независимых переменных x и t и это совпадение возможно только тогда, когда каждая дробь равна одному и тому же постоянному значению, которое мы для начала обозначим через μ. В результате функция $X(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{X''(x)}{X(x)} = \mu$, которое перепишем в стандартной форме

$$X''(x) - \mu X(x) = 0. \tag{1.13}$$

Вспомним, что искомая функция $u(x,t)$ должна удовлетворять требованиям (1.8_1) и (1.8_2). Рассмотрим сначала (1.8_1)

$$u(0,t) = X(0)T(t) \equiv 0.$$

Функция $T(t)$ по предположению не будет тождественно равняться нулю, следовательно, мы получаем, что

$$X(0) = 0. \tag{1.14}$$

Точно также выводим, что

$$X(l) = 0. \tag{1.15}$$

В итоге требуется найти нетривиальное решение уравнения (1.13), удовлетворяющее соотношениям (1.14) и (1.15). Такая задача для дифференциального уравнения 2-го порядка называется краевой (в отличии от задачи Коши) или задачей Штурма - Лиувилля. Небольшое исследование показывает, что при $\mu \geq 0$ поставленная задача не имеет решения. Пусть $\mu < 0$ и для удобства $\mu = -\lambda^2$. Теперь уравнение (1.13) предстанет в виде

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Общее решение находится легко

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Краевая задача (1.13), (1.14), (1.15) разрешима далеко не для всех $\mu < 0$. Найдем соответствующие значения μ, точнее λ, а также одну из постоянных C_1, C_2 (вторая будет произвольной).

Пусть $x = 0$, тогда $X(0) = C_1 = 0$. Если $x = l$, то $X(l) = C_2 \sin \lambda \ell = 0$, $C_2 \neq 0$, а потому $\sin \lambda \ell = 0$, откуда $\lambda \ell = \pi k$, $k \in Z$. Обозначим $\lambda_k = \frac{\pi k}{\ell}$. Значения $\mu_k = (\frac{\pi k}{\ell})^2$ называются собственными значениями. Каждому $\lambda_k = \frac{\pi k}{\ell}$ с точностью до множителя C_2 , будет отвечать искомое решение, которое, заменив C_2 на A_k, запишем в виде

$$X_k(x) = A_k \sin \frac{\pi k x}{\ell}. \tag{1.16}$$

Заметим, что $k = 0$ мы отвергаем, так как $\mu < 0$, придется расстаться и с отрицательными k, которые не дают новых независимых решений, поэтому $k \in N$ определяет все бесконечное множество $\{X_k(x)\}$ решений. Они называются собственными функциями задачи Штурма - Лиувилля.

Перейдем к множителю $T(t)$, который согласно (1.12) будет удовлетворять уравнению

$$\frac{T''}{a^2 T(t)} = -\lambda_k^2 \quad \text{или} \quad T'' + \left(\frac{\pi k a}{\ell}\right)^2 T(t) = 0.$$

Общее решение последнего уравнения, $T_k(t)$, записывается следующим образом

$$T_k(t) = B_k \cos\frac{\pi k a}{\ell}t + C_k \sin\frac{\pi k a}{\ell}t,$$

где B_k и C_k — постоянные неизвестные коэффициенты. Первый этап мы завершаем представлением бесконечного множества частных решений (1.5), удовлетворяющих заданным граничным требованиям

$$u_k(x,t) = \left(B_k \cos\frac{\pi k a}{\ell}t + C_k \sin\frac{\pi k a}{\ell}t\right) A_k \sin\frac{\pi k x}{\ell}.$$

Их можно записать в более простом виде

$$u_k(x,t) = \left(a_k \cos\frac{\pi k a}{\ell}t + b_k \sin\frac{\pi k a}{\ell}t\right) \sin\frac{\pi k x}{\ell}. \tag{1.17}$$

Здесь $a_k = A_k B_k$, $b_k = A_k C_k$ — произвольны. В целях упрощения процедуры решения задач мы, не нарушая общности, будем считать постоянный множитель при $X_k(x)$ равным единице. Второй этап - выполнение начальных условий (1.6) и (1.7). Нетрудно заметить, что с помощью функции $u_k(x,t)$ из (1.17) удовлетворить этим требованиям не удастся. Отметим, что и любая, конечная сумма функций $u_k(x,t)$, которая хотя и удовлетворяет уравнению (1.5) и краевым условиям (1.8_1), (1.8_2), не решит задачу Коши в общем случае, как ни выбирай a_k и b_k. Остается единственная возможность взять не только бесконечную сумму $u_k(x,t)$, а весь ряд, записав

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{\pi k a}{\ell}t + b_k \sin\frac{\pi k a}{\ell}t\right) \sin\frac{\pi k x}{\ell}, \tag{1.18}$$

в которых a_k и b_k , хотя и неизвестные, но должны обеспечивать сходимость ряда. Представление (1.18) назовем формальным решением поставленной задачи, хотя оно может и не быть решением в обычном виде.

Подберем коэффициенты a_k и b_k в (1.18) так, чтобы условия (1.6) и (1.7) удовлетворялись. Предварительно формально продифференцируем формально ряд (1.18) по t

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi k a}{\ell} \left(-a_k \sin \frac{\pi k a}{\ell} t + b_k \cos \frac{\pi k a}{\ell} t \right) \sin \frac{\pi k x}{\ell}. \tag{1.19}$$

Полагаем в (1.18) $t = 0$ с учетом, что $u(x, 0) = f(x)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{\pi k x}{\ell} = f(x). \tag{1.20}$$

Замечаем, что a_k являются коэффициентами ряда Фурье функции $f(x)$, разложенной на отрезке $[0, \ell]$ в ряд только по синусам. Предполагая, что сам ряд в (1.20) сходится на $[0, \ell]$ равномерно, находим

$$a_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi k x}{\ell} dx, k = 1; 2; ... \quad . \tag{1.21}$$

Точно также, полагая $t = 0$ в равенстве (1.19), с учетом (1.7) получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi k a}{\ell} b_k \sin \frac{\pi k x}{\ell} = F(x).$$

Отсюда $\frac{\pi k a}{\ell} b_k = \frac{2}{\ell} \int\limits_0^{\ell} F(x) \sin \frac{\pi k x}{\ell} dx$, а

$$b_k = \frac{\ell}{\pi k a} \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} F(x) \sin \frac{\pi k x}{\ell} dx, k = 1; 2; ... \quad . \tag{1.22}$$

Можно считать, что формально для непрерывных $f(x)$ и $F(x)$ мы получили решение задачи в виде ряда (1.18), в котором коэффициенты находятся по формулам (1.21) и (1.22). Но ряды, ряды Фурье в том числе, вещь капризная и не сходятся равномерно даже для непрерывных функций. Можно показать, что для равномерной сходимости ряда (1.18) достаточно, чтобы $f(x)$ имела кусочно непрерывную производную, а $F(x)$ была просто кусочно непрерывна при выполнении (1.8_1) и (1.8_2). Однако эти требования не обеспечивают, вообще говоря, существования у функции $u(x,t)$ непрерывных вторых производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, без чего говорить об $u(x,t)$ как о решении уравнения (1.5) некорректно. Введем такое определение.

Определение. Функцию $u(x,t)$ представленную рядом (1.18), в котором коэффициенты находятся по формулам (1.21), (1.22) назовем регулярным (классическим) решением задачи, если ряд допускает двухкратное дифференцирование по x и t.

Непрерывность повторных производных автоматически следует из правила почленного дифференцирования функционального ряда, требующего равномерной сходимости формально продифференцированных рядов.

Приведем без доказательства достаточные условия существования регулярного решения в виде требования на степень гладкости $f(x)$ и $F(x)$.

Теорема. Если в поставленной в примере 1 задаче $f(x)$ удовлетворяет условиям $f(0) = f(\ell) = 0$, $f''(0) = f''(\ell) = 0$ и $f(x)$ имеет непрерывные производные $f'(x)$, $f''(x)$ и кусочно непрерывную $f'''(x)$, а $F(x)$ удовлетворяет требованиям $F(0) = F(\ell) = 0$, $F'(x)$ непрерывна, $F''(x)$ кусочно непрерывна, то $u(x,t)$, представленная рядом (1.18), будет регулярным решением.

Если $f(x)$ и $F(x)$ обеспечивают лишь равномерную сходимость ряда (1.18), то $u(x,t)$ называют обобщенным решением. На практике его равномерно с требуемой точностью приближают регулярными решениями. Самый естественный способ ограничиться частичной суммой ряда (1.18) при достаточно большом числе слагаемых.

2.2 Уравнения продольных колебаний стержня.

Изучим малые продольные колебания стержня.

Стержень — упругое цилиндрическое тело с постоянной площадью поперечного сечения σ. Направим ось абсцисс вдоль стержня. В качестве неизвестной функции берется величина смещения сечения стержня с абсциссой x в положении равновесия в момент времени t. Пусть $x(t)$ координата этого сечения в момент $t > 0$, тогда $u(x,t) = x(t) - x$. Визуально, естественно, $u(x,t)$ увидеть нелегко. При выводе уравнения используют закон Гука: сила натяжения (T) при изменении длины образца (Δx) пропорциональна его относительному удлинению $(\frac{\Delta u}{\Delta x})$ и площади поперечного сечения σ. Коэффициент пропорциональности (называется модулем Юнга, обозначается E) определяется для упругих тел экспериментально. Итак, $T = E\sigma\frac{\Delta u}{\Delta x}$. Учитывая малость Δu, можно считать, что $\frac{\Delta u}{\Delta x} \approx \frac{\partial u}{\partial x}$. Теперь

$$T = E\sigma\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{2.1}$$

Само уравнение имеет такой же вид как и для колебаний струны (1.1), а именно

$$\sigma\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t)\sigma. \tag{2.2}$$

Здесь ρ — объемная плотность стержня, $p(x,t)$ — внешняя сила, рассчитанная на единицу объема. Считая стержень однородным (в этом случае ρ — постоянное число) после деления (2.2) на $\rho\sigma$, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t) \qquad (2.3),$$

где $a^2 = \frac{E}{\rho}$, $g(x,t) = \frac{p(x,t)}{\rho}$. Если внешние силы отсутствуют, $p(x,t) \equiv 0$, то получается уравнение собственных колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.4}$$

Для всех уравнений ставится задача Коши: найти решение удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = f(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x), \tag{2.5}$$

$f(x)$ и $F(x)$, как и выше, достаточно гладкая функция, $f(x)$ — начальное растяжение стержня вдоль оси, $F(x)$ — начальная скорость сечения с абсциссой x.

Для конечного стержня, занимающего отрезок $[0,\ell]$ оси $0x$, ставятся краевые задачи. Перечислим основные.

1). Один из концов или оба жестко закреплены, то есть смещение в граничных точках равно нулю для любого $t>0$:

$$u(0,t)=0, \tag{2.6}$$

$$u(\ell,t)=0. \tag{2.7}$$

2). Мягкое закрепление. Это означает, что концы (чаще всего один из них) совершают свободные колебания, натяжение на концах равно нулю. Имеем при $x=0$: $T\mid_{x=0}=E\sigma\frac{\partial u}{\partial x}\mid_{x=0}=0$, а так как $E\sigma\neq 0$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x}\mid_{x=0}=0. \tag{2.8}$$

Аналогично в сечении $x=\ell$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\mid_{x=\ell}=0. \tag{2.9}$$

3). Упругое закрепление. В этом случае на концах действует внешнее сопротивление, пропорциональное отклонению u. Например, при $x=0$ имеем $(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial x})\mid_{x=0}=0$. Учитывая направление сил натяжения при $x=0$ краевое условие записывается так:

$$(u-h_1\frac{\partial u}{\partial x})\mid_{x=0}=0, \quad h_1>0. \tag{2.10}$$

При $x = \ell$

$$(u + h_2 \frac{\partial u}{\partial x}) \mid_{x=\ell} = 0, \quad h_2 > 0. \tag{2.11}$$

Краевые условия могут быть неоднородными, типа

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u(\ell,t) = \psi(t)$$

и так далее.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Пример 2. Один конец стержня закреплен, а на другой действует постоянная сила Q. Найти продольные колебания стержня, если в начальный момент, $t = 0$, сила перестает действовать.

Будем считать, что конец $x = 0$ закреплен и имеет место требование (2.6), а конец $x = l$ имеет мягкое закрепление (2.9).

По условию задачи нетрудно сообразить, что начальные скорости сечений стержня равны нулю, что означает

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \tag{2.12}$$

Начальные отклонения найдем из условия, что стержень был предварительно растянут силой Q и вся система находилась в равновесии до $t = 0$. Точнее силы натяжения T при $x = l$ равнялись Q. По закону Гука $T = E\sigma\frac{\partial u}{\partial x}$ (см. [1] стр.76.) Таким образом, при $t = 0$ выполняется равенство $T = E\sigma\frac{\partial u}{\partial x} = Q$. Отсюда $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{Q}{E\sigma}$. Интегрируя последнее соотношение, получаем $u(x,0) = \frac{Q}{E\sigma}x + C$. Постоянную C найдем, используя условие (2.6), которое выполняется при любом $t \geq 0$. При $t = 0$ $u(0,0) = C = 0$. Итак, начальные отклонения равны

$$u|_{t=0} = \frac{Q}{E\sigma}x. \tag{2.13}$$

Все необходимые условия постановки задачи определены и мы приступаем к ее решению. Ищем частные решения уравнения (2.4), удовлетворяющие только краевым условиям (2.6) и (2.9), в виде произведения $u(x,t) = X(x)T(t)$. Подставляя функцию u в (2.4) и разделяя переменные x и t, получаем, как и выше, равенство (1.12), из которого следует, что каждая дробь равна некоторой постоянной, скажем μ,

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \mu. \tag{2.14}$$

Как и раньше, краевые условия можно удовлетворить только с помощью функции $X(x)$. Они записываются в виде

$$X(0) = 0, \tag{2.15}$$

$$X'(\ell) = 0. \tag{2.16}$$

Несложный анализ показывает, что это можно достичь лишь при отрицательном значении μ, для простоты $\mu = -\lambda^2$. Вновь получили задачу Штурма - Лиувилля в такой постановке: найти значения λ, при которых уравнение

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \tag{2.17}$$

имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие условиям (2.15) и (2.16), и сами эти решения. Общее решение (2.17) записывается в виде

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Если $x = 0$, то следует равенство $C_1 = 0$. Находим производную

$$X'(x) = C_2 \lambda \cos \lambda x$$

и, полагая в последнем равенстве $x = \ell$, получаем $X'(\ell) = C_2 \lambda \cos \lambda \ell = 0$. Постоянную C_2, которая не будет равняться нулю, для простоты полагаем равной единице, λ тоже не равна нулю. Значит, выполняется равенство $\cos\lambda\ell = 0$ и $\lambda\ell = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in Z$. Отсюда находим $\lambda_k = \frac{\pi}{2\ell}(2k+1)$ и $X_k(x) = \sin\frac{\pi}{2\ell}(2k+1)x$. Заметим, что отрицательные значения k не дают существенно новых решений и поэтому полагаем $k = 0; 1;$ и так далее.

Перейдем к определению сомножителей $T(t)$, которые удовлетворяют уравнению $T''(t) + \left(\frac{\pi a}{2\ell}(2k+1)\right)^2 T(t) = 0$ Общее решение этого уравнения обозначим $T_k(t)$ и запишем в виде

$$T_k(t) = a_k \cos\frac{\pi}{2\ell}(2k+1)at + b_k \sin\frac{\pi}{2\ell}(2k+1)at$$

, здесь a_k и b_k — некоторые неизвестные коэффициенты. Искомые частные решения уравнения (2.4) $u_k = X_k(x)T_k(t)$. Формальное решение представляем в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{\pi}{2\ell}(2k+1)at + b_k \sin\frac{\pi}{2\ell}(2k+1)at\right)\sin\frac{\pi}{2\ell}(2k+1)x. \quad (2.18)$$

Предполагаем, что ряд (2.18) сходится равномерно в области $0 < x < \ell$, $t > 0$. Неизвестные коэффициенты найдем из расчета удовлетворить начальным условиям (2.12) и (2.13). Выполнение условия (2.12), равенство нулю начальных скоростей, означает, что все $b_k = 0$. Для определения a_k в равенстве (2.18) положим $t = 0$ и учтем требование (2.13). Получаем

$$u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin\frac{\pi}{2\ell}(2k+1)x = \frac{Q}{E\sigma}x. \quad (2.19)$$

Заметим, что система синусов $\{\sin\frac{\pi}{2\ell}(2k+1)x\}$ ортогональна на отрезке $[0,\ell]$ и $\int\limits_0^{\ell} \sin^2\frac{\pi}{2\ell}(2k+1)dx = \frac{\ell}{2}$ для любого целого $k \geq 0$. Это позволяет считать ряд (2.19) обобщенным рядом Фурье. Коэффициенты его записываются в виде

$a_k = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} \frac{Q}{E\sigma} x \sin\frac{\pi}{2\ell}(2k+1)x dx$. Интеграл берется по частям, полагая $u = x$, $dv = \sin\frac{\pi}{2\ell}(2k+1)xdx$. Далее $du = dx$, $v = -\frac{2\ell}{\pi(2k+1)}\cos\frac{\pi}{2\ell}(2k+1)x$. Теперь

$$a_k = -\frac{4Q}{E\sigma\pi(2k+1)}\left(x\cos\frac{\pi}{2\ell}(2k+1)x \,\Big|_0^{\ell} - \int\limits_0^{\ell}\cos\frac{\pi}{2\ell}(2k+1)xdx \right).$$

Внеынтегральный член равен нулю, на нижнем пределе за счет множителя x, на верхнем в силу равенства нулю косинуса. Вычисляя оставшийся интеграл, устанавливаем, что

$$a_k = \frac{8Q\ell}{E\sigma\pi^2(2k+1)^2}\sin\frac{\pi}{2\ell}(2k+1)x\Big|_0^{\ell}.$$

Подставляя пределы интегрирования и учитывая, что $\sin\frac{\pi}{2}(2k+1) = (-1)^k$ Окончательно получаем

$$a_k = (-1)^k\frac{8Q\ell}{E\sigma\pi^2(2k+1)^2}.$$

Найденные коэффициенты подставляем в соотношение (2.18) и по традиции постоянные множители (не зависящие от k) выносим за знак суммы. Искомое решение равно

$$u(x,t) = \frac{8Q\ell}{E\sigma\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{\pi}{2\ell}(2k+1)at\sin\frac{\pi}{2\ell}(2k+1)x.$$

2.3 Общая схема Фурье.

Учитывая многообразие дифференциальных уравнений и краевых условий полезно рассмотреть достаточно общую постановку задач, объединенными близкими методами решения. Пусть в области $0 < x < l$, $t > 0$ требуется найти решение уравнения

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u, \tag{3.1}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\alpha u(0,t) - \beta\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \tag{3.2}$$

$$\gamma u(\ell,t) + \delta\frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t) = 0, \tag{3.3}$$

при $t > 0$ и начальным условиям

$$u(x,0) = f(x), \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x), \tag{3.4}$$

где $f(x)$ и $F(x)$ достаточно гладкие на $[0,\ell]$ функции. Будем считать, что $\rho(x)$, $p(x)$, $p'(x)$ и $q(x)$ непрерывны на $[0,\ell]$, $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$; α, β, γ, δ — неотрицательные постоянные и $\alpha + \beta > 0$, $\gamma + \delta > 0$.

Поставленная начальная краевая задача может быть решена методом Фурье. Ищем сначала нетривиальные решения уравнения (3.1) в виде произведения $u(x,t) = X(x)T(t)$, удовлетворяющие краевым условиям (3.2) и (3.3). Подставляя $u(x,t)$ в (3.1), получаем

$$\rho(x)T''(t)X(x) = T(t)\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dX}{dx}) - q(x)T(t)X(x).$$

Разделим переменные

$$\frac{(p(x)X'(x))' - q(x)X(x)}{\rho(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda.$$

Здесь мы, как и выше, приравняем левую и правую части постоянной $-\lambda$, исходя из ранее приведенных рассуждений об условии тождественного равенства двух функций от разных, независимых аргументов. Теперь для $X(x)$ имеем уравнение

$$(p(x)X'(x))' + (\lambda\rho(x) - q(x))X(x) = 0 \tag{3.7}$$

с неизвестным параметром λ. Для (3.7) ставится краевая задача. Искомое решение $X(x)$ должно удовлетворять условиям:

$$\alpha X(0) - \beta X'(0) = 0, \tag{3.8}$$

$$\gamma X(\ell) + \delta X'(\ell) = 0. \tag{3.9}$$

Поставленная задача называется задачей Штурма-Лиувилля и строго формулируется следующим образом.

ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ. Найти такие значения λ, называемые собственными значениями, при которых существует нетривиальное решение уравнения (3.1), удовлетворяющее граничным условиям (3.2), (3.3), а также найти эти решения, называемые собственными функциями.

Имеют место следующие основные теоремы для задачи Штурма - Лиувилля.

1. Существует счетное множество собственных значений

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots,$$

которым соответствуют собственные функции с точностью до постоянного множителя

$$X_1(x),\ X_2(x), ...\ X_n(x), ...$$

2. Собственные значения неотрицательны, причем $\lambda = 0$ является собствен-

ным значением тогда и только тогда, когда $q(x) \equiv 0$ на $[0, \ell]$ и $\alpha = \gamma = 0$.

3. Собственные функции на отрезке $[0, \ell]$ образуют ортогональную систему с весом $\rho(x)$, то есть

$$\int\limits_0^\ell \rho(x) X_m(x) X_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \neq 0, & m = n \end{cases}$$

4. Теорема Стеклова. Всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая граничным условиям (3.8), (3.9) и имеющая две непрерывные производные, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям $X_n(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x), \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

$$a_n = \frac{\int\limits_0^\ell \rho(x) f(x) X_n(x) dx}{\int\limits_0^\ell \rho(x) X_n^2(x) dx}.$$

Для каждого собственного значения λ_n решаем уравнения относительно $T(t)$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda_n$$

или

$$T_n''(t) + \lambda_n T_n(t) = 0, \qquad n = 1; 2....$$

Общие решения этих уравнений имеют вид:

$T_n(t) = A_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}t,$

где A_n, B_n - произвольные постоянные.

Таким образом, мы получим счетное множество решений уравнения (3.1) вида

$$u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) = (A_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}t)X_n(x),$$

которые удовлетворяют граничным условиям (3.8) и (3.9).

Чтобы удовлетворить начальным условиям (3.4) и (3.5), составим ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \sin\sqrt{\lambda_n}t + B_n \cos\sqrt{\lambda_n}t)X_n(x) \tag{3.10}$$

Если этот ряд сходится равномерно, так же как и ряды, получающиеся из него двукратным дифференцированием по x и по t, то сумма его будет удовлетворять уравнению (3.1) и краевым условиям (3.2) и (3.3).

Тогда для выполнения начальных условий (3.4) и (3.5) надо, чтобы

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = f(x), \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} B_n X_n(x) = F(x). \tag{3.12}$$

Предположим, что функции $f(x)$ и $F(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Стеклова, теперь их действительно можно представить в виде рядов (3.11) , (3.12). Тогда можно определить коэффициенты A_nи B_n, умножив обе части равенства (3.11) и (3.12) на $\rho(x)X_n(x)$ и проинтегрировав по x в интервале от 0 до ℓ. В силу свойства 3, получим

$$A_n = \frac{\int\limits_0^\ell \rho(x)f(x)X_n(x)dx}{\int\limits_0^\ell \rho(x)X_n^2(x)dx}, \quad B_n = \frac{\int\limits_0^\ell \rho(x)F(x)X_n(x)dx}{\int\limits_0^\ell \rho(x)X_n^2(x)dx},$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в ряд (3.10), получим решение нашей задачи.

Изложенный метод очевидным образом переносится на уравнения параболического и эллиптического типов.

Приводим теперь задачи, разбитые по основным темам.

2.4.1 Задачи с однородными условиями. Предлагаем решить следующие примеры.

2.1 Однородная струна длиной ℓ, закрепленная на обоих концах, находится в положении, занимая отрезок $[0, \ell]$ оси $0x$, следовательно

$$u(0,t) = 0; \quad u(\ell,t) = 0$$

Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ для любого $t > 0$, если задаются следующие начальные условия:

1) $u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x);$

2) $u(x,0) = 5\sin\frac{3\pi x}{\ell} - \frac{1}{2}\sin\frac{8\pi x}{\ell}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0;$

3) $u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 6\sin\frac{\pi x}{\ell} - \sin\frac{3\pi x}{\ell} + 3\sin\frac{7\pi x}{\ell};$

4)$u(x,0) = \frac{1}{3}\sin\frac{2\pi x}{\ell} + 4\sin\frac{5\pi x}{\ell} - \frac{1}{4}\sin\frac{8\pi x}{\ell},$
$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = A\sin\frac{\pi s x}{\ell} + B\sin\frac{\pi p x}{\ell}$, A и B — постоянные; s, $p \in N$.

5) $u(x,0) = Ax, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0;$

6) $u(x,0)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le\alpha, \\ v_0, & \alpha<x<\beta, \\ 0, & \beta\le x\le l. \end{cases}$

7) $u(x,0)=\frac{4hx(\ell-x)}{l^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0;$

8)$u(x,0)=\begin{cases} \frac{h}{c}x, & 0\le x\le c, \\ \frac{h(x-l)}{(c-l)}, & c<x\le l, \end{cases}$
$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0;$

9) $u(x,0)=\frac{16h}{5}[(\frac{x}{\ell})^4-2(\frac{x}{\ell})^3+(\frac{x}{\ell})]$, h>0, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0;$

2.2. Левый конец стержня, $x=0$, закреплен, а правый $x=\ell$, свободен, это означает выполнение условий $u(0,t)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t)=0$
для t>0. Найти продольные колебания стержня при следующих начальных условиях:

1) $u(x,0)=f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=F(x);$

2) $u(x,0)=A\sin\frac{3\pi x}{2\ell}+B\sin\frac{11\pi x}{2\ell}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0;$

3) $u(x,0)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\frac{1}{2}\sin\frac{7\pi x}{2\ell}-\frac{1}{3}\sin\frac{9\pi x}{2\ell};$

4) $u(x,0)=\sin\frac{5\pi x}{2\ell}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\sin\frac{3\pi x}{2\ell};$

5) $u(x,0)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=v_0;$

6) $u(x,0)=\frac{hx}{\ell}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0;$

7) $u(x,0)=\frac{1}{4}\sin\frac{3\pi x}{2\ell}-\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2\ell}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=v_0;$

8) $u(x,0)=x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=v_0;$

9) $u(x,0)=Ax, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\sin\frac{\pi x}{2\ell}-2\sin\frac{3\pi x}{2\ell}.$

2.3 Проинтегрировать уравнение продольных колебаний стержня $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если левый конец, $x=0$, свободен, правый $x=\ell$ закреплен (то есть $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$, $u(l,t)=0$ при t>0) со следующими начальными условиями:

1) $u(x,0)=f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=F(x);$

2) $u(x,0)=A\cos\frac{5\pi x}{2\ell}+B\cos\frac{7\pi x}{2\ell}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0;$

3) $u(x,0)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=2\cos\frac{5\pi x}{2\ell}-\frac{2}{7}\sin\frac{7\pi x}{2\ell};$

4) $u(x,0)=\cos\frac{\pi x}{2\ell}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\cos\frac{3\pi x}{2\ell}-\frac{1}{2}\cos\frac{5\pi x}{2\ell};$

5) $u(x,0)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=v_0;$

6) $u(x,0)=\frac{h(l-x)}{\ell}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0;$

7) $u(x,0)=\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi x}{2\ell}-\frac{1}{4}\cos\frac{3\pi x}{2\ell}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=v_0;$

8) $u(x,0)=l-x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\cos\frac{\pi x}{2\ell}-3\cos\frac{3\pi x}{2\ell};$

9) $u(x,0)=A(\ell-x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=v_0.$

2.4. Изучить задачу о продольных колебаниях стержня, оба конца которого свободны. Подобная задача возникает при движении ракеты в безвоздушном пространстве. Искомая функция $u(x,t)$, как мы говорили в пункте 2.2, удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и краевым условиям $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0, \quad \frac{\partial u}{\delta x}(\ell,t)=0.$ Решить задачу с такими начальными данными:

1) $u(x,0)=f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=F(x);$

2) $u(x,0)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\cos^2\frac{3\pi x}{\ell};$

3) $u(x,0)=\sin^2\frac{5\pi x}{\ell}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0;$

4) $u(x,0)=1+\cos\frac{2\pi x}{\ell}-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{\ell}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=2\cos\frac{6\pi x}{\ell}-\frac{2}{3}\cos\frac{7\pi x}{\ell};$

5) $u(x,0)=\frac{hx}{\ell}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0;$

6) $u(x,0)=\sin^2\frac{\pi x}{\ell}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=x;$

7) $u(x,0)=x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=v_0;$

8) $u(x,0)=l-x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\cos^2\frac{8\pi x}{\ell};$

9) $u(x,0)=\cos\frac{3\pi x}{\ell}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=l-x.$

2.5 В следующей серии рассматриваются задачи о продольных колебаниях стержня, один из концов или оба закреплены упруго.

В полуполосе $0 < x < \ell, \quad t > 0$ для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ решить начально-краевые задачи со следующими условиями:

1) $u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) + hu(l,t) = 0, \quad h > 0,$
$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x);$

2) $u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) + hu(l,t) = 0, \quad h > 0,$
$u(x,0) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0;$

3) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) + hu(l,t) = 0, \quad h > 0,$
$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x);$

4) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) + hu(l,t) = 0, \quad h > 0,$
$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1;$

5) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) + hu(l,t) = 0, \quad h > 0,$
$u(x,0) = Ax, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0;$

6) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) - hu(0,t) = 0, \quad h > 0, \quad u(l,t) = 0,$
$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x);$

7) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) - hu(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0, \quad h > 0$
$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x);$

8) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) - hu(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) + hu(l,t) = 0, \quad h > 0$
$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x);$

9) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) - h_1 u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) + h_2 u(l,t) = 0, \quad h_1 > 0, \quad h_2 > 0,$
$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x).$

2.4.2 Задачи о колебании с особыми краевыми условиями.

Несмотря на обилие различных краевых задач, на практике (в реальной жизни) встречаются примеры особых граничных условий, даже таких, для которых неприменим метод Фурье. В этом случае краевое условие таково, что переменные в нем не разделяются, например, $\alpha u(0,t)+\beta\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) = 0, \quad \alpha\beta \neq 0$. Для уравнения общего вида (3.1) метод Фурье может дать осечку, если краевые условия отличные от условий (3.2) и (3.3). Для специального уравнения, скажем (1.5), метод Фурье может сработать, но теория Штурма-Лиувилля не будет выполнятся в полной мере. Рассмотрим задачу о колебании струны или стержня со сосредоточенной массой на конце.

Пример 3. (задача N 84, [5], 1968 года).

Однородный стержень имеет длину ℓ и площадь поперечного сечения σ. Конец его $x = 0$ закреплен неподвижно, а на конце $x = \ell$ сосредоточена масса m. Стержень предварительно растянут силой Q. Изучить продольные колебания стержня, которые возникают при внезапном прекращении действия растягивающей силы.

Решение. Выясним сначала начальные условия. Поскольку они аналогичные условиям примера 2, то можем сразу записать

$$u(x,0) = \frac{Qx}{E\sigma}, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0. \tag{4.2}$$

Уравнение будет однородным

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho}. \tag{4.3}$$

Ось $0x$ направим вдоль стержня сверху вниз. Верхний конец закреплен в точке $x = 0$, значит , первое краевое условие

$$u(0, t) = 0. \tag{4.4}$$

На втором конце, $x = \ell$, сосредоточенная в точке масса m и это сечение в процессе колебаний будет иметь силу ускорения, равную $-m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, которая противостоит силе натяжения $T = E\sigma\frac{\partial u}{\partial x}$, смотрите равенство (2.1). В силу принципа Даламбера сумма этих сил равна нулю. В итоге получаем второе краевое условие:

$$\left(m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + E\sigma\frac{\partial u}{\partial x} \right)\bigg|_{x=\ell} = 0 \tag{4.5}$$

Это условие отличается от требований (3.2) и (3.3) и на первый взгляд переменные x и t в нем не разделяются, но , благодаря специальному виду уравнения (4.3), переменные разделяются, что позволяет применить метод Фурье.

Ищем частные решения уравнения (4.3), удовлетворяющие условиям (4.4) и (4.5), в виде произведения $u(x, t) = X(x)T(t)$. Подставляя $u(x, t)$ в уравнение и разделяя переменные, получаем:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(X)}{X(x)} = \nu = -\lambda^2 \tag{4.6}$$

Мы посчитали в тождестве (4.6) общую постоянную дробей отрицательной, $\lambda \neq 0$, надеясь, что дотошный читатель сам проверит, что при $\nu \geq 0$ краевая задача не разрешима.

Запишем дифференциальные уравнения, порожденные равенством (4.6)

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \tag{4.7}$$

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0. \tag{4.8}$$

Определимся с краевыми условиями. При $x = 0$ имеем $X(0)T(t) = 0$, откуда

$$X(0) = 0. \tag{4.9}$$

При $x = \ell$ проблема посложней. Теперь

$$mX(\ell)T''(t) + E\sigma X'(\ell)T(t) = 0.$$

Воспользуемся соотношением (4.8), из которого $T''(t) = -a^2\lambda^2 T(t)$. Теперь предыдущее равенство запишется так $mX(\ell)(-a^2\lambda^2 T(t)) + E\sigma X'(\ell)T(t) = 0$ Сократим на $T(t) \neq 0$

$$E\sigma X'(\ell) - m\lambda^2 a^2 X(\ell) = 0. \tag{4.10}$$

Краевое условие (4.10) отличается от условий пункта 2.3 наличием λ^2 в равенстве и пользоваться результатами этого пункта следует с осторожностью. Итак, ищем нетривиальные решения (4.7), удовлетворяющие (4.9) и (4.10). Общее решение (4.7) находилось раньше

$$X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x.$$

При $x = 0$ имеем $X(0) = C_1 = 0$, C_2 для простоты полагаем равной единице, $C_2 = 1$. Подставим $X(x)$ и $X(x)' = \lambda\cos\lambda x$ в (4.10)

$$E\sigma\lambda\cos\lambda\ell - m\lambda^2 a^2 \sin\lambda\ell = 0.$$

Сокращаем на λ ($\lambda \neq 0$), делим на $\cos\lambda\ell$ и умножаем на ℓ

$$\lambda\ell \operatorname{tg}\lambda\ell = \frac{E\sigma}{a^2 m}\ell.$$

Пусть $\lambda\ell = \mu$, $\alpha = \frac{E\sigma\ell}{a^2 m} = \frac{E\sigma\ell}{m}\frac{\rho}{E} = \frac{\rho\ell\sigma}{m} > 0$. Для μ получаем уравнение

$$\mu \operatorname{tg}\mu = \alpha, \tag{4.11}$$

которое имеет бесконечное число простых, положительных корней (проще всего это установить графически) μ_1, μ_2 ..., μ_k... . Им соответствуют собственные функции $X_k(x) = \sin\frac{\mu_k x}{\ell}, \quad k \in N$. Самый больной вопрос — ортогональны ли $X_k(x)$ на отрезке $[0,\ell]$. Проверим это. Пусть $X_k(x)$ и $X_m(x)$, $k \neq m$, решения (4.7) отвечающие неравным друг другу μ_k и μ_m, $\mu_k \neq \mu_m$.

Вычислим

$$\int_0^\ell X_k(x)X_m(x)dx = \int_0^\ell \sin\frac{\mu_k x}{\ell}\sin\frac{\mu_k x}{\ell}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\ell \left(\cos\frac{\mu_k - \mu_m}{\ell}x - \cos\frac{\mu_k + \mu_m}{\ell}x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{\mu_k - \mu_m}\sin(\mu_k - \mu_m) - \frac{\ell}{\mu_k + \mu_m}\sin(\mu_k + \mu_m)\right) =$$

$$= \frac{\ell}{2}\left(\frac{\sin(\mu_k - \mu_m)}{\alpha(\operatorname{ctg}\mu_k - \operatorname{ctg}\mu_m)} - \frac{\sin(\mu_k + \mu_m)}{\alpha(\operatorname{ctg}\mu_k + \operatorname{ctg}\mu_m)}\right) =$$

$$= \frac{\ell}{2\alpha}\left(\frac{\sin(\mu_k - \mu_m)}{\sin(\mu_m - \mu_k)}\sin\mu_k\sin\mu_m - \frac{\sin(\mu_k + \mu_m)}{\sin(\mu_k + \mu_m)}\sin\mu_k\sin\mu_m\right) =$$

$$= -\frac{\ell}{\alpha}\sin\mu_k\sin\mu_m = -\frac{\ell}{\alpha}X_k(\ell)X_m(\ell).$$

В итоге получили

$$\int_0^\ell X_k(x)X_m(x)dx = -\frac{\ell}{\alpha}X_k(\ell)X_m(\ell) \tag{4.12}$$

причем ни при каком n, $n \in N, X_n(\ell) = \sin \mu_n \neq 0$, ибо в противном случае и $\operatorname{tg} \mu_n = 0$, но это невозможно в силу равенства (4.11).

Таким образом, множество $\{X_k(x)\}$ не является ортогональной системой на отрезке $[0, \ell]$. Попытка ортогонизировать систему бесперспективна, но попробуем подобрать вес $\rho(x) > 0$, с которым система была бы ортогональна. Удобно положить $\rho(x) = 1 + \varphi(x)$. Имеем

$$\int\limits_0^\ell (1 + \varphi(x))\, X_k(x) X_m(x) dx = \int\limits_0^\ell X_k(x) X_m(x) dx +$$

$$+ \int\limits_0^\ell \varphi(x) X_k(x) X_m(x) dx = \int\limits_0^\ell \varphi(x) X_k(x) X_m(x) dx - \frac{\ell}{\alpha} X_k(\ell) X_m(\ell),$$

мы воспользовались равенством (4.12). Для ортогональности следует потребовать от $\varphi(x)$ необычайного условия, а именно, чтобы

$$\int\limits_0^\ell \varphi(x) X(x) dx = \frac{\ell}{\alpha} X(\ell) \tag{4.13}$$

для любой достаточно гладкой $X(x)$. Подобные функции известны современной математике и физике и называются обобщенными функциями. Введенную функцию $\varphi(x)$ с точностью до постоянного множителя можно отождествить с δ-функцией Дирака, которую определяют, как функционал на множестве непрерывных и интегрируемых на $(-\infty, \infty)$ функции $f(x)$ по формуле

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0).$$

Так, что $\varphi(x) = \frac{\alpha}{\ell} \delta(x - \ell)$, но носит вспомогательный характер и мы не привлекаем "высокие материи", а обеспечиваем равенство

$$\int\limits_0^\ell (1+\varphi(x))\, X_k(x) X_m(x) dx = 0,$$

для всех натуральных k, m, $k \neq m$. В дальнейшем нам понадобится интеграл

$$H_k^2 = \int\limits_0^\ell (1+\varphi(x))\, X_k^2(x) dx,$$

который мы заблаговременно вычислим. Сначала

$$\int\limits_0^\ell X_k^2(x)dx = \int\limits_0^\ell \sin^2 \frac{\mu_k x}{\ell} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^\ell \left(1 - \cos\frac{2\mu_k x}{\ell}\right) dx =$$

$$= \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{4\mu_k}\sin 2\mu_k = \frac{1}{2}\left(\ell - \frac{\ell}{2\mu_k}\frac{2\operatorname{tg}\mu_k}{1+\operatorname{tg}^2\mu_k}\right) =$$

$$= \frac{\ell}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{\mu_k^2\left(1+\frac{\alpha^2}{\mu_k^2}\right)}\right) = \frac{\ell}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{\mu_k^2+\alpha^2}\right)$$

Далее

$$H_k^2 = \int\limits_0^\ell (1+\varphi(x)) \sin^2\frac{\mu_k x}{\ell} dx = \frac{\ell}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{\mu_k^2+\alpha^2}\right) + \frac{\ell}{\alpha}\sin^2\mu_k =$$

$$= \frac{\ell}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{\mu_k^2+\alpha^2}\right) + \frac{\ell}{\alpha}\frac{\operatorname{tg}^2\mu_k}{1+\operatorname{tg}^2\mu_k} = \frac{\ell}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{\mu_k^2+\alpha^2}\right) + \frac{\alpha\ell}{\mu_k^2+\alpha^2} =$$

$$= \frac{\ell}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{\mu_k^2+\alpha^2}\right) = \frac{\ell\left(\alpha+\alpha^2+\mu_k^2\right)}{2\mu_k^2+\alpha^2}.$$

Перейдем к функции $T(t)$ в равенстве (4.6). Уравнение

$$\frac{T''}{a^2 T(t)} = -\left(\frac{\mu_k}{\ell}\right)^2$$

имеет решение

$$T_k(t) = a_k \cos\frac{\mu_k a t}{\ell} + b_k \sin\frac{\mu_k a t}{\ell}.$$

Формальное решение запишем в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{\mu_k a t}{\ell} + b_k \sin\frac{\mu_k a t}{\ell}\right)\sin\frac{\mu_k x}{\ell}$$

Неизвестные коэффициенты определим из расчета удовлетворить начальным условиям. Примем на веру, что $\{X_k(x)\}$полная система функций на $[0,\ell]$, то есть не существует функции $q(x) \not\equiv 0$, ортогональной с весом $\rho(x)$ всем $X_k(x)$, $k \in N$. Теперь нетрудно показать, что условие (4.2) выполняется лишь при $b_k = 0$. Для a_k в силу (4.1) получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{\mu_k x}{\ell} = \frac{Qx}{E\sigma}. \tag{4.14}$$

Считая, что ряд (4.14) сходится равномерно на $[0,\ell]$, умножим его на

$$(1+\varphi(x))\sin\frac{\mu_n^x}{\ell}$$

и в силу ортогональности с весом функций $\sin\frac{\mu_k x}{\ell}$, $k \in N$ находим

$$a_k = \frac{1}{H_k^2}\int_0^{\ell}(1+\varphi(x))\frac{Qx}{E\sigma}\sin\frac{\mu_k x}{\ell}dx =$$

$$= \frac{Q}{E\sigma}\frac{2\left(\mu_k^2+\alpha^2\right)}{\ell\left(\alpha+\alpha^2+\mu_k^2\right)}\left(\left(\ell+\frac{\ell^2}{\mu_k^2}\right)\sin\mu_k - \frac{\ell^2}{\mu_k}\cos\mu_k\right) =$$

$$= \frac{Q}{E\sigma}\frac{2\sqrt{\mu_k^2+\alpha^2}\left(\mu_k^2+\ell\left(\alpha-\mu_k^2\right)\right)}{\mu_k^2\left(\alpha+\alpha^2+\mu_k^2\right)}$$

В качестве обобщенного решения получаем ряд

$$u(x,t) = \frac{2Q}{E\sigma}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\mu_k^2+\alpha^2}\left((1-\ell)\,\mu_k^2+\alpha\ell\right)}{\mu_k^2\left(\alpha+\alpha^2+\mu_k^2\right)}\cos\frac{\mu_k a t}{\ell}\sin\frac{\mu_k x}{\ell}$$

2.6. В полуполосе $0 < x < l, \quad t > 0$ для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ решить смешанные задачи со следующими условиями:

1) $u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l,t) = -h\frac{\partial u}{\partial x}(l,t),$
$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x);$

2) $u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l,t) = -h\frac{\partial u}{\partial x}(l,t),$
$u(x,0) = Ax, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0;$

3) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l,t) = -h\frac{\partial u}{\partial x}(l,t),$
$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x);$

4) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,t) = h\frac{\partial u}{\partial x}(0,t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l,t) = -h\frac{\partial u}{\partial x}(l,t),$
$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x).$

2.4.3. Задачи о колебании в среде с сопротивлением.

В этом разделе рассматриваются задачи о колебании струны в среде с сопротивлением, которое либо пропорционально первой степени скорости, $\frac{\partial u}{\partial t}$, и описываются однородным уравнением (1.4) при $g(x,t) = 0$. Это задачи 2.7, 2.8, 2.9. Либо сопротивление пропорционально отклонению $u(x,t)$, задачи 2.10 — 2.14. Приведем несложный пример.

Пример 4. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\nu\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < \nu < \frac{\pi a}{\ell}, \tag{4.16}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0; \tag{4.17}$$

$$u(x,0) = A\sin\frac{2\pi x}{\ell} + B\sin\frac{4\pi x}{\ell}; \qquad (4.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad A,\ B \text{ — постоянные.} \qquad (4.19)$$

Решение. Применим метод Фурье. Поскольку уравнение (4.16) встречается впервые приходиться всю процедуру проделать с самого начала. Ищем частное решение (4.16), удовлетворяющее (4.17), в виде произведения

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Подставляя $u(x,t)$ в (4.16) и разделяя переменные, получаем

$$\frac{T^{('')}(t) + 2\nu T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

Для $X(x)$ получаем известную по примеру 1 краевую задачу:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X(0) = X(\ell) = 0.$$

Отсюда $\lambda_k = \frac{\pi k}{\ell}$ и $X_k(x) = \sin\frac{\pi k x}{\ell}$, $k \in N$. Для $T(t)$ запишется также линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$T^{('')}(t) + 2\upsilon\nu T'(t) + \left(\frac{\pi k a}{\ell}\right)^2 T(t) = 0. \qquad (4.20)$$

Соответствующее ему характеристическое уравнение имеет вид

$$p^2 + 2\nu p + (\frac{\pi k a}{\ell})^2 = 0.$$

Дискриминант этого квадратного уравнения, $\Delta = \nu^2 - (\frac{\pi k a}{\ell})^2$ по условию задачи отрицателен. Для простоты полагаем $v^2 - \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 = -\omega_k^2$. Общее решение уравнения (4.20) равно

$$T_k(t) = a_k e^{-\nu t}\cos\omega_k t + b_k e^{-\nu t}\sin\omega_k t, k \in N.$$

Формальное решение строится по формуле

$$u(x,t) = e^{-\nu t} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) \sin \frac{\pi k x}{\ell} \qquad (4.21).$$

Производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ вычислим заранее и она равна

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\nu u(x,t) + e^{-\nu t} \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k \sin \omega_k t + b_k \cos \omega_k t) \omega_k \sin \frac{\pi k x}{\ell}.$$

В равенстве (4.21) полагаем $t = 0$. Получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{\pi k x}{\ell} = A \sin \frac{2\pi k x}{\ell} + B \sin \frac{4\pi k x}{\ell}.$$

Отсюда $a_2 = A, \quad a_4 = B$, все остальные $a_k = 0$. Вычисляем

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -\nu \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{\pi k x}{\ell} + \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k b_k \sin \frac{\pi k x}{\ell}.$$

В силу (4.19) $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, откуда

$$-\nu a_k + \omega_k k = 0, \qquad b_2 = \frac{\nu a_2}{\omega_2} = \frac{A\nu}{\omega_2}, \qquad b_4 = \frac{B\nu}{\omega_4}.$$

Все остальные $b_k = 0$. Ответ записывается равенством

$$u(x,t) = e^{-\nu t} \left[\frac{A}{\omega_2} (\omega_2 \cos \omega_2 t + \nu \sin \omega_2 t) \sin \frac{2\pi x}{\ell} + \right.$$
$$\left. + \frac{B}{\omega_4} (\omega_4 \cos \omega_4 t + \nu \sin \omega_4 t) \sin \frac{4\pi x}{\ell} \right].$$

Замечание. В ранее рассмотренных примерах коэффициенты при косинусах с t (a_k)зависят только от начальных отклонений ($f(x)$, а при синусах с t (b_k) от начальных скоростей (функции $F(x)$) и равенство нулю одной из этих функций означало обращение в нуль всей серии коэффициентов. Для приведенной задачи роль коэффициентов при косинусах сохранилась, но уже b_k

зависят и от начального отклонения и от начальной скорости и не все равны нулю, если $F(x) \equiv 0$. Будьте внимательней.

2.7. В полуполосе $0 < x < \ell, \quad t > 0$ для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\nu \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \nu > 0$$

(колебания в среде с сопротивлением)

решить начально-краевые задачи со следующими условиями:

1) $\nu < \frac{\pi a}{\ell}, \quad u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0,$

$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x);$

2) $u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{h}{c}x, & 0 \leq x \leq c, \\ \frac{h(\ell - x)}{(\ell - c)}, & c < x \leq \ell, \end{cases}$$

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0;$

3) $u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t) = 0,$

$u(x,0) = kx, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0;$

4) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t) = 0,$

$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x);$

5) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t) + hu(\ell,t) = 0, \quad$ h>0

$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x).$

Для $0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0$ решить смешанные задачи:

2.8. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$

$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad u(\frac{\pi}{2},t) = 0,$

$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x).$

2.9. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$

$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad u(\frac{\pi}{2},t) = 0,$

$u(x,0) = \cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$

2.10. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$

$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\frac{\pi}{2},t) = 0,$

$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x).$

2.11. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 5u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$

$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\frac{\pi}{2},t) = 0,$

$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x).$

2.12. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 10u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$

$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\frac{\pi}{2},t) = 0,$

$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$

2.13. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 10u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$

$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\frac{\pi}{2},t) = 0,$

$u(x,0) = \frac{1}{9}\sin x + \sin 3x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x).$

2.14. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 17u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$

$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\frac{\pi}{2},t) = 0,$

$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x).$

2.4.4. Несколько текстовых задач.

2.15. Однородная струна длиной l, закрепленная на обоих концах, находится в прямолинейном положении равновесия. В некоторый момент времени, принимаемый за начальный, она получает в точке $x = c$ удар от молоточка, который сообщает этой точке постоянную скорость v_0. Найти отклонение $u(x, t)$ для любого момента времени.
Рассмотреть два случая.

а) Струна возбуждается начальной скоростью

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} v_0, & |x - c| < \frac{\pi}{2h}, \\ 0, & |x - c| > \frac{\pi}{2h}, \end{cases}$$

Этот случай соответствует плоскому жесткому молоточку, имеющему ширину $\frac{\pi}{h}$ и ударяющему в точке $x = c$.
б) Струна возбуждается начальной скоростью

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} v_0 \cos h(x - c), & |x - c| < \frac{\pi}{2h}, \\ 0, & |x - c| > \frac{\pi}{2h}, \end{cases}$$

Этот случай соответствует жесткому выпуклому молоточку шириной $\frac{\pi}{h}$. Такой молоточек в центре интервала возбуждает наибольшую скорость.

2.16. Решить задачу о малых поперечных колебаниях струны длиной $2l$ с закрепленными концами $x = -l, x = l$, которая оттягивается в двух точках $x = -c$ и $x = c$ на небольшое расстояние h от положения равновесия и в момент $t = 0$ отпускается без начальной скорости.

2.17. Однородный стержень длиной $2l$ сжат силами, приложенными к его концам, так, что он укоротился до длины $2l(1-\epsilon)$.При $t = 0$ нагрузка снимается. Показать, что смещение $u(x,t)$ сечения с абсциссой x стержня определяется формулой

$$u(x,t) = \frac{8\epsilon l}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^(n+1)}{(2n+1)^2} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} \cos\frac{(2n+1)\pi a t}{2\ell},$$

если точка $x = 0$ находится посередине стержня и a-скорость продольных волн в стержне.

2.18. Изучить свободные продольные колебания однородного цилиндрического стержня длиной l, у которого оба конца свободны и $u(x,0) = a$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = b, \quad a, \quad b$ - постоянные.

2.19. Однородный стержень длиной l находится в прямолинейном положении равновесия. Один конец стержня закреплен упруго, а другой свободен. Найти продольные колебания стержня, если в начальный момент времени его точкам сообщается скорость $f(x)$.

2.20. Концы однородной струны длиной l удерживаются с помощью упругих сил. Изучить свободные поперечные колебания струны, если известно в начальный момент времени смещение, а начальные скорости отсутствуют.

5.1 Неоднородные задачи.

В этом пункте мы рассматриваем так называемые неоднородные задачи, то есть в задачах либо присутствуют внешние силы, либо неоднородные краевые условия (подвижные концы), либо то и другое вместе.

ОТВЕТЫ К ПРИВЕДЕННЫМ ЗАДАЧАМ.

Типы уравнений

1.1. Эллиптический. 1.2. Гиперболический. 1.3. Параболический.

1.4. Эллиптический. 1.5. Гиперболический. 1.6. Гиперболический.

1.7. Параболический.1.8. Эллиптический. 1.9. Гиперболический.

1.10. Эллиптический. 1.11. Эллиптический. 1.12. Гиперболический.

1.13. $\xi = 2y + x, \quad \eta = x,$ эллиптический, , $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.14. $\xi = 3x - 2y, \quad \eta = 2x + y,$ гиперболический, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.15. $\xi = 5x + y, \quad \eta = x,$ параболический, $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.16. $\xi = e^x, \quad \eta = y,$ эллиптический, , $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.17. $\xi = x^2 - 2e^y, \quad \eta = x,$ параболический, $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.18. $\xi = y - x^2, \quad \eta = x^2 + y^2,$ гиперболический, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.19. $\xi = cosx + y^3, \quad \eta = x,$ параболический, $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.20. $\xi = xy, \quad \eta = 2x,$ эллиптический, , $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.21. $\xi = 2e^x - y^2, \quad \eta = x + y,$ гиперболический, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \eta}).$

1.22. $\xi = e^y cosx, \quad \eta = \frac{e^y}{x},$ гиперболический, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.23. $\xi = cosx - siny, \quad \eta = x,$ параболический, $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.24. $\xi = 2x - y, \quad \eta = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$ гиперболический, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.25. $\xi = tgy - x, \quad \eta = x;$ параболический, $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.26. $\xi = cosy, \quad \eta = sinx;$ эллиптический, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.27. $\xi = lny - \frac{1}{x}, \quad \eta = x,$ параболический, $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.28. $\xi = y + ctgx, \quad \eta = x,$ параболический, $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.29. $\xi = 2y + e^{-2x}, \quad \eta = e^{-2x},$ эллиптический, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.30. $\xi = ctgy, \quad \eta = tgx,$ эллиптический, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.31. $\xi = ysinx, \quad \eta = x,$ параболический, $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.32. $\xi = x - e^y, \quad \eta = 2x - e^y,$ гиперболический, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.33. $\xi = y + \frac{2}{x}, \quad \eta = \frac{1}{x},$ эллиптический, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.34. $\xi = 2x - siny, \quad \eta = y,$ параболический, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.35. $\xi = y - lnsinx, \quad \eta = x,$ параболический, $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.36. $\xi = lncosy, \quad \eta = lnsinx,$ эллиптический, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.37. $\xi = e^{arctg\frac{y}{x}}\sqrt{x^2+y^2}, \quad \eta = x - y,$ гиперболический,
$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.38. $\xi = xy, \quad \eta = 3y$ или $\xi = lny + \frac{1}{2}ln(x^2+9), \quad \eta = arctg\frac{x}{3},$ эллиптический,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$$

1.39. $\xi = \frac{y}{x^2} - lnx, \quad \eta = x - y,$ гиперболический, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

1.40. $\xi = xy + lnx, \quad \eta = x + y,$ гиперболический, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

Канонический вид:

1.41. $\xi = x - t, \quad \eta = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$

1.42. $\xi = x + y, \quad \eta = y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$

1.43. $\xi = x + 2y, \quad \eta = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$

1.44. $\xi = 4x + y, \quad \eta = 2x + y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$

1.45. $\xi = x + y, \quad \eta = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$

1.46. $\xi = x - y, \quad \eta = x + 3y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0.$

1.47. $\xi = 2y - x, \quad \eta = y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{\partial u}{\partial\eta} = 0.$

1.48. $\xi = x + 3y, \quad \eta = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0.$

1.49. $\xi = x + 2y, \quad \eta = 3x + 2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0.$

1.50. $\xi = y - 3x, \quad \eta = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{\partial u}{\partial\eta} = 0.$

1.51. $\xi = x + 2y, \quad \eta = 3x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{1}{6}(\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\eta}) = 0.$

1.52. $\xi = 2x - y, \quad \eta = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{\partial u}{\partial\eta} = 0.$

1.53. $\xi = x - 5y, \quad \eta = x - y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0.$

1.54. $\xi = x + y, \quad \eta = x - y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + 2\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0.$

1.55. $\xi = 2x + 3y, \quad \eta = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0.$

1.56. $\xi = x + 2y, \quad \eta = 2x + y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + 2\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0.$

1.57. $\xi = x + 3y, \quad \eta = 2x - y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial u}{\partial\xi} = 0.$

1.58. $\xi = x + y, \quad \eta = y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (\alpha + \beta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = 0.$

1.59. $\xi = x + y, \quad \eta = 3x - y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$

1.60. $\xi = x + 3y, \quad \eta = x + y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$

1.61. $\xi = xy, \quad \eta = \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$

1.62. $\xi = ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \eta = ln(y + \sqrt{y^2 + 1}), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$

1.63. $\xi = y + x^2, \quad \eta = y - x^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$

1.64. $\xi = x^3 y, \quad \eta = y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{4}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$

1.65. $\xi = x + y^2, \quad \eta = x - y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$

1.66. $\xi = x, \quad \eta = x + e^y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$

1.67. $\xi = x + y^2, \quad \eta = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$

1.68. $\xi = x^2 - y^2, \quad \eta = x^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\xi - \eta}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$

1.69. $\xi = x + siny, \quad \eta = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$

1.70. $\xi = x + y + cosx, \quad \eta = x - y - cosx, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{4}cos\frac{\xi+\eta}{2}(\frac{\partial u}{\partial\eta} - \frac{\partial u}{\partial\xi}) = 0.$

1.71. $\xi = x + cosy, \quad \eta = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0.$

1.72. $\xi = xy^3, \quad \eta = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} - \frac{\xi}{\eta^2}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0.$

1.73. $\xi = xtg\frac{y}{2}, \quad \eta = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = \frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\frac{\partial u}{\partial\xi};$

1.74. $\xi = tgy, \quad \eta = lnx, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{2\xi^2}{1+\xi^2}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0.$

1.75. $\xi = x + cosy, \quad \eta = y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = 0.$

1.76. $\xi = e^y - 2x, \quad \eta = e^y - x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0.$

1.77. $\xi = y^2, \quad \eta = 4x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0.$

1.78. $\xi = y^2 + 2e^x, \quad \eta = y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0.$

1.79. $\xi = y + x^2, \quad \eta = x^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{1}{4\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0.$

1.80. $\xi = 4x^3 - 3y^2, \quad \eta = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{6\eta^2}{4\eta^3-\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0.$

1.81. $\xi = 2x + siny, \quad \eta = y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = 0.$

1.82. $\xi = x + 2e^{-y}, \quad \eta = 2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$

1.83. $\xi = x + y + sinx, \quad \eta = x - y - sinx, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{4} sin\frac{\xi+\eta}{2}(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}) = 0.$

1.84. $\xi = ytg\frac{x}{2}, \quad \eta = y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$

1.85. $\xi = ychx, \quad \eta = shx, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{1+\eta^2}(\xi\frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial u}{\partial \xi}) = 0.$

1.86. $\xi = ysinx, \quad \eta = y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{2\xi}{\eta^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$

1.87. $\xi = x, \quad \eta = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad y > 0,$

$\xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{(\eta-\xi)}(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0, \quad y < 0.$

1.88. $\xi = x, \quad \eta = 2\sqrt{y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta^2} + \frac{2\alpha-1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad y > 0,$

$\xi = x - 2\sqrt{-y}, \quad \eta = x + 2\sqrt{-y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{\eta-\xi}(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0, \quad y < 0.$

1.89. $\xi = x^{\frac{3}{2}}, \quad \eta = y^{\frac{3}{2}} \quad (x > 0, \quad y < 0),$

$\xi = (-x)^{\frac{3}{2}}, \quad \eta = (-y)^{\frac{3}{2}}, \quad (x < 0, \quad y < 0),$

$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0;$

$\xi = (-x)^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}, \quad \eta = (-x)^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{3}{2}} \quad (x < 0, \quad y > 0),$

$\xi = x^{\frac{3}{2}} - (-y)^{\frac{3}{2}}, \quad \eta = x^{\frac{3}{2}} + (-y)^{\frac{3}{2}}, \quad (x > 0, \quad y < 0),$

$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{3}\frac{1}{\eta^2-\xi^2}(\eta\frac{\partial u}{\partial \xi} - \xi\frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0.$

1.90. $\xi = \sqrt{x}, \quad \eta = \sqrt{y} \quad (x > 0, \quad y > 0),$

$\xi = \sqrt{-x}, \quad \eta = \sqrt{-y}, \quad (x > 0, \quad y > 0),$

$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0;$

$\xi = \sqrt{-x}, \quad \eta = \sqrt{y} \quad (x < 0, \quad y > 0),$

$\xi = \sqrt{x}, \quad \eta = \sqrt{-y}, \quad (x < 0, \quad y > 0),$

$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$

1.91.

а) $u = \varphi(x - t) + \psi(x);$

б) $u = \varphi(x + y) + \psi(2x + y);$

в) $u = \varphi(x + 2y) + \psi(x + 2y)e^{\frac{x}{2}};$

г) $u = \varphi(4x + y)e^{x + \frac{y}{2}} + \psi(2x + y);$

д) $u = \varphi(x - y) + \psi(x + 3y)e^{\frac{y-x}{4}};$

е) $u = \varphi(x + 3y) + \psi(x + 3y)e^{-\frac{x}{3}};$

ж) $u = \varphi(x + 2y) + \psi(3x + 2y)e^{\frac{x+2y}{4}};$

з) $u = \varphi(y - 3x) + \psi(y - 3x)e^{-x};$

и) $u = \varphi(2x - y) + \psi(2x - y)e^{-x};$

к) $u = \varphi(x - 5y)e^{-\frac{x-y}{4}} + \psi(x - y);$

л) $u = \varphi(2x + 3y) + \psi(2x + 3y)e^{-\frac{x}{3}};$

м) $u = \varphi(2x - y) + \psi(x + 3y)e^{y - 2x};$

н) $u = \varphi(3x - y) + \psi(x + y)e^{-\frac{3x-y}{2}};$

о) $u = \varphi(x + 3y) + \psi(x + y)e^{-\frac{x+3y}{2}};$

п) $u = \varphi(x) + \psi(x - e^y)e^{-x};$

р) $u = \varphi(x + cosy)\frac{1}{x} + \psi(x).$

1.92. $\xi = x + y, \quad \eta = 5x - y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad u = \varphi(x + y) + \psi(5x - y)e^{-\frac{x+y}{6}}.$

1.93. $\xi = y, \quad \eta = y - cosx, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial u}{\partial\eta} = 0, \quad u = \varphi(y) + \psi(y - cosx)e^y.$

1.94. $\xi = xy^4, \quad \eta = y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{3}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad u = \varphi(xy^4)y^3 + \psi(y).$

1.95. $\xi = x^2 + y, \quad \eta = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} - \frac{\partial u}{\partial\eta} = 0, \quad u = \varphi(x^2 + y) + \psi(x^2 + y)e^x.$

1.96. $\xi = xy, \quad \eta = y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad u = y\varphi(xy) + \psi(y).$

1.97.$\xi = xy^2, \quad \eta = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad u = \varphi(xy^2)x + \psi(x).$

1.98.$\xi = x^2 + y, \quad \eta = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0, \quad u = \varphi(x^2 + y)x^2 + \psi(x^2 + y).$

1.99. $\xi = x^3y, \quad \eta = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{2}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad u = \varphi(x^3y)x^2 + \psi(x).$

1.100. $\xi = xy, \quad \eta = y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{3}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad u = \varphi(xy)y^3 + \psi(y).$

1.101. $\xi = y + sinx, \quad \eta = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} - 2\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0, \quad u = \varphi(\xi) + \psi(\xi)e^{2\eta}.$

1.102. $\xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad u = \varphi(\frac{y}{x})y + \psi(y).$

1.103. $\xi = xy^4, \quad \eta = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad u = \frac{1}{x}\varphi(xy^4) + \psi(x).$

1.104. $\xi = xy, \quad \eta = y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0, \quad u = \varphi(xy)lny + \psi(xy).$

1.105. $\xi = xt, \quad \eta = \frac{x}{t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0, \quad u = \varphi(xt) + \sqrt{xt}\psi(\frac{x}{t}).$

1.106. $\xi = xy^3, \quad \eta = y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad u = \varphi(xy^3)y + \psi(y).$

1.107. $\xi = x, \quad \eta = xy^3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{3\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0, \quad u = \varphi(x) + x^{\frac{1}{3}}\psi(xy^3).$

1.108. $\xi = xy^2, \quad \eta = y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{3}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad u = \varphi(xy^2)y^3 + \psi(y).$

1.109. $\xi = x+y+cos, \quad \eta = x-y-cosx, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad u = \varphi(\xi)e^{-\frac{\eta}{2}} + \psi(\eta).$

1.110.$\xi = x + y + cosx, \quad \eta = x - y - cosx, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0, \quad u = \varphi(\xi) + \psi(\eta).$

1.111. $\xi = 2x - y + cosx, \quad \eta = 2x + y - cosx, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0, \quad u = \varphi(\eta) + \psi(\xi).$

1.112. $\xi = 2x - y + cosx, \quad \eta = 2x + y - cosx, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0,$
u=$\varphi(\eta) + \psi(\xi)e^{-\frac{\eta}{4}}.$

1.113. $\xi = x^2y, \quad \eta = xy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad u = \frac{1}{xy}\varphi(x^2y) + \psi(xy).$

1.114. $\xi = xy^{\frac{1}{4}}, \quad \eta = xy^{\frac{3}{4}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{2}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad u = \eta^2\varphi(\xi) + \psi(\eta).$

1.115. $\xi = x^2 + y^2, \quad \eta = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} - \frac{2}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta} - \eta^3 = 0, \quad u = \varphi(\xi) + \psi(\xi)\eta^3 + \frac{\eta^5}{10};$

1.116. $\xi = x, \quad \eta = x^2 + y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} + 1 = 0, \quad u = \frac{1}{\eta}\varphi(\xi) + \psi(\eta) - \frac{\xi\eta}{2}.$

Задача Коши.

1.117. $u = \frac{1}{2}t^2 - xt - t.$

1.118. $u = -\frac{3}{7}e^{-\frac{7}{3}x}(x + 3y + 3) + \frac{1}{7}(16 - 18x + 9y).$

1.119. $u = e^{-\frac{1}{5}x}(-25y + 5x - 110) + 27y - 27x + 110.$

1.120. $u = e^{-\frac{x}{3}}(-12y - 4x - 54) + 14y - 14x + 54.$

1.121. $u = e^{\frac{y}{4}}(12x + 3y + 12) - 10x - 5y - 12.$

1.122. $u = e^{\frac{y}{3}}(6x + 4y + 24) - 3x - 6y - 24.$

1.123. $u(x, y) = \frac{3f(x+y)+f(x-3y)}{4} + \frac{1}{4}\int\limits_{x-3y}^{x+y} F(\tau)d\tau.$

1.124. $u(x, y) = 3f(x + y) - 2f(x + \frac{3}{2}y) + 2\int\limits_{x+y}^{x+\frac{3}{2}y} F(\tau)d\tau.$

1.125. $u(x, y) = \frac{2f(x+y)+5f(x-\frac{2}{5}y)}{7} + \frac{5}{7}\int\limits_{x-\frac{2}{5}y}^{x+y} F(\tau)d\tau.$

1.126. $u(x, y) = \frac{3f(x-y)+7f(x+\frac{3}{7}y)}{10} + \frac{7}{10}\int\limits_{x-y}^{x+\frac{3}{7}y} F(\tau)d\tau.$

1.127. $u(x, y) = 3f(x + \frac{y}{3}) - 2f(x + \frac{y}{2}) + 6\int\limits_{x+\frac{y}{3}}^{x+\frac{y}{2}} F(\tau)d\tau.$

1.128. $u = \frac{3}{2}e^{-y}\varphi(x + y) - \frac{1}{2}\varphi(x + 3y) + \frac{1}{4}e^{-\frac{x+y}{2}}\int\limits_{x+y}^{x+3y} [3\varphi(z) + 2\psi(z)]e^{\frac{z}{2}}dz.$

1.129. $u = f(x + y) + \frac{5}{6}e^{-\frac{1}{6}(x+y)}\int\limits_{x-\frac{1}{5}y}^{x+y} [F(z) - f'(z)]e^{\frac{z}{6}}dz.$

1.130. $u = (x^2 - 1)y^3 + y.$

1.131. $u = x^4 + \frac{3}{4}x^3(y^4 - 1).$

1.132. $u = 3y^4 + (x^2 - 1)y^5.$

1.133. $u = 2y + 1 + ylnx.$

1.134. $u = 4x^3 + x(y^8 - 1).$

1.135. $u = x + 3x^2(y^5 - 1).$

1.136. $u = x^2 + y^4.$

1.137. $u = x^2\sqrt[3]{x}(y^6 - 1).$

1.138. $u = 3y^5 + (x^2 - 1)y^{11}.$

1.139. $u = 4x^4 + x^8(y^2 - 1).$

1.140. $u = 4y^3 + \frac{1}{2}y^7(x^2 - 1).$

1.141. $u = y^2 + y^7(x^2 - 1).$

1.142. $u = xy^4 + 1.$

1.143. $u = (x-1)y^5.$

1.144. $\xi = x^3y^2, \quad \eta = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{2}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad u = \frac{\varphi(\xi)}{\eta^2} + \psi(\eta),$

$u = x^4\frac{1}{4}y^4 + 2 + 3x^2 - \frac{1}{4}x^4.$

1.145. $\xi = x^2y^3, \quad \eta = y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad u = \frac{1}{\eta}\varphi(\xi) + \psi(\eta),$

$u = x^2y^2 - \frac{3}{4}yx^{\frac{4}{3}} + y^5 + 3 - y^2 + \frac{3}{4}y.$

1.146. $\xi = x^4y^3, \quad \eta = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{5}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad u = \frac{\varphi(\xi)}{\eta^{\frac{5}{3}}} + \psi(\eta),$

$u = \frac{4}{5}y^{\frac{5}{4}} - xy^2 + 3x^3 + 3x - \frac{4}{5}.$

1.147. $\xi = x^5y^2, \quad \eta = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{3}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad u = \frac{\varphi(\xi)}{\eta^3} + \psi(\eta),$

$u = \frac{25}{8}xy^{\frac{8}{5}} + \frac{5}{3}y^{\frac{6}{5}} + 3x^2 - \frac{25}{8}x - \frac{2}{3}.$

1.148. $\xi = y^4x^3, \quad \eta = y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{5}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad u = \frac{\varphi(\xi)}{\eta^{\frac{5}{3}}} + \psi(\eta),$

$u = \frac{6}{7}y^3x^{\frac{7}{2}} + 1 - \frac{6}{7}y^3.$

1.149. $\xi = xy^3, \quad \eta = y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{2}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad u = \frac{\varphi(xi)}{\eta^2} + \psi(\eta),$

$u = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - xy + 3y^2 - \frac{3}{2} + y.$

1.150. $\xi = x^2y^3, \quad \eta = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{4}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad u = \frac{\varphi(\xi)}{\eta^{\frac{4}{3}}} + \psi(\eta),$

$u = 2(y^2-1) + \frac{1}{5}x^2(1-y^5) + 3x^2.$

1.151. $\xi = xy^4, \quad \eta = y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{3}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad u = \eta^3\varphi(\xi) + \psi(\eta),$

$u = 8y^2(1 - x^{-\frac{1}{4}}) + 3y.$

1.152. $u = \frac{x^2}{t} + x^2t^2.$

1.153. $u = 1 + 2x^2y^2.$

1.154. $u = 5x^4y^2 - 3x^2y^3.$

1.155. $u = 2\sqrt{xt}.$

1.156. $\xi = y^2x, \quad \eta = \frac{y^2}{x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{2\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad u = \eta^{\frac{1}{2}}\varphi(xi) + \psi(\eta),$

$u = \frac{2y}{\sqrt{x}} + \frac{y}{\sqrt{x}}lnx.$

1.157. $\xi = yx^3, \quad \eta = \frac{x^3}{y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{5}{6\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0, \quad u = \frac{1}{\eta^{\frac{5}{6}}}\varphi(\xi) + \psi(\eta),$

$u = \frac{1}{3}y^{\frac{7}{3}}x^2 + \frac{3}{7}y^2x + \frac{18}{7}\frac{x}{y^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3}\frac{x^2}{y^{\frac{2}{3}}}.$

1.158. $u = x(1 + y).$

1.159. $u = (x^4 + x^{\frac{8}{3}})y^2.$

1.160. $u = 1 + sin(x - y - cosx) + e^{y+cosx}sin(x + y + cosx).$

1.161. $u = 1 + cosx \cdot cos(y + cosx).$

1.162. $u = sinx \cdot cos(\frac{y-cosx}{2}) + e^x sh(\frac{y-cosx}{2})$.

1.163. $u = 2e^{-\dfrac{2x-y-cosx}{4}} \cdot cosx \cdot sin\dfrac{y-cosx}{2}$.

1.164. $u = e^{2\eta}\varphi(\xi) + \psi(\eta), \quad u = \frac{3}{22}e^{\frac{44}{3}x} + \frac{19}{22}$.

1.165. $u = e^{-\frac{1}{2}\eta}\varphi(\xi) + \psi(\eta), \quad u = -\frac{112}{47}e^{-\frac{47}{16}x} + \frac{347}{47}$.

1.166. $u = e^{4\eta}\varphi(\xi) + \psi(\eta), \quad u = \frac{7}{86}e^{\frac{172}{7}x} + \frac{79}{86}$.

1.167. $u = e^{-3\eta}\varphi(\xi) + \psi(\eta), \quad u = \frac{40}{19} - \frac{2}{19}e^{-\frac{57}{2}x}$.

1.168. $u = e^{3\eta}\varphi(\xi) + \psi(\eta), \quad u = \frac{1}{23}e^{23x} + \frac{22}{23}$.

1.169. $u = e^{2\xi}\varphi(\eta) + \psi(\xi), \quad u = \frac{1}{16}e^{16x} + \frac{63}{16}$.

1.170. $u = e^{-\frac{1}{4}\xi}\varphi(\eta) + \psi(\xi), \quad u = \frac{50}{17} - \frac{16}{17}e^{-\frac{17}{16}x}$.

1.171. $u = e^{-3\xi}\varphi(\eta) + \psi(\xi), \quad u = -\frac{10}{69}e^{-\frac{69}{2}x} + \frac{217}{69}$.

1.172. $u = e^{3\xi}\varphi(\eta) + \psi(\xi), \quad u = y - \frac{3}{4}x + \frac{35}{324}e^{\frac{81}{5}x} - \frac{35}{324}$.

1.173. $u = e^{-2\xi}\varphi(\eta) + \psi(\xi), \quad u = 2x + 3y$.

1.174. $u = e^{4\xi}\varphi(\eta) + \psi(\xi), \quad u = 3x + y + 5 - \frac{45}{132} + \frac{45}{132}e^{\frac{44}{5}y}$.

1.175. $u=\varphi(\xi)+\psi(\eta), \quad u=3y^3+5-\frac{9}{2}y+lnx-\frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}}y.$

1.176. $u=\frac{1}{\eta^{\frac{1}{3}}}\varphi(\xi)+\psi(\eta), \quad u=\frac{6}{7}x^2(y^{\frac{7}{2}}-1)+2y^{\frac{1}{2}}+2x-2.$

1.177. $u=\eta^{-2}\varphi(\xi)+\psi(\eta), \quad u=\frac{3}{2}xy^2+\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}}+2x^2-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}.$

1.178 $u=\frac{1}{\eta^4}\varphi(\xi)+\psi(\eta), \quad u=\frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}}+\frac{9}{5}yx^{\frac{5}{3}}+\frac{6}{5}y-\frac{3}{2}.$

1.179. $u=\eta^{-1}\varphi(\xi)+\psi(\eta), \quad u=\frac{9}{4}xy^{\frac{4}{3}}+2x^3-\frac{9}{4}x.$

1.180. $u=\eta^{-4}\varphi(\xi)+\psi(\eta), \quad u=\frac{3}{2}x^2y^2+1+2y-\frac{3}{2}y^2.$

1.181. $u=\eta^{-\frac{5}{3}}\varphi(\xi)+\psi(\eta), \quad u=3y^5+\frac{12}{17}y^4(x^{\frac{17}{4}}-1).$

1.182. $u=\eta^{-\frac{4}{3}}\varphi(\xi)+\psi(\eta), \quad u=\frac{12}{7}y(x^{\frac{7}{4}}-1)+2x+y-2.$

1.183. $u=\eta^{-3}\varphi(\xi)+\psi(\eta), \quad u=\frac{1}{2}x^6y+\frac{4}{9}x^{\frac{9}{2}}+3y^2-\frac{1}{2}y-\frac{4}{9}.$

1.184. $u=\eta^{-\frac{9}{2}}\varphi(\xi)+\psi(\eta), \quad u=\frac{3}{13}y^{\frac{13}{3}}x^2-\frac{2}{3}y^3+x^3-\frac{3}{13}x^2-\frac{2}{3}.$

1.185. $u=\eta^2\varphi(\xi)+\psi(\eta), \quad u=-\frac{2}{3}xy^{-\frac{3}{2}}+x^2+1+\frac{2}{3}x.$

1.186. $u=\eta^{-\frac{4}{3}}\varphi(\xi)+\psi(\eta), \quad u=\frac{24}{7}xy^{\frac{7}{4}}+4x^2-\frac{24}{7}x.$

Задачи на характеристиках.

1.187. $u = \varphi(\frac{x-y}{2}) + \psi(\frac{x+y}{2}) - \varphi(0).$

1.188. $u = \varphi(\frac{5x-y}{4}) + \psi(\frac{y-x}{4}) - \varphi(0).$

1.189. $u = \varphi(\frac{y-x-3}{4}) + \psi(\frac{5x-y-1}{4}) - \varphi(-1).$

1.190. $u = \varphi(\frac{-y-2x}{2}) + \psi(\frac{y+4x+2}{2}) - \varphi(1).$

1.191. $u = \varphi(\frac{x+3y+3}{4}) + \psi(\frac{3x-3y-1}{4}) - \varphi(\frac{1}{2}).$

1.192. $u = \varphi(\frac{3x+2y+1}{2}) + \psi(-\frac{x+2y+2}{2}) - \varphi(\frac{1}{2}).$

1.193. $u = \varphi(\frac{6x-3y-2}{7}) + \psi(\frac{x+3y+3}{7}) - \varphi(\frac{1}{7}).$

1.194. $u = \varphi(\frac{x+5y+4}{3}) + \psi(\frac{2x-5y-3}{3}) - \varphi(\frac{1}{3}).$

1.195. $u = \varphi(\frac{2x+y-3}{6}) + \psi(\frac{4x-y+4}{6}) - \varphi(\frac{1}{6}).$

1.196. $u = \varphi(\frac{3x-y-1}{5}) + \psi(\frac{2x+y+2}{5}) - \varphi(\frac{1}{5}).$

1.197. $u = \varphi(\frac{x-2y-2}{9}) + \psi(\frac{8x+2y-4}{9}) - \varphi(-\frac{2}{3}).$

1.198. $u = \varphi(\sqrt{1-y+x^2}) + \psi(\sqrt{y}) - \varphi(1).$

1.199. $u = \varphi(x) + \psi(y - x^2 + 4) - \varphi(2).$

1.200. $\varphi(y^2) + \psi(x - y^2 + 4) - \varphi(4)$.

1.201. $u = \varphi(\sqrt{\frac{x^2+y}{2}}) + \psi(\sqrt{\frac{x^2-y+2}{2}}) - \varphi(1)$.

1.202. $u = \varphi(ln\frac{y-e^x+\sqrt{4+(y-e^x)^2}}{2}) + \psi(ln\frac{e^x-y+\sqrt{4+(e^x-y)^2}}{2}) - \varphi(0)$.

Список литературы

[1] Кошляков Н.С. Основные дифференциальные уравнения математической физики: учебник для ВУЗов Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М Смирнов. - М.: Физматиз. - 1962. - 776с

[2] Тихонов А.Н. Уравнения математической физики: учебное пособие для студентов университетов А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. - М.: "Наука". - 1972. - 735с.

[3] Бицадзе А.В. Сборник задач по уравнениям математической физики.: учебное пособие для ВУЗов А.В. Бицадзе, А.Ф. Калиниченко. - М.: "Наука". - 1977. - 222с.

[4] Будак Б.М. Сборник задач по математической физики: учебное пособие Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. - М.: "Наука". - 1972. - 430с.

[5] Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики: учебное пособие для ВУЗов М.М Смирнов. . - М.: "Наука". - 1968. - 112с.

[6] Алексеев А.Д. Практикум по уравнениям математической физики. Методическое пособие для студентов ВУЗов Алексеев А.Д. , Радченко Т.Н. , Рогожин В.С. , Хасабов Э.Г. : издательство РГУ, 1992.