РЕШЕНИЯ

К ГЛАВЕ 1

17. Т. к. $1 < \frac{\pi}{4}, \operatorname{tg} 1 < \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, поэтому $\sin 1 < \cos 1$.

23. $f(-2) = 10$; один из корней $x_1 = -2$; делим $2x^3 - 5x^2 - 23x - 10$ на $x + 2$, получаем $2x^2 - 9x - 5 = 0$; $x_2 = -1/2$, $x_3 = 5$.

25. а) Корни уравнения $x = \frac{x+8}{x-1}$ $x_1 = -2, x_2 = 4$ принадлежат $[-5, 5]$; б) пусть $\frac{x+8}{x-1} = u$; $x^2 - 12x + 3 = u^2 - 12u + 3$; $(x-u)(x+u) = 12(x-u)$; корни уравнения $x = u$ $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, корни $x + \frac{x+8}{x-1} = 12$ $x_3 = 2, x_4 = 10$.

27. Равенство верно тогда и только тогда, когда $f(x)$ и $\varphi(x)$ одного знака. $x \leqslant -1$; $x \geqslant 2$.

29. $f(x+1) - f(x) \equiv -2a\sin(bx + 0{,}5b + c)\sin(0{,}5b) \equiv$ $\equiv \sin x$. Т. к. наименьший период функции $\sin(kx + n)$ равен $|2\pi/k|$, $b = \pm 1$; пусть $b = 1$; при $x = 0$ $\sin(bx + 0{,}5b +$ $+ c) = \sin(0{,}5 + c) = 0$, поэтому $c = -0{,}5 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $a\sin(x +$ $+ \pi n) = (-1)^n \sin x$, поэтому $2(-1)^{n+1} a \sin x \sin 0{,}5 \equiv \sin x$, значит $a = \frac{(-1)^{n+1}}{2\sin 0{,}5}$, $b = 1, c = -0{,}5 + \pi n$; т. к. $\cos(-bx - c) =$ $= \cos(bx + c)$, получаем еще один ответ: $a = \frac{(-1)^{n+1}}{2\sin 0{,}5}$, $b = -1$, $c = 0{,}5 + \pi n$.

35.5. $y = 5^z, z = u^2, u = 3x + 1$.

37. Пусть (x_A, y_A) — координаты точки A. $y_B = y_A =$ $= \varphi(x)$; $x_B = y_B$, т. к. B лежит на прямой $y = x$, поэтому $y_D = y_C = f(x_B) = f(\varphi(x))$.

44. Пусть r — радиус сечения; для усеченного конуса r — линейная функция от x, $r(0) = 2R$, $r(R) = R$, поэтому $r = 2R - x$, $S = \pi r^2 = \pi(2R - x)^2 = \pi(4R^2 + x^2 - 4Rx)$; для цилиндра $S = \pi r^2 = \pi R^2$; для полусферы $S = \pi r^2 =$ $= \pi(\sqrt{R^2 - (x - 3R)^2})^2 = \pi(6Rx - x^2 - 8R^2)$.

Ответ: $S(x) = \begin{cases} \pi(2R-x)^2, & x \in [0,R] \\ \pi R^2, & x \in [R,3R] \\ \pi(-x^2+6Rx-8R^2), & x \in [3R,4R] \end{cases}$.

47.19. $|x| - x > 0 \Leftrightarrow |x| > x \Leftrightarrow x < 0$.

48.8. $\begin{cases} \sin x \geqslant 0 \\ 16 - x^2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi n \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \\ -4 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in [-4,-\pi] \cup [0,\pi]$.

51.2. $y^4 - 2xy^2 + x^2 - x = 0$; $y^2 = t$; $t^2 - 2xt + x^2 - x = 0$; $t_{1,2} = x \pm \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$; $t_1 = x + \sqrt{x} \geqslant 0$ для $\forall x \geqslant 0$; $t_2 = x - \sqrt{x} \geqslant 0$ для $\forall x \geqslant 1$; $y_{1,2} = \pm\sqrt{x+\sqrt{x}}$, $x \geqslant 0$, $y_{3,4} = \pm\sqrt{x-\sqrt{x}}$, $x \geqslant 1$. Две ветви определены при $x \geqslant 0$, четыре при $x \geqslant 1$.

54.15. $f(-x) = -x \cdot \frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1} = x \cdot \frac{1-1/a^x}{1/a^x+1} = x \cdot \frac{a^x-1}{a^x+1} = f(x)$, следовательно, функция четная.

64.2. $y = \frac{1}{2}[|f(x)| + f(x)] = \begin{cases} f(x), & f(x) \geqslant 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}$, значит, часть графика, лежащую выше оси x, оставляем без изменений, для остальных $x \in D_f$ включаем в график участок оси x.

66. 1) $p = \rho gh$. Подставляя $h = 0{,}253$ м, $p = 1{,}84 \cdot 10^3$ *Па*, $g = 9{,}8$ м/с^2, получаем $\rho = 742$ кг/м^3. Значит, $p = 7271{,}6h$. 2) При $h = 14{,}5$ см $p = 1{,}1 \cdot 10^3$ *Па*. 3) При $p = 2{,}65 \cdot 10^3$ *Па* $h = 36{,}4$ см.

75. $y(x_1) = \frac{a-b-a}{a^2-b^2} = -\frac{b}{a^2-b^2}$; $\Delta y = y(x_2) - y(x_1) \Rightarrow y(x_2) = y(x_1) + \Delta y = -\frac{b}{a^2-b^2} + \frac{1}{a-b} = \frac{a+b-b}{a^2-b^2} = \frac{a}{a^2-b^2} = \frac{x_2-a}{a^2-b^2} \Rightarrow a = x_2 - a \Rightarrow x_2 = 2a$.

82. При $x < -3$ $f(x) = 0$; при $-3 \leqslant x \leqslant 3$ $f(x) = ax^2 + c$; $f(0) = 5 \Rightarrow c = 5$; $f(-3) = 0 \Rightarrow a(-3)^2 + 5 = 0$, $a = -\frac{5}{9} \Rightarrow f(x) = -\frac{5}{9}x^2 + 5$; при $3 \leqslant x \leqslant 6$ $f(x) = kx + b$; $\begin{cases} k \cdot 3 + b = 0 \\ k \cdot 6 + b = 2 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$, $b = -2$. Ответ: $f(x) =$

$$= \begin{cases} 0, & x < -3 \\ -\frac{5}{9}x^2 + 5, & -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ \frac{2}{3}x - 2, & 3 < x \leqslant 6 \end{cases}.$$

91. Пусть L — образующая конуса, R — радиус основания, H — высота цилиндра, P — периметр осевого сечения, S — боковая поверхность. Т. к. угол при вершине $60°$, $L=2R$; $P = 2L + 2H + 2R = 6R + 2H = 100 \Rightarrow H = 50 - 3R \Rightarrow$

$S = \pi RL + \pi RH = \pi R(2R + H) = \pi R(50 - R)$; $S(R)$ — квадратичная функция с корнями $R = 0$ и $R = 50$ и отрицательным старшим коэффициентом, поэтому максимум достигается в вершине, абсцисса которой находится посередине между корнями. $R_{max} = \frac{0+50}{2} = 25$ см.

95. Пусть дуга сектора AB, центральный угол x рад, S — площадь сектора. $P = 2R + AB = 2R + Rx \Rightarrow x = \frac{P-2R}{R}$, $S = \frac{R^2x}{2} = \frac{R^2(P-2R)}{2R} = \frac{R(P-2R)}{2}$. Аналогично **91**, $R_{max} = \frac{P/2}{2} = \frac{P}{4}$.

102. Расстояние от точки (x_0, y_0) до прямой $Ax + By + C = 0$ равно $\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Пусть точка (x_0, y_0) лежит на прямой $y = x + 2$, тогда $y_0 = x_0 + 2$ и искомая сумма расстояний равна $\left(\frac{|3x_0-4(x_0+2)+8|}{\sqrt{9+16}}\right)^2 + \left(\frac{|3x_0-(x_0+2)-1|}{\sqrt{9+1}}\right)^2 = \frac{x_0^2}{25} + \frac{(2x_0-3)^2}{10} = \frac{22x_0^2-60x_0+45}{50} = \frac{11}{25}x_0^2 - \frac{6}{5}x_0 + \frac{9}{10}$. Минимум достигается при $x_0 = \frac{6}{5} : \left(2 \cdot \frac{11}{25}\right) = \frac{15}{11}$.

107. $f(x+1) = f((x+2)-1) = 2(x+2)^2 - 3(x+2) + 1 = 2x^2 + 5x + 3$.

112. Пусть m — количество вещества, I — сила тока, p — проводимость, C — концентрация, V — объем. Тогда $m = k_1I$, $I = k_2p, p = k_3C, C = k_4\frac{1}{V} \Rightarrow m = k_1k_2k_3k_4\frac{1}{V} \sim \frac{1}{V}$.

117.13. $y = \frac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}} + 1 = \frac{2\cdot10^x}{10^x+10^{-x}} = \frac{2\cdot10^{2x}}{10^{2x}+1}$; $2\cdot10^{2x} = y\cdot10^{2x} + y$; $10^{2x} = \frac{y}{2-y}$; $x = \frac{1}{2}\lg\frac{y}{2-y} = \frac{\lg y-\lg(2-y)}{2}$; переобозначив аргументы, получаем $y = \frac{\lg x-\lg(2-x)}{2}$.

122. $y^2 - 1 + \log_2(x-1) = 0$; $y = \pm\sqrt{1-\log_2(x-1)}$;

$$x \in D_y \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\log_2(x-1) \geqslant 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x-1) \leqslant \log_2 2 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} x > 1 \\ x \leqslant 3 \end{cases}$; $D_y = (1,3]$; $\log_2(x-1) = 1-y^2$; $x - 1 = 2^{1-y^2}$; $x = 2^{1-y^2} + 1$; обратная функция: $y = 2^{1-x^2} + 1$.

127.2. Пусть H — искомая высота, R — радиус шара, ρ — плотность дерева, ρ_B — плотность воды, V — объем шара, V_1 — объем сегмента, погруженного в воду. По закону Архимеда $\rho V = \rho_B V_1$; $4/3\pi R^3\rho = \pi H^2(R - H/3)\rho_B$; $4/3 \cdot 1000 \cdot 0{,}8 = H^2(10 - H/3)\cdot 1$; $3200/(30 - H) = H^2$. Уравнение решить графически. $x \approx 14{,}26$ см.

131. $y = k \cdot a^x = a^{\ln k} \cdot a^x = a^{\ln k + x}$. График этой функции получается из графика $y = a^x$ сдвигом на $\ln k$ влево.

137.1 $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})) = 1$.

141. $y(-x) = \log_a(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \log_a(\sqrt{x^2+1} - x) = \log_a \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \log_a \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = -\log_a(x + \sqrt{x^2+1}) = -y(x)$. Функция нечетная, ее график симметричен относительно начала координат. $y = \log_a(x + \sqrt{x^2+1})$; $x + \sqrt{x^2+1} = a^y$; $\sqrt{x^2+1} = a^y - x$; $x^2 + 1 = a^{2y} - 2xa^y + x^2$; $x = \frac{a^{2y}-1}{2a^y} = \frac{a^y - a^{-y}}{2} = \operatorname{sh} y$. Обратная функция $y = \operatorname{sh} x$.

146. $S = 1/2ab\sin x = 1/2 \cdot 1 \cdot 2 = \sin x$. $D_S = (0,\pi)$. $x_{max} = \pi/2$.

152.1. Пусть T_f — основной период функции f; $T_{\sin 3x} = 2\pi/3$, $T_{\sin 2x} = 2\pi/2 = \pi$; наименьшее общее кратное этих чисел $T_f = 2\pi$.

159. Пусть B — нижний край картины, C — ее верхний край, A — глаз наблюдателя. Введем систему координат с началом в точке B, ось Oy совпадает с линией стены. Тогда $B = (0,0)$, $A = (l,-b)$, $C = (a\sin\varphi, a\cos\varphi)$, $\overrightarrow{AB} = \{-l, b\}$, $\overrightarrow{AC} = \{a\sin\varphi - l, a\cos\varphi + b\}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = -al\sin\varphi + l^2 + ab\cos\varphi + b^2$, $\gamma = \arccos\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \arccos\frac{b^2 + l^2 + a(b\cos\varphi - l\sin\varphi)}{\sqrt{l^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+l^2+2a(b\cos\varphi - l\sin\varphi)}}$.

161.3. $\sqrt{1-x^2} \geqslant 0 \Rightarrow \arccos\sqrt{1-x^2} \in [0,\pi/2] \Rightarrow \arcsin x \geqslant 0 \Rightarrow x \in [0,1]$; $\forall x \in [0,1]$ $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$, из чего следует тождество на $[0,1]$.

К ГЛАВЕ 2

177. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$; пусть $\varepsilon > 0$; $|u_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow 1/n^2 < \varepsilon \Leftrightarrow n > 1/\sqrt{\varepsilon}$.

180. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1 \pm 1/2^n) = 1$; $|u_n - 1| = |\pm 1/2^n| = 1/2^n$; $1/2^n < \varepsilon \Leftrightarrow 2^n > 1/\varepsilon \Leftrightarrow n > -\log_2\varepsilon$. При $\varepsilon = 10^{-4}$ $n \geqslant 14$.

183. При $n > m$ $v_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$.

185. $u_n = \frac{2^n+(-2)^n}{2^n} = 1+(-1)^n = \begin{cases} 2, n=2k \\ 0, n=2k-1 \end{cases}$;
$\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+(-2)^n}{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right) = 0$.

188. $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : n > N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$; найдем K : $k > K \Rightarrow n_k > N_\varepsilon$, тогда $k > K \Rightarrow |u_{n_k} - a| < \varepsilon$.

191. Решим неравенство $\left|\frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{3}{5}\right| < 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{2|x^2-4|}{5(x^2+1)} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow 4|x^2-4| < x^2+1 (*)$; пусть $x \geqslant 2$, тогда $|x^2-4| = x^2-4; (*) \Leftrightarrow 4x^2-16 < x^2+1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{17/3} \Leftrightarrow 0 \leqslant x-2 < \sqrt{17/3}-2 \approx 0{,}38$; при $x < 2$ $|x^2-4| = 4-x^2; (*) \Leftrightarrow 4(4-x^2) < x^2+1 \Leftrightarrow |x| > \sqrt{3} \Leftrightarrow 2-x > \sqrt{3}+2 \vee 2-x < 2-\sqrt{3} \approx 0{,}27$; $|x-2| < \min(2-\sqrt{3}, \sqrt{17/3}-2) = 2-\sqrt{3} \Rightarrow \left|\frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{3}{5}\right| < 0{,}1$.

193. $|\sin x - 1| = |\sin x - \sin\pi/2| = 2\left|\sin\frac{x-\pi/2}{2}\right|\left|\cos\frac{x+\pi/2}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x-\pi/2}{2}\right| \cdot 1 = |x-\pi/2|$; возьмем $\delta = \varepsilon$, тогда $|x-\pi/2| < \delta \Rightarrow |\sin x - 1| \leqslant |x-\pi/2| < \varepsilon$; при $\varepsilon = 0{,}01$ достаточно взять $\delta = 0{,}01$; точное решение неравенства $1 - \sin x < 0{,}01$ дает $\delta = \pi/2 - \arcsin 0{,}99 \approx 0{,}133$.

195. Пусть $\varepsilon > 0$; $|y-1| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x^2-1}{x^2+3} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{4}{x^2+3} < \varepsilon \Leftrightarrow x^2 > 4/\varepsilon - 3$; при $\varepsilon \leqslant 4/3$ $|x| > \sqrt{4/\varepsilon - 3}$; при $\varepsilon > 4/3$ x любое.

198. $\left|\frac{1+2x}{x}\right| > 10^4 \Leftrightarrow \left|2+\frac{1}{x}\right| > 10^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2+1/x > 10^4 \\ 2+1/x < -10^4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$
$\left[\begin{array}{ll} 0 & \leqslant x < 1/9998 \\ -1/10002 < & x < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -1/10002 < x < 1/9998$.

205. Функция неограничена в окрестности -1. $y = \frac{x^2}{1+x^5} = \frac{x^2}{(1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4)}$. Пусть $-1 < x < -1/2$; тогда $1-x+x^2-x^3+x^4 < 5, x^2 > 1/4, y > \frac{1}{20(1+x)}$; $\forall\varepsilon > 0\ \exists x \in (-1, -1/2) : 1+x < \varepsilon \Rightarrow y > \frac{1}{20\varepsilon}$; последнее выражение может быть сделано сколь угодно большим. Функция ограничена на $(0, +\infty)$; очевидно, $y > 0$; при $x \geqslant 1$ $1+x^5 > x^5, \frac{x^2}{1+x^5} < \frac{1}{x^3} \leqslant 1$; при $0 < x < 1$ $1+x^5 > 1, \frac{x^2}{1+x^5} < x^2 < 1 \Rightarrow 0 < y < 1$.

210.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + \pi n \Leftrightarrow x = \frac{2}{\pi + 2\pi n}, n \in \mathbf{Z}$; т. к. функция имеет корни, сколь угодно близкие к нулю, она не является бесконечно большой.

214. Пусть $\varepsilon > 0$; $|\sqrt{x+1} - \sqrt{x}| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{x} > \frac{1}{\varepsilon}$. Т. к. $\sqrt{x+1}>\sqrt{x}$, $2\sqrt{x}>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow\sqrt{x+1}+\sqrt{x}>\frac{1}{\varepsilon}$; решая неравенство $2\sqrt{x}>\frac{1}{\varepsilon}$, получаем $x>\frac{1}{4\varepsilon^2}$. Точное решение иррационального неравенства дает $x>\left(\frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\right)^2$.

217. u_n, очевидно, возрастает; $u_n < \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n} < 1$.

218. Поскольку разность между функциями $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно мала при $x \to a$, для $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$: $0<|x-a|<\delta\Rightarrow |f(x)-g(x)| < \varepsilon$; $g(x)-\varepsilon < f(x) < g(x)+\varepsilon < g(a-\delta)+\varepsilon$, т. к. $g(x)$ убывает; $f(x)$ возрастает и ограничена сверху, значит существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; аналогично доказывается существование предела $g(x)$; равенство этих пределов следует из теоремы о предельном переходе в равенстве.

220. Докажем по индукции, что $u_n<3$. $u_1=\sqrt{6}<\sqrt{9}=3$; пусть $u_{n-1} < 3 \Rightarrow u_n = \sqrt{u_{n-1}+6} < \sqrt{3+6} = 3$; докажем, что $u_{n-1} < u_n$; $u_{n-1} < \sqrt{6+u_{n-1}} \Leftrightarrow u_{n-1}^2 - u_{n-1} - 6 < 0 \Leftrightarrow -2 < u_{n-1} < 3$. u_n возрастает и ограничена сверху, поэтому существует $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$. Переходя к пределу в равенстве $u_n = \sqrt{u_{n-1}+6}$, получаем $a^2 = a-6$, $a_1 = -2$, $a_2 = 3$; т. к. $a > 0$, получаем $a = 3$.

224. $\lim\limits_{x\to-\pi/2-0} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to-\pi/2+0} f(x) = B-A$. Функция непрерывна, поэтому $B-A=2$; $\lim\limits_{x\to\pi/2-0} f(x) = A+B$; $\lim\limits_{x\to\pi/2+0} f(x) = 0 \Rightarrow A+B=0 \Rightarrow A=-1, B=1$.

229. Функция не определена при $x = 0, x = \pm1$; $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$, значит $x = 0$ — точка устранимого разрыва; $\lim\limits_{x\to\pm1} f(x) = \infty$, значит $x=\pm1$ — точки разрыва второго рода.

233. $t = 1/x$; $\lim\limits_{x\to-0} f(x) = \frac{1}{1+\lim\limits_{x\to-0} 2^{1/x}} = \frac{1}{1+\lim\limits_{t\to-\infty} 2^t} = \frac{1}{1+0} = 1$; $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = \frac{1}{1+\lim\limits_{x\to+0} 2^{1/x}} = \frac{1}{1+\lim\limits_{t\to+\infty} 2^t} = 0$.

236. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ (x+1)2^{-\frac{1}{2x}}, & x>0 \end{cases}$; $f(-2)=-1$, $f(2)=3/2$;

$f(x)$ возрастает от -1 до 1 при $x \in [-2,0)$ и от 0 до $3/2$ при

$x \in [0,2]$. $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ — точка разрыва первого рода.

243. Пусть $f(x) = x - a\sin x - b$; $f(0) = -b < 0$, $f(a+b) = a - a\sin(a+b) = a(1-\sin(a+b)) \geqslant 0$; т. к. $f(x)$ непрерывна, $\exists x \in (0, a+b] : f(x) = 0$.

247. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1-n+1)\left((n+1)^2+(n+1)(n-1)+(n-1)^2\right)}{(n+1)^2+(n-1)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2(3n^2+1)}{2n^2+2} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3+1/n^2}{1+1/n^2} = \frac{3}{1} = 3.$

256. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{5/4}\sqrt[4]{1+2/n^5}-n^{2/3}\sqrt[3]{1+1/n^2}}{n^{4/5}\sqrt[5]{1+2/n^4}-n^{3/2}\sqrt{1+1/n^3}} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{-1/4}\sqrt[4]{1+2/n^5}-n^{-5/6}\sqrt[3]{1+1/n^2}}{n^{-7/10}\sqrt[5]{1+2/n^4}-\sqrt{1+1/n^3}} = \frac{0+0}{0-1} = 0.$

257. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n!(n+1-1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

262. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+\ldots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n(n+1)}{2(n+2)} - \frac{n}{2}\right) =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{n}{2n+4}\right) = -\frac{1}{2}.$

271. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^2-3}{x^4+x^2+1} = \frac{0}{13} = 0.$

273. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{x(x+1)(x+2)}{(x-3)(x+2)} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{x(x+1)}{x-3} = -\frac{2}{5}.$

280. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} = \frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)} = \frac{m\cdot 1}{n\cdot 1} = \frac{m}{n}.$

285. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{-x}{x^2+1}\right) = 0.$

291. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{7/5}\sqrt[5]{1+3/x^7}+x^{3/4}\sqrt[4]{2-1/x^3}}{x^{4/3}\sqrt[6]{1+1/x+1/x^8}-x} =$
$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{1/15}\sqrt[5]{1+3/x^7}+x^{-7/12}\sqrt[4]{2-1/x^3}}{\sqrt[6]{1+1/x+1/x^8}-x^{-1/3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{1/15}+0}{1-0} = \infty.$

295. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+16}-4)(\sqrt{x^2+16}+4)} =$
$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2(\sqrt{x^2+16}+4)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{4+4}{1+1} = 4.$

305. При $b > 0$ $\lim\limits_{a\to 0} x_1 = \lim\limits_{a\to 0} \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \lim\limits_{a\to 0} \frac{-b-b}{2a} = \infty$;
$\lim\limits_{a\to 0} x_2 = \lim\limits_{a\to 0} \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \lim\limits_{a\to 0} \frac{4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})} = -\frac{c}{b}$;
при $b < 0$ $\lim\limits_{a\to 0} x_1 = \frac{c}{b}$, $\lim\limits_{a\to 0} x_2 = \infty$.

309. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} =$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+\frac{|x|\sqrt{1+1/x^2}}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1\pm\sqrt{1+1/x^2}} =$$

$$= \begin{cases} 1/2,\ x\to+\infty \\ -\infty,\ x\to-\infty \end{cases}.$$

316. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\cdot\frac{\beta x}{\sin\beta x}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\alpha}{\beta}.$

321. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x/2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x/2}{4(x/2)^2} = \frac{1}{2}.$

329. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}} = [y = x-\pi/2\to 0,\quad x = y+\pi/2]$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\cos(y+\pi/2)}{\sqrt[3]{1-\sin(y+\pi/2)^2}} = \lim_{y\to 0} -\frac{\sin y}{\sqrt[3]{(1-\cos y)^2}} = \lim_{y\to 0} -\frac{\sin y}{\sqrt[3]{4\sin^4 y/2}} =$$

$$= \lim_{y\to 0} -\frac{2\sin y/2\cos y/2}{\sin y/2\sqrt[3]{4\sin y/2}} = \lim_{y\to 0} -\frac{2}{\sqrt[3]{4\sin y/2}} = \infty.$$

336. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\frac{\sin(x-\pi/6)}{\sqrt{3}/2-\cos x} = \lim\limits_{x\to\pi/6}\frac{2\sin((x-\pi/6)/2)\cos((x-\pi/6)/2)}{2\sin((x-\pi/6)/2)\sin((x+\pi/6)/2)} = 2.$

343. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(a+2h)-2\sin(a+h)+\sin a}{h^2} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{2\sin(a+h)\cos h-2\sin(a+h)}{h^2} =$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin(a+h)(-2\sin^2 h/2)}{h^2} = \lim_{h\to 0} -\frac{4\sin(a+h)\sin^2 h/2}{4(h/2)^2} = -\sin a.$$

348. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{1-2\sin^2 x}}{x^2} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x(1-2\sin^2 x)}{(1+\cos x\sqrt{1-2\sin^2 x})x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x+2\sin^2 x\cos^2 x}{2x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x(1+2\cos^2 x)}{2x^2} = \frac{3}{2}.$$

355. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}\cdot\frac{3}{x-2}\cdot(2x-1)} =$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{3(2x-1)}{x-2}} = e^6.$$

359. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\pm\infty} 2^x = \begin{cases} +\infty,\ x\to+\infty \\ 0,\ x\to-\infty \end{cases}.$

373. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{e^x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2}{e^x} = 2.$

378. $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{th} x = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1;$

$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{th} x = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = -1.$$

380. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\frac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}} =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(\sqrt{x^4+1}+x^2)\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\sqrt{x^2+1/x^2}+x)\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}\right)} = 0;$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right) = -\infty.$$

385. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\sin x/x}{1+\cos x/x}=1.$

387. $\lim\limits_{h\to0}\frac{\sin(a+3h)-3\sin(a+2h)+3\sin(a+h)-\sin a}{h^3}=$
$=\lim\limits_{h\to0}\frac{2(\sin 3h/2\cos(a+3h/2)-\sin h/2\cos(a+3h/2))}{h^3}=$
$=\lim\limits_{h\to0}\frac{2\cos(a+3h/2)(\sin 3h/2-3\sin h/2)}{h^3}=$
$=\lim\limits_{h\to0}\frac{2\cos(a+3h/2)(3\sin h/2-4\sin^3 h/2-3\sin h/2)}{h^3}=$
$=\lim\limits_{h\to0}\frac{2\cos(a+3h/2)(-4\sin^3 h/2)}{h^3}=2\cos a(-4)\cdot 1/8=-\cos a.$

389. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2((1-\cos x)/2)}{x^4}=$
$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2((1-\cos x)/2)}{(1-\cos x)^2/4}\cdot\frac{(1-\cos x)^2/4}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}2\frac{4\sin^4 x/2}{4x^4}=$
$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^4 x/2}{16(x/2)^4}=\frac{1}{8}.$

392. $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to\infty}-2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$
$=\lim\limits_{x\to\infty}-2\sin\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=0$, т.к. первая дробь стремится к 0, а вторая ограничена.

400. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x+\sin x)^{1/x}=\lim\limits_{x\to0}(1+\cos x-1+\sin x)^{1/x}=$
$=\lim\limits_{x\to0}(1+\cos x-1+\sin x)^{\frac{\cos x-1+\sin x}{x}\frac{1}{\cos x-1+\sin x}}=$
$=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\cos x-1+\sin x}{x}}=e^1=e.$

404. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)n^2}{(2n+1)n^2}=\frac{1}{2}.$

408. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3}{(\sqrt{a+x^3}+\sqrt{a})x^3}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\neq0$, значит бесконечно малая имеет третий порядок.

410. $\Delta u=a\sqrt{x+\Delta x}-a\sqrt{x}=\frac{a\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$;
$\Delta v=b(x+\Delta x)^2-bx^2=b(2x\Delta x+\Delta^2x)$; $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta u}{\Delta v}=$
$=\frac{a\Delta x}{(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})b(2x\Delta x+\Delta^2x)}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{a}{(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})b(2x+\Delta x)}=$
$=\frac{a}{4bx\sqrt{x}}\neq0$; u и v эквивалентны, если $\frac{a}{4bx\sqrt{x}}=1\Leftrightarrow$ $\sqrt{x^3}=\frac{a}{4b}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{a^2}{16b^2}}.$

415. Площадь правильного треугольника со стороной a равна $\frac{a^2\sqrt3}{4}$, высота — $\frac{a\sqrt3}{2}$; $S_{общ}=\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\frac{a^2\sqrt3}{4}+\frac{a^2\sqrt3}{4}\cdot\frac34+\ldots$ $+\frac{a^2\sqrt3}{4}\cdot\left(\frac34\right)^{n-1}+\ldots\Big)=\frac{a^2\sqrt3}{4}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-(3/4)^n}{1-3/4}=a^2\sqrt3.$

419. Пусть l — длина звена ломаной, L_n — длина всей ломаной; $l=\frac{a}{2(n+1)\cos\frac{\pi}{2n}}$; $L_n=\frac{a}{\cos\frac{\pi}{2n}}$; $\lim\limits_{n\to\infty}L_n=\frac{a}{\cos 0}=a.$

423. Пусть $\angle OPT = x$, $OA = r$, тогда $PT = r\operatorname{ctg} x$, $PN = PT\cos x = r\cos x\operatorname{ctg} x$, $\angle O = \pi/2 - x$, $ON = r\cos(\pi/2 - x) = r\sin x$, $AN = OA - ON = r(1 - \sin x)$, $AP = PN - AN = r(\operatorname{ctg} x\cos x - 1 + \sin x) = r\frac{\cos^2 x - \sin x + \sin^2 x}{\sin x} = r\frac{1 - \sin x}{\sin x}$; при $P \to A$ $x \to \pi/2$, $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{AN}{AP} = \lim\limits_{x\to\pi/2}\sin x = 1$, значит бесконечно малые AN и AP эквивалентны.

К ГЛАВЕ 3

431. $\Delta s = s(5 + \Delta t) - s(5) = g\frac{(5+\Delta t)^2}{2} - \frac{25g}{2} = \frac{g(10\Delta t + \Delta^2 t)}{2}$; $v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g(10\Delta t + \Delta^2 t)}{2\Delta t} = \frac{g(10 + \Delta t)}{2}$; при $\Delta t = 1\,c$ $v_{cp} = 53{,}9$ м/с; при $\Delta t = 0{,}1\,c$ $v_{cp} = 49{,}49$ м/с; при $\Delta t = 0{,}05\,c$ $v_{cp} = 49{,}25$ м/с; при $\Delta t = 0{,}001\,c$ $v_{cp} = 49{,}005$ м/с; $v_t = s'(t) = gt = 9{,}8t$ м/с; $v_5 = 49{,}0$ м/с; $v_{10} = 98{,}0$ м/с.

441.3. $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$;
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$; при $x = 4$, $\Delta x = 0{,}4$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{4{,}4} + \sqrt{4}} = 0{,}245$; $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+\Delta x} + \sqrt{4}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

443. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x + \Delta^2 x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x + \Delta x) = 2x$;
$f'(5) = 10$, $f'(-2) = -4$, $f'(-3/2) = -3$.

452. $\lim\limits_{x\to a}\frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = \lim\limits_{x\to a}\frac{xf(a) - af(a) + af(a) - af(x)}{x - a} = \lim\limits_{x\to a}\left(f(a) - a\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) = f(a) - af'(a)$.

453. Пусть $f(x)$ — четная функция;
$f'(-x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x-h) - f(x)}{h} = -\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = -f'(x)$.

458. Пусть $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x - 2$; решая уравнение $x^2 = 3x - 2$, получаем $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; $A(1,1)$ и $B(2,4)$ — точки пересечения; $f'(x)=2x$, $f'(1)=2$, $f'(2)=4$, $g'(x)=3$; в точке A $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3-2}{1+3\cdot 2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$; в точке B $\alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{4-3}{1+4\cdot 3} = \operatorname{arctg}\frac{1}{13}$.

461. $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f(2) = 8$, $f'(2) = 12$; $y = 8 + 12(x - 2) \Leftrightarrow y = 12x - 16$ — уравнение касательной;

$y = 8 - 1/12(x-2) \Leftrightarrow y = -1/12x + 49/6$ — уравнение нормали; $8/12 = 2/3$ — подкасательная; $8 \cdot 12 = 96$ — поднормаль.

464. $f(x) = ax^2$, $f'(x) = 2ax$, $f(x)/f'(x) = x/2$.

466.5. $(2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{3})' = (2x^{1/2} - x^{-1})' + 0 = x^{-1/2} + x^{-2} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$.

477. $z' = \frac{(x^2+1)'3(x^2-1)-(x^2+1)3(x^2-1)'}{(3(x^2-1))^2} + (x^2-1)'(1-x) + (x^2-1)(1-x)' = \frac{2x(3x^2-3)-(x^2+1)6x}{9(x^2-1)^2} + 2x - 2x^2 + 1 - x^2 = -\frac{4x}{3(x^2-1)^2} + 2x + 1 - 3x^2$.

502. $\left(\frac{1-(2x)^{1/3}}{1+(2x)^{1/3}}\right)' = \frac{-2/3(2x)^{-2/3}(1+(2x)^{1/3})-2/3(2x)^{-2/3}(1-(2x)^{1/3})}{(1+(2x)^{1/3})^2} = \frac{-2/3(2x)^{-2/3}(1+(2x)^{1/3}+1-(2x)^{1/3})}{(1+(2x)^{1/3})^2} = -\frac{4}{3(2x)^{2/3}(1+(2x)^{1/3})^2}$.

513. $y' = -1/3 \cdot 2(2x-1)^{-4/3} + 5(-3/4)(x^2+2)^{-7/4} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^4}} - \frac{15x}{2\sqrt[4]{(x^2+2)^7}}$.

529. $y' = 1/3 \cdot 3\operatorname{tg}^2 x \cdot 1/\cos^2 x - 1/\cos^2 x + 1 = \operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg}^2 x + 1) - \operatorname{tg}^2 x - 1 + 1 = \operatorname{tg}^4 x$.

547.1. $y' = n\sin^{n-1} x\cos x \cdot \cos nx + \sin^n x(-n\sin nx) = n\sin^{n-1} x(\cos x\cos nx - \sin x\sin nx) = n\sin^{n-1} x\cos(n+1)x$.

551. $y' = \arcsin x + x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$.

565. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cos x = \frac{\cos x}{|\cos x|}$.

568. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1-x}{1+x}}}\,\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\,\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \sqrt{\frac{1+x}{2x}}\,\frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}}\,\frac{-2}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$.

581. $y' = \frac{(-1/x)(1+\ln x)-(1/x)(1-\ln x)}{(1+\ln x)^2} = -\frac{2}{x(1+\ln x)^2}$.

590. $y' = -\frac{1}{\arccos 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2 = -\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}\arccos 2x}$.

597. $y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\ln^2 \sin\frac{x+3}{4}}} \cdot \frac{1}{\sin\frac{x+3}{4}} \cdot \cos\frac{x+3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{x+3}{4}}{12\sqrt[3]{\ln^2 \sin\frac{x+3}{4}}}$.

609. $y' = \frac{2^{\ln x} - x2^{\ln x}\ln 2 \cdot \frac{1}{x}}{2^{2\ln x}} = \frac{2^{\ln x}(1-\ln 2)}{2^{2\ln x}} = \frac{1-\ln 2}{2^{\ln x}}$.

616. $y' = (xe^x)'(\cos x + \sin x) + xe^x(\cos x + \sin x)' = (xe^x + e^x)(\cos x + \sin x) + xe^x(\cos x - \sin x) = e^x(x\cos x + x\sin x + \cos x + \sin x + x\cos x - x\sin x) = e^x(2x\cos x + \cos x + \sin x)$.

629. $y' = \frac{1}{\sin\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}} \cdot \cos\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 e^{3x}}} \times \frac{1}{1+(e^{3x})^2} \cdot e^{3x} \cdot 3 = \frac{e^{3x}\operatorname{ctg}\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}}{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 e^{3x}}(1+e^{6x})}$.

636. $y' = \frac{1}{1+\operatorname{th}^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch} 2x}$.

647. $y' = \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x} + \frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{1-\sqrt{2}\operatorname{th} x}{1+\sqrt{2}\operatorname{th} x}\times$
$\times\frac{\sqrt{2}\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}(1-\sqrt{2}\operatorname{th} x)+\sqrt{2}\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}(1+\sqrt{2}\operatorname{th} x)}{(1-\sqrt{2}\operatorname{th} x)^2} =$
$= \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x} + \frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\operatorname{ch}^2 x(1-2\operatorname{th}^2 x)} = \frac{1-2\operatorname{th}^2 x+1}{2\operatorname{ch}^2 x(1-2\operatorname{th}^2 x)} = \frac{1-\operatorname{th}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x-2\operatorname{sh}^2 x} =$
$= \frac{1-\operatorname{th}^2 x}{1-\operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x(1-\operatorname{sh}^2 x)} = \frac{1}{(1+\operatorname{sh}^2 x)(1-\operatorname{sh}^2 x)} = \frac{1}{1-\operatorname{sh}^4 x}.$

651. $\ln y = x^x\ln x = z\ln x$; $\ln z = x\ln x$; $\frac{z'}{z} = \ln x + 1$; $z' = x^x(\ln x + 1)$; $y' = y(z\ln x)' = y(x^x(\ln x + 1)\ln x + x^x(1/x)) = x^{x^x}x^x(\ln^2 x + \ln x + 1/x)$.

659. $\ln y = \frac{1}{2}(\ln x + \ln\sin x + \frac{1}{2}\ln(1-e^x)) \Rightarrow$
$y' = \frac{1}{2}y\left(\frac{1}{x} + \operatorname{ctg} x - \frac{1}{2}\frac{e^x}{1-e^x}\right)$.

672. $y' = -2\sin x\cos x(3-\cos x) + \cos^2 x\sin x =$
$= -6\sin x\cos x + 3\cos^2 x\sin x = 3/2\sin 2x(\cos x - 2)$.

687. $y' = \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

691. $y' = \frac{2}{3(1+x^2)} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{1-x^2}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{1-x^2}\right)' = \frac{2}{3(1+x^2)} +$
$+\frac{1}{3\left(1+\frac{x^2}{(1-x^2)^2}\right)}\cdot\frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2}{3(1+x^2)} + \frac{1+x^2}{3(x^4-x^2+1)} =$
$= \frac{2x^4-2x^2+2+x^4+2x^2+1}{3(1+x^2)(x^4-x^2+1)} = \frac{x^4+1}{x^6+1}$.

697. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$.

703. $y' = \arcsin\ln x + x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}\cdot\frac{1}{x} =$
$= \arcsin\ln x + \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

709. $y' = \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}}\times$
$\times\frac{(1+x)^2}{x^2+2x+2}\cdot\frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(x^2+2x+2)\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}}$.

721. $y' = (\sin^2 x)'\sin x^2 + (\sin x^2)'\sin^2 x =$
$= 2\sin x\cos x\sin x^2 + 2x\cos x^2\sin^2 x = \sin 2x\sin x^2 +$
$+ 2x\cos x^2\sin^2 x$.

724. $y' = \frac{1}{4}\frac{1-x}{1+x}\frac{1-x-(-1)(1+x)}{(1-x)^2} - \frac{1}{2(1+x^2)} =$
$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{2}{1+x^2}\right) = \frac{x^2}{1-x^4}$.

729. $y' = -\frac{2x}{2\sqrt{a^2-x^2}} - a\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}\right)\cdot\frac{1}{a} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$
$= \frac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$.

732. $y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right) - \frac{\sqrt{x^2-1} - x\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} =$
$= \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}(x+\sqrt{x^2-1})} - \frac{x^2-1-x^2}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} =$
$= \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}.$

737. $y'=3\left(3x^2\arcsin x + x^3\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + 2x\sqrt{1-x^2} + (x^2+2) \times$
$\times\left(-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) = 9x^2\arcsin x + \frac{3x^3+2x(1-x^2)-x(x^2+2)}{\sqrt{1-x^2}} = 9x^2\arcsin x.$

740. $y' = \frac{1}{e^x\cos x + e^{-x}\sin x}(e^x\cos x - e^x\sin x - e^{-x}\sin x +$
$+ e^{-x}\cos x) = \frac{(e^x+e^{-x})(\cos x - \sin x)}{e^x\cos x + e^{-x}\sin x}.$

746. $y' = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}\frac{1}{1+\left(\sqrt{1+\ln(2x+3)}\right)^2}\frac{1}{2\sqrt{1+\ln(2x+3)}}\times$
$\times\frac{1}{2x+3}\cdot 2 = \frac{e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}}{(2x+3)(2+\ln(2x+3))\sqrt{1+\ln(2x+3)}}.$

751. $y' = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{1-2x-x^2} + (3-x)\frac{-2x-2}{2\sqrt{1-2x-x^2}} +\right.$
$\left.+2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\sqrt{1-2x-x^2}}{2} - \frac{(3-x)(x+1)}{2\sqrt{1-2x-x^2}} +$
$+ \frac{2}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \frac{-1+2x+x^2+x^2-2x-3+4}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$

756. $y' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3}}\cdot e^{x^2-\operatorname{arctg}x+1/2\ln x+1} +$
$+ \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot e^{x^2-\operatorname{arctg}x+1/2\ln x+1}\cdot\left(2x - \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2x}\right) =$
$= \frac{e^{x^2-\operatorname{arctg}x+1/2\ln x+1}\left(-1+4x^2-\frac{2x}{1+x^2}+1\right)}{2x\sqrt{x}} =$
$= \frac{e^{x^2-\operatorname{arctg}x+1/2\ln x+1}}{\sqrt{x}}\left(2x - \frac{1}{1+x^2}\right).$

760. $y' = \sqrt{(x^2+a^2)^3} + x\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x^2+a^2}\cdot 2x +$
$+ \frac{3a^2}{2}\cdot\sqrt{x^2+a^2} + \frac{3a^2x}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}\cdot 2x + \frac{3a^4}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} =$
$= \sqrt{x^2+a^2}\left(x^2+a^2+3x^2+\frac{3a^2}{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}(3a^2x^2+3a^4) =$
$= \sqrt{x^2+a^2}\left(4x^2+\frac{5a^2}{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}\cdot 3a^2(x^2+a^2) =$
$= \sqrt{x^2+a^2}\left(4x^2+\frac{5a^2}{2}+\frac{3a^2}{2}\right) = 4\sqrt{(x^2+a^2)^3}.$

761. $y' = \arcsin^2 x + x\cdot 2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2 +$
$+ 2\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)\arcsin x + 2\sqrt{1-x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$
$= \arcsin^2 x + \frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - 2 + 2 = \arcsin^2 x.$

765. $y' = (\ln(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}))' - (\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}))' +$
$+2\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right) -$

$$-\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)+2\frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x^2}}+$$
$$+\frac{1+x}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{-2}{(1+x)^2}=\frac{(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})^2+(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})^2}{2\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=$$
$$=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-x}{x\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

768. $y'=\sqrt[4]{\frac{x-x+1}{x^2+x+1}}\frac{1}{4}\sqrt[4]{\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)^3}\cdot$
$$\frac{(2x+1)(x^2-x+1)-(2x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-x+1)^2}+\frac{1}{2\sqrt3}\left(\frac{1}{1+\frac{(2x+1)^2}{3}}\frac{2}{\sqrt3}+\frac{1}{1+\frac{(2x-1)^2}{3}}\frac{2}{\sqrt3}\right)=$$
$$=\frac14\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\frac{2x(x^2-x+1-x^2-x-1)+(x^2-x+1+x^2+x+1)}{(x^2-x+1)^2}+$$
$$+\frac13\left(\frac{3}{4x^2+4x+4}+\frac{3}{4x^2-4x+4}\right)=\frac{2-2x^2}{4(x^2-x+1)(x^2+x+1)}+$$
$$+\frac{2x^2+2}{4(x^2-x+1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{x^4+2x^2+1-x^2}=\frac{1}{x^4+x^2+1}.$$

772. $y'=\left(\frac{x^2}{2}+\frac12 x\sqrt{x^2+1}+\frac12\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)'=$
$$=x+\frac12\left(\sqrt{x^2+1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)+\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=x+\frac{2x^2+1}{2\sqrt{x^2+1}}+$$
$$+\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})}=x+\frac{2x^2+1}{2\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=x+\sqrt{x^2+1};$$
$xy'+\ln y'=x^2+x\sqrt{x^2+1}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})=2y.$

776. $\frac{dx}{dy}=e^{\arcsin y}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}};\ \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{e^{\arcsin y}};$
$x=e^{\arcsin y}\Leftrightarrow y=\sin\ln x;\ \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-\sin^2\ln x}}{x}=\frac{\cos\ln x}{x}.$

780. Пусть $y=\alpha(x)\Rightarrow x=y^y;$
$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{y^y(\ln y+1)}=\frac{1}{x(\ln\alpha(x)+1)}.$

783. $\frac{dy}{dx}=\frac{-4x^3(1+x^4)-4x^3(1-x^4)}{(1+x^4)^2}=-\frac{8x^3}{(1+x^4)^2}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=-\frac{(1+x^4)^2}{8x^3};$
$$y=\frac{1-x^4}{1+x^4}\Leftrightarrow x=\sqrt[4]{\frac{1-y}{1+y}},\quad \frac{dx}{dy}=\frac14\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{-3/4}\frac{-2}{(1+y)^2}=$$
$$=-\frac{1}{2\sqrt[4]{(1-y)^3(1+y)^5}};\quad \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=\frac{-8x^3}{(1+x^4)^2}\cdot\frac{-1}{2\sqrt[4]{(1-y)^3(1+y)^5}}=$$
$$=\frac{4x^3}{(1+x^4)^2\sqrt[4]{\left(1-\frac{1-x^4}{1+x^4}\right)^3\left(1+\frac{1-x^4}{1+x^4}\right)^5}}=\frac{4x^3}{(1+x^4)^2\sqrt[4]{\frac{8x^{12}}{(1+x^4)^3}\frac{32}{(1+x^4)^5}}}=$$
$$=\frac{4x^3}{\sqrt[4]{256x^{12}}}=1.$$

791. $2(x-1)+2(y+3)y'=0\Rightarrow y'=-\frac{x-1}{y+3}\Rightarrow$
$y'(2,1)=-\frac14.$

794. $3x^2+3y^2y'-3a(y+xy')=0\Rightarrow$
$y'(3y^2-3ax)=-3x^2+3ay\Rightarrow y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$

800. $\cos(xy)\cdot(y+xy') - \sin(xy)\cdot(y+xy') = \frac{1+y'}{\cos^2(x+y)} \Rightarrow y'(x\cos(xy) - x\sin(xy) - \frac{1}{\cos^2(x+y)}) = -y\cos(xy)+y\sin(xy) + \frac{1}{\cos^2(x+y)} \Rightarrow y' = -\frac{y\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\sin(xy))-1}{x\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\sin(xy))-1}$.

804. $x^y = y^x \Rightarrow y\ln x = x\ln y \Rightarrow y'\ln x + \frac{y}{x} = \ln y + x\frac{y'}{y} \Rightarrow y'(\ln x - \frac{x}{y}) = \ln y - \frac{y}{x} \Rightarrow y' = \frac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)}$.

810. $\frac{y'}{2\cos^2\frac{y}{2}} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{y'}{2}\left(\mathrm{tg}^2\frac{y}{2}+1\right) = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{y'}{2}\left(\frac{1-k}{1+k}\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+1\right) = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} \Rightarrow y' = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\frac{1+k}{\cos^2\frac{x}{2}\left((1-k)\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+1+k\right)} = \frac{\sqrt{1-k^2}}{(1-k)\sin^2\frac{x}{2}+(1+k)\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{1-k^2}}{1+k(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})} = \frac{\sqrt{1-k^2}}{1+k\cos x}$.

813. $xy-\ln y = 1 \Rightarrow y+xy'-\frac{y'}{y}=0 \Rightarrow y'(x-\frac{1}{y}) = -y \Rightarrow y' = \frac{-y^2}{xy-1} \Rightarrow y^2+(xy-1)y' = y^2-y^2=0$.

815. Уравнение параболы $y^2=2px \Rightarrow 2yy'=2p$. $y'=p/y$; $F(p/2,0)$ — фокус, прямая $x = p/2$ пересекает параболу в точках $A(p/2,p)$ и $B(p/2,-p)$; $y'_A = 1$, $y'_B = -1 \Rightarrow y'_A y'_B = -1$.

818. Пусть $A(x_0,y_0)$ — точка на гиперболе, BC — касательная, проходящая через A, $B(b,0)$ и $C(0,c)$ — точки ее пересечения с осями, S — площадь треугольника. $y = \frac{a}{x}$, $y' = -\frac{a}{x^2}$, $y = \frac{a}{x_0} - \frac{a}{x_0^2}(x-x_0) = \frac{2a}{x_0} - \frac{ax}{x_0^2}$ — уравнение BC. $b = 2x_0$, $c = \frac{2a}{x_0} = 2y_0$, $S = 2x_0y_0 = 2a = (\sqrt{2a})^2$.

820. $v = s' = 1+2t$, $v(5) = 11$ см/с $= 0{,}11$ м/с; $E = \frac{3\cdot 0{,}11^2}{2} = 0{,}01815$ *Дж*.

825. $y' = 2x(x-2)^2+2x^2(x-2) = 4x(x-2)(x-1)$; $y' = 0$ в точках $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(2,0)$.

829. $2x-6y+1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x}{3}+\frac{1}{6} \Rightarrow k = \frac{1}{3} \Rightarrow k_1 = -3$; $f'(x) = 3x^2+6x = -3 \Rightarrow x_0 = -1$, $f(x_0) = -3$, $y = -3 - 3(x+1) = -3x-6$; $3x+y+6 = 0$ — уравнение касательной.

832. $f'(x) = -\frac{16a^3x}{(4a^2+x^2)^2}$, $f'(x_0) = -\frac{32a^4}{64a^4} = -\frac{1}{2}$, $f(x_0) = \frac{8a^3}{8a^2} = a$; $y = a-\frac{1}{2}(x-2a) = -\frac{1}{2}x+2a \Leftrightarrow x+2y = 4a$ — касательная; $y = a+2(x-2a) = 2x-3a \Leftrightarrow 2x-y = 3a$ — нормаль.

835.2. $y = \pm\sqrt{x^3}$, $y' = \pm\frac{3}{2}\sqrt{x}$; подкасательная $\frac{y}{y'} = \frac{2}{3}x$; поднормаль $yy' = -\frac{3}{2}x^2$.

837. $f(x_1) = 4$, $f(x_2) = 8$; уравнение хорды $\frac{y-4}{x-1} = \frac{8-4}{3-1} \Leftrightarrow y = 2x+2 \Rightarrow k = 2$; $f'(x) = 2x-2, 2x-2 = 2 \Rightarrow x_0 = 2, f(x_0) = 5, f'(x_0) = 2$, $y = 5+2(x-2) \Leftrightarrow y = 2x+1$ — уравнение касательной.

840. Координаты вершины параболы $A(3;-3)$, уравнение прямой OA $y = -x \Rightarrow k = -1 \Rightarrow -\frac{1}{y'} = 1 \Rightarrow y' = -1$; $f'(x) = 2x-6$, $2x-6 = -1 \Rightarrow x_0 = 2{,}5$, $f(x_0) = -2{,}75$, $y = -2{,}75+(x-2{,}5) \Leftrightarrow y = x-5{,}25 \Leftrightarrow 4x-4y-21 = 0$ — уравнение нормали.

842. Точки пересечения $A(4,5)$ и $B(1,2)$; $y' = 2x-4$, $y'_A = 4$, $y'_B = -2$; $y-5 = -0{,}25(x-4) \Leftrightarrow y = -0{,}25x+6$ — нормаль в точке A; $y-2 = 0{,}5(x-1) \Leftrightarrow y = 0{,}5x+1{,}5$ — нормаль в точке B; $C(6;4{,}5)$ — точка пересечения; $S_{ABC} = \frac{1}{2}(33\cdot 5 - 3\cdot 2{,}5) = 3{,}75$.

844. Пусть (x_0, y_0) — точка касания; $y' = -\frac{4}{(x+5)^2}$, $y = \frac{x_0+9}{x_0+5} - \frac{4}{(x_0+5)^2}(x-x_0)$ — уравнение касательной; $y(0) = 0 \Rightarrow \frac{x_0+9}{x_0+5} + \frac{4x_0}{(x_0+5)^2} = 0$, $x_{01} = -15$, $x_{02} = -3$; в точке $(-15;\frac{3}{5})$ касательная $y = \frac{3}{5} - \frac{1}{25}(x+15) \Leftrightarrow y = -\frac{x}{25}$; в точке $(-3;3)$ касательная $y = 3-(x+3) \Leftrightarrow y = -x$.

846. $2x(x+y)+x^2(1+y') = a^2(1-y') \Rightarrow 2x^2+2xy+a^2 = -(a^2+x^2)y' \Rightarrow y' = \frac{a^2-2x^2-2xy}{a^2+x^2} \Rightarrow y'(0,0) = 1$; $y = x$ — касательная.

849. $y' = 2e^{2x}+2x$, $y'(0) = 2$, $y(0) = 1$; $y = 1-\frac{1}{2}x \Leftrightarrow x+2y = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}y = \frac{2}{\sqrt{5}}$ — каноническое уравнение нормали, значит $\frac{2}{\sqrt{5}}$ — искомое расстояние.

852. $y' = \ln(cx)+1 = \frac{y}{x}+1 = \frac{y+x}{x} \Rightarrow \frac{S_n}{y} = \frac{y+x}{x}$.

854. $\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$; $y = y_0 - \frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0) \Leftrightarrow \frac{yy_0}{b^2} = \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{xx_0}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$.

858.4 $y = f(x)$ — уравнение кривой, тогда искомое уравнение $y = f'(x)x; f'(x) = \left(\sqrt{a^2-x^2} - a\ln(a+\sqrt{a^2-x^2}) + a\ln x\right)' = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - a\frac{-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a+\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a}{x} = \frac{ax-ax-x\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}(a+\sqrt{a^2-x^2})} + \frac{a}{x} = -\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a}{x} = \frac{a^2-x^2+a\sqrt{a^2-x^2}}{x(a+\sqrt{a^2-x^2})} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} \Rightarrow y = \sqrt{a^2-x^2}$ — полуокружность.

862. $x^2+\frac{x^3}{2a-x}=8ax$, $10ax^2=16a^2x \Rightarrow x_1=0$, $x_2 = \frac{8}{5}a$; кривые пересекаются в трех точках: $O(0,0)$, $A(\frac{8}{5}a, \frac{16}{5}a)$, $B(\frac{8}{5}a, -\frac{16}{5}a)$;

т. к. кривые симметричны, углы между ними в точках A и B равны. Обозначим верхнюю полуокружность $f(x)$, верхнюю ветвь циссоиды $g(x)$; найдем $f'(x): 2x+2yy' = 8a$, $f' = \frac{4a-x}{y}$; $g'(x) : 2yy' = \frac{3x^2(2a-x)+x^3}{(2a-x)^2} = \frac{2x^2(3a-x)}{(2a-x)^2}$, $g' = \frac{x^2(3a-x)}{y(2a-x)^2}$; $f(0) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{4a-x}{y} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(3a-x)}{y(2a-x)^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(3a-x)\sqrt{2a-x}}{x\sqrt{x}(2a-x)^2} = 0$, следовательно, в точке O $\alpha_1=90°$; $f'(\frac{8}{5}a) = \frac{3}{4}$, $g'(\frac{8}{5}a) = 7 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{7-3/4}{1+7\cdot 3/4} = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 45°$.

863. $x^2 = \frac{32a^4}{x^2+4a^2}$, $x^4+4a^2x^2-32a^4 = 0$, $x_1^2 = 4a^2$, $x_2^2 = -8a^2, x = \pm 2a$ — абсциссы точек пересечения кривых $f(x) = \frac{x^2}{4a}$ и $g(x) = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$; $f'(x) = \frac{x}{2a}$, $f'(2a) = 1$; $g'(x) = -\frac{16a^3x}{(x^2+4a^2)^2}$, $g'(2a) = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1+1/2}{1-1/2} = 3 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}3$.

866. $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 0, y' = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$. Пусть OA и OB — отрезки осей Ox и Oy; $OA = x - \frac{y}{y'} = x+\sqrt{xy}, OB = y - xy' = y+\sqrt{xy}$, $OA+OB = x+2\sqrt{xy}+y = (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = a$.

868. $y = \frac{a}{2}(\ln(a+\sqrt{a^2-x^2}) - \ln(a-\sqrt{a^2-x^2}) - \sqrt{a^2-x^2}$; $y' = \frac{a}{2}\left(\frac{-x}{(a+\sqrt{a^2-x^2})\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{-x}{(a-\sqrt{a^2-x^2})\sqrt{a^2-x^2}}\right) + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{-ax}{2\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}+a+\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-a^2+x^2} + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{x\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$; BM, где $M(x;y)$, $B(0; y-xy' = y+\sqrt{a^2-x^2})$ — искомый отрезок, $|BM| = \sqrt{x^2+a^2-x^2} = a$.

870. Пусть A — точка пересечения касательной с осью абсцисс. $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{bx^2}{x^2-a}$, $\frac{-2a}{x^3} - \frac{2by'}{y^3} = 0$, $y' = -\frac{ay^3}{bx^3}; x_A = x - \frac{y}{y'} = x + \frac{bx^3}{abx^2}(x^2-a) = x+\frac{x}{a}(x^2-a) = \frac{x^3}{a}$.

872. Уравнение касательной к эллипсу $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2} = 1$ (**854**); при $y = 0$ $x = \frac{a^2}{x_0}$ независимо от b. Постройте окружность с центром в центре эллипса радиуса a, проведите касательную к ней в точке с абсциссой x_0 и соедините точку пересечения этой касательной с осью Ox и точку эллипса (x_0, y_0).

874. $MP = \sqrt{a^2\operatorname{ch}^2\frac{x}{a} - a^2} = a\operatorname{sh}\frac{x}{a} \Rightarrow \operatorname{ctg}\angle PMN = \operatorname{sh}\frac{x}{a} = y' = k_{кас}$.

877. $\Delta x = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$, $dy = 2x\Delta x$; при $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$ $\Delta y = 0{,}21$, $dy = 0{,}2$, $\Delta y - dy = 0{,}01$, $\delta = \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} = 4{,}8\%$.

882. $df = 2x\Delta x \Rightarrow x = \frac{df}{2\Delta x} = \frac{-0.8}{0.4} = -2$.

887.1 $\Delta s = (8+\Delta x)^2 - 8^2 = 16\Delta x + \Delta x^2$. $ds = 16\Delta x$; $\Delta x = 1$, $\Delta s = 17$, $ds = 16$, $\delta = \frac{17-16}{17} = 5{,}88\%$.

889.18. $dy = \frac{1}{\operatorname{tg}(\pi/2 - x/4)} \frac{1}{\cos^2(\pi/2 - x/4)} \frac{-1}{4} dx = -\frac{dx}{2\sin(\pi - x/2)} = -\frac{dx}{2\sin(x/2)}$.

892. $\Delta y \approx dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$; $x = 45°$, $dx = 10'$. $dy = \frac{10'}{1/2} = 20' = \frac{\pi}{540} \approx 0.00582$.

897. $dy = \frac{1/x(x - x\ln x) - (1+\ln x)(1 - \ln x - 1)}{(x - x\ln x)^2} dx = \frac{1+\ln^2 x}{x^2(1-\ln x)^2} dx$; $2x^2 dy = 2\frac{1+\ln^2 x}{1-\ln x} dx$; $(x^2y^2+1)dx = \left(\frac{(1+\ln x)^2}{(1-\ln x)^2} + 1\right)dx = \frac{1+2\ln x + \ln^2 x + 1 - 2\ln x + \ln^2 x}{(1-\ln x)^2} dx = 2\frac{1+\ln^2 x}{(1-\ln x)^2} dx$.

900. $\operatorname{arctg}(x+\Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + d(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{arctg} x + \frac{dx}{1+x^2}$; $\operatorname{arctg} 1{,}02 \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{0.02}{1+1} = \frac{\pi}{4} + 0.01 \approx 0{,}795$; $\operatorname{arctg} 0{,}97 \approx \frac{\pi}{4} - \frac{0{,}03}{2} \approx 0{,}770$.

903. $2s = 2l\left(1 + \frac{2f^2}{3l^2}\right)$, $d(2s) = 2l\frac{4f\,df}{3l^2} = \frac{8f\,df}{3l}$, $df = \frac{3l\,ds}{4f}$.

906.6. $dy = \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}\cos^2\frac{u}{2}} du = \frac{du}{\sin u} = \frac{d(\arcsin v)}{\sin\arcsin v} = \frac{dv}{v\sqrt{1-v^2}} = \frac{d(\cos 2x)}{\cos 2x\sqrt{1-\cos^2 2x}} = \frac{-2\sin 2x\,dx}{\cos 2x \sin 2x} = -\frac{2dx}{\cos 2x}$.

907. $f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$, $f'_-(0) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$; $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, значит, функция не дифференцируема при $x = 0$.

912. $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x \sin\frac{1}{\Delta x} = 0$, т. к. $\left|\sin\frac{1}{\Delta x}\right| \leqslant 1$.

915. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = 0 = f(0)$ $\left(\left|\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right| < \frac{\pi}{2}\right)$, значит, функция непрерывна; $f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \operatorname{arctg}\frac{1}{\Delta x} = \frac{\pi}{2}$, $f'_-(0) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \operatorname{arctg}\frac{1}{\Delta x} = -\frac{\pi}{2}$; $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, значит, функция не дифференцируема при $x = 0$.

916. $\lim\limits_{x \to +0}\left(1 + e^{1/x}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -0}\left(1 + e^{1/x}\right) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{1+e^{1/x}} = 0 = f(0)$, значит, функция непрерывна; $f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{x}{1+e^{1/x}} = 0$, $f'_-(0) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{x}{1+e^{1/x}} = 1$; $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, значит, функция не дифференцируема при $x = 0$.

919. $x = \rho\cos\varphi = 2r\cos^2\varphi = r(1+\cos 2\varphi)$; $y = \rho\sin\varphi = 2r\cos\varphi\sin\varphi = r\sin 2\varphi$; $\frac{dx}{dt} = -2r\sin 2\varphi\frac{d\varphi}{dt} = -2r\omega\sin 2\varphi$; $\frac{dy}{dt} = 2r\cos 2\varphi\frac{d\varphi}{dt} = 2r\omega\cos 2\varphi$.

921. $p = p_0e^{ch}$: $\ln\frac{1}{2} = 5540c \Rightarrow c = -\frac{\ln 2}{5540}$; $\frac{dp}{dh} = cp_0e^{ch} = -\frac{\ln 2}{5540}p \approx -0{,}000125p$.

924. $16x^2+9y^2=400 \Rightarrow 32x+18yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{16x}{9y}$; $|y'_t| = |x'_t| \Rightarrow |y_x| = 1 \Rightarrow 16x = 9y \Rightarrow 16x^2 + \frac{256}{9}x^2 = 400 \Rightarrow x = \pm 3$, $y = \pm\frac{16}{3}$, точки $(3, \frac{16}{3})$ и $(-3, -\frac{16}{3})$.

927. $V' = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)' = 4\pi R^2R' = 4\pi R^2v$; $S' = (4\pi R^2)' = 8\pi RR' = 8\pi Rv$.

930. $\frac{(\sin x_1)'}{(\sin x_2)'} = \frac{\cos x_1}{\cos x_2} = n \Rightarrow \frac{(\operatorname{tg} x_1)'}{(\operatorname{tg} x_2)'} = \frac{\cos^2 x_2}{\cos^2 x_1} = \frac{1}{n^2}$.

935.1. $\begin{cases} 3(2\cos t - \cos 2t) = -9 \\ 3(2\sin t - \sin 2t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = -1 \\ \cos 2t = -1 \\ t = \pi n \end{cases} \Leftrightarrow$

$t = \pi(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$.

937. $y'_\varphi = 3b\sin^2\varphi\cos\varphi$, $x'_\varphi = -3a\cos^2\varphi\sin\varphi$, $y'_x = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi$.

941. $y'_t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$, $x'_t = \frac{2t}{1+t^2}$, $y'_x = \frac{t}{2}$.

945. $y'_t = \frac{6at(1+t^3)-3t^2\cdot 3at^2}{(1+t^3)^2} = \frac{6at-3at^4}{(1+t^3)^2} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$, $x'_t = \frac{3a(1+t^3)-3t^2\cdot 3at}{(1+t^3)^2} = \frac{3a-6at^3}{(1+t^3)^2} = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$, $y'_x = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$.

950.2. $y'_t = 3a\sin^2 t\cos t$, $x'_t = -3a\cos^2 t\sin t$, $y'_x = -\operatorname{tg} t = \operatorname{tg}(\pi - t)$; $y'_x = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow t = \pi - \alpha$.

952. $y'_t = -\frac{3}{t^3} - \frac{2}{t^2} = -\frac{2t+3}{t^3}$, $x'_t = \frac{t^3-3t^2-3t^3}{t^6} = -\frac{2t+3}{t^4}$, $y'_x = t \Rightarrow xy'^3 = \frac{1+t}{t^3}t^3 = 1+t = 1+y'$.

956.1. Пусть $f(x) = x^2$, $g(x)$ задается как $y = \frac{5}{4}\sin t$, $x = \frac{5}{3}\cos t$; $f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{5}{4}\sin t = \frac{25}{9}\cos^2 t \Rightarrow \frac{1}{4}\sin t = \frac{5}{9} - \frac{5}{9}\sin^2 t \Rightarrow \sin t_0 = \frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg} t_0 = \pm\frac{3}{4}$, $y_0 = \frac{5}{4}\sin t_0 = 1$, $x_0 = \pm 1$; $f'(x_0) = 2x_0 = \pm 2$, $g'(x_0) = \frac{5/4\cos t_0}{-5/3\sin t_0} = -\frac{3}{4}\operatorname{ctg} t_0 = \mp\frac{9}{16}$, $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2 = \left|\frac{2+9/16}{1-9/8}\right| = \frac{41}{2}$. Кривые пересекаются в двух точках под углами $\alpha_1 = \alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{41}{2} \approx 87°12'$.

957. Высшая и низшая точки производящего круга — $A(at,0)$ и $B(at,2a)$; $y'_t = a\sin t$, $x'_t = a(1-\cos t)$, $y'_x = \frac{\sin t}{1-\cos t}$; $y = a(1-\cos t) + \frac{\sin t}{1-\cos t}(x - a(t-\sin t))$ — уравнение касательной; $y(at) = a(1-\cos t) + \frac{\sin t}{1-\cos t}(at - at + a\sin t) = a(1-\cos t) + a\frac{\sin^2 t}{1-\cos t} = a\frac{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}{1-\cos t} = 2a$; $y = a(1-\cos t) - \frac{1-\cos t}{\sin t}(x - at + a\sin t)$ — уравнение нормали; $y(at) = a(1-\cos t) - \frac{1-\cos t}{\sin t}a\sin t = 0$.

959. $x'_t = 3a\sin^2 t\cos t$, $y'_t = -3a\cos^2 t\sin t$, $y'_x = -\mathrm{ctg}\,t$; $\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2} = \left|\frac{y}{\mathrm{ctg}\,t}\right|\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 t} = \left|\frac{y}{\cos t}\right|$ — касательная; $|y|\sqrt{1+y'^2} = |y|\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 t} = \left|\frac{y}{\sin t}\right|$ — нормаль; $\left|\frac{y}{y'}\right| = \left|\frac{y}{\mathrm{ctg}\,t}\right| = |y\,\mathrm{tg}\,t|$ — подкасательная; $|yy'| = |y\,\mathrm{ctg}\,t|$ — поднормаль.

960. Касательная к окружности: $y'_t = a\cos t$, $x'_t = -a\sin t$, $y'_x = -\mathrm{ctg}\,t$, $y = a\sin t - \mathrm{ctg}\,t(x - a\cos t) = -x\,\mathrm{ctg}\,t + \frac{a}{\sin t}$; нормаль к эвольвенте: $y'_t = a(\cos t + t\sin t - \cos t) = at\sin t$, $x'_t = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t$, $y'_x = \mathrm{tg}\,t$, $y = a(\sin t - t\cos t) - \mathrm{ctg}\,t(x - a\cos t - at\sin t) = -x\,\mathrm{ctg}\,t + a\sin t - at\cos t + a\frac{\cos^2 t}{\sin t} + at\cos t = -x\,\mathrm{ctg}\,t + \frac{a}{\sin t}$.

962. $y'_t = 3a\cos^2 t\sin t$, $x'_t = 2a\cos t + a\cos^3 t - 2a\sin^2 t\cos t = 3a\cos^3 t$, $y'_x = \mathrm{tg}\,t$, $y = -\cos^3 t - \mathrm{ctg}\,t(x - 2a\sin t - a\sin t\cos^2 t)$ — уравнение нормали, A и B — точки пересечения нормали с осями Ox и Oy; $x_B=0$ $y_B=-a\cos^3 t+2a\cos t+a\cos^3 t=2a\cos t$; $B(0,2a\cos t)$; $y_A=0$, $x_A=2a\sin t + a\sin t\cos^2 t - a\sin t\cos^2 t=2a\sin t$; $A(2a\sin t,0)$; $|AB|=2a\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=2a$.

966.1. $x'_t = \frac{3a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$, $y'_t = \frac{6at}{(1+t^2)^2}$, $y'_x = \frac{2t}{1-t^2}$, $t_0 = 2$, $x_0 = \frac{6}{5}a$, $y_0 = \frac{12}{5}a$, $y'_0 = -\frac{4}{3}$; $y = \frac{12}{5}a - \frac{4}{3}(x - \frac{6}{5}a) = -\frac{4}{3}x + 4a \Leftrightarrow 4x + 3y - 12a = 0$ — касательная; $y = \frac{12}{5}a + \frac{3}{4}(x - \frac{6}{5}a) = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}a \Leftrightarrow 3x - 4y + 6a = 0$ — нормаль.

968. $y'_x = -\mathrm{ctg}\,t$(**959**), $y = a\cos^3 t - \mathrm{ctg}\,t(x - a\sin^3 t) \Leftrightarrow y = -x\,\mathrm{ctg}\,t + a\cos t \Leftrightarrow x\cos t + y\sin t = a\sin t\cos t$ — нормальное уравнение касательной $\Rightarrow OT = a|\sin t\cos t| = \frac{1}{2}a|\sin 2t|$; $y = a\cos^3 t + x\,\mathrm{tg}\,t - a\frac{\sin^4 t}{\cos t} \Leftrightarrow y = x\,\mathrm{tg}\,t + a\frac{\cos^4 t - \sin^4 t}{\cos t} \Leftrightarrow y\cos t - x\sin t = a\cos 2t$ — нормальное уравнение нормали $\Rightarrow ON = a|\cos 2t| \Rightarrow 4OT^2 + ON^2 = a^2\sin^2 2t + a^2\cos^2 2t = a^2$.

970. $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{2r\sin\varphi}{2r\cos\varphi} = \mathrm{tg}\,\varphi$; $\theta = \varphi$.

972. $\rho' = a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$; $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{a\sin^3\frac{\varphi}{3}}{a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}} = \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\varphi}{3} \Rightarrow \alpha = \theta + \varphi = \frac{4}{3}\varphi = 4\theta$.

976. $\rho'_1 = -a\sin\varphi$, $\rho'_2 = a\sin\varphi \Rightarrow \mathrm{tg}\,\theta_1 = \frac{a(1+\cos\varphi)}{-a\sin\varphi} = -\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2}$, $\mathrm{tg}\,\theta_2 = \frac{a(1-\cos\varphi)}{a\sin\varphi} = \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} \Rightarrow \mathrm{tg}\,\theta_1\,\mathrm{tg}\,\theta_2 = -1$.

977. $\rho'_\varphi = \frac{\rho'_t}{\varphi'_t} = \frac{f'_1(t)}{f'_2(t)} \Rightarrow \mathrm{tg}\,\theta = \frac{f_1(t)f'_2(t)}{f'_1(t)}$.

980. Пусть B — точка касания, A и C — точки пересечения полярной касательной и нормали с перпендикуляром к полярному радиусу, тогда $OA = OB|\mathrm{tg}\,\theta| = \left|\frac{\rho^2}{\rho'}\right|$, $OC = OB|\mathrm{tg}(\pi/2 - \theta)| = |\rho'|$.

981. $\rho' = -\frac{a}{\varphi^2} \Rightarrow \left|\frac{\rho^2}{\rho'}\right| = a.$

984. $\rho' = a^{\varphi}\ln a = \rho \ln a.$

987. $\frac{2x}{a^2}\frac{dx}{dy} + \frac{2y}{b^2} = 0$, $\frac{dx}{dy} = -\frac{a^2 y}{b^2 x}$, $\frac{ds}{dy} = \sqrt{1+\frac{a^4y^2}{b^4x^2}} = \frac{\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}{b^2x}$.

990. $ds = \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx.$

993. $\frac{dx}{dt} = a(1-\cos t)$, $\frac{dy}{dt} = a\sin t$.
$\frac{ds}{dt} = a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t} = a\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}} = 2a\sin\frac{t}{2}$.

996. $\frac{dx}{dt} = a(-2\sin t+2\sin 2t)$, $\frac{dy}{dt} = a(2\cos t-2\cos 2t)$, $ds = 2a\sqrt{\sin^2 t-2\sin t\sin 2t+\sin^2 t+\cos^2 t-2\cos t\cos 2t+\cos^2 t}\,dt = 2a\sqrt{2-2\cos(2t-t)}\,dt = 2a\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 4a\sin\frac{t}{2}\,dt$.

998. $\frac{dx}{dt} = a(-\sin t+\sin t+t\cos t) = at\cos t$,
$\frac{dy}{dt} = a(\cos t-\cos t+t\sin t) = at\sin t$,
$\frac{ds}{dt} = at\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t} = at$.

1000. $y = \sqrt{100-x^2}$, $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{\sqrt{100-x^2}}\frac{dx}{dt}$; $x = 6$, $\frac{dx}{dt} = 2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{6}{\sqrt{100-36}}\cdot 2 = -1{,}5$ м/мин; скорость направлена вертикально вниз.

1003. Пусть O — центр окружности, A — точка касания забора, C — текущее положение лошади, B — точка пересечения забора с лучом AC, R — радиус окружности; $\angle AOB=\alpha=45^\circ$, $AB = x = P\operatorname{tg}\alpha$, дуга $AC = s = R\alpha$, $v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{R}{\cos^2\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = \frac{v}{\cos^2\alpha}$; $v = 20$ км/ч, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 40$ км/ч.

1009. $f'(x) = 6x^5-12x^2$, $f''(x) = 30x^4-24x$, $f'''(x) = 120x^3-24$, $f^{\mathrm{IV}}(x) = 360x^2$, $f^{\mathrm{IV}}(1) = 360$.

1011. $y' = -2\cos x\sin x = -\sin 2x$, $y'' = -2\cos 2x$, $y''' = 4\sin 2x$.

1015. $y' = 3x^2\ln x+x^2$, $y'' = 6x\ln x+5x$,
$y''' = 6\ln x+11$, $y^{\mathrm{IV}} = \frac{6}{x}$.

1018. $y' = \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2}$, $y'' = \frac{2\cdot 2}{(1+x)^3}$,
$y''' = -\frac{2\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}, \dots\ y^{(n)} = \frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$, $n \geqslant 1$.

1021. $y' = 2x\operatorname{arctg} x+1$, $y'' = 2\operatorname{arctg} x+\frac{2x}{1+x^2}$.

1025. $y' = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$, $y'' = \frac{\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}2\sqrt{x}-\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$.

1027. $y'=\frac{a\cos x}{\sqrt{1-a^2\sin^2 x}}$, $y''=a\frac{-\sin x\sqrt{1-a^2\sin^2 x}-\frac{\cos x(-2a^2\sin x\cos x)}{2\sqrt{1-a^2\sin^2 x}}}{1-a^2\sin^2 x}=$
$=-a\frac{\sin x-a^2\sin^3 x-a^2\sin x\cos^2 x}{\sqrt{(1-a^2\sin^2 x)^3}}=\frac{a(a^2-1)\sin x}{\sqrt{(1-a^2\sin^2 x)^3}}$.

1031. $y'=a\cos ax-b\sin bx=a\sin(ax+\frac{\pi}{2})+b\cos(bx+\frac{\pi}{2})$. $y''=a^2\sin(ax+\pi)+b^2\cos(bx+\pi),\ldots y^{(n)}=a^n\sin(ax+\frac{\pi n}{2})+$ $+b^n\cos(bx+\frac{\pi n}{2})$.

1033. $y'=e^x+xe^x=e^x(x+1)$, $y''=e^x(x+1)+e^x=$ $=e^x(x+2)$, …, $y^{(n)}=e^x(x+n)$.

1036. $y'=\frac{a}{ax+b}$, $y''=-\frac{a^2}{(ax+b)^2}$, $y'''=\frac{2a^3}{(ax+b)^3}$; …, $y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$.

1038. $y=\frac{x}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$, $y'=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)$, $y''=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{2}{(x+1)^3}\right),\ldots,y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}+\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$.

1040. $y=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$. $y'=-2\sin 2x\cos 2x=-\sin 4x=\cos(4x+\frac{\pi}{2}),\ldots$
$y^{(n)}=4^{n-1}\cos(4x+\frac{\pi n}{2})$.

1041. $y'=2nx(x^2-1)^{n-1}\Rightarrow y'(x^2-1)=2nxy$; продифференцируем $n+1$ раз по формуле Лейбница. $y^{(n+2)}(x^2-1)+$ $+2x(n+1)y^{(n+1)}+n(n+1)y^{(n)}=2nxy^{(n+1)}+2n(n+1)y^{(n)}\Rightarrow$ $y^{(n+2)}(x^2-1)+2xy^{(n+1)}-n(n+1)y^{(n)}=0$.

1044. $y'=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$, $y''=\frac{-\sqrt{2x-x^2}-\frac{(1-x)^2}{\sqrt{2x-x^2}}}{2x-x^2}=$ $=\frac{-2x+x^2-1+2x-x^2}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}=-\frac{1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}=-\frac{1}{y^3}\Rightarrow y^3y''=-1$.

1050. $y'=\frac{n\cos(n\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$,
$$y''=\frac{n\left(-\frac{n\sin(n\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cos(n\arcsin x)\right)}{1-x^2}=$$
$$=\frac{nx\cos(n\arcsin x)-n^2\sin(n\arcsin x)\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}};$$
$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=\frac{nx\cos(n\arcsin x)-n^2\sin(n\arcsin x)\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}-$ $-\frac{nx\cos(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}+n^2\sin(n\arcsin x)=0$.

1053. $y_1=\frac{1}{y}$, $y_1'=-\frac{y'}{y^2}$, $y_1''=-\frac{y''y^2-2yy'^2}{y^4}=\frac{2y'^2-y''y}{y^3}$,
$y_1'''=\frac{4y'y''y^3-y'''y^4-y''y'y^3-3y^2y'(2y'^2-y''y)}{y^6}=\frac{6y'y''y-y'''y^2-6y'^3}{y^4}$,
$\frac{y_1'''}{y_1'}=-\frac{(6y'y''y-y'''y^2-6y'^2)y^3}{y^4y'}=\frac{y'''y^2-6y'y''y+6y'^3}{y^2y'}$,
$\left(\frac{y_1''}{y_1'}\right)^2=\left(\frac{2y'^2-y''y}{y^3}\frac{y^2}{-y'}\right)^2=\frac{4y'^4-4y'^2y''y+y''^2y^2}{y^2y'^2}$,

$$\frac{y_1'''}{y_1'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y_1''}{y_1'}\right)^2 = \frac{y'''y^2-6y'y''y+6y'^3}{y^2y'} - \frac{3(4y'^4-4y'^2y''y+y''^2y^2)}{2y^2y'^2} =$$
$$= \frac{2y'''y'y^2-12y''y'^2y+12y'^4-12y'^4+12y''y'^2y-3y''^2y^2}{2y^2y'^2} = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2.$$

1055. $F'(x)=f'\varphi+f\varphi'$, $F''=f''\varphi+2f'\varphi'+f\varphi''=f''\varphi+f\varphi''+2C$, $\frac{F''}{F} = \frac{f''}{f} + \frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{2C}{f\varphi}$; $F''' = f'''\varphi+f''\varphi'+f'\varphi''+f\varphi''' = f'''\varphi+$ $+(f'\varphi')'+f\varphi''' = f'''\varphi+f\varphi'''$, $\frac{F'''}{F} = \frac{f'''}{f} + \frac{\varphi'''}{\varphi}$.

1057. $2x+2yy'=0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$, $y'' = -\frac{y-xy'}{y^2} = -\frac{x^2+y^2}{y^3} =$ $= -\frac{r^2}{y^3}$, $y''' = -\frac{-3r^2}{y^4}y' = -\frac{3r^2x}{y^5}$.

1062. $e^{x+y}=xy$, $\quad e^{x+y}(1+y')=y+xy$, $\quad xy(1+y')=y+xy\Rightarrow$

$$y'=\frac{y-xy}{xy-x},\ y''=\frac{(y'-y-xy')(xy-x)-(y+xy'-1)(y-xy)}{(xy-x)^2}=\frac{y'(x^2-x)+y-y^2}{(xy-x)^2}=$$
$$=\frac{(x^2-x)\frac{y-xy}{xy-x}+y(1-y)}{x^2(y-1)^2}=\frac{y(x-1)^2+y(1-y)^2}{x^2(1-y)^3}=-\frac{y((x-1)^2+(y-1)^2)}{x^2(y-1)^3}.$$

1063. $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, $\frac{d^2x}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)}{dx}\frac{dx}{dy} =$

$$= -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}.$$

1065. $2yy'=2p$, $y' = \frac{p}{y}$, $y'' = -\frac{py'}{y^2} = -\frac{p^2}{y^3}$,

$$k = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = -\frac{p^2}{y^3\sqrt{(1+\frac{p^2}{y^2})^3}} = -\frac{p^2}{\sqrt{(p^2+y^2)^3}}.$$

1068. $(a+bx)e^{\frac{y}{x}} = x$, $be^{\frac{y}{x}} + (a+bx)e^{\frac{y}{x}}\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2} = 1 \Rightarrow$

$be^{\frac{y}{x}} + x\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2} = 1$, $be^{\frac{y}{x}} + \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 1$, $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x} - be^{\frac{y}{x}}$,

$$\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2} = \frac{x+y-xbe^{\frac{y}{x}}-y}{x^2} = \frac{1-be^{\frac{y}{x}}}{x},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2} - be^{\frac{y}{x}}\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2} =$$
$$= \frac{1-be^{\frac{y}{x}}}{x} - be^{\frac{y}{x}}\frac{1-be^{\frac{y}{x}}}{x} = \frac{(1-be^{\frac{y}{x}})^2}{x};\ (x\frac{dy}{dx}-y)^2 = x^2(1-be^{\frac{y}{x}})^2 =$$
$$= x^3\frac{d^2y}{dx^2}.$$

1071. $\frac{dx}{dt}=-a\sin t$, $\frac{dy}{dt} = a\cos t$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}$:

$\frac{dx}{dt} = \frac{b}{a\sin^2 t} : (-a\sin t) = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dt}$:

$\frac{dx}{dt} = \frac{3b\cos t}{a^2\sin^4 t} : (-a\sin t) = -\frac{3b\cos t}{a^3\sin^5 t}$.

1074.2. $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{-2t}{1-t^2}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2\left(\sqrt{1-t^2}+\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\right)}{1-t^2} : \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{-2(1-t^2+t^2)\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{(1-t^2)^3}} = -\frac{2}{1-t^2}.$$

1076. $\frac{dy}{dt} = e^t(\cos t-\sin t)$, $\frac{dx}{dt} = e^t(\sin t+\cos t)$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t},\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-\sin t-\cos t)(\cos t+\sin t)-(\cos t-\sin t)^2}{(\cos t+\sin t)^2} :$$

$(e^t(\sin t+\cos t)) = \frac{-2e^{-t}}{(\sin t+\cos t)^3}$;
$y''(x+y)^2 = \frac{-2e^{-t}}{(\sin t+\cos t)^3}e^{2t}(\sin t+\cos t)^2 = \frac{-2e^t}{\sin t+\cos t}$,
$2(xy'-y) = 2\left(e^t\sin t\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t} - e^t\cos t\right) =$
$= 2e^t\frac{\sin t\cos t-\sin^2 t-\cos^2 t-\sin t\cos t}{\cos t+\sin t} = \frac{-2e^t}{\sin t+\cos t}$.

1079. $dx = (f'(t)\cos t - f(t)\sin t - f'(t)\cos t - f''(t)\sin t)dt =$
$= -(f(t)+f''(t))\sin t\,dt$, $dy = (f'(t)\sin t + f(t)\cos t - f'(t)\sin t -$
$- f''(t)\sin t)dt = (f(t)+f''(t))\cos t\,dt$, $ds^2 = dx^2+dy^2 =$
$= (f(t)+f''(t))^2(\sin^2 t+\cos^2 t)dt^2 = (f(t)+f''(t))^2dt^2$.

1083. $v = s' = \frac{1}{2\sqrt{t}}$, $a = v' = -\frac{1}{4t\sqrt{t}} = -2v^3$.

1085. Пусть l — длина троса, x — расстояние по горизонтали; $\frac{dl}{dt} = 2$, $x = \sqrt{l^2-16}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{l}{\sqrt{l^2-16}}\frac{dl}{dt} = \frac{2l}{\sqrt{l^2-16}}$, $\Rightarrow$
$a = \frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{\sqrt{l^2-16}-\frac{l^2}{\sqrt{l^2-16}}}{l^2-16}\frac{dl}{dt} = \frac{-64}{(\sqrt{l^2-16})^3}$; при $x = \sqrt{l^2-16} = 8$
$a = -\frac{64}{8^3} = -\frac{1}{8} = -0{,}125$ м/с^2.

1087. $F = \frac{n}{v} \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{k}{v} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{k}{v} \Rightarrow v\,dv = k\,dt \Rightarrow$
$\frac{v^2}{2} = kt+C \Rightarrow E = \frac{mv^2}{2} = kmt+C$.

1088.1. $((x^2+1)\sin x)^{(20)} = (x^2+1)\sin(x+20\frac{\pi}{2}) +$
$+ 20\cdot 2x\sin(x+19\frac{\pi}{2}) + \frac{20\cdot 19}{2}2\sin(x+18\frac{\pi}{2}) =$
$= (x^2+1)\sin x - 40x\cos x - 380\sin x =$
$= (x^2-379)\sin x - 40x\cos x$.

1090. $(1-x^2)y'' - xy' - \alpha^2 y = 0$;
$((1-x^2)y'')^{(n)} = (1-x^2)y^{(n+2)} - 2nxy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)}$,
$(xy')^{(n)} = xy^{(n+1)} + ny^{(n)} \Rightarrow (1-x^2)y^{(n+2)} - 2nxy^{(n+1)} -$
$- n(n-1)y^{(n)} - xy^{(n+1)} - ny^{(n)} - \alpha^2y^{(n)} = 0 \Rightarrow (1-x^2)y^{(n+2)} -$
$- (2n+1)xy^{(n+1)} - (n^2+\alpha^2)y^{(n)} = 0$.

1091. $(e^{ax}\cos bx)' = e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx) =$
$re^{ax}(\frac{a}{r}\cos bx - \frac{b}{r}\sin bx) = re^{ax}(\cos\varphi\cos bx - \sin\varphi\sin bx) =$
$= re^{ax}\cos(bx+\varphi)$. $(e^{ax}\cos bx)'' = re^{ax}(a\cos(bx+\varphi) - b\sin(bx+$
$+\varphi)) = r^2e^{ax}\cos(bx+2\varphi), \ldots (e^{ax}\cos bx)^{(n)} = r^ne^{ax}\cos(bx+$
$+n\varphi)$; в то же время по формуле Лейбница $(e^{ax}\cos bx)^{(n)} =$
$= a^ne^{ax}\cos bx - C_n^1a^{n-1}be^{ax}\sin bx - C_n^2a^{n-2}b^2e^{ax}\cos bx + \ldots$;
при $x = 0$ $r^n\cos n\varphi = a^n - C_n^2a^{n-2}b^2 + C_n^4a^{n-4}b^4 - \ldots$, при
$x = \frac{\pi}{2b}$ $-r^ne^{\frac{\pi}{2b}}\sin n\varphi = -e^{\frac{\pi}{2b}}(C_n^1a^{n-1}b - C_n^3a^{n-3}b^3 + \ldots) \Rightarrow$
$r^n\sin n\varphi = C_n^1a^{n-1}b - C_n^3a^{n-3}b^3 + \ldots$.

1092. Докажем по индукции; при $n = 1$ $(e^{\frac{1}{x}})' = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$;
$n = 2$ $(xe^{\frac{1}{x}})'' = (e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}})' = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}} =$

$= \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$; пусть $(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = (-1)^n\frac{1}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$, $(x^{n-2}e^{\frac{1}{x}})^{(n-1)} =$
$= (-1)^{n-1}\frac{1}{x^n} \Rightarrow (x^n e^{\frac{1}{x}})^{(n+1)} = (nx^{n-1}e^{\frac{1}{x}} - x^{n-2}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} =$
$= n(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} - (x^{n-2}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = n(-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}} - ((-1)^{n-1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^n})' =$
$= n(-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}} + ((-1)^n\frac{-x^{n-2}e^{\frac{1}{x}} - nx^{n-1}e^{\frac{1}{x}}}{x^{2n}} = (-1)^{n+1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+2}}$.

1095. $y' = 2\arcsin x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
$y'' = \frac{2}{1-x^2} + 2\arcsin x\frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^3} \Rightarrow (1-x^2)y'' = 2 + xy' \Rightarrow$
$((1-x^2)y'')^{(n-1)} = (2+xy')^{(n-1)} \Rightarrow$
$(1-x^2)y^{(n+1)} - 2(n-1)xy^{(n)} - (n-1)(n-2)y^{(n-1)} =$
$= xy^{(n)} + (n-1)y^{(n-1)} \Rightarrow (1-x^2)y^{(n+1)} - (2n-1)xy^{(n)} -$
$- (n-1)^2y^{(n-1)} = 0$, $n \geqslant 2$; при $x = 0$ имеем
$y^{(n+1)}(0) = (n-1)^2y^{(n-1)}(0)$; $y'(0) = 0, y''(0) = 2 \Rightarrow$
$y'''(0) = y^V(0) = \ldots = y^{2k-1}(0) = 0$;
$y^{IV}(0) = 4\cdot 2 = 8$, $y^{(6)}(0) = 8\cdot 4^2 = 128, \ldots$
$y^{(2k)}(0) = (2k-2)^2(2k-4)^2\ldots 4^2\cdot 2^2\cdot 2 = 2((2k-2)!!)^2$.

1100. $dy = \frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}^2 x}\frac{b}{a\cos^2 x}dx = \frac{ab}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}dx$,
$d^2y = \frac{ab(a^2-b^2)\sin 2x}{(a^2\cos^2 x+\sin^2 x)^2}dx^2$.

1103. $\rho^2\cos^3\varphi - a^2\sin^3\varphi = 0 \Rightarrow \rho = \pm a\operatorname{tg}^{3/2}\varphi$,
$d\rho = \pm\frac{3}{2}a\operatorname{tg}^{1/2}\varphi\sec^2\varphi d\varphi = \pm\frac{3}{2}a(\operatorname{tg}^{5/2}\varphi + \operatorname{tg}^{1/2}\varphi)d\varphi$,
$d^2\rho = \pm\frac{3}{2}a(\frac{5}{2}\operatorname{tg}^{3/2} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1/2}\varphi)\sec^2\varphi d\varphi^2 =$
$= \pm\frac{3a\sec^2\varphi(5\operatorname{tg}^2\varphi+1)}{4\sqrt{\operatorname{tg}\varphi}}d\varphi^2$.

1106. $dy = \cos z\,dz = a^x\ln a\cos a^x\,dx = 3t^2\ln a\,a^{t^3}\cos a^{t^3}\,dt$;
1. $d^2y = -\sin z\,dz^2 + \cos z\,d^2z$;
2. $d^2y = (a^x\ln^2 a\cos a^x - a^{2x}\ln^2 a\sin a^x)dx^2 + a^x\ln a\cos a^x\,d^2x$;
3. $d^2y = 3\ln a(2ta^{t^3}\cos a^{t^3} + 3t^4\ln a\,a^{t^3}\cos a^{t^3} -$
$- 3t^4\ln a\,a^{2t^3}\sin a^{t^3})dt^2$.

1108. Пусть x_0 — фиксированная точка, тогда $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = x^3 - 3x + 2 - (x_0^3 - 3x_0 + 2) = (x-x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2) - 3(x-x_0) = \Delta x(x^2 + xx_0 + x_0^2 - 3) = \Delta x u(x)$; при $x_0 = 2$, x близко к x_0 $u(x) = x^2 + 2x + 1 > 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, функция возрастает; при $x_0 = 0$, x близко к x_0 $u(x) = x^2 - 3 < 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, функция убывает; при $x_0 = -1$, x близко к x_0 $u(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) \Rightarrow \Delta y = \Delta x^2(x-2) < 0$, — максимум; $x_0 = 1$, x близко к x_0 $u(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) \Rightarrow \Delta y = \Delta x^2(x+2) > 0$, — минимум.

К ГЛАВЕ 4

1113. $\Delta y = x - x_0 - (\ln x - \ln x_0) = \Delta x - \ln\frac{x}{x_0} = \Delta x - \ln(1 + \frac{\Delta x}{x_0}) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 - \frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x_0})}{\Delta x}$; $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x_0})}{\Delta x} = \frac{1}{x_0} \Rightarrow$ при $x_0 > 1$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, функция возрастает; при $x_0 < 1$ функция убывает; при $x_0 = 1$ минимум.

1118. $y(0) = y(\pi) = 1$, $y' = 4^{\sin x}\ln 4\cos x$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$.

1120. $y' = \frac{-2x^5-4x^3(2-x^2)}{x^8} = \frac{2x^2-8}{x^5}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow y' \neq 0$ при $x \in [-1, 1]$; теорема Ролля не выполнена, т. к. при $x = 0$ функция имеет разрыв.

1125. $f(x) = 0$ при $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$; по теореме Ролля $f'(x)$ имеет корни $c_1 \in (1,2)$, $c_2 \in (2,3)$, $c_3 \in (3.4)$; т. к. $f'(x)$ — многочлен третьей степени, других корней нет.

1130. $f'(x) = nx^{n-1}$; $\frac{a^n-0}{a-0} = f'(\xi)$; $a^{n-1} = n\xi^{n-1} \Rightarrow \xi = \frac{a}{\sqrt[n-1]{n}}$.

1133. $\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\xi}$, $\xi \in (\beta, \alpha) \Rightarrow \cos^2\alpha \leqslant \cos^2\xi \leqslant \cos^2\beta \Rightarrow \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta} \leqslant \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\xi} = \mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta \leqslant \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$.

1136. $f(1.1) \approx f(1) + f'(1{,}05)\cdot 0{,}1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{1+1{,}5^2}\cdot 0{,}1 = 0{,}833$.

1148. $y' = \frac{\cos(x+a)\sin(x+b) - \cos(x+b)\sin(x+a)}{\sin^2(x+b)} = \frac{\sin(b-a)}{\sin^2(x+b)}$; если $\sin(x+b) \neq 0$, производная не меняет знака.

1152. $y' = 5(x-2)^4(2x+1)^4 + 8(x-2)^5(2x+1)^3 = (x-2)^4(2x+1)^3(18x-11)$; функция возрастает на $(-\infty, -\frac{1}{2}]$, $[\frac{11}{18}, \infty)$, убывает на $[-\frac{1}{2}, \frac{11}{18}]$.

1160. $y' = 1 - 2\cos x$; $y' \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos x \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}$; функция возрастает на $[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{2}]$, убывает на $[0, \frac{\pi}{3}]$, $[\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$.

1164. $D_f = [0, a]$; $y' = \sqrt{ax - x^2} + \frac{ax-2x^2}{2\sqrt{ax-x^2}} = \frac{x(3a-4x)}{2\sqrt{ax-x^2}}$; функция возрастает на $[0, \frac{3a}{4}]$, убывает на $[\frac{3a}{4}, a]$.

1170. $y' = -2x\sqrt{x^2+2} - x^2\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = -\frac{x(3x^2+4)}{\sqrt{x^2+2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $y' > 0$ при $x < 0$, $y' < 0$ при $x > 0 \Rightarrow y_{\text{макс}} = 0$ при $x = 0$.

1175. $D_f = (-1, \infty)$; $y' = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $y' < 0$ при $x < 0$, $y' > 0$ при $x > 0 \Rightarrow y_{\text{мин}} = 0$ при $x = 0$.

1180. $D_f = [-1,1]$; $y' = x\arcsin x + \frac{x^2-1/2}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{4}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{6}x = x\arcsin x - \frac{\pi}{6} + \frac{2x^2-1+1-x^2-x^2}{4\sqrt{1-x^2}} = x(\arcsin x - \frac{\pi}{6})$; $y' = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$; $y' < 0$ при $0 < x < \frac{1}{2}$, $y' > 0$ при $x < 0$, $x > \frac{1}{2} \Rightarrow y_{\text{мин}} = \frac{3\sqrt{3}-2\pi}{48}$ при $x = \frac{1}{2}$, $y_{\text{макс}} = 0$ при $x = 0$.

1184. $y' = ape^{px} - bpe^{-px} = p\frac{ae^{2px}-b}{e^{px}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow e^{2px} = \frac{b}{a}$; если $ab \leqslant 0$, $y' \neq 0$, экстремумов нет; если $ab > 0$, $x_0 = \frac{1}{2p}\ln\frac{b}{a}$ — стационарная точка; если $a > 0$, $b > 0$, $y' < 0$ при $x < x_0$, $y' > 0$ при $x > x_0$, $y_{\text{мин}} = f(x_0) = 2\sqrt{ab}$; если $a < 0$, $b < 0$, $y' > 0$ при $x < x_0$, $y' < 0$ при $x > x_0$, $y_{\text{макс}} = f(x_0) = -2\sqrt{ab}$.

1187. $y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3)$; $y' = 0$ при $x = 0$, $x = 2$, $x = 3$, $3 \notin [-1,2]$; $f(-1) = -10$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = -7$; $y_{\text{мин}} = -10$, $y_{\text{макс}} = 2$.

1194. $y' = \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{2\operatorname{tg}x}{\cos^2 x} = \frac{2(1-\operatorname{tg}x)}{\cos^2 x}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$; $y' > 0$ при $x < \frac{\pi}{4}$, $y' < 0$ при $x > \frac{\pi}{4} \Rightarrow y_{\text{макс}} = 1$ при $x = \frac{\pi}{4}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} y = -\infty \Rightarrow$ функция не имеет наименьшего значения.

1198. $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = 2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x} > 0$; $f(1) = 0$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} > 0$ при $x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) = 0$.

1203. $1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geqslant \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow f(x) = 1 + x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} \geqslant 0$; $f(0) = 0$; $f'(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$; $f'(x) < 0$ при $x < 0$, $f'(x) > 0$ при $x > 0$, $y_{\text{мин}} = f(0) = 0 \Rightarrow f(x) > 0$ при $x \neq 0$.

1210. Пусть x — первый множитель, $\frac{36}{x}$ — второй множитель, $f(x) = x^2 + (\frac{36}{x})^2 \to \max$, $x > 0$; $f'(x) = 2x - \frac{2(36)^2}{x^3}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^4 = 2(36)^2 \Leftrightarrow x = 6$; $f'(x) < 0$ при $x < 6$, $f'(x) > 0$ при $x > 6 \Rightarrow$ $x = 6$ — точка минимума, множители равны 6 и 6.

1214. Пусть x — сторона основания, h — высота; $v = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}n \Rightarrow h = \frac{4v}{x^2\sqrt{3}}$, $f(x) = S_{\text{полн}} = 2\frac{x^2\sqrt{3}}{4} + 3xh = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} + \frac{4\sqrt{3}v}{x} \to \min$, $x > 0$; $f'(x) = x\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{3}v}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 4v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4v}$; $f'(x) < 0$ при $x < \sqrt[3]{4v}$, $f'(x) > 0$ при $x > \sqrt[3]{4v} \Rightarrow$ при $x = \sqrt[3]{4v}$ полная поверхность минимальна.

1218. Пусть l — образующая, r — радиус основания, h — высота конуса, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$; $S_{\text{сектора}} = S_{\text{бок.п.конуса}} \Rightarrow \pi rl =$

$= \frac{l^2\alpha}{2} \Rightarrow r = \frac{l\alpha}{2\pi},\ h = \sqrt{l^2 - \frac{l^2\alpha^2}{4\pi^2}} = \frac{l}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}$, $V = \frac{\pi}{3}\frac{l^2\alpha^2}{4\pi^2}\frac{l}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\alpha^2} = \frac{l^3\alpha^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}$, $\frac{dV}{d\alpha} = \frac{l^3}{24\pi^2}(2\alpha\sqrt{4\pi^2-\alpha^2} - \frac{\alpha^3}{\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}}) = \frac{l^3\alpha(2\pi^2-3\alpha^2)}{3\pi^2\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}} = 0 \Rightarrow \alpha = \alpha_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 293°56'$; $V(0) = V(2\pi) = 0 \Rightarrow$ при $\alpha = \alpha_0$ объем наибольший.

1222. Пусть r — радиус основания, h — высота конуса; $0 \leqslant h \leqslant 2R$; $r = \sqrt{R^2-(h-R)^2} = \sqrt{2Rh-h^2}$. $V = \frac{\pi}{3}(2Rh-h^2) = \frac{\pi}{3}(2Rh^2-h^3)$; $\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{3}(4Rh-3h^2) = 0 \Rightarrow h = \frac{4}{3}R$; $V(0) = V(2R) = 0 \Rightarrow$ при $h = \frac{4}{3}R$ объем наибольший.

1226. Пусть A_t и B_t — положение, соответственно, автомобиля и поезда в момент времени t. $A_tB = 200-80t$, $BB_t = 50t$; по теореме косинусов $f(t) = A_tB_t^2 = (200-80t)^2 + 2500t^2 - 2(200-80t)50t\frac{1}{2} = 12900t^2 - 42000t + 40000$, $f'(t) = 25800t - 42000 = 0$, $t = \frac{42000}{25800} = 1\frac{27}{43}$ ч $\approx$ 1 ч 38 мин.

1232. Пусть α — угол при вершине конуса, R — радиус шара, r — радиус основания конуса, h — высота, l — образующая. Из подобия треугольников следует $\frac{R}{r} = \frac{h-R}{l} = \frac{\sqrt{l^2-r^2}-R}{l}$, $lR = r\sqrt{l^2-r^2} - Rr$, $R(l+r) = r\sqrt{l^2-r^2}$, $R^2(l^2+2lr+r^2) = r^2R^2 - r^4$, $(R^2-r^2)l^2 + 2R^2rl + r^2(r^2+R^2) = 0$, $l_1 = -r < 0$, $l_2 = r\frac{r^2+R^2}{r^2-R^2}$, $S = \pi rl = \pi\frac{r^4+R^2r^2}{r^2-R^2}$; $S'_r = \pi\frac{(4r^3+2R^2r)(r^2-R^2)-2r(r^4+R^2r^2)}{(r^2-R^2)^2} = \frac{2r(r^4-2R^2r^2-R^4)}{(r^2-R^2)^2} = 0$, $r^2 = R^2 \pm \sqrt{2R^4}$, $r_1^2 = R^2(1-\sqrt{2}) < 0$, $r_2^2 = R^2(1+\sqrt{2})$, $r = R\sqrt{1+\sqrt{2}}$ — точка минимума; $l = r\frac{r^2+R^2}{r^2-R^2} = R\sqrt{1+\sqrt{2}}\frac{R^2(2+\sqrt{2})}{R^2\sqrt{2}} = R(\sqrt{2}+1)^{3/2}$, $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{l}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$, $\alpha = 2\arcsin(\sqrt{2}-1) \approx 49°$.

1237. Пусть a и b — отрезки, отсекаемые прямой на осях Ox и Oy, тогда уравнение прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Leftrightarrow bx + ay = ab$; $x = 1$, $y = 4 \Rightarrow b + 4a = ab$, $b = \frac{4a}{a-1}$, $f(a) = a + b = \frac{a^2+3a}{a-1}$; $f'(a) = \frac{a^2-2a-3}{(a-1)^2} = 0$ $a_1 = -1 < 0$, $a_2 = 3$ — точка минимума, $b = 6$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$ — искомое уравнение.

1243. Пусть α — центральный угол, R — радиус дуги, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$; $a = R\alpha$, $S_{\text{сегмента}} = \frac{R^2\alpha}{2} - \frac{R^2\sin\alpha}{2} = \frac{a^2}{2\alpha^2}(\alpha - \sin\alpha)$; $S' = \frac{a^2}{2}\frac{2\sin\alpha - \alpha\cos\alpha - \alpha}{\alpha^3}$; $S'(\pi) = 0$, $S'(\alpha) > 0$ при $\alpha < \pi$, $S'(\alpha) < 0$ при $\alpha > \pi \Rightarrow$ при $\alpha = \pi$ объем наибольший.

1246. Пусть x — расстояние от лагеря до точки высадки, t — время, тогда $t = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{(15-x)^2+81}}{4}$, $t' = \frac{1}{5} - \frac{15-x}{4\sqrt{(15-x)^2+81}} = 0$, $5(15-x) = 4\sqrt{(15-x)^2+81}$, $25(15-x)^2 = 16(15-x)^2 + 16\cdot 81, (15-x)^2 = 16\cdot 9$, $15-x = 12$, $x = 3$ — точка минимума.

1252. Пусть x — ширина текста, y — высота текста, $xy = S$, $f(x) = (x+2a)(y+2b) = xy + 2ay + 2bx + 4ab = S + 2bx + \frac{2aS}{x} + 4ab$, $f'(x) = 2b - \frac{2aS}{x^2} = 0$, $x^2 = \frac{aS}{b}$, $x = \sqrt{\frac{aS}{b}}$ — точка минимума, следовательно ширина страницы $2a + \sqrt{\frac{aS}{b}}$, высота страницы $2b + \sqrt{\frac{bS}{a}}$.

1258. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$; пусть $b > a$; $x'_t = -a\sin t$, $y'_t = b\cos t$, $y'_x = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$; $y = b\sin t + \frac{a}{b}\operatorname{tg} t(x - a\cos t)$ — уравнение нормали в точке $(a\cos t, b\sin t)$; $y = b\sin t + \frac{a}{b}x\operatorname{tg} t - \frac{a^2}{b}\sin t = \frac{b^2-a^2}{\sin}t + \frac{a}{b}x\operatorname{tg} t$; $ax\operatorname{tg} t - by + (b^2-a^2)\sin t = 0$; $ax\sin t - by\cos t + \frac{b^2-a^2}{2}\sin 2t = 0$; $\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}x - \frac{b\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}y + \frac{(b^2-a^2)\sin 2t}{2\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}} = 0$ — нормальный вид уравнения нормали; расстояние от начала координат до нормали $d = \frac{(b^2-a^2)\sin 2t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}$;

$$d' = \frac{b^2-a^2}{2}\,\frac{2\cos 2t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t} - \frac{\sin 2t}{2\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}(a^2-b^2)\sin 2t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}} =$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2}\,\frac{4\cos 2t(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)-(a^2-b^2)\sin^2 t}{(\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t})^3} =$$

$$= \frac{a^2-b^2}{2}\,\frac{2\cos 2t(a^2+b^2+(b^2-a^2)\cos 2t)+(b^2-a^2)\sin^2 2t}{(\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t})^3} =$$

$$= \frac{a^2-b^2}{2}\,\frac{2\cos^2 2t(b^2-a^2)+2(a^2+b^2)\cos 2t+(b^2-a^2)\sin^2 2t}{(\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t})^3} =$$

$$= \frac{a^2-b^2}{2}\,\frac{(b^2-a^2)\cos^2 2t+2(a^2+b^2)\cos 2t+(b^2-a^2)}{(\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t})^3} = 0,$$

$\cos 2t = \frac{(a\pm b)^2}{a^2-b^2}$; $\frac{a+b}{a-b} < -1$, $\cos 2t = \frac{a-b}{a+b}$ соответствует максимальному расстоянию;

$$\sin 2t = \sqrt{1 - \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b},$$

$$\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = \sqrt{\frac{a^2+b^2+(b^2-a^2)\cos 2t}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + b^2 + \frac{(b^2-a^2)(a-b)}{a+b}} = \sqrt{ab},$$

$$d_{\text{макс}} = \frac{b^2-a^2}{2}\,\frac{2\sqrt{ab}}{(a+b)\sqrt{ab}} = b - a.$$

1264. $y' = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} 2\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0$ ($|1-x^2| = x^2-1$ при $x \geqslant 1$) $\Rightarrow y = \text{const}$, $y = y(1) = 2\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \pi$.

1269. $y' = 1 - \frac{a^2}{x^2}$, $y' = 0$ при $x = \pm a$; $y'' = \frac{2a^2}{x^3}$, $y''(a) = \frac{2}{a} > 0 \Rightarrow y_{\text{мин}} = 2a$ при $x = a$, $y''(a) = -\frac{2}{a} < 0 \Rightarrow y_{\text{макс}} = -2a$ при $x = -a$.

1275. $y = x^{\frac{1}{x}}$, $\ln y = \frac{\ln x}{x}$, $y' = x^{\frac{1}{x}} \frac{1-\ln x}{x^2} = 0$ при $x = e$; $y'' = x^{\frac{1}{x}} \frac{(1-\ln x)^2 + x(2\ln x - 3)}{x^4}$, $y''(e) = -e^{\frac{1}{e}} \frac{1}{e^3} < 0 \Rightarrow y_{\text{макс}} = e^{\frac{1}{e}}$ при $x = e$.

1280. $y' = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1)$, $y'' = 2\ln x + 1 + 2 = 2\ln x + 3$, $y''(1) = 3 > 0 \Rightarrow$ функция выпукла вниз; $y''(\frac{1}{e^2}) = -1 < 0 \Rightarrow$ функция выпукла вверх.

1284. $P(x) = a_0x^{2n} + a_1x^{2n-2} + \ldots + a_{n-1}x^2 + a_n$, $y = P(x) + ax + b = a_0x^{2n} + a_1x^{2n-2} + \ldots + a_{n-1}x^2 + ax + b + a_n$, $y' = 2na_0x^{2n-1} + (2n-2)a_1x^{2n-3} + \ldots + 2a_{n-1}x + a$, $y'' = 2n(2n-1)a_0x^{2n-2} + (2n-2)(2n-3)a_1x^{2n-4} + \ldots + 2a_{n-1} > 0 \Rightarrow$ функция выпукла вниз.

1291. $y' = 15x^4 - 20x^3 + 3$, $y'' = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x-1)$; $y'' > 0$ при $x > 1, y'' < 0$ при $x < 1 \Rightarrow (1,-1)$ — точка перегиба, на $(-\infty,1)$ функция выпукла вверх, на $(1,\infty)$ — вниз.

1301. $y' = \frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$, $y'' = \frac{(-2-2x)(x^2+1)^2 - 4x(x^2+1)(1-2x-x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2x^3+6x^2-6x-2}{(x^2+1)^3} = \frac{2(x-1)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^3}$; $y'' = 0$ при $x_{1,2} = -2 \mp \sqrt{3}, x_3 = 1$; $y_1 = y(x_1) = \frac{-2-\sqrt{3}+1}{(-2-\sqrt{3})^2+1} = -\frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})} = -\frac{(1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{4} = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$, $y_2 = \frac{-2+\sqrt{3}+1}{(-2+\sqrt{3})^2+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{4(2-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$, $y_3 = 1$; $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2\sqrt{3}}{4\cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$, $\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} = \frac{1-\frac{1+\sqrt{3}}{4}}{1-\sqrt{3}+2} = \frac{3-\sqrt{3}}{4(3-\sqrt{3})} = \frac{1}{4}$.

1306. $y = -\frac{\alpha x}{x^2+\beta}$, $y' = -\frac{\alpha(x^2+\beta) - 2\alpha x^2}{(x^2+\beta)^2} = \alpha\frac{x^2-\beta}{(x^2+\beta)^2}$, $y'' = \alpha\frac{2x(x^2+\beta)^2 - 4x(x^2+\beta)(x^2-\beta)}{(x^2+\beta)^4} = \alpha\frac{2x(3\beta-x^2)}{(x^2+\beta)^3}$; $y''(2) = \frac{4(3\beta-4)}{(x^2+\beta)^2} = 0 \Rightarrow \beta = \frac{4}{3}$; $y(2) = 2{,}5 \Rightarrow \alpha = -\frac{y}{x}(x^2+\beta) = -\frac{5}{4}(4+\frac{4}{3}) = -\frac{20}{3}$; $y''(x) = 0$ при $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{3\beta} = \pm 2$; точки перегиба также $(0,0)$ и $(-2,-2{,}5)$.

1315. $\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'}{\varphi'},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dxdt}:\frac{dx}{dt}=\frac{\psi''\varphi'-\varphi''\psi'}{\varphi'^3}=\frac{\psi''\varphi'-\varphi''\psi'}{\varphi'}\frac{1}{\varphi'^2}\Rightarrow$ $\frac{\psi''\varphi'-\varphi''\psi'}{\varphi'}$ меняет знак при тех же t, что и y''_{xx}.

1320. $f(1)=1,\ f(2)=8,\ \varphi(1)=2,\ \varphi(2)=5,\ f'(x)==3x^2,\ \varphi'(x)=2x,\ \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{3}{2}x,\ \frac{f(2)-f(1)}{\varphi(2)-\varphi(1)}=\frac{7}{3};\ \frac{3}{2}x=\frac{7}{3}\Rightarrow x==\frac{14}{9}\in(1.2)$.

1323. $f'(x)=\frac{2x}{1+x^2},\ \varphi'(x)=\frac{1}{1+x^2}.\ \frac{f'}{\varphi'}=2x<1$ на $[x,\frac{1}{2}]$, $\frac{f'}{\varphi'}>1$ на $[\frac{1}{2},x]\Rightarrow\frac{\Delta f}{\Delta\varphi}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}<1$ на $[x,\frac{1}{2}]$, $\frac{\Delta f}{\Delta\varphi}>1$ на $[\frac{1}{2},x]$; на $[\frac{1}{2},1]$ $\Delta f=\ln 2-\ln(1+x^2)>\Delta\varphi=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}x\Rightarrow\operatorname{arctg}x--\ln x>\frac{\pi}{4}-\ln 2$.

1330. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg}x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{1-\sec^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2 x(1-\cos x)}{\cos^2 x-1}==\lim\limits_{x\to0}\frac{-\cos^2 x}{1+\cos x}=-\frac{1}{2}$.

1337. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}=\cos a\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{1}{x-a}}{\frac{e^x}{e^x-e^a}}=\cos a\lim\limits_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{e^x(x-a)}==\frac{\cos a}{e^a}\lim\limits_{x\to a}\frac{e^x}{1}=\cos a$.

1345. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-\frac{1}{1-x}+\frac{\pi}{2\cos^2\frac{\pi x}{2}}}{-\frac{\pi}{\sin^2\pi x}}==\frac{1}{\pi}\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{\sin^2\pi x}{1-x}-\frac{\pi\sin^2\pi x}{2\cos^2\frac{\pi x}{2}}\right)=\frac{1}{\pi}\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{\sin^2\pi x}{1-x}-2\pi\sin^2\frac{\pi x}{2}\right)==\frac{1}{\pi}\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin^2\pi x}{1-x}-2=\frac{1}{\pi}\lim\limits_{x\to1}\frac{2\pi\sin\pi x\cos\pi x}{-1}-2=0-2=-2$.

1352. $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}==\lim\limits_{x\to0}\frac{-x\sin x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}(\frac{-\sin x}{2})=0$.

1358. $y=x^{\sin x}\Rightarrow\ln y=\sin x\ln x;\ \lim\limits_{x\to0}\ln y=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}==\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{x\cos x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}y=1$.

1362. $y=(2-\frac{x}{a})^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}\Rightarrow\ln y=\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}\ln(2-\frac{x}{a});\ \lim\limits_{x\to a}\ln y==\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln(2-\frac{x}{a})}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2a}}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{1}{2-\frac{x}{a}}(-\frac{1}{a})}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2a}}\frac{\pi}{2a}}=\lim\limits_{x\to a}\frac{2a\sin^2\frac{\pi x}{2a}}{(2a-x)\pi}=\frac{2}{\pi}\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}y==e^{\frac{2}{\pi}}$.

1369. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-e\ln\ln(e+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{e}{(e+x)\ln(e+x)}}{2x}==\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{e(1+\ln(e+x))}{(e+x)^2\ln^2(e+x)}}{2}=\frac{-1+\frac{2}{e}}{2}=\frac{2-e}{2e}\neq0\Rightarrow$ бесконечно малая имеет второй порядок.

1374. $f(x)-\varphi(x)=\sqrt{x^6+2x^4+7x^2+1}-(x^3+x)==\frac{x^6+2x^4+7x^2+1-x^6-2x^4-x^2}{\sqrt{x^6+2x^4+7x^2+1}+x^3+x}=\frac{6x^2+1}{\sqrt{x^6+2x^4+7x^2+1}+x^3+x}\sim\frac{3}{x}$;

$f(115) \approx 1520990$, $f(120) \approx 1728120$; $|f(100)-\varphi(100)| \approx \approx \frac{3}{100} = 0{,}03$.

1379. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$; $\lim\limits_{x\to-1} y = \infty \Rightarrow x = -1$ — вертикальная асимптота; $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}(y - \frac{1}{2}x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-2x^2-x}{2(x+1)^2} = -1 \Rightarrow y = \frac{x}{2} - 1$ — наклонная асимптота.

1386. D_y : $e + \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$, $x < -\frac{1}{e}$; $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{e}} y = -\infty \Rightarrow x = -\frac{1}{e}$ — вертикальная асимптота; $\lim\limits_{x\to0} y = \lim\limits_{x\to0} \frac{\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\frac{1}{e+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0} \frac{x}{xe+1} = 0 \Rightarrow x = 0$ не является асимптотой; $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(e+\frac{1}{x}\right) = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right) - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{e+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{e} \Rightarrow y = x + \frac{1}{e}$ — наклонная асимптота.

1393. $\lim\limits_{t\to0} \frac{1}{t} = \infty$, $\lim\limits_{t\to0} \frac{t}{t+1} = 0 \Rightarrow y = 0$ — горизонтальная асимптота; $\lim\limits_{t\to-1} \frac{t}{t+1} = \infty$, $\lim\limits_{t\to-1} \frac{1}{t} = -1 \Rightarrow x = -1$ — вертикальная асимптота.

1397. $\lim\limits_{t\to\pm2} \frac{t-8}{t^2-4} = \lim\limits_{t\to\pm2} \frac{3}{t(t^2-4)} = \infty$, $a_1 = \lim\limits_{t\to2} \frac{y}{x} = \lim\limits_{t\to2} \frac{3}{t(t-8)} = -\frac{1}{4}$, $b_1 = \lim\limits_{t\to2}\left(\frac{3}{t(t^2-4)} + \frac{t-8}{4(t^2-4)}\right) = \lim\limits_{t\to2} \frac{12+t^2-8t}{4t(t^2-4)} = \lim\limits_{t\to2} \frac{t-6}{4t(t+2)} = -\frac{1}{8} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$ — наклонная асимптота; $a_2 = \lim\limits_{t\to-2} \frac{y}{x} = \lim\limits_{t\to-2} \frac{3}{t(t-8)} = \frac{3}{20}$, $b_2 = \lim\limits_{t\to-2}\left(\frac{3}{t(t^2-4)} - \frac{3(t-8)}{20(t^2-4)}\right) = \lim\limits_{t\to-2} \frac{60-3t^2+24t}{20t(t^2-4)} = \lim\limits_{t\to-2} \frac{-3(t-10)}{20t(t+2)} = \frac{9}{40} \Rightarrow y = \frac{3}{20}x + \frac{9}{40}$ — наклонная асимптота; $\lim\limits_{t\to0} \frac{3}{t(t^2-4)} = \infty$, $\lim\limits_{t\to0} \frac{t-8}{t^2-4} = 2 \Rightarrow x = 2$ — вертикальная асимптота.

1402. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$; $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow$ функция не определена при $x = \pm1$; $y(-x) = y(x) \Rightarrow$ график симметричен относительно оси ординат; $\lim\limits_{x\to\pm1} y = \infty \Rightarrow x = -1$, $x = 1$ — вертикальные асимптоты; $\lim\limits_{x\to\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ — горизонтальная асимптота; $y' = \frac{2x(x^2-1)-2x^3}{(x^2-1)^2} = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$, $y' > 0$ на $(-\infty,-1)$, $(-1,0) \Rightarrow$ функция возрастает, $y' < 0$ на $(0,1)$, $(1,\infty) \Rightarrow$ функция убывает; $y_{\text{макс}} = 0$ при $x = 0$; $y'' = -2\frac{(x^2-1)^2-4x^2(x^2-1)}{(x^2-1)^4} =$

$= 2\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}$, $y'' > 0$ на $(-\infty,-1)$, $(1,\infty) \Rightarrow$ функция выпукла вниз, $y'' < 0$ на $(-1,1) \Rightarrow$ функция выпукла вверх. Перегибов нет.

1409. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$; $x+1 \neq 0 \Rightarrow$ функция не определена при $x = -1$; $\lim\limits_{x\to-1} y = \infty \Rightarrow x = -1$ — вертикальная асимптота; $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}(y - \frac{1}{2}x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^2-x}{2(x+1)^2} = -1 \Rightarrow y = \frac{x}{2} - 1$ — наклонная асимптота; $y' = \frac{3x^2(x+1)^2-2(x+1)x^3}{2(x+1)^4} = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$, $y' > 0$ на $(-\infty,-3)$, $(-1,0)$, $(0,\infty) \Rightarrow$ функция возрастает на $(-\infty,-3)$, $(-1,\infty)$; $y' < 0$ на $(-3,-1) \Rightarrow$ функция убывает на этом множестве; $y_{\text{макс}} = -\frac{27}{8}$ при $x = -3$; $y'' = \frac{(2x(x+3)+x^2)(x+1)^3-3(x+1)^2x^2(x+3)}{2(x+1)^6} = \frac{3x}{(x+1)^4}$, $y'' > 0$ на $(0,\infty) \Rightarrow$ функция выпукла вниз, $y'' < 0$ на $(-\infty,-4)$, $(-4,0) \Rightarrow$ функция выпукла вверх. $x = 0$ — точка перегиба.

1417. $y = x^2e^{-x}$; функция определена везде; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0$ — горизонтальная асимптота; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$; $y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2-x)x, y' > 0$ на $(0,2) \Rightarrow$ функция возрастает на $(0,2)$; $y' < 0$ на $(-\infty,0)$, $(2,\infty) \Rightarrow$ функция убывает на этих множествах; $y_{\text{макс}} = \frac{4}{e^2}$ при $x = 2$; $y_{\text{мин}} = 0$ при $x = 0$; $y'' = e^{-x}(x^2-4x+2)$, $y'' = 0$ при $x = 2 \pm \sqrt{2}$, $y'' > 0$ на $(-\infty, 2-\sqrt{2})$, $(2+\sqrt{2},\infty) \Rightarrow$ функция выпукла вниз, $y'' < 0$ на $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}) \Rightarrow$ функция выпукла вверх, $x = 2 \pm \sqrt{2}$ — точки перегиба.

1425. $y = x + \frac{\ln x}{x}$; функция определена при $x > 0$; $\lim\limits_{x\to0} = -\infty \Rightarrow x = 0$ — вертикальная асимптота; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{\ln x}{x^2}\right) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(y - x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow y = x$ — наклонная асимптота; $y' = 1 + \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2+1-\ln x}{x^2}$; пусть $f(x) = x^2 + 1 - \ln x$, докажем, что $f(x) > 0$; $f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$, $f'(x) = 0$ при $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, это точка минимума, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{\ln 2}{2} > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow y' > 0$, функция возрастает всюду; $y'' = \frac{2\ln x-3}{x^3}$, $y'' = 0$ при $x = e^{\frac{3}{2}}$, $y'' > 0$ на $(e^{\frac{3}{2}},\infty) \Rightarrow$ функция выпукла вниз, $y'' < 0$ на $(0,e^{\frac{3}{2}}) \Rightarrow$ функция выпукла вверх, $x = e^{\frac{3}{2}}$ — точка перегиба.

1430. $y = \cos x - \ln\cos x$; функция определена при $\cos x > 0$, т. е. при $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$; $\lim\limits_{x \to \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n} = \infty \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ — вертикальные асимптоты; $y' = -\sin x + \operatorname{tg} x = \frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}$, $f'(x) = 0$ при $x = 2\pi n$, это точки минимума, $y'' = \frac{1}{\cos^2 x} - \cos x = \frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x} \geqslant 0 \Rightarrow$ функция выпукла вниз на каждом интервале области определения.

1437. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2} + 1$; функция определена всюду; $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2} + 1 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+1)^2 - x^2}{\sqrt[3]{(x+1)^4} + \sqrt[3]{(x+1)^2 x^2} + \sqrt[3]{x^4}} + 1 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+1}{\sqrt[3]{(x+1)^4} + \sqrt[3]{(x+1)^2 x^2} + \sqrt[3]{x^4}} + 1 = 1 \Rightarrow y = 1$ — горизонтальная асимптота; $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{2(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1})}{3\sqrt[3]{x(x+1)}} \neq 0$, $y' > 0$ на $(-1,0) \Rightarrow$ функция возрастает на $(-1,0)$; $y' < 0$ на $(-\infty,-1),(0,\infty) \Rightarrow$ функция убывает на этих множествах; $y_{\text{макс}} = 2$ при $x = 0$; $y_{\text{мин}} = 0$ при $x = -1$, минимум и максимум "острые"; $y'' = \frac{4}{9\sqrt[3]{(x+1)^4}} + \frac{4}{9\sqrt[3]{x^4}} = \frac{4(\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{(x+1)^4})}{9\sqrt[3]{x^4(x+1)^4}}$, $y'' = 0$ при $x = -\frac{1}{2}$, $y'' > 0$ на $(0,\infty)$, $(-\frac{1}{2},0) \Rightarrow$ функция выпукла вниз, $y'' < 0$ на $(-\infty,-1)$, $(-1,-\frac{1}{2}) \Rightarrow$ функция выпукла вверх, $x = -\frac{1}{2}$ — точка перегиба.

1443. $y^2 = x^3 - x$, $y = \pm\sqrt{x^3 - x} \Rightarrow$ функция двузначна, график симметричен относительно оси абсцисс; $x^3 - x \geqslant 0 \Rightarrow$ функция определена на $[-1,0] \cup [1,\infty)$; пусть $y > 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \infty \Rightarrow$ асимптот нет; $y' = \frac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x}}$, $y' = 0$ при $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \notin D_f$, $y' > 0$ на $(-1,-\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(1,\infty) \Rightarrow$ положительная ветвь функции возрастает на этих промежутках; $y' < 0$ на $(-\frac{1}{\sqrt{3}},0) \Rightarrow$ функция убывает на этом множестве; $|y|_{\text{макс}} = \frac{\sqrt[4]{12}}{3}$ при $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $y'' = \frac{3x^4 - 6x^2 - 1}{4\sqrt{(x^3-x)^3}}$, $y'' = 0$ при $x = \sqrt{\frac{3+\sqrt{12}}{3}}$, это абсцисса точек перегиба.

1448. $y^2 = x^2\frac{a+x}{a-x}$, $y = \pm x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \Rightarrow$ функция двузначна, график симметричен относительно оси абсцисс; начало координат — точка самопересечения; $\frac{a+x}{a-x} \geqslant 0 \Rightarrow$ функция определена на $[-a,a) \Rightarrow$ наклонных асимптот нет; $\lim\limits_{x\to a} y = \infty \Rightarrow x = a$ — вертикальная асимптота; исследуем ветвь, соответствующую знаку '+'; $y' = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} + \frac{x}{2}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\frac{a-x+a+x}{(a-x)^2} =$

$= \frac{a^2+ax-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}(a-x)}$, $y' = 0$ при $x = a\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $x = a\frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin D_f$, $y' >$ > 0 на $(a\frac{1-\sqrt{5}}{2}, a)$ $\Rightarrow$ эта ветвь функции возрастает на этом промежутке; $y' < 0$ на $(-a, a\frac{1-\sqrt{5}}{2})$ $\Rightarrow$ функция убывает на этом промежутке; $|y|_{\text{макс}} = a\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}$ при $x = a\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; $y'' >$ $> 0 \Rightarrow$ перегибов нет.

1453. $y^2(2a-x) = x^3$, $y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}$ $\Rightarrow$ функция двузначна, график симметричен относительно оси абсцисс; $\frac{x^3}{2a-x} \geqslant$ $\geqslant 0 \Rightarrow$ функция определена на $[0, 2a)$ $\Rightarrow$ наклонных асимптот нет; $\lim\limits_{x\to 2a} y = \infty \Rightarrow x = 2a$ — вертикальная асимптота; исследуем ветвь, соответствующую знаку '+'; $y' =$ $= \sqrt{\frac{2a-x}{x^3}}\frac{3x^2(2a-x)+x^3}{(2a-x)^2} = \frac{\sqrt{x}(3a-x)}{\sqrt{(2a-x)^3}}$; $y' > 0$ на D_f $\Rightarrow$ эта ветвь функции возрастает; экстремумов нет; $y'(0) = 0 \Rightarrow$ начало координат — точка возврата; $y'' > 0 \Rightarrow$ перегибов нет.

1459. $y^2 = 2exe^{-2x}$, $y = \pm\sqrt{2ex}e^{-x}$ $\Rightarrow$ функция двузначна, график симметричен относительно оси абсцисс; $2ex \geqslant 0 \Rightarrow$ функция определена на $[0, \infty)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ — горизонтальная асимптота; исследуем ветвь, соответствующую знаку '+'; $y' = \sqrt{2e}\left(\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}e^{-x}\right) = \frac{\sqrt{2e}e^{-x}(1-2x)}{2\sqrt{x}}$, $y' = 0$ при $x = \frac{1}{2}$, $y' > 0$ на $[0, \frac{1}{2})$ $\Rightarrow$ эта ветвь функции возрастает на этом промежутке; $y' < 0$ на $(\frac{1}{2}, \infty)$ $\Rightarrow$ функция убывает на этом промежутке; $|y|_{\text{макс}} = 1$ при $x = \frac{1}{2}$; $y'' =$ $= \frac{\sqrt{2e}}{2}\frac{e^{-x}(2x-3)\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}(1-2x)}{x} = \frac{\sqrt{2e}e^{-x}(4x^2-4x-1)}{2x\sqrt{x}} = 0$ при $x = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, это абсцисса точек перегиба.

1463. $y = \begin{cases} 1 - xe^{-\frac{1}{|x|}-\frac{1}{x}}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - xe^{-\frac{2}{x}}, x > 0 \\ 1 - x, x \leqslant 0 \end{cases}$;
функция определена всюду; при $x < 0$ график совпадает с прямой $y = 1 - x$; $(0,1)$ — угловая точка; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y}{x} =$ $= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - e^{-\frac{2}{x}}\right) = -1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - xe^{-\frac{2}{x}} + x\right) = 1 -$ $- \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{-\frac{2}{x}} - 1\right) = 3 \Rightarrow y = -x + 3$ — наклонная асимптота; при $x > 0$ $y' = -e^{-\frac{2}{x}} - xe^{-\frac{2}{x}}\frac{2}{x^2} = -e^{-\frac{2}{x}}\frac{2+x}{x}$, $y' < 0$ на $(0, \infty)$ $\Rightarrow$ функция убывает на этом промежутке; $y'' =$ $= -\frac{4e^{-\frac{2}{x}}}{x^3} < 0$ при $x > 0 \Rightarrow$ график выпуклый вверх.

1468. $x = te^t$, $y = te^{-t}$; $x(-t) = -y(t)$, $y(-t) = -x(t) \Rightarrow$ график симметричен относительно прямой $y = -x$; $x'_t = e^t(t+1), x'_t = 0$ при $t = -1$, $x_{\text{мин}} = -\frac{1}{e}$ при $t = -1$; $y'_t = e^{-t}(1-t)$, $y'_t = 0$ при $t = 1$, $y_{\text{макс}} = \frac{1}{e}$ при $t = 1$; $y'_x = e^{-2t}\frac{1-t}{1+t}$; $\lim\limits_{t\to-\infty} x = 0$, $\lim\limits_{t\to-\infty} y = -\infty \Rightarrow x = 0$ — вертикальная асимптота; $\lim\limits_{t\to+\infty} y = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} x = +\infty \Rightarrow y = 0$ — горизонтальная асимптота; при $t > 1$ $x(t)\uparrow$, $e < x < +\infty$, $y(t)\downarrow$, $0 < y < \frac{1}{2}$; при $-1 < t < 1$ $x(t)\uparrow$, $-\frac{1}{e} < x < e$, $y(t)\uparrow$, $-e < y < \frac{1}{e}$; $y_{\text{макс}} = \frac{1}{e}$ при $x = e$; при $-\infty < t < -1$ $x(t)\downarrow$, $-\frac{1}{e} < x < 0$, $y(t)\uparrow, -\infty < y < -e$, $x_{\text{мин}} = -\frac{1}{e}$ при $y = -e$; функция определена при $x \geqslant -\frac{1}{e}$, при $-\frac{1}{e} < x < 0$ функция двузначна, при $x \geqslant 0$ однозначна; $y''_{xt} = -2e^{-2t}\frac{1-t}{1+t} + e^{-2t}\frac{-1-t-1+t}{(1+t)^2} = 2e^{-2t}\frac{t^2-2}{(1+t)^2}$; $y'' = 0$ при $t = \pm\sqrt{2} \Rightarrow$ график имеет две точки перегиба.

1471. $\rho = a\operatorname{tg}\varphi$; $\operatorname{tg}\varphi \geqslant 0 \Rightarrow$ функция определена на $[0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$; $x = \rho\cos\varphi = a\sin\varphi$, $y = \rho\sin\varphi = a\operatorname{tg}\varphi\sin\varphi$; $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} x = a$, $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} y = \infty \Rightarrow x = a$ — вертикальная асимптота; $\rho(\varphi+\pi) = a\operatorname{tg}(\varphi+\pi) = a\operatorname{tg}\varphi \Rightarrow$ график симметричен относительно начала координат, $x = -a$ — также вертикальная асимптота; $\rho'_\varphi = \frac{a}{\cos^2\varphi} > 0 \Rightarrow$ радиус возрастает на $[0, \frac{\pi}{2})$, $[\pi, \frac{3\pi}{2})$.

1475. $\rho = \sqrt{\frac{\pi}{\varphi}}$; функция определена при $\varphi > 0$; $\lim\limits_{\varphi\to0} = \infty \Rightarrow y = 0$ — горизонтальная асимптота; $\rho'_\varphi = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\varphi\sqrt{\varphi}} < 0 \Rightarrow$ радиус убывает; $x = \frac{\sqrt{\pi}\cos\varphi}{\sqrt{\varphi}}$, $y = \frac{\sqrt{\pi}\sin\varphi}{\sqrt{\varphi}}$, $x'_\varphi = -\sqrt{\pi}\frac{2\varphi\sin\varphi+\cos\varphi}{2\varphi\sqrt{\varphi}}$, $y'_\varphi = \sqrt{\pi}\frac{2\varphi\cos\varphi-\sin\varphi}{2\varphi\sqrt{\varphi}}$, $y'_x = \frac{\sin\varphi-2\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi+2\varphi\sin\varphi}$, $y''_{x\varphi} = \frac{4\varphi^2-1}{(\cos\varphi+2\varphi\sin\varphi)^2} = 0$ при $\varphi = \frac{1}{2}$, $\rho(\frac{1}{2}) = \sqrt{2\pi} \Rightarrow (\sqrt{2\pi}, \frac{1}{2})$ — точка перегиба.

1481. $(x^2+y^2)(x^2-y^2)^2 = 4x^2y^2$; $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi \Rightarrow x^2+y^2 = \rho^2$, $x^2-y^2 = \rho^2\cos 2\varphi$, $4x^2y^2 = \rho^2\sin^2 2\varphi$; $\rho^2(\rho^2\cos 2\varphi)^2 = \rho^2\sin^2 2\varphi \Leftrightarrow \rho^4\cos^2 2\varphi = \sin^2 2\varphi \Leftrightarrow \rho = \sqrt[4]{\operatorname{tg}^2 2\varphi} = \sqrt{|\operatorname{tg} 2\varphi|}$; функция определена при $\varphi \neq \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$; $\rho(\varphi+\frac{\pi}{4}) = \rho(\varphi) \Rightarrow$ функция периодична с периодом $T = \frac{\pi}{4}$, поэтому ее график симметричен относительно осей координат и биссектрис координатных углов; $x = \sqrt{|\operatorname{tg} 2\varphi|}\cos\varphi$, $y = \sqrt{|\operatorname{tg} 2\varphi|}\sin\varphi$; $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{4}} x =$

$= \lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{4}} y = \infty, \lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{4}} \frac{y}{x} = \lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\varphi = 1, \lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{4}} (y-x) =$
$= \lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{4}} \sqrt{|\operatorname{tg}2\varphi|}(\sin\varphi - \cos\varphi) = \lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\operatorname{tg}^2\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}(\operatorname{tg}\varphi - 1)\cos\varphi =$
$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ прямая $y = x - \frac{1}{\sqrt{2}}$ — наклонная асимптота; из соображений симметрии линия имеет четыре наклонные асимптоты $(x \pm y)^2 = \frac{1}{2}$; линия состоит из четырех ветвей, соответствующих $\frac{\pi n}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{4}$, $n = 0,1,2,3$; начало координат — четырехкратная точка самопересечения.

1488. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \forall a \in \mathbf{R}$ $\exists x : f(x) = a$; $f'(x) > 0 \Rightarrow$ такой x единствен. $f(x) = x^3 + 3x - 1$, $f(0{,}31) = -0{,}007$, $f(0{,}32) = 0{,}048 \Rightarrow 0{,}31 < x < 0{,}32$.

1494. $x = \varepsilon\sin x + a \Leftrightarrow a = x - \varepsilon\sin x$; пусть $f(x) = x - \varepsilon\sin x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $f'(x) = 1 - \varepsilon\cos x > 0 \Rightarrow f(x)\uparrow$, $\forall a\exists! x: \ f(x) = a$; при $\varepsilon = 0{,}538$, $a = 1$, $1{,}537 < x < 1{,}538$.

1500. $f(x) = x^{10} - 3x^5 + 1$, $f(1) = -1$; $f'(x) = 10x^9 - 15x^4$, $f'(1) = -5$; $f''(x) = 90x^8 - 60x^3$, $f''(1) = 30$, $\frac{f''(1)}{2} = 15, \ldots, \frac{f'''(1)}{3!} = 90$, $\frac{f^{\mathrm{IV}}(1)}{4!} = 195$, $\frac{f^{\mathrm{V}}(1)}{5!} = 249$, $\frac{f^{(6)}(1)}{6!} = 210$, $\frac{f^{(7)}(1)}{7!} = 120$, $\frac{f^{(8)}(1)}{8!} = 45$, $\frac{f^{(9)}(1)}{9!} = 10$, $\frac{f^{(10)}(1)}{10!} = 1$; $f(x) = (x-1)^{10} + 10(x-1)^9 + 45(x-1)^8 + 120(x-1)^7 + 210(x-1)^6 + 249(x-1)^5 + 195(x-1)^4 + 90(x-1)^3 + 15(x-1)^2 - 5(x-1) - 1$.

1507. $f(x) = x^3\ln x$, $f(1) = 0$; $f'(x) = 3x^2\ln x + x^2$, $f'(1) = 1$; $f''(x) = 6x\ln x + 5x$, $f''(1) = 5$; $f'''(x) = 6\ln x + 11$, $f'''(1) = 11$, $f^{\mathrm{IV}}(x) = \frac{6}{x}$, $f^{\mathrm{IV}}(1) = 6$; при $n \geqslant 4$ $f^{(n)}(x) = \frac{6(-1)^n(n-4)!}{x^{n-3}}$, $f^{(n)}(1) = 6(-1)^n(n-4)! \Rightarrow$
$f(x) = (x-1) + \frac{5(x-1)^2}{2} + \frac{11(x-1)^3}{6} + 6\sum\limits_{k=4}^{n} \frac{(-1)^k(x-1)^k}{k(k-1)(k-2)(k-3)} + \frac{6(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{(n+1)n(n-1)(n-2)(1+\theta(x-1))^{n-2}}$, $0 < \theta < 1$.

1516. $y = 2\cos x + x^2 = 2(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)) + x^2 = 2 + \frac{x^4}{12} + o(x^5)$; $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, $f^{\mathrm{IV}}(0) > 0 \Rightarrow (0,2)$ — точка минимума.

1520. $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$, $f(1) = 1$; $f'(x) = 10x^9 - 18x^5 + 2x$, $f'(1) = -6$; $f''(x) = 90x^8 - 90x^4 + 2$, $f''(1) = 2$;

$f(x) \approx 1-6(x-1)+(x-1)^2$, $f(1{,}03) \approx 1-6\cdot 0{,}03+0{,}03^2 = = 0{,}8209 \approx 0{,}82$.

1525. $\frac{1}{\sqrt[4]{e}} = e^{-\frac{1}{4}} \approx 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{32}-\frac{1}{384} \Rightarrow e^{-\frac{1}{4}} \approx \frac{25}{32} = = 0{,}78125, \delta < \frac{1}{384} < 0{,}003$; $e^{-\frac{1}{4}} = 0{,}78 \pm 0{,}003$.

1530. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $x'_t = -a\sin t$, $x''_{tt} = = -a\cos t$, $y'_t = b\cos t$, $y''_{tt} = -b\sin t$; $k = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{(x'^2_t + y'^2_t)^{3/2}} = = \frac{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}$; при $t = 0, \pi$ $k_1 = = \frac{a}{b^2}$, при $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ $k_2 = \frac{b}{a^2}$.

1536. $fx^3+y^3 = 3axy$; $3x^2+3y^2y' = 3ay+3axy'$, $y' = = \frac{ay-x^2}{y^2-ax}$, $y'(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a) = -1$; $y'' = \frac{(ay'-2x)(y^2-ax)-(2yy'-a)(ay-x^2)}{(y^2-ax)^2}$,
$y''(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a) = \frac{(-4a)(\frac{3}{4}a^2)-(-4a)(-\frac{3}{4}a^2)}{\frac{9}{16}a^4} = -\frac{32}{3a}$; $k = \frac{32}{3a\sqrt{2}^3} = \frac{8\sqrt{2}}{3a}$.

1541. $\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^m}{b^m} = 1 \Leftrightarrow b^m x^m + a^m y^m = (ab)^m$;
$\frac{mx^{m-1}}{a^m}+\frac{my^{m-1}y'}{b^m} = 0$, $y' = -\frac{b^m x^{m-1}}{a^m y^{m-1}}$,
$y'' = -\left(\frac{b}{a}\right)^m \frac{(m-1)x^{m-2}y^{m-1}-(m-1)x^{m-1}y^{m-2}y'}{y^{2m-2}} =$
$= -\frac{(m-1)b^m x^{m-2}(a^m y^m + b^m x^m)}{a^{2m}y^{2m-1}} = -\frac{(m-1)b^m x^{m-2}(ab)^m}{a^{2m}y^{2m-1}} =$
$= -\frac{(m-1)b^{2m}x^{m-2}}{a^m y^{2m-1}}$; $k = \frac{|(m-1)b^{2m}x^{m-2}|}{\left(1+\frac{b^{2m}x^{2m-2}}{a^{2m}y^{2m-2}}\right)^{3/2} a^m y^{2m-1}} =$
$= \frac{|(m-1)(ab)^{2m}(xy)^{m-2}|}{(a^{2m}y^{2m-2}+b^{2m}y^{2m-2})^{3/2}}$.

1546. $x'_t = -2a\sin t + 2a\sin 2t = 2a(\sin 2t - \sin t)$,
$x''_{tt} = 2a(2\cos 2t - \cos t)$, $y'_t = 2a(\cos t - \cos 2t)$,
$y''_{tt} = 2a(2\sin 2t - \sin t)$;
$k = \frac{4a^2((\sin 2t-\sin t)(2\sin 2t-\sin t)+(\cos 2t-\cos t)(2\cos 2t-\cos t))}{(4a^2(\sin^2 2t-2\sin 2t\sin t+\sin^2 t+\cos^2 2t-\cos 2t\cos t+\cos^2 t))^{3/2}} =$
$= \frac{3-3\cos t}{2(2-2\cos t)^{3/2}} = \frac{6\sin^2\frac{t}{2}}{16a|\sin\frac{t}{2}|^3} = \frac{3}{8a|\sin\frac{t}{2}|}$.

1549. $\rho' = ka\varphi^{k-1}$, $\rho'' = k(k-1)a\varphi^{k-2}$,
$k = \frac{|\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''|}{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}} = \frac{a^2|\varphi^{2k}+2k^2\varphi^{2k-2}-k(k+1)\varphi^{2k-2}|}{(a^2(\varphi^{2k}+k^2\varphi^{2k-2}))^{3/2}} =$
$= \frac{|\varphi^2+k^2+k|}{a\varphi^{k-1}(\varphi^2+k^2)^{3/2}}$.

1553. $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi \Leftrightarrow \rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\rho' = -a\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, $\rho'' = = -a\frac{1+\cos^2 2\varphi}{\cos^{3/2}2\varphi}$, $R = \frac{(a^2(\cos 2\varphi+\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}))^{3/2}}{a^2\left(\cos 2\varphi+\frac{2\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}+\frac{1+\cos^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}\right)} = \frac{a}{3\sqrt{\cos 2\varphi}} = = \frac{a^2}{3\rho}$.

1558. $(x^2+y^2)x-2ay=0$, $x^2+y^2+2x^2+2xyy'-4ayy'=0$,
$y' = \frac{3x^2+y^2}{2y(2a-x)}$, $y'(a,a) = 2$;

$y'' = \frac{(6x+2yy')(4ay-2xy)-(4ay'-2y-2xy')(3x^2+y^2)}{(4ay-2xy)^2}$, $y''(a,a) = \frac{10a\cdot 2a^2-2a\cdot 4a}{4a^4} = \frac{3}{a}$; $\xi = a - \frac{2\cdot 5}{3/a} = -\frac{7}{3}a$, $\eta = a + \frac{5}{3/a} = \frac{8}{3}a$, $R = \frac{5^{3/2}}{3/a} = \frac{a\sqrt{125}}{3}$; $(x+\frac{7}{3}a)^2 + (y-\frac{8}{3}a)^2 = \frac{125a^2}{9}$ — уравнение окружности кривизны.

1566. $f(1-0) = f(1+0) \Rightarrow a+b+c = 1$, $f'(1-0) = f'(1+0) \Rightarrow 2a+b = 3$, $f''(1-0) = f''(1+0) \Rightarrow 2a = 6$; $a = 3$, $b = -3$, $c = 1$.

1572. $x = 3t$, $y = t^2-6$; $x'_t = 3$, $x''_{tt} = 0$, $y'_t = 2t$, $y''_{tt} = 2$; $\xi = 3t - \frac{4t^2+9}{6}2t = -\frac{4t^3}{3}$, $\eta = t^2 - 6 + \frac{4t^2+9}{6}3 = 3t^2 - \frac{3}{2}$; $t = -\sqrt[3]{\frac{3\xi}{4}}$, $\eta = 3\sqrt[3]{\frac{9x^2}{16}} - \frac{3}{2}$, $(\eta+\frac{3}{2})^3 = \frac{243}{16}\xi^2$.

1580. $R = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}$(**1530**), $R(0) = \frac{b^2}{a}$, $R(\frac{\pi}{2}) = \frac{a^2}{b}$; т. к. длина эволюты L равна приращению радиуса кривизны, $\frac{L}{4} = \frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} = \frac{a^3-b^3}{ab}$, $L = \frac{4(a^3-b^3)}{ab}$.

К ГЛАВЕ 5

1593. Точки деления $x_i = 4 + \frac{2i}{n}, 0 \leqslant i \leqslant n$, тогда площадь входящей лестницы $L_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} 2x_i(x_{i+1}-x_i) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} 2\left(4+\frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} = \frac{4}{n^2}\sum\limits_{i=0}^{n-1}(4n+2i) = \frac{4}{n^2}(4n^2+n(n-1)) = 20 - \frac{4}{n}$, площадь выходящей лестницы $R_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} 2x_{i+1}(x_{i+1}-x_i) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} 2\left(4+\frac{2(i+1)}{n}\right)\frac{2}{n} = \frac{4}{n^2}\sum\limits_{i=0}^{n-1}(4n + 2(i+1)) = \frac{4}{n^2}(4n^2+n(n+1)) = 20 + \frac{4}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \lim\limits_{n\to\infty} R_n = 20$, $\alpha = \frac{4}{n}$, $\sigma = \frac{\alpha}{20} = \frac{1}{5n}$.

1600. Найдем точки пересечения кривых: $x^2-6x+10 = 6x-x^2 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = 5$; $S = \int_1^5(6x-x^2-(x^2-6x+10))dx = \int_1^5(12x-2x^2-10)dx = (6x^2 - \frac{2x^3}{3} - 10x)|_1^5 = 150 - 6 - \frac{250}{3} + \frac{2}{3} - 50 + 10 = \frac{64}{3}$.

1605. $F = kx, dA = kx\,dx \Rightarrow A(x) = \int_0^x kx\,dx = \frac{kx^2}{2}$; $A(0{,}04) = 10{,}10 = \frac{k}{2}\cdot 0{,}0016 \Rightarrow k = 12500 \Rightarrow A(0{,}1) = 625$ *Дж*.

1612. $dA = \frac{E^2}{R}dt$, $E = E_0 - at$, $a = \frac{1{,}5}{60} = 0{,}025$ В/с $\Rightarrow A = \int_0^{300}\frac{(120-0{,}025t)^2}{60}dt = \int_0^{300}(240 - 0{,}1t + \frac{1}{40^2\cdot 60}t^2)dt = (240t - 0{,}1\frac{t^2}{2} + \frac{1}{1600\cdot 180}t^3)|_0^{300} \approx 67600$ *Дж*.

1617. Пусть $t = \sqrt[n]{b/a}$, тогда $x_0 = a, x_1 = at, \ldots, x_n = at^n = b$ — точки деления отрезка. $I_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i^k(x_{i+1} - x_i) = a^k(at - a) + (at)^k(at^2 - at) + \ldots + (at^{n-1})^k(at^n - at^{n-1}) = a^{k+1}(t-1)(1 + t^{k+1} + \ldots + t^{(n-1)(k+1)}) = a^{k+1}(t-1) \times \frac{1-t^{n(k+1)}}{1-t^{k+1}} = a^{k+1}(t-1)\frac{1-(b/a)^{k+1}}{1-t^{k+1}} = (t-1)\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{t^{k+1}-1}$; т. к. $\lim\limits_{n\to\infty} t = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b/a} = 1$, $I = \lim\limits_{t\to 1}(b^{k+1} - a^{k+1})\frac{t-1}{t^{k+1}-1} = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$ (например, по правилу Лопиталя).

1621. $I_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{1}{x_i}(x_{i+1} - x_i) = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$.

1623.3. $t = \sqrt[n]{b/a}, x_i = at^i$, $I_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{\ln at^i}{at^i}(at^{i+1} - at^i) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{\ln a + i\ln t}{at^i}at^i(t-1) = (t-1)\left(n\ln a + \frac{n(n-1)}{2}\ln t\right) = (t-1) \times \left(n\ln a + \frac{n-1}{2}\ln(b/a)\right)$; $I = \lim\limits_{n\to\infty}\left((\sqrt[n]{b/a} - 1)n\ln a + \frac{\ln b - \ln a}{2} \times (n-1)(\sqrt[n]{b/a} - 1)\right) = \ln a \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(b/a)^{1/n}-1}{1/n} + \frac{\ln b - \ln a}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\frac{b}{a})^{1/n}-1}{\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n-1}} = \ln a \ln\frac{b}{a} + \frac{\ln b - \ln a}{2}\ln\frac{b}{a} = (\ln b - \ln a)\frac{\ln b + \ln a}{2} = \frac{\ln^2 b - \ln^2 a}{2}$.

1628. Найдем максимум функции $f(x) = \frac{x}{x^3+16}$ на $[0, 10]$; $f'(x) = \frac{16-2x^3}{(x^3+16)^2}, f'(x) = 0$ при $x = 2, y_{\text{макс}} = \frac{1}{12} \Rightarrow I \leqslant \frac{1}{12} \cdot 10 = \frac{5}{6}$.

1633. $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $f'(x) = 0$ при $x = 1, y_{\text{макс}} = f(1) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{5}$, $f(\frac{5}{2}) = \frac{10}{29} \Rightarrow y_{\text{мин}} = \frac{10}{29} \Rightarrow 2 \cdot \frac{10}{29} < I < 2\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{20}{29} < I < 1$.

1638. $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}dx < \sqrt{\int_0^1 (1+x^3)dx}\sqrt{\int_0^1 dx} = \sqrt{(x + \frac{x^4}{4})|_0^1} \cdot 1 = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}18$; по общему правилу $I < \int_0^1 \sqrt{2}dx = \sqrt{2} \approx 1{,}41$.

1641. 1) $1 \leqslant \sqrt{1+x^4} \leqslant \sqrt{2} (x \in [0,1]) \Rightarrow 1 < I < \sqrt{2} \approx 1{,}414$; 2) график функции $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ выпуклый вниз $\Rightarrow 1 < I < \frac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}207$; 3) $1 < I < \sqrt{\int_0^1 (1+x^4)dx} = \sqrt{\frac{6}{5}} \approx 1{,}095$.

1648. $E(t) = 100 + \frac{t}{3}$, $0 \leqslant t \leqslant 60$, $I(t) = \frac{E(t)}{R} = 10 + \frac{t}{30}$, $I_{\text{ср}} = \frac{1}{60}\int_0^{60}(10 + \frac{t}{30})dt = \frac{1}{60}(10t + \frac{t^2}{60})|_0^{60} = 11\,A$.

1653. $E(t) = E_1 + \frac{E_2-E_1}{t_2-t_1}(t-t_1)$, $I(t) = \frac{E(t)}{R}$, $dA = E(t)I(t)dt = \frac{E^2(t)}{R}$, $A = \int_0^t \frac{1}{R}(E_1 + \frac{E_2-E_1}{t_2-t_1}(t-t_1))^2dt = \frac{1}{R}\int_0^t \left(\frac{(E_2-E_1)t+E_1t_2-E_2t_1}{t_2-t_1}\right)^2 dt = \frac{1}{R}\int_0^t(\alpha t+\beta)^2dt = \frac{1}{R}(\frac{\alpha^2t^3}{3} + \alpha\beta t^2 + \beta^2 t)$, $\alpha = \frac{E_2-E_1}{t_2-t_1}$, $\beta = \frac{E_1t_2-E_2t_1}{t_2-t_1}$.

1662. $\int_0^{2x}\frac{\sin x}{x}dx = F(2x)$, где $F(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x}dx \Rightarrow y' = 2F'(2x) = 2\frac{\sin 2x}{2x} = \frac{\sin 2x}{x}$.

1666.2. $x'_t = 2t\cdot t^2\ln t^2 = 4t^3\ln t, y'_t = -2t\cdot t^4\ln t^2 = -4t^5\ln t \Rightarrow y'_x = -t^2$.

1675. $\int_a^b f''(x)dx = f'(x)|_a^b = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} - \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = 1-\sqrt{3}$; $\int_a^b f'(x)f''(x)dx = \int_a^b f'(x)d(f'(x)) = \frac{f'^2(x)}{2}|_a^b = \frac{1-3}{2} = -1$.

К ГЛАВЕ 6

1680. $\int a^xe^xdx = \int e^{x(1+\ln a)}\frac{1}{1+\ln a}d(x(1+\ln a)) = \frac{(ae)^x}{1+\ln a}+C$.

1686. $\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx = \int(x^{-5/2}-e^x+x^{-1})dx = -\frac{2}{3x^{3/2}} - e^x + \ln|x| + C$.

1696. $\int\mathrm{tg}^2x\,dx = \int\frac{\sin^2x}{\cos^2x}dx = \int\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx = \mathrm{tg}x - x + C$.

1700. $\int\frac{(1+x)^2dx}{x(1+x^2)} = \int\frac{(1+x^2+2x)dx}{x(1+x^2)} = \int\left(\frac{1}{x}+2\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \ln|x| + 2\,\mathrm{arctg}\,x + C$.

1708. $\int\frac{dx}{(a+bx)^c} = \int\frac{1}{b}\frac{d(a+bx)}{(a+bx)^c} = \frac{1}{b(1-c)(a+bx)^{c-1}}+C$.

1715. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int\frac{d(x^2+1)}{2\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}+C$.

1722. $\int\cos^3x\sin 2x\,dx = \int 2\cos^4x\sin x\,dx = -2\int\cos^4x\,d(\cos x) = -\frac{2\cos^5x}{5}+C$.

1734. $\int e^x\sin(e^x)dx = \int\sin(e^x)d(e^x) = -\cos(e^x)+C$.

1741. $\int\frac{x^2dx}{x^3+1} = \int\frac{d(x^3+1)}{3(x^3+1)} = \frac{1}{3}\ln|x^3+1|+C$.

1746. $\int\mathrm{tg}\,3x\,dx = \int\frac{\sin 3x\,dx}{\cos 3x} = -\int\frac{d(\cos 3x)}{3\cos 3x} = -\frac{\ln|\cos 3x|}{3}+C$.

1757. $\int e^{-x^3}x^2dx = -\frac{1}{3}\int e^{-x^3}d(-x^3) = -\frac{1}{3}e^{-x^3}+C$.

1762. $\int\frac{dx}{2x^2+9} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{3}+C$.

1769. $\int\frac{2^xdx}{\sqrt{1-4^x}} = \int\frac{d(2^x)}{\ln 2\sqrt{1-4^x}} = \frac{\arcsin 2^x}{\ln 2}+C$.

1775. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}+C$.

1782. $\int\frac{x}{2x+1}dx = \int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2x+1)}\right)dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\ln|2x+1|+C$.

1789. $\int \frac{x^4}{1-x}dx = \int \frac{x^4-1+1}{1-x} = \int\left(-x^3-x^2-x-1+\frac{1}{1-x}\right)dx = = -\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x-\ln|1-x|+C.$

1794. $\int\frac{dx}{(a-x)(b-x)}=\frac{1}{a-b}\int\frac{(a-x)-(b-x)}{(a-x)(b-x)}=\frac{1}{a-b}\int\left(\frac{1}{b-x}-\frac{1}{a-x}\right)dx= =\frac{1}{a-b}(\ln|a-x|-\ln|b-x|)+C=\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{a-x}{b-x}\right|+C.$

1802. $\int\frac{dx}{x-x^2-2.5} = -\int\frac{dx}{(x-0{,}5)^2+1{,}5^2} = -\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{3}+C.$

1807. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{3-(3x+1)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{3}}+C.$

1812. $\int\frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx=\int \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}-1\right)dx=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-x+C.$

1819. $\int\cos x\cos 2x\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\int\cos 2x(\cos 4x+\cos 2x)dx = = \frac{1}{4}\int(\cos 6x+\cos 2x+1+\cos 4x)dx = \frac{x}{4}+\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x+ +\frac{1}{24}\sin 6x+C.$

1824. $\int\frac{\sin^3\alpha}{\sqrt{\cos\alpha}}d\alpha = -\int\frac{1-\cos^2\alpha}{\sqrt{\cos\alpha}}d(\cos\alpha) = = \int(\cos^{\frac{3}{2}}\alpha-\cos^{-\frac{1}{2}}\alpha)d(\cos\alpha) = \frac{2}{5}\cos^{\frac{5}{2}}\alpha-2\cos^{\frac{1}{2}}\alpha+C = = 2\sqrt{\cos\alpha}\left(\frac{\cos^2\alpha}{5}-1\right)+C.$

1829. $\int\sin^4 x\,dx = \frac{1}{4}\int(1-\cos 2x)^2dx = \frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+ +\frac{1+\cos 4x}{2})dx = \frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$

1835. $\int x\cdot 3^x dx = \frac{1}{\ln 3}\int x\,d(3^x) = \frac{x3^x}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 3}\int 3^x dx = = \frac{3^x(x\ln 3-1)}{\ln^2 3}+C.$

1840. $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx = 2\int\arcsin x\,d(\sqrt{x+1}) = 2\sqrt{x+1}\arcsin x- -2\int\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\sqrt{x+1}\arcsin x-2\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{x+1}\arcsin x+ +4\sqrt{1-x}+C.$

1846. $\int\ln(x^2+1)dx = x\ln(x^2+1)-\int\frac{2x^2}{x^2+1}dx = x\ln(x^2+ +1)-\int 2dx+2\int\frac{dx}{x^2+1} = x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg}x+C.$

1852. $\int x^2a^xdx = \frac{1}{\ln a}\int x^2d(a^x) = \frac{x^2a^x}{\ln a}-\int\frac{2xa^x}{\ln a}dx = = \frac{x^2a^x}{\ln a}-\frac{1}{\ln^2 a}\int x\,d(a^x) = \frac{x^2a^x}{\ln a}-\frac{2xa^x}{\ln^2 a}+\frac{2a^x}{\ln^3 a}+C = = \frac{a^x}{\ln^3 a}\left((x\ln a)^2-2x\ln a+2\right)+C.$

1857. $\int\frac{\ln^3 x}{\sqrt{x^5}}dx = \int\ln^3 x\cdot x^{-\frac{5}{2}}dx = -\frac{2}{3}\int\ln^3 x\,d(x^{-\frac{3}{2}}) = =-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}\ln^3 x+\frac{2}{3}\int 3\ln^2 x\frac{1}{x}x^{-\frac{3}{2}}dx=-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}\ln^3 x-\frac{4}{3}\int\ln^2 x\,d(x^{-\frac{3}{2}})= =-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}\ln^3 x - \frac{4}{3}x^{-\frac{3}{2}}\ln^2 x + \frac{4}{3}\int 2\ln x\cdot x^{-\frac{5}{2}}dx=-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}\ln^3 x - -\frac{4}{3}x^{-\frac{3}{2}}\ln^2 x - \frac{16}{9}\int\ln x\,d(x^{-\frac{3}{2}})=-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}\ln^3 x - \frac{4}{3}x^{-\frac{3}{2}}\ln^2 x - -\frac{16}{9}x^{-\frac{3}{2}}\ln x+\frac{16}{9}\int x^{-\frac{5}{2}}dx=-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}\ln^3 x-\frac{4}{3}x^{-\frac{3}{2}}\ln^2 x-\frac{16}{9}x^{-\frac{3}{2}}\ln x- -\frac{32}{27}x^{-\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{3\sqrt{x^3}}\left(\ln^3 x+2\ln^2 x+\frac{8}{3}\ln x+\frac{16}{9}\right)+C.$

1863. $\int \sin\ln x\,dx = x\sin\ln x - \int x\cos\ln x\frac{1}{x}dx = x\sin\ln x - x\cos\ln x - \int \sin\ln x\,dx \Rightarrow \int \sin\ln x\,dx = \frac{x(\sin\ln x - \cos\ln x)}{2} + C.$

1869. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = \left[x+1 = z^2,\ dx = 2z\,dz\right] = \int \frac{2z\,dz}{1+z} = 2\int\left(1-\frac{1}{1+z}\right)dz = 2z - 2\ln|1+z| + C = 2\sqrt{x+1} - 2\ln(1+\sqrt{x+1}) + C.$

1879. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx = [x = z^6,\ dx = 6z^5dz] = \int \frac{z^3}{z^3-z^2}6z^5\,dz = 6\int \frac{z^6}{z-1}dz = 6\int\left(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1+\frac{1}{z-1}\right)dz = z^6 + \frac{6z^5}{5} + \frac{3z^4}{2} + 2z^3 + 3z^2 + 6z + 6\ln|z-1| + C = x + \frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x}-1| + C.$

1884. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \left[1+e^x = z^2, e^x\,dx = 2z\,dz. dx = \frac{2z\,dz}{z^2-1}\right] = \int \frac{2z\,dz}{z(z^2-1)} = \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C = \ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C.$

1890. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = \left[x = \frac{1}{z},\ dx = -\frac{dz}{z^2}\right] = -\int \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{z^2}+a^2}} = -\int \frac{z\,dz}{\sqrt{a^2z^2+1}} = -\frac{\sqrt{a^2z^2+1}}{a^2} + C = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C.$

1896. $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}dx = [x = 3\sin t,\ dx = 3\cos t\,dt] = \int \frac{27\cos^3 t}{729\sin^6 t}3\cos t\,dt = \frac{1}{9}\int \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}dt = -\frac{1}{9}\int \operatorname{ctg}^4 t\,d(\operatorname{ctg} t) = -\frac{1}{45}\operatorname{ctg}^5 t + C = -\frac{1}{45}\frac{\cos^5\arcsin\frac{x}{3}}{\sin^5\arcsin\frac{x}{3}} + C = -\frac{1}{45}\frac{\sqrt{(1-\frac{x^2}{9})^5}}{(\frac{x}{3})^5} + C = -\frac{\sqrt{(9-x^2)^5}}{45x^5} + C.$

1901. $\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}} = \left[x = \frac{\operatorname{tg} t}{2},\ dx = \frac{dt}{2\cos^2 t}\right] = \frac{dt}{2\cos^2 t\left(\frac{\operatorname{tg}^2 t}{4}+4\right)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \int \frac{2dt}{\cos t(\operatorname{tg}^2 t+16)} = \int \frac{2\cos t\,dt}{\sin^2 t+16\cos^2 t} = \frac{2}{15}\int \frac{d(\sin t)}{\frac{16}{15}-\sin^2 t} = \frac{1}{4\sqrt{15}}\ln\left|\frac{\sin t+\frac{4}{\sqrt{15}}}{\sin t-\frac{4}{\sqrt{15}}}\right| + C = \left[\sin t = \operatorname{tg} t\cos t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}\right] = \frac{1}{4\sqrt{15}}\ln\left|\frac{\sqrt{15}\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}+4}{\sqrt{15}\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}-4}\right| + C = \frac{1}{4\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x\sqrt{15}+2\sqrt{4x^2+1}}{x\sqrt{15}-2\sqrt{4x^2+1}}\right| + C.$

1906. $\int \sin\sqrt[3]{x}\,dx = [x = z^3,\ dx = 3z^2\,dz] = 3\int z^2\sin z\,dz = -3\int z^2\,d(\cos z) = -3z^2\cos z + 6\int z\cos z\,dz = -3z^2\cos z + 6\int z\,d(\sin z) = -3z^2\cos z + 6z\sin z - 6\int \sin z\,dz = -3z^2\cos z + 6z\sin z + 6\cos z + C = -3\sqrt[3]{x^2}\cos\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x} + 6\cos\sqrt[3]{x} + C = 3((2-\sqrt[3]{x^2})\cos\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x}) + C.$

1913. $\int \frac{\sin x\,dx}{e^{\cos x}} = \int e^{-\cos x} d(-\cos x) = e^{-\cos x} + C.$

1921. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = 2\sqrt{1+x^2} + 3\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$

1929. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} dx = \int \left(2 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = 2x - \operatorname{tg} x + C.$

1935. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}} = \int \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{2+4x}} dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{2+4x}} = \frac{1}{4}\int \sqrt{2+4x}\,dx - \frac{1}{4}\sqrt{2+4x} = \frac{1}{24}\sqrt{(2+4x)^3} - \frac{1}{4}\sqrt{2+4x} + C = \frac{\sqrt{2+4x}(x-1)}{6} + C.$

1943. $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}} dx = \int \frac{8x-8}{\sqrt{5+2x-x^2}} dx - 3\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} = -4\int \frac{d(5+2x-x^2)}{\sqrt{5+2x-x^2}} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}} = -8\sqrt{5+2x-x^2} - 3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}} + C.$

1951. $\int \frac{(4-3x)dx}{5x^2+6x+18} = \int \frac{-3x-\frac{9}{5}-\frac{29}{5}}{5x^2+6x+18} dx = -\frac{3}{10}\int \frac{10x+6}{5x^2+6x+18} dx + \frac{29}{5}\int \frac{dx}{5(x+\frac{3}{5})^2+\frac{81}{25}} = -\frac{3}{10}\ln(5x^2+6x+18) + \frac{29}{45}\operatorname{arctg}\frac{5x+3}{9} + C.$

1955. $\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}} dx = \left[t^2 = \frac{a-x}{x-b},\ x = \frac{a+bt^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2(b-a)t}{(1+t^2)^2} dt\right] = 2(b-a)\int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} = 2(b-a)(-\frac{1}{2})\int t\,d(\frac{1}{1+t^2}) = (a-b) \times \left(\frac{t}{1+t^2} - \int \frac{dt}{1+t^2}\right) = (a-b)(\frac{t}{1+t^2} - \operatorname{arctg} t) + C = (a-b) \times \left(\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\frac{x-b}{a-b} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\right) + C = \sqrt{(a-x)(x-b)} - (a-b) \times \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-x}{x-b}} + C.$

1960. $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \ln\cos x\, d(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x \ln\cos x + \int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \operatorname{tg} x\ln\cos x + \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \operatorname{tg} x(\ln\cos x + 1) - x + C.$

1966. $\int \frac{dx}{e^x+1} = [e^x + 1 = t,\ x = \ln(t-1),\ dx = \frac{dt}{t-1}] = \int \frac{dt}{t(t-1)} = \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t} = \ln|t-1| - \ln|t| + C = x - \ln(e^x + 1) + C.$

1971. $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int \arcsin x\, d(\sqrt{1-x^2}) = -\sqrt{1-x^2} \times \arcsin x + \int \frac{\sqrt{1-x^2}dx}{\sqrt{1-x^2}} = x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x + C.$

1977. $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x} = [t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}] = 4\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)(1+t)^2} = 2\int \frac{1+2t+t^2-(1+t^2)}{(1+t^2)(1+t)^2} dt = 2\int \frac{dt}{1+t^2} - 2\int \frac{dt}{(1+t)^2} = 2\operatorname{arctg} t + \frac{2}{1+t} + C = x + \frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C.$

1982. $\int e^{-x^2}x^5dx = -\frac{1}{2}\int x^4d\left(e^{-x^2}\right) = -\frac{1}{2}x^4e^{-x^2} + \int 2x^3e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}x^4e^{-x^2} - \int x^2d\left(e^{-x^2}\right) = -\frac{1}{2}x^4e^{-x^2} - x^2e^{-x^2} + \int 2xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}x^4e^{-x^2} - x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C = -e^{-x^2}\left(\frac{x^4}{2} + x^2 + 1\right) + C.$

1988. $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^6}dx = \left[x = 2\mathrm{tg}t,\ dx = \frac{2dt}{\cos^2 t}\right] = \int \frac{2}{\cos t\cdot 64\mathrm{tg}^6 t}\frac{2dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{16}\int\frac{\cos^3 t\,dt}{\sin^6 t} = \frac{1}{16}\int\frac{(1-\sin^2 t)d(\sin t)}{\sin^6 t} = \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{5\sin^5 t} + \frac{1}{3\sin^3 t}\right) + C = \left(\sin t = \mathrm{tg}t\cos t = \frac{\mathrm{tg}t}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}}\right) = \frac{\sqrt{(1+\frac{x^2}{4})^3}}{48\frac{x^3}{8}} - \frac{\sqrt{(1+\frac{x^2}{4})^5}}{80\frac{x^5}{32}} + C = \frac{\sqrt{(4+x^2)^3}}{48x^3} - \frac{\sqrt{(4+x^2)^5}}{80x^5} = \frac{\sqrt{(4+x^2)^3}}{16x^3}\left(\frac{1}{3} - \frac{4+x^2}{5x^2}\right) + C = \frac{\sqrt{(4+x^2)^3}(x^2-6)}{120x^5} + C.$

1993. $\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} = [x = z^6,\ dx = 6z^5dz] = 6\int\frac{z^7dz}{z^6(z^3+z^2)} = 6\int\frac{dz}{z(z+1)} = 6\int\frac{dz}{z} - 6\int\frac{dz}{z+1} = 6\ln|z| - 6\ln|z+1| + C = 6\ln\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}+1} + C = \ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6} + C.$

1999. $\int\frac{x^5dx}{\sqrt{x^4+4}} = [x^2 = z,\ dz = 2x\,dx] = \frac{1}{2}\int\frac{z^2dz}{\sqrt{z^2+4}} = \frac{1}{2}I;\ I = \int z\,d(\sqrt{z^2+4}) = z\sqrt{z^2+4} - \int\sqrt{z^2+4}dz = z\sqrt{z^2+4} - \int\frac{z^2+4}{\sqrt{z^2+4}}dz = z\sqrt{z^2+4} - I - 4\int\frac{dz}{\sqrt{z^2+4}} = z\sqrt{z^2+4} - I - 4\ln|z+\sqrt{z^2+4}| \Rightarrow I = \frac{1}{2}z\sqrt{z^2+4} - 2\ln|z+\sqrt{z^2+4}| + C = \frac{1}{2}x^2\sqrt{x^4+4} - 2\ln(x^2+\sqrt{x^4+4}) + C;\ \int\frac{x^5dx}{\sqrt{x^4+4}} = \frac{1}{4}x^2\sqrt{x^4+4} - \ln(x^2+\sqrt{x^4+4}) + C.$

2003. $\int\frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}\mathrm{arctg}x\,dx = \int\mathrm{arctg}x\left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)dx = \int\mathrm{arctg}x\,d\left(\sqrt{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \left(\sqrt{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{arctg}x - \int\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\mathrm{arctg}x - 2\sqrt{x} + C.$

2008. $\int\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx = x\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \int x\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}}\times\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}}\frac{1}{(x+1)^2}dx = x\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}dx}{x+1} = [x = t^2, dx = 2t\,dt] = x\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \int\frac{t^2}{t^2+1}dt = x\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}} + t - \mathrm{arctg}t + C = x\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \sqrt{x} - \mathrm{arctg}\sqrt{x} + C.$

2013. $\frac{x}{2x^2-3x-2} = \frac{x}{(x-2)(2x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{2x+1} \Rightarrow A(2x+1) + B(x-2) = x$; при $x = 2 : 5A = 2$, при $x = -\frac{1}{2} : -\frac{5}{2}B = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{2}{5},\ B = \frac{1}{5};\ \int\frac{x\,dx}{2x^2-3x+2} = \frac{2}{5}\int\frac{dx}{x-2} + \frac{1}{5}\int\frac{dx}{2x+1} = \frac{2}{5}\ln|x-2| + \frac{1}{10}\ln|2x+1| + C = \frac{1}{5}\ln\left((x-2)^2\sqrt{|2x+1|}\right) + C.$

2019. $I = \int \frac{x\,dx}{x^4-3x^2+2} = [u = x^2,\ du = 2x\,dx] = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2-3u+2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u-1)(u-2)}$; $\frac{1}{(u-1)(u-2)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u-2}$, $A(u-2)+B(u-1) = 1$, при $u = 2 : B = 1$, при $u = 1 : A = -1$; $I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u-2} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-2}{u-1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-2}{x^2-1}\right| + C$.

2025. $I = \int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx = \int \frac{x^3-x^2+x^2+1}{x^3-x^2}dx = x + \int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}dx$; $\frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$, $x^2+1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2$, при $x = 0 : 1 = -B$, при $x = 1 : 2 = C$, коэффициент при $x^2 : 1 = A + C \Rightarrow A = -1$, $B = -1$, $C = 2$; $I = x + 2\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} = x + \ln\frac{(x-1)^2}{|x|} + \frac{1}{x} + C$.

2031. $I = \int \frac{x^5dx}{(x-1)^2(x^2-1)} = \int \frac{x^5-x^3}{(x-1)^2(x^2-1)}dx + \int \frac{x^3}{(x-1)^2(x^2-1)}dx = \int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx + \int \frac{x^3}{(x-1)^2(x^2-1)}dx = I_1 + I_2$; разделив с остатком x^3 на $(x-1)^2$, получаем $x^3 = (x-1)^2(x+2) + 3x + 2$; $I_1 = \int \left(x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2}\right)dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \int \frac{3x-3+1}{(x-1)^2}dx = \frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$; $\frac{x^3}{(x-1)^2(x^2-1)} = \frac{x^3}{(x-1)^3(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+1} \Rightarrow x^3 = A(x-1)^2(x+1) + +B(x-1)(x+1) + C(x+1) + D(x-1)^3$, $x = 1 : 1 = 2C$, $x = -1 : -1 = -8D$, $x = 0 : 0 = A - B + C - D$, $x^3 : 1 = A + D$; $A = \frac{7}{8}, B = \frac{5}{4}$, $C = \frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{8}$, $I_2 = \frac{7}{8}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \in \frac{dx}{(x-1)^3} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{7}{8}\ln|x-1| - \frac{5}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{8}\ln|x+1| + C$; $I = \frac{31}{8}\ln|x-1| + \frac{1}{8}\ln|x+1| - \frac{9}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{x^2}{2} + 2x + C$.

2037. $I = \int \frac{dx}{1+x^3} = \int \frac{dx}{(1+x)(1-x+x^2)}$; $\frac{1}{1+x^3} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1-x+x^2} \Rightarrow 1 = A(1-x+x^2) + (Bx+C)(1+x)$, $x^2 : 0 = A + B$, $x : 0 = -A + B + C$, $1 : 1 = A + C \Rightarrow A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{2}{3}$; $I = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+x} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{1-x+x^2}dx = \frac{1}{3}\ln|1+x| - \frac{1}{3}\int \frac{x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{1-x+x^2}dx = \frac{1}{3}\ln|1+x| - \frac{1}{6}\ln(1-x+x^2) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$.

2043. $I = \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$; $\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \Rightarrow 1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)^2$; $x = -1 : 1 = 2B$, $x = 0 : 1 = A + B + D$, $x^3 : 0 = A + C$, $x = 1 : 1 = 4A + 2B + 4C + 4D \Rightarrow A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$,

$C = -\frac{1}{2},\ D = 0;\ I = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln|x+$ $+1| - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + C = \frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1} - \frac{1}{2(x+1)} + C.$

2048. $I = \int\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx = \int\frac{x^3+2x}{(x^2+2)^2}dx - \int\frac{x+1}{(x^2+2)^2}dx = \int\frac{x\,dx}{x^2+2} - \int\frac{x\,dx}{(x^2+2)^2} - \int\frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{1}{2(x^2+2)} - \frac{1}{2}\int\frac{x^2+2-x^2}{(x^2+2)^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{1}{2(x^2+2)} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+2} + \frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{1}{2(x^2+2)} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\int x\,d\left(\frac{1}{x^2+2}\right) = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{1}{2(x^2+2)} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{2-x}{4(x^2+2)} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

2054. $I = \int\frac{dx}{(1+x^2)^4} = \int\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^4}dx = \int\frac{dx}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{6}\int x\,d\left(\frac{1}{(1+x^2)^3}\right) = \frac{x}{6(1+x^2)^3} + \frac{5}{6}\int\frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{x}{6(1+x^2)^3} + \frac{5}{6}\int\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^3}dx = \frac{x}{6(1+x^2)^3} + \frac{5}{6}\int\frac{dx}{(1+x^2)^2} + \frac{5}{24}\int x\,d\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{x}{6(1+x^2)^3} + \frac{5x}{24(1+x^2)^2} + \frac{5}{8}\int\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}dx = \frac{x}{6(1+x^2)^3} + \frac{5x}{24(1+x^2)^2} + \frac{5}{8}\int\frac{dx}{1+x^2} + \frac{5}{16}\int x\,d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{x}{6(1+x^2)^3} + \frac{5x}{24(1+x^2)^2} + \frac{5x}{16(1+x^2)} + \frac{5}{16}\operatorname{arctg}x + C.$

2059. $\int\frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2} = \left(\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^2(x^2+1)}\right)' + \frac{ax^2+bx+c}{x(x^2+1)} =$

$$\frac{(3Ax^2+2Bx+C)x^2(x^2+1)-(Ax^3+Bx^2+Cx+D)(2x(x^2+1)+2x^3)}{x^4(x^2+1)^2} + \frac{ax^2+bx+c}{x(x^2+1)}$$

$$= \frac{(3Ax^2+2Bx+C)(x^3+x)-(Ax^3+Bx^2+Cx+D)(4x^2+2)+(ax^2+bx+c)(x^4+x^2)}{x^3(x^2+1)^2};$$

приравнивая коэффициенты, получаем: $x^6 : a = 1,\ x^5 : 3A - 4A = 0,\ x^4 : 2B - 4B + c + a = 1,\ x^3 : C + 3A - 4C - 2A + b = 0,\ x^2 : 2B - 4D - 2B + c = 0,\ 1 : -2D = -2 \Rightarrow A = B = C = b = c = 0, a = D = 1;\ I = \frac{1}{x^2(x^2+1)} + \int\frac{x^2dx}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x^2(x^2+1)} + \ln\sqrt{x^2+1} + C.$

2070. $\int\frac{x\,dx}{(x+1)^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{3}}} = [z = (x+1)^{\frac{1}{6}},\ x = z^6 - 1,\ dx = 6z^5dz] = \int\frac{(z^6-1)6z^5dz}{z^2+z^3} = 6\int\frac{z^3(z^6-1)dz}{z+1} = 6\int\frac{z^3(z-1)(z+1)(z^4+z^2+1)dz}{z+1} = 6\int(z^8 + z^6 + z^4 - z^7 - z^5 - z^3)dz = 6\left(\frac{z^9}{9} - \frac{z^8}{8} + \frac{z^7}{7} - \frac{z^6}{6} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^4}{4}\right) + C = 6\left(\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{9} - \frac{(x+1)^{\frac{4}{3}}}{8} + \frac{(x+1)^{\frac{7}{6}}}{7} - \frac{x+1}{6} + \frac{(x+1)^{\frac{5}{6}}}{5} - \frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{4}\right) + C.$

2074. $I = \int\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x} = \left[z = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}, x = \frac{1-z^3}{1+z^3}, dx = -\frac{6z^2}{(1+z^3)^2}dz\right] = \int z\frac{1+z^3}{1-z^3}\frac{-6z^2}{(1+z^3)^2}dz = -6\int\frac{z^3dz}{1-z^6} = [t = z^2,\ dt = 2zdz] =$

$= \int \frac{-3t\,dt}{1-t^3}$; $\frac{-3t}{1-t^3} = \frac{A}{1-t} + \frac{Bt+C}{1+t+t^2}$, $A(1+t+t^2) + (Bt+C)(1-t) = -3t \Rightarrow A = -1, B = -1, C = 1$; $I = \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{t-1}{t^2+t+1}dt = \ln|t-1| - \int \frac{t+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{t^2+t+1}dt = \ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln(t^2 + t + 1) + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \ln\frac{|t-1|}{\sqrt{t^2+t+1}} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C = \ln\frac{|z^2-1|}{\sqrt{z^4+z^2+1}} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2z^2+1}{\sqrt{3}} + C$, $z = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$.

2077. $I = \int x^{-1}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-3}dx\,(m = -1, n = \frac{1}{3}, p = -3 \in \mathbf{Z})$ $[u = x^{\frac{1}{3}}, x = u^3, dx = 3u^2du]$; $I = \int u^{-3}(1+u)^{-3}3u^2du = 3\int \frac{du}{u(1+u)^3}$; $\frac{1}{u(1+u)^3} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1+u} + \frac{C}{(1+u)^2} + \frac{D}{(1+u)^3} \Rightarrow 1 = A(1+u)^3 + Bu(1+u)^2 + Cu(1+u) + Du \Rightarrow A = 1, B = C = D = -1$; $I = 3\left(\int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{1+u} - \int \frac{du}{(1+u)^2} - \int \frac{du}{(1+u)^3}\right) = 3\left(\ln\left|\frac{u}{1+u}\right| + \frac{1}{1+u} + \frac{1}{2(1+u)^2}\right) + C = 3\left(\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right| + \frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2}\right) + C$.

2083. $I = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx\,(m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}, p = \frac{1}{3}, \frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbf{Z})\,[1+\sqrt[4]{x} = z^3,\ x = (z^3-1)^4,\ dx = 12z^2(z^3-1)^3dz]$; $I = \int \frac{z12z^2(z^3-1)^3}{(z^3-1)^2}dz = 12\int(z^6 - z^3)dz = 12(\frac{z^7}{7} - \frac{z^4}{4}) + C = \frac{3}{7}z^4(4z^3-7) + C = \frac{3}{7}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}(4\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 3) + C$.

2088. $I = \int \sqrt[3]{x(1-x^2)}dx\,(m = \frac{1}{3}, n = 2, p = \frac{1}{3}, \frac{m+1}{n} + p \in \mathbf{Z})\,[x^{-2} - 1 = z^3,\ x = \frac{1}{\sqrt{1+z^3}},\ dx = -\frac{3z^2dz}{2\sqrt{(z^3+1)^3}}]$; $I = \int \sqrt[3]{x^3\frac{1-x^2}{x^2}}dx = \int xz\,dx = -\frac{3}{2}\int \frac{z^3dz}{(z^3+1)^2} = \frac{1}{2}\int z\,d\left(\frac{1}{z^3+1}\right) = \frac{z}{2(z^3+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^3+1} = \frac{z}{2(z^3+1)} - \frac{1}{12}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{2\sqrt{3}} + C$, $z = \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}$ (см. **2037**).

2095. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x} = \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^4 x\cos^8 x} = \int \frac{(\operatorname{tg}^2 x+1)^3}{\operatorname{tg}^4 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \left[u = \operatorname{tg}x,\ du = \frac{dx}{\cos^2 x}\right] = \int \frac{(u^2+1)^3du}{u^4} = \int\left(u^2 + 3 + \frac{3}{u^2} + \frac{1}{u^4}\right)du = \frac{u^3}{3} + 3u - \frac{3}{u} - \frac{1}{3u^3} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + 3\operatorname{tg}x - 3\operatorname{ctg}x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + C$.

2102. $I = \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^4 x} = [t = \cos x, dt = -\sin x\,dx] = -\int \frac{dt}{(1-t^2)^2}$; $-\frac{1}{(1-t^2)^2} = -\frac{1}{(1-t)^2(1+t)^2} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{C}{1-t} + \frac{D}{(1+t)^2}$, $A = B = C = D = -\frac{1}{4} \Rightarrow I = -\frac{1}{4}\left(\int \frac{dt}{1-t} + \int \frac{dt}{(1-t)^2} + \int \frac{dt}{1+t} + \int \frac{dt}{(1+t)^2}\right) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + \frac{1}{4}(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1}) + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + \frac{\cos x}{2(1-\cos^2 x)} + C = \frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + C$.

2110. $\int \frac{dx}{5-3\cos x} = \left[t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}\right] = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(5-3\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{4t^2+1} = \frac{1}{4}\cdot 2\operatorname{arctg} 2t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}) + C.$

2118. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 x+\cos^2 x} = \int \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x+1}\frac{dx}{\cos^2 x} = [t = \operatorname{tg} x,\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x}] = \int \frac{dt}{2(t^2+\frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t) + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + C.$

2124. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}dx}{\sin x\cos x} = \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\operatorname{tg} x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C.$

2131. $I = \int \sqrt{\operatorname{tg} x}dx = \left[t = \sqrt{\operatorname{tg} x},\ x = \operatorname{arctg} t^2,\ dx = \frac{2t\,dt}{1+t^4}\right] = \int \frac{2t^2dt}{1+t^4} = \int \frac{2t^2dt}{(1+\sqrt{2}t+t^2)(1-\sqrt{2}t+t^2)};\ \frac{2t^2}{1+t^4} = \frac{At+B}{1-\sqrt{2}t+t^2} + \frac{Ct+D}{1+\sqrt{2}+t^2} \Rightarrow A = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ C = \frac{\sqrt{2}}{2},\ B = D = 0;\ I = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{tdt}{t^2-\sqrt{2}t+1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{tdt}{t^2+\sqrt{2}t+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{(t-\frac{\sqrt{2}}{2})dt}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{(t+\frac{\sqrt{2}}{2})dt}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\sqrt{2}t+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t - 1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t + 1) + C = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{\operatorname{tg} x-\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}{\operatorname{tg} x+\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2\operatorname{tg} x}-1\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1\right) + C.$

2137. $\int \operatorname{sh}^2 x\,dx = \int \frac{\operatorname{ch} 2x-1}{2}dx = \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} - \frac{x}{2} + C.$

2143. $\int \operatorname{sh}^2 x\operatorname{ch}^3 x\,dx = \int \operatorname{sh}^2 x(1+\operatorname{sh}^2 x)d(\operatorname{sh} x) = \int(\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sh}^4 x)d(\operatorname{sh} x) = \frac{\operatorname{sh}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{sh}^5 x}{5} + C.$

2149. $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \int x\,d(\operatorname{th} x) = x\operatorname{th} x - \int \operatorname{th} x\,dx = x\operatorname{th} x - \int \frac{d(\operatorname{ch} x)}{\operatorname{ch} x} = x\operatorname{th} x - \ln\operatorname{ch} x + C.$

2156. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}} = \left[z = \frac{1}{x-1}, x = \frac{z+1}{z}, dx = -\frac{dz}{z^2}\right] = -\int \frac{z\,dz}{z^2\sqrt{\frac{(z+1)^2}{z^2}+\frac{z+1}{z}+1}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{3z^2+3z+1}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{3}\sqrt{(z+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{12}}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|z+\frac{1}{2}+\sqrt{z^2+z+\frac{1}{3}}\right| + C = -\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{3}}\right| + C = -\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3x+3+2\sqrt{3(x^2+x+1)}}{x-1}\right| + C.$

2160. $\int \sqrt{1-4x-x^2}dx = x\sqrt{1-4x-x^2} + \int x\frac{2+x}{\sqrt{1-4x-x^2}}dx = x\sqrt{1-4x-x^2} + \int \frac{x^2+4x-1-2x+1}{\sqrt{1-4x-x^2}}dx = x\sqrt{1-4x-x^2} - \int \sqrt{1-4x-x^2}dx - \int \frac{2x-1}{\sqrt{1-4x-x^2}}dx = x\sqrt{1-4x-x^2} - \int \sqrt{1-4x-x^2}dx - \int \frac{2x+4}{\sqrt{1-4x-x^2}}dx + \int \frac{5dx}{\sqrt{1-4x-x^2}} = x\sqrt{1-4x-x^2} - \int \sqrt{1-4x-x^2}dx + 2\sqrt{1-4x-x^2} +$

$+ 5\int\frac{dx}{\sqrt{5-(x+2)^2}} = (x+2)\sqrt{1-4x-x^2} + 5\arcsin\frac{x+2}{\sqrt5} - \int\sqrt{1-4x-x^2}dx \Rightarrow \int\sqrt{1-4x-x^2}dx = \frac{x+2}{2}\sqrt{1-4x-x^2} + \frac52\arcsin\frac{x+2}{\sqrt5}+C.$

2166. $I = \int\frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = (Ax+B)\sqrt{3-2x-x^2} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} \Rightarrow \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}} = A\sqrt{3-2x-x^2} - \frac{(Ax+B)(1+x)}{\sqrt{3-2x-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{3-2x-x^2}}$, $3x^2-5x = A(3-2x-x^2)-(Ax+B)(1+x)+\lambda; x=0: 3A-B+\lambda=0, x=-1: 8=4A+\lambda, x^2: 3 = -2A \Rightarrow A=-\frac32, B=\frac{19}{2}, \lambda=14;$ $I = \frac{19-3x}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + 14\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = \frac{19-3x}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+14\arcsin\frac{x+1}{2}+C.$

2171. $I = \int\frac{dx}{(x^3+3x^2+3x+1)\sqrt{x^2+2x-3}} = \int\frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x-3}} = \left[t=\frac{1}{x+1}, x=\frac{1-t}{t}, dx=-\frac{dt}{t^2}\right] = -\int\frac{t^3dt}{t^2\sqrt{\frac{(1-t)^2}{t^2}+2\frac{1-t}{t}-3}} = -\int\frac{t^2dt}{\sqrt{1-4t^2}} = -(At+B)\sqrt{1-4t^2}-\lambda\int\frac{dt}{\sqrt{1-4t^2}};$ $\frac{-t^2}{\sqrt{1-4t^2}} = -A\sqrt{1-4t^2}+\frac{4t(At+B)}{\sqrt{1-4t^2}} \Rightarrow A=-\frac18, B=0, \lambda=\frac18;$ $I = \frac18 t\sqrt{1-4t^2}-\frac18\int\frac{dt}{\sqrt{1-4t^2}} = \frac t8\sqrt{1-4t^2}-\frac1{16}\arcsin 2t+C = \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{8(x+1)^2}-\frac1{16}\arcsin\frac{2}{x+1}+C.$

2175. $I = \int\frac{x^3dx}{(x-1)^{12}} = [u=x-1,\ x=u+1,\ dx=du] = \int\frac{(u+1)^3}{u^{12}}du = \int\frac{u^3+3u^2+3u+1}{u^{12}}du = \int\frac{du}{u^9}+3\int\frac{du}{u^{10}}+3\int\frac{du}{u^{11}}+\int\frac{du}{u^{12}} = -\frac{1}{8(x-1)^8}-\frac{1}{3(x-1)^9}-\frac{3}{10(x-1)^{10}}-\frac{1}{11(x-1)^{11}}+C.$

2183. $I = \int\frac{\ln(x+1)dx}{\sqrt{x+1}} = \int\ln(x+1)d(2\sqrt{x+1}) = 2\sqrt{x+1}\ln(x+1)-2\int\frac{\sqrt{x+1}}{x+1}dx = 2\sqrt{x+1}\ln(x+1) - 2\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1}(\ln(x+1)-2)+C.$

2188. $I = \int e^{\sqrt[3]{x}}dx = [u=\sqrt[3]{x}, x=u^3, dx=3u^2du] = 3\int u^2e^udu = 3\int u^2d(e^u) = 3u^2e^u-6\int ue^udu = 3u^2e^u - 6\int ud(e^u) = 3u^2e^u-6ue^u+6\int e^udu = e^u(3u^2-6u+6)+C = 3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)+C.$

2193. $I = \int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}} = \int(x+\sqrt{x^2-1})dx = \frac{x^2}{2}+\int\sqrt{x^2-1}dx = [x=\operatorname{ch}t,\ t=\ln|x+\sqrt{x^2-1}|,\ dx=\operatorname{sh}t\,dt] = \frac{x^2}{2}+\int\sqrt{\operatorname{ch}^2t-1}\operatorname{sh}t\,dt = \frac{x^2}{2}+\int\operatorname{sh}^2t\,dt = \frac{x^2}{2}+\frac12\int(\operatorname{ch}2t-1)dt = \frac{x^2}{2}+\frac{\operatorname{sh}2t}{4}-\frac t2+C = \frac{x^2}{2}+\frac{\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t}{2}-\frac{\ln|x+\sqrt{x^2-1}|}{2}+C = \frac12\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}-\ln|x+\sqrt{x^2-1}|\right)+C.$

2200. $I = \int \frac{dx}{\sin 2x - 2\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin x(\cos x - 1)} = \int \frac{\sin x\, dx}{2\sin^2 x(\cos x - 1)} [\cos x = t, -\sin x\, dx = dt] = \int \frac{dt}{2(1-t^2)(1-t)} = \int \frac{dt}{2(1-t)^2(1+t)}$; $\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{1+t} \Rightarrow A = \frac{1}{4}, B = \frac{1}{2}. C = \frac{1}{4}$; $I = \frac{1}{8}\left(\int \frac{dt}{1-t} + \frac{dt}{1+t} + 2\int \frac{dt}{(1-t)^2}\right) = \frac{1}{8}\ln\frac{1+t}{1-t} + \frac{1}{4(1-t)} + C = \frac{1}{8}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x} + \frac{1}{4(1-\cos x)} + C = \frac{1}{4}\ln \operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4(1-\cos x)} + C.$

2206. Вычислим вспомогательный интеграл $I_1 = \int e^x \cos x\, dx = \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x + \int e^x d(\cos x) = e^x(\sin x + \cos x) - \int e^x \cos x\, dx \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)$; аналогично $I_2 = \int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$; $I = \int x^2 e^x \cos x\, dx = \int x^2 d(\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)) = \frac{x^2}{2}e^x(\cos x + \sin x) - \int xe^x(\sin x + \cos x)dx = \frac{x^2}{2}e^x(\cos x + \sin x) - \int x\, d(e^x \sin x) = \frac{x^2}{2}e^x(\cos x + \sin x) - xe^x \sin x + \int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}\left((x^2-1)\cos x + (x-1)^2 \sin x\right) + C.$

2212. $I = \int \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 2}\,dx = \left[t = \operatorname{tg} x,\ x = \operatorname{arctg} t, dx = \frac{dt}{1+t^2}\right] = \int \frac{\sqrt{t^2+2}}{t^2+1}dt = \int \frac{t^2+2}{\sqrt{t^2+2}(t^2+1)} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2}} + \int \frac{dt}{(t^2+1)\sqrt{t^2+2}} = \ln(t + \sqrt{t^2+2}) + I_1$; $I_1 = \int \frac{dt}{(t^2+1)\sqrt{t^2+2}} = \left[t = \sqrt{2}\operatorname{tg} z, dt = \frac{\sqrt{2}dz}{\cos^2 z}\right] = \int \frac{\sqrt{2}dz}{(2\operatorname{tg}^2 z+1)\sqrt{2\operatorname{tg}^2 z + 2\cos^2 z}} = \int \frac{dz}{(2\operatorname{tg}^2 z+1)\cos z} = \int \frac{\cos z\, dz}{2\sin^2 z + \cos^2 z} = \int \frac{d(\sin z)}{1+\sin^2 z} = \operatorname{arctg}\sin z + C = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} z}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 z}} + C = \operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2+t^2}} + C = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+2}} + C \Rightarrow I = \ln(\operatorname{tg} x + \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 2}) + \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+2}} + C.$

2218. $I = \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2}\int \operatorname{arctg} x\, d(\frac{1}{1+x^2}) = -\frac{\operatorname{arctg} x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}I_1$; $I_1 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{(1+x^2-x^2)dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\int x\, d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C \Rightarrow I = -\frac{\operatorname{arctg} x}{2(1+x^2)} + \frac{x}{4(1+x^2)} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x + C = \frac{x + (x^2-1)\operatorname{arctg} x}{4(1+x^2)} + C.$

2223. $I = \int \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{1+\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x} = \left[t = \operatorname{tg} x,\ x = \operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}\right] = \int \frac{t\,dt}{(1+t+t^2)(1+t^2)} = \int \frac{1+t+t^2-(1+t^2)}{(1+t+t^2)(1+t^2)}dt = \int \frac{dt}{1+t^2} - \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \operatorname{arctg} t + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C = x + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x+1}{\sqrt{3}} + C.$

2228. $I = \int \frac{(x+\sin x)dx}{1+\cos x} = \int \frac{(x+\sin x)dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int (x + \sin x)d(\operatorname{tg}\frac{x}{2}) = (x+\sin x)\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \int \operatorname{tg}\frac{x}{2}(1+\cos x)dx = x\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2\sin^2\frac{x}{2} - \int \sin x\,dx = x\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2\sin^2\frac{x}{2} + \cos x + C = x\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$

К ГЛАВЕ 7

2233. $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}} = \int_2^{-13}(3-x)^{-\frac{4}{5}}dx = -5(3-x)^{1/5}|_2^{-13} = 5\sqrt[5]{3-x}|_{-13}^{2} = 5 - 5\sqrt[5]{16}.$

2239. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2(x^2+1)}|_0^1 = \frac{1}{4}.$

2244. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int_1^{e^2} \frac{d(1+\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}} = 2\sqrt{1+\ln x}|_1^{e^2} = 2(\sqrt{3}-1).$

2250. $\int_{-0.5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}} = \int_{-0,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{9-(x-1)^2}} = \arcsin\frac{x-1}{3}|_{-0.5}^{1} = \frac{\pi}{6}.$

2256. $\int_a^{\pi/4} \operatorname{ctg}^4\varphi\,d\varphi = \int_a^{\pi/4} \operatorname{ctg}^2\varphi(\frac{1}{\sin^2\varphi} - 1)d\varphi = -\int_a^{\pi/4}\operatorname{ctg}^2\varphi\,d(\operatorname{ctg}\varphi) - \int_a^{\pi/4}\frac{1-\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi}d\varphi = (-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3\varphi + \operatorname{ctg}\varphi + \varphi)|_a^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 a - \operatorname{ctg} a - a.$

2262. $\int_0^\pi x^3\sin x\,dx = -\int_0^\pi x^3 d(\cos x) = -x^3\cos x|_0^\pi + 3\int_0^\pi x^2\cos x\,dx = \pi^3 + 3\int_0^\pi x^2 d(\sin x) = \pi^3 + 3x^2\sin x|_0^\pi - 6\int_0^\pi x\sin x\,dx = \pi^3 + 6\int_0^\pi x\,d(\cos x) = \pi^3 + 6x\cos x|_0^\pi - 6\int_0^\pi \cos x\,dx = \pi^3 - 6\pi - 6\sin x|_0^\pi = \pi^3 - 6\pi.$

2266. $I = \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = x\sqrt{a^2-x^2}|_0^a + \int_0^a \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int_0^a \frac{(x^2-a^2+a^2)dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx + a^2\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -I + a^2\arcsin\frac{x}{a}|_0^a = \frac{\pi}{2}a^2 - I \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}a^2.$

2269. $I_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos^{n-1}x\,d(\sin x) = \sin x\cos^{n-1}x|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2}x\sin^2 x\,dx = (n-1)\times \int_0^{\pi/2}(\cos^{n-2}x - \cos^n x)dx = (n-2)(I_{n-2} - I_n) \Rightarrow I_n = \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$, т. к. $I_0 = \int_0^{\pi/2}dx = \frac{\pi}{2}, I_1 = \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx = 1$, получаем $I_n = \frac{(n-2)(n-4)\ldots}{(n-1)(n-3)\ldots}\cdot C = \frac{(n-2)!!}{(n-1)!!}\cdot C$, $C = \frac{\pi}{2}$ при n четном, 1 при n нечетном.

2271. $I_n = \int_{-1}^0 x^n e^x dx = \int_{-1}^0 x^n d(e^x) = x^n e^x|_{-1}^0 - n\int_{-1}^0 x^{n-1}e^x dx = (-1)^{n+1}e^{-1} - nI_{n-1}$; применяя n раз, получаем $I_n = (-1)^{n+1}e^{-1} - n((-1)^n e^{-1} - (n-1)I_{n-2}) = (-1)^{n+1}e^{-1}(1+n+n(n-1)I_{n-2}) = (-1)^{n+1}e^{-1}(1+n + n(n-1) + \ldots + n!I_0) = (-1)^{n+1}e^{-1}(1+n+n(n-1)+\ldots + n!(1-e^{-1})) = (-1)^{n+1}n!\left(1 - \frac{1}{e}(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!})\right).$

2277. $\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$ $[\sqrt{1+x}=t,\ x=t^2-1,\ dx=2t\,dt,\ t_1=2,$ $t_2=3]=\int_2^3 \frac{(t^2-1)2t\,dt}{t}=2\int_2^3(t^2-1)dt=(\frac{2t^3}{3}-2t)|_2^3=10\frac{2}{3}.$

2284. $\int_1^{\sqrt3}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx=-\int_1^{\sqrt3}\sqrt{1+x^2}d(\frac{1}{x})=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}|_1^{\sqrt3}+$ $+\int_1^{\sqrt3}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt2-\frac{2}{\sqrt3}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})|_1^{\sqrt3}=\sqrt2-\frac{2}{\sqrt3}+$ $+\ln\frac{2+\sqrt3}{1+\sqrt2}.$

2289. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$ $[x=\sin t,\ dx=\cos t\,dt,\ t_1=0,\ t_2=$ $=\pi/2]=\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac14\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt=\frac18\int_0^{\pi/2}(1-$ $-\cos4t)dt=(\frac{t}{8}-\frac{1}{32}\sin4t)|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{16}.$

2294. $\int_0^{1/\sqrt3}\frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ $[x=\operatorname{tg}t,\ dx=\frac{dt}{\cos^2 t},\ t_1=$ $=0,\ t_2=\pi/6]=\int_0^{\pi/6}\frac{\cos t\,dt}{\cos^2 t(2\operatorname{tg}^2 t+1)}=\int_0^{\pi/6}\frac{\cos t\,dt}{2\sin^2 t+\cos^2 t}=$ $=\int_0^{\pi/6}\frac{\cos t\,dt}{1+\sin^2 t}$ $[\sin t=z,\ \cos t\,dt=dz,\ z_1=0,\ z_2=1/2]=$ $=\int_0^{1/2}\frac{dz}{1+z^2}=\operatorname{arctg}z|_0^{1/2}=\operatorname{arctg}\frac12.$

2299. $M=\frac12\int_0^2\frac{dx}{e^x+1}=\frac12\int_0^2\frac{(e^x+1-e^x)dx}{e^x+1}=\frac12\int_0^2 dx-$ $-\frac12\int_0^2\frac{e^x dx}{e^x+1}=\frac12(x-\ln(e^x+1))|_0^2=\frac12(2-\ln\frac{e^2+1}{2})=1+$ $+\frac12\ln\frac{2}{e^2+1}.$

2304. $\int_0^{\sqrt[4]{2}}\frac{x^{15}dx}{(1+x^8)^{2/5}}$ $[t=1+x^8,\ dt=8x^7dx,\ t_1=$ $=1,\ t_2=5]=\frac18\int_1^5\frac{(t-1)dt}{t^{2/5}}=\frac18\int_1^5\left(t^{3/5}-t^{-2/5}\right)dt=$ $=\frac18\left(\frac58 t^{8/5}-\frac53 t^{3/5}\right)|_1^5=\frac{5}{192}(7\sqrt[5]{125}+5).$

2309. $\int_0^{\ln5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ $[t=\sqrt{e^x-1},\ x=\ln(t^2+1),\ dx=$ $=\frac{2t\,dt}{t^2+1},\ t_1=0,\ t_2=2]=\int_0^2\frac{(t^2+1)2t^2\,dt}{(t^2+4)(t^2+1)}=2\int_0^2\frac{t^2dt}{t^2+4}=$ $=2\int_0^2\frac{(t^2+4-4)}{t^2+4}dt=2\int_0^2dt-8\int_0^2\frac{dt}{t^2+4}=(2t-4\operatorname{arctg}\frac t2)|_0^2=4-\pi.$

2315. $\int_1^{16}\operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt x-1}dx$ $[t=\sqrt x,\ x=t^2,\ dx=$ $=2t\,dt,\ t_1=1,\ t_2=4]=2\int_1^4 t\operatorname{arctg}\sqrt{t-1}dt=$ $=\int_1^4\operatorname{arctg}\sqrt{t-1}d(t^2)=t^2\operatorname{arctg}\sqrt{t-1}|_1^4-\int_1^4\frac{t\,dt}{2\sqrt{t-1}}=\frac{16\pi}{3}-$ $-\frac12\int_1^4\sqrt{t-1}dt-\frac12\int_1^4\frac{dt}{\sqrt{t-1}}=\frac{16\pi}{3}-(\frac13(t-1)^{3/2}+\sqrt{t-1})|_1^4=$ $=\frac{16}{3}\pi-2\sqrt3.$

2320. $\int_{\ln2}^x\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ $[t=\sqrt{e^x-1},\ x=\ln(t^2+1),\ dx=$ $=\frac{2t\,dt}{t^2+1},\ t_1=1,\ t_2=\sqrt{e^x-1}]=\int_1^{\sqrt{e^x-1}}\frac{2dt}{t^2+1}=$ $=2\operatorname{arctg}t|_1^{\sqrt{e^x-1}}=2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}-\frac{\pi}{2};\ 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}-\frac{\pi}{2}=$ $=\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\sqrt{e^x-1}=\sqrt3\Leftrightarrow x=2\ln2.$

2324. $I = \int_0^{\pi/2}\sqrt{x\sin x}dx \leqslant \sqrt{\int_0^{\pi/2}x\,dx}\sqrt{\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx} = \sqrt{\frac{\pi^2}{8}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}1107$; $\int_0^{\pi/2}\sqrt{x\sin x dx} > \int_0^{\pi/2}\sqrt{x(x-\frac{x^3}{6})}dx = \int_0^{\pi/2}x\sqrt{1-\frac{x^2}{6}}dx = \frac{1}{\sqrt{6}}\int_0^{\pi/2}x\sqrt{6-x^2}dx = -\frac{1}{3\sqrt{6}}\sqrt{(6-x^2)^3}\Big|_0^{\pi/2} = 2-\frac{1}{3\sqrt{6}}\sqrt{(6-\frac{\pi^2}{4})^3} \approx 1{,}0965 \Rightarrow 1{,}0965 < I < 1.1107$.

2327. $y' = (x-1)(x-2)^2$, $y' = 0$ при $x = 1$, $x = 2$, $y' > 0$ при $1 < x < 2$, $x > 2$, $y' < 0$ при $x < 1 \Rightarrow x = 1$ — точка минимума; $y'' = (x-2)(3x-4)$, $x = 2$, $x = \frac{4}{3}$ — точки перегиба.

2334. $F(x) = \int_{1/e}^{\operatorname{tg}x}\frac{t\,dt}{1+t^2}$, $G(x) = \int_{1/e}^{\operatorname{ctg}x}\frac{dt}{t(1+t^2)}$ $[z = \frac{1}{t}$, $dz = -\frac{dt}{t^2}$, $z_1 = e$, $z_2 = \operatorname{tg}x] = -\int_e^{\operatorname{tg}x}\frac{z\,dz}{1+z^2}$; $F(x)+G(x) = \int_{1/e}^{e}\frac{t\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_{1/e}^{e} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+e^2}{1+1/e^2} = \frac{1}{2}\ln e^2 = 1$.

2338. $\int_0^{\pi/2}f(\cos x)dx$ $[t = \frac{\pi}{2}-x$, $dt = -dx$, $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = 0] = -\int_{\pi/2}^{0}f(\cos(\frac{\pi}{2}-t)dt = \int_0^{\pi/2}f(\sin t)dt$; $I = \int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 x)dx = x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2} - I \Rightarrow \int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$.

2342. $\int_0^1(1-x^2)^n dx = \int_0^1(C_n^0 - C_n^1x^2 + \ldots + (-1)^nC_n^nx^{2n})dx = C_n^0 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \ldots + \frac{(-1)^nC_n^n}{2n+1}$; $\int_0^1(1-x^2)^n dx$ $[x = \sin\varphi$, $dx = \cos\varphi d\varphi$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2] = \int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}\varphi d\varphi = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$(**2269**).

2349. Возьмем $n=9$, $x_0=1$, $x_1=2$, ..., $x_9=10$, $x_{1/2}=1{,}5$, ..., $x_{17/2} = 9{,}5$; $I \approx \frac{1}{6}\left(1+0{,}1+2(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{9})+4(\frac{2}{3}+\ldots+\frac{2}{19})\right) = \frac{1}{6}(1{,}1000 + 3{,}6579+9{,}0660) = 2{,}3040$, $M \approx 0{,}4340$; $\ln 2 = 2{,}3026$, $M = 0{,}4343$.

2366. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{3} - \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3x^3} = \frac{1}{3}$.

2374. $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ $[t = \frac{1}{x}$, $dt = -\frac{dx}{x^2}$, $t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $t_2 = 0] = -\int_{1/\sqrt{2}}^{0}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t\Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$.

2379. $\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$ $[t = \sqrt{x}$, $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$, $t_1 = 0$, $t_2 = +\infty] = 2\int_0^{+\infty}te^{-t}dt = -2\int_0^{+\infty}td(e^{-t}) = -2te^{-t}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty}e^{-t}dt = -2\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t} - 2e^{-t}\Big|_0^{+\infty} = 2 - 2\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-t} = 2$.

2384. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1+x^2-x^2)dx}{(x^2+1)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1} - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2} = \operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x\,d\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x - \lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x + \frac{x}{2(x^2+1)}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$

2391. Сравним с $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\operatorname{arctg}x}{\sqrt[3]{1+x^3}}\cdot\sqrt[3]{x} = \frac{\pi}{2} \neq 0$, показатель степени $1/3 < 1 \Rightarrow$ оба интеграла расходятся.

2396. $\int_1^{\sqrt{2}}\frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$ $[t = \sqrt{x-1},\ x = t^2+1,\ dx = 2t\,dt,\ t_1 = 0,\ t_2 = 1] = \int_0^1 2(t^2+1)dt = (2\frac{t^3}{3}+2t)\Big|_0^1 = \frac{8}{3}.$

2401. $\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $[t = x - \frac{a+b}{2},\ dt = dx,\ t_1 = \frac{a-b}{2},\ t_2 = \frac{b-a}{2}] = \int_{(a-b)/2}^{(b-a)/2}\frac{dt}{\sqrt{(b-a)^2/4-t^2}} = \arcsin\frac{2t}{b-a}\Big|_{(a-b)/2}^{(b-a)/2} = \pi.$

2408. $I = \int_{-1}^1\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx = \int_{-1}^1 x^{2/5}dx - \int_{-1}^1\frac{dx}{x^{5/3}} = \frac{10}{7} - \int_{-1}^0\frac{dx}{x^{5/3}} - \int_0^1\frac{dx}{x^{5/3}}$; оба интеграла расходятся в нуле, т. к. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^{2/3}} = \infty$, поэтому I расходится.

2415. $I = \int_0^1\frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1}$ сравним с $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1} : \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to0}\frac{x}{e^{\sin x}-1} = \lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x} = 1$, $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2 \Rightarrow I$ сходится.

2420.1. При $k > 1$ $\frac{1}{x^k\ln x} < \frac{1}{x^k} \Rightarrow$ интеграл сходится, при $k < 1$ $\frac{1}{x^k\ln x} > \frac{1}{x^{k+\varepsilon}}$, где $k+\varepsilon < 1$, т. к. $\ln x < x^\varepsilon$ при $x \to \infty$, $\Rightarrow$ интеграл расходится, при $k = 1$ $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{dt}{t} = +\infty$, таким образом интеграл сходится при $k > 1$.

2424. При $x \to 0$ $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2} \Rightarrow \int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos x}{x^m}dx$ сходится при тех же m, что $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2x^{m-2}}$, т. е. при $m < 3$.

2431. $I_n = \int_0^{+\infty}x^{2n+1}e^{x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x^{2n}d(e^{-x^2}) = -\frac{1}{2}x^{2n}e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty}x^{2n-1}e^{-x^2}dx = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = \ldots = n!I_0 = n!\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx = -\frac{n!}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{n!}{2}.$

2435. $I(\alpha) = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x-\cos\alpha)\sqrt{x^2-1}}$ $[t = \frac{1}{x-\cos\alpha},\ x = \frac{1}{t}+\cos\alpha,\ dx = -\frac{dt}{t^2},\ t_1 = \frac{1}{1-\cos\alpha},\ t_2 = 0] = \int_0^{1/(1-\cos\alpha)}\frac{dt}{\sqrt{(1+t\cos\alpha)^2-t^2}} = \int_0^{1/(1-\cos\alpha)}\frac{dt}{\sqrt{-(t^2\sin^2\alpha-2t\cos\alpha-1)}} = (\alpha \neq \pi)\ \int_0^{1/(1-\cos\alpha)}\frac{dt}{\sqrt{-(t\sin\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2+1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} =$

$= \int_0^{1/(1-\cos\alpha)} \frac{dt}{\sqrt{1/\sin^2\alpha-(t\sin\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2}} = \frac{1}{\sin\alpha}\arcsin(t\sin^2\alpha - - \cos\alpha)\Big|_0^{1/(1-\cos\alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha}(\arcsin(\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha} - \cos\alpha) - -\arcsin(-\cos\alpha)) = \frac{1}{\sin\alpha}(\arcsin 1+\arcsin\cos\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}- -\alpha) = \frac{\pi-\alpha}{\sin\alpha}$; $I(\pi) = \int_0^{1/2}\frac{dt}{\sqrt{1-2t}} = -\sqrt{1-2t}\Big|_0^{1/2} = 1$.

2442. $I_n = \int_0^{+\infty} x^{2n}e^{x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x^{2n-1}d(e^{-x^2}) = = -\frac{1}{2}x^{2n-1}e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} + \frac{2n-1}{2}\int_0^{+\infty}x^{2n-2}e^{-x^2}dx = \frac{2n-1}{2}I_{n-1} = = \frac{(2n-1)(2n-3)}{4}I_{n-2} = \ldots = \frac{(2n-1)!!}{2^n}I_0 = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx = = \frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}$.

2446. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx = -\int_0^{+\infty}\sin^2 x\, d(\frac{1}{x}) = -\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_0^{+\infty} + +\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} - \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin^2 x}{x} + \int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}d(2x) = = 0-0+\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

2449. $\varphi(x) = -\int_0^x \ln\cos y\,dy$ $[y = \pi/2 - z,\ dz = = -dy,\ z_1 = \pi/2,\ z_2 = \pi/2-x] = \int_{\pi/2}^{\pi/2-x}\ln\sin z\,dz = = \int_{\pi/2}^{\pi/2-x}\ln(2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2})dz = \int_{\pi/2}^{\pi/2-x}\ln 2\,dz + \int_{\pi/2}^{\pi/2-x}\sin\frac{z}{2}dz + + \int_{\pi/2}^{\pi/2-x}\cos\frac{z}{2}dz = I_1+I_2+I_3$; $I_1 = -x\ln 2$, $I_2 = = \int_{\pi/2}^{\pi/2-x}\sin\frac{z}{2}dz$ $[t = \pi/2 - z/2,\ dt = -dz/2,\ t_1 = \pi/4,\ t_2 = \pi/4+x/2] = -2\int_{\pi/4}^{\pi/4+x/2}\ln\cos t\,dt = 2(\varphi(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}) - -\varphi(\frac{\pi}{4}))$, $I_3 = \int_{\pi/2}^{\pi/2-x}\ln\cos\frac{z}{2}dz$ $[t = z/2,\ dt = dz/2,\ t_1 = = \pi/4,\ t_2 = \pi/4 - x/2] = 2\int_{\pi/4}^{\pi/4-x/2}\ln\cos t\,dt = -2\varphi(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}) + +2\varphi(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \varphi(x) = 2\varphi(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}) - 2\varphi(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}) - x\ln 2$; $\varphi(\frac{\pi}{2}) = = 2\varphi(\frac{\pi}{2}) - 2\varphi(0) - x\ln 2 \Rightarrow \varphi(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}\ln 2$.

К ГЛАВЕ 8

2456. $y' = 4-2x$; уравнения касательных: в точке $(0, -3)$ $y = 4x-3$, в точке $(3, 0)$ $y = 6-2x$, касательные пересекаются в точке $x = 1{,}5 \Rightarrow S = \int_0^{1,5}(4x-3+x^2-4x+ +3)dx + \int_{1,5}^3(6-2x+x^2-4x+3)dx = \int_0^{1,5}x^2dx + \int_{1,5}^3(x^2- -6x+9)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{1,5} + \frac{x^3}{3}\Big|_{1,5}^3 - 3x^2\Big|_{1,5}^3 + 9x\Big|_{1,5}^3 = 2{,}25$.

2461. Найдем точки пересечения кривых: $y = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^2 = 2y$, $y^2+2y-8 = 0$, $y_1 = 2$, $y_2 = 4$ — посторонний корень, $x_{1,2} = \pm 2$; площадь верхней части $S_1 = \int_{-2}^2\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx = 2\int_0^2\sqrt{8-x^2}dx - \int_0^2 x^2dx$

$[x = 2\sqrt{2}\sin t,\ dx = 2\sqrt{2}\cos t\,dt,\ t_1 = 0,\ t_2 = \pi/4] = = 16\int_0^{\pi/4}\cos^2 t\,dt - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 8\int_0^{\pi/4}(1+\cos 2t)dt - \frac{8}{3} = (8t + + 4\sin 2t)\Big|_0^{\pi/4} - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}$; т. к. площадь круга радиуса $2\sqrt{2}$ равна 8π, площадь нижней части $S_2 = 8\pi - (2\pi + \frac{4}{3}) = 6\pi - \frac{4}{3}$.

2467. Найдем точки пересечения кривых: $\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}$, $x^4 + + x^2 - 2 = 0$. $x = \pm 1$; $S = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right)dx = (2\operatorname{arctg} x - - \frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$.

2473. $y = \pm\sqrt{x(x-1)^2} = \pm\sqrt{x}|x-1|$; петля расположена на участке $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}(1-x)$. $S = 2\int_0^1 \sqrt{x}(1 - - x)dx = 2\int_0^1 (x^{1/2} - x^{3/2})dx = (\frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{4}{5}x^{5/2})\Big|_0^1 = \frac{8}{15}$.

2477. Кривая определена при $x \geqslant 1$, $y = \pm\frac{2\sqrt{x-1}}{x}$, рассмотрим положительную ветвь, найдем точки перегиба: $y' = \frac{2-x}{x^2\sqrt{x-1}}$, $y'' = \frac{3x^2-12x+8}{2x^3(x-1)\sqrt{x-1}}$. $y'' = 0$ при $x = = 2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$; т. к. $2 - \frac{2}{\sqrt{3}} < 1$, $x = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ — искомая прямая; $S = 2\int_1^{2+2/\sqrt{3}} \frac{2\sqrt{x-1}}{x}dx$ $\left[t = \sqrt{x-1},\ x = t^2+1,\ dx = 2t\,dt,\ t_1 = 0,\ t_2 = \sqrt{1+2/\sqrt{3}}\right] = 8\int_0^{\sqrt{1+2/\sqrt{3}}} \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 8\int_0^{\sqrt{1+2/\sqrt{3}}}\left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = = 8(t - \operatorname{arctg} t)\Big|_0^{\sqrt{1+2/\sqrt{3}}} = 8\left(\sqrt{1+2/\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\sqrt{1+2/\sqrt{3}}\right)$.

2484. $\frac{\ln x}{4x} = x\ln x \Rightarrow 4x^2\ln x - \ln x = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$; при $x = \frac{3}{4}$ $\frac{\ln x}{4x} - x\ln x > 0 \Rightarrow \frac{\ln x}{4x} > x\ln x$ на $(\frac{1}{2},\ 1)$; $S = = \int_{1/2}^1 \left(\frac{\ln x}{4x} - x\ln x\right)dx = \frac{1}{4}\int_{1/2}^1 \ln x\,d(\ln x) - \frac{1}{2}\int_{1/2}^1 \ln x\,d(x^2) = = \frac{1}{8}\ln^2 x\Big|_{1/2}^1 - \frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_{1/2}^1 + \frac{1}{4}x^2\Big|_{1/2}^1 = \frac{1}{16}(3 - 2\ln 2 - 2\ln^2 2)$.

2490. $S = \int_0^{2\pi a} y\,dx$ $[x = a(t - \sin t),\ dx = a(1-\cos t),\ y = = a(1-\cos t),\ t_1 = 0,\ t_2 = 2\pi] = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 dt = = 2a^2\int_0^{\pi}(1-\cos t)^2 dt = 8a^2\int_0^{\pi}\sin^4\frac{t}{2}dt$ $[z = t/2,\ dz = = dt/2,\ z_1 = 0,\ z_2 = \pi/2] = 16a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 z\,dz = 16a^2\frac{3!!}{4!!}\frac{\pi}{2} = = 3\pi a^2$(**2269**).

2494.1 Найдем такие $t_1 \neq t_2$, что $x(t_1) = x(t_2)$, $y(t_1) = = y(t_2)$: $3t_1^2 = 3t_2^2 \Rightarrow t_1 = \pm t_2$, т. к. $t_1 \neq t_2$, $t_1 = -t_2$, $3t_1 - - t_1^3 = -3t_1 + t_1^3$, $t_1^3 - 3t_1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0$, $t_1 = \pm\sqrt{3}$; при $t = \pm\sqrt{3}$ $x = 9$, $y = 0 \Rightarrow (9,\ 0)$ — точка самопересечения, при $-\sqrt{3} \leqslant t \leqslant \sqrt{3}$ петля, при этом $y(t) > 0$ при $0 < t < \sqrt{3}$, $y(-t) = = -y(t)$; $S = 2\int_0^9 y\,dx = 2\int_0^{\sqrt{3}}(3t - t^3)6t\,dt = 12\int_0^{\sqrt{3}}(3t^2 - - t^4)dt = 12(t^3 - \frac{t^5}{5})\Big|_0^{\sqrt{3}} = 12(3\sqrt{3} - \frac{9}{5}\sqrt{3}) = \frac{72}{5}\sqrt{3}$.

2498. $\rho(-\varphi)=\rho(\varphi) \Rightarrow$ кривая симметрична относительно оси Ox, $S=2\int_0^\pi \frac{\rho^2 d\varphi}{2}=4a^2\int_0^\pi (2+\cos\varphi)^2 d\varphi=4a^2\int_0^\pi (4+4\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi = 4a^2\left(4\pi+4\sin\varphi|_0^\pi+\int_0^\pi \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)=4a^2(4\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\varphi|_0^\pi)=18\pi a^2$.

2504. $S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}(ae^{m\varphi})^2 d\varphi=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} a^2 e^{2m\varphi}d\varphi=\frac{a^2}{4m}e^{2m\varphi}|_{\varphi_1}^{\varphi_2}=\frac{a^2}{4m}(e^{2m\varphi_2}-e^{2m\varphi_1})=\frac{a^2}{4m}(\rho_2^2-\rho_1^2)$.

2509. $(x^2+y^2)^2-a^2x^2-b^2y^2=0$ $[x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ x^2+y^2=\rho^2] \Leftrightarrow \rho^4-a^2\rho^2\cos^2\varphi-b^2\rho^2\sin^2\varphi=0 \Leftrightarrow a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi=\rho^2$; $S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2 d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)d\varphi=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(a^2+b^2+(a^2-b^2)\cos 2\varphi)d\varphi=\frac{1}{4}\left((a^2+b^2)\varphi+\frac{1}{2}(a^2-b^2)\sin 2\varphi\right)|_0^{2\pi}=\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)$.

2514. $y=\pm\sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}$, $0\leqslant x<2a$, $x=2a$ — асимптота; $S=2\int_0^{2a}x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$ $[t=\sqrt{\frac{x}{2a-x}},\ x=\frac{2at^2}{1+t^2},\ dx=\frac{4at\,dt}{(1+t^2)^2},\ t_1=0,\ t_2=+\infty]=16a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^4dt}{(1+t^2)^3}$ $[t=\operatorname{tg}\varphi,\ dt=d\varphi/cos^2\varphi,\ \varphi_1=0,\ \varphi_2=\pi/2]=16a^2\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{tg}^4\varphi\,d\varphi}{(1+\operatorname{tg}^2\varphi)^3\cos^2\varphi}=16a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4\varphi\,d\varphi=16a^2\cdot\frac{3\pi}{16}=3\pi a^2$.

2518. Возьмем $\varphi\in[-\pi,\pi]$, тогда $\rho\geqslant 0$ при $\varphi\in[\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2})\cup[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]\cup(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}]$; $\rho(-\varphi)=\rho(\varphi)\Rightarrow$ кривая симметрична относительно Ox, $\rho(-\frac{\pi}{4})=\rho(\frac{\pi}{4})=0\Rightarrow$ на участке $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ петля, ее площадь $S_1=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{\cos^2 2\varphi}{\cos^2\varphi}d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(1+\cos 4\varphi)d(\operatorname{tg}\varphi)=\frac{1}{2}(1+\cos 4\varphi)\operatorname{tg}\varphi|_0^{\pi/4}+2\int_0^{\pi/4}\operatorname{tg}\varphi\sin 4\varphi d\varphi=8\int_0^{\pi/4}\sin^2\varphi\cos 2\varphi d\varphi=4\int_0^{\pi/4}(\cos 2\varphi-\cos^2 2\varphi)d\varphi=2\sin 2\varphi|_0^{\pi/4}-2\int_0^{\pi/4}(1+\cos 4\varphi)d\varphi=2-\frac{\pi}{2}-\frac{\sin 4\varphi}{2}|_0^{\pi/4}=2-\frac{\pi}{2}$; поскольку $x=\rho\cos\varphi=\cos 2\varphi$, $y=\rho\sin\varphi=\cos 2\varphi\operatorname{tg}\varphi$, $\lim\limits_{\varphi\to\pi/2+0}x=-1$, $\lim\limits_{\varphi\to\pi/2+0}y=\infty$, $x=-1$ — вертикальная асимптота, $S_2=2\int_{-1}^0 y\,dx=2\int_{\pi/2}^{3\pi/4}\cos 2\varphi\operatorname{tg}\varphi\times(-2\sin 2\varphi d\varphi)=-2\int_{\pi/2}^{3\pi/4}\operatorname{tg}\varphi\sin 4\varphi d\varphi=(2\sin 2\varphi-2\varphi-\frac{\sin 4\varphi}{2})|_{3\pi/4}^{\pi/2}=-\pi+2+\frac{3\pi}{2}=2+\frac{\pi}{2}$ (см. вычисление S_1).

2521. $L=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}dx$ $[t=\sqrt{x^2+1},\ x=\sqrt{t^2-1},\ dx=\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}},\ t_1=2,\ t_2=3]=\int_2^3\frac{t^2dt}{t^2-1}=\int_2^3\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=t|_2^3+\frac{1}{2}\left|\frac{t-1}{t+1}\right||_2^3=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

2526. $y = 0$ при $x = 0$, $x = 3a \Rightarrow$ петля при $0 \leqslant x \leqslant 3a$, $y = \pm\frac{3a-x}{3\sqrt{a}}\sqrt{x}$, $y' = \frac{a-x}{2\sqrt{ax}}$, $y'^2 = \frac{(a-x)^2}{4ax}$, $L = 2\int_0^{3a}\sqrt{1+\frac{(a-x)^2}{4ax}}dx = 2\int_0^{3a}\frac{a+x}{2\sqrt{ax}}dx = \int_0^{3a}\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}\right)dx = 2\sqrt{ax}|_0^{3a} + \frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}}|_0^{3a} = 4a\sqrt{3}$.

2528. $y' = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$, $y' = 0$ при $x = 1 (x > 0)$, $x = 1$ — точка минимума; $\sqrt{1+y'^2} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}$, $y'' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} = \frac{x^2+1}{2x^2}$, $k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$, $k' = \frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$, $k' = 0$ при $x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow L = \int_{\sqrt{3}/3}^1\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)dx = \left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\ln x\right)|_{\sqrt{3}/3}^1 = \frac{1}{6} + \frac{\ln 3}{4}$.

2532. Пусть X — точка $(R\cos^3 t, R\sin^3 t)$; $x'_t = -3R^2\cos^2 t\sin t$, $y'_t = 3R^2\sin^2 t\cos t \Rightarrow L_{AX} = \int_0^t\sqrt{9R^4(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t)dt} = 3R^2\int_0^t\cos t\sin t\,dt = \frac{3R^2}{2}\int_0^t\sin 2t\,dt = -\frac{3R^2}{4}\cos 2t|_0^t = \frac{3}{4}R^2(1-\cos 2t)$; $L_{AB} = \frac{3}{4}R^2(1-\cos\pi) = \frac{3}{2}R^2$, $L_{AM} = \frac{1}{4}L_{AB} = \frac{3}{8}R^2$, $\frac{3}{8}R^2 = \frac{3}{4}R^2(1-\cos 2t) \Rightarrow \cos 2t = \frac{1}{2}$, $t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow M(R\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{R}{8})$ — искомая точка.

2537. $x'_t = t^2\cos t$, $y'_t = t^2\sin t$, $L = \int_0^\pi\sqrt{t^4\cos^2 t+t^4\sin^2 t}dt = \int_0^\pi t^2dt = \frac{t^3}{3}|_0^\pi = \frac{\pi^3}{3}$.

2546. $\rho' = -a\sin\varphi$, $L = 2\int_0^\pi\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}d\varphi = 2a\int_0^\pi\sqrt{2+2\cos\varphi}d\varphi = 4a\int_0^\pi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}|_0^\pi = 8a$.

2551. $x'_t = \frac{\cos t}{t}$, $y'_t = \frac{\sin t}{t}$, при $t = \frac{\pi}{2}$ $x' = 0$, $y' \neq 0 \Rightarrow$ при $t = \frac{\pi}{2}$ вертикальная касательная, $L = \int_1^{\pi/2}\sqrt{\frac{\cos^2 t}{t^2}+\frac{\sin^2 t}{t^2}}dt = \int_1^{\pi/2}\frac{dt}{t} = \ln\frac{\pi}{2}$.

2556.1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$, $V = 2\pi\int_0^a y^2dx = 2\pi\int_0^a\left(b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi b^2(x - \frac{x^3}{3a^2})|_0^a = \frac{4}{3}\pi ab^2$.

2560. $V = \pi\int_a^b\operatorname{ch}^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_a^b(1+\operatorname{ch}2x)dx = \frac{\pi}{2}(x + \frac{\operatorname{sh}2x}{2})|_a^b = \frac{\pi}{4}(2b - 2a + \operatorname{sh}2b - \operatorname{sh}2a)$.

2565. $V = 2\pi\int_0^\pi x\sin x\,dx = -2\pi\int_0^\pi x\,d(\cos x) = -2\pi x\cos x|_0^\pi + 2\pi\int_0^\pi\cos x\,dx = 2\pi^2$.

2570. $V = 2\pi\int_0^a y^2dx$ $[y = a\sin^3 t,\ x = a\cos^3 t,\ dx = -3a\cos^2 t\sin t\,dt,\ t_1 = \pi/2,\ t_2 = 0] = -2\pi\int_{\pi/2}^0 a^2\sin^6 t \times 3a\cos^2 t\sin t\,dt = 6\pi a^3\int_0^{\pi/2}(\sin^7 t - \sin^9 t)dt = 6\pi a^3(\frac{6!!}{7!!} - \frac{8!!}{9!!}) = \frac{32}{105}\pi a^3$.

2574. **1.** $V = 2\pi\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = -\pi\int_0^{+\infty} d(e^{-x^2}) = \pi e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} = \pi - \pi\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} = \pi$. **2.** $V = 2\pi\int_0^{+\infty} e^{-2x^2}dx$ $[t=x\sqrt{2},\ dt=dx\sqrt{2}] = \pi\sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

2579. $-c \leqslant z \leqslant c$; пусть $z = z_0$, уравнение сечения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 - z_0^2}{c^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2(c^2-z_0^2)/c^2} + \frac{y^2}{b^2(c^2-z_0^2)/c^2} = 1$ задает эллипс с полуосями $\frac{a\sqrt{c^2-z_0^2}}{c}$ и $\frac{b\sqrt{c^2-z_0^2}}{c}$, его площадь $S(z_0) = \frac{\pi ab(c^2-z_0^2)}{c^2}$, $V = 2\pi\frac{ab}{c^2}\int_0^c (c^2 - z^2)dz = 2\pi\frac{ab}{c^2}(c^2z - \frac{z^3}{3})\Big|_0^c = \frac{4}{3}\pi abc$.

2585. Пусть Oy — пересечение секущей плоскости с основанием цилиндра, тогда $0 \leqslant x \leqslant R$, $S(x)$ — площадь прямоугольника, его основание $2\sqrt{R^2-x^2}$, высота h такая, что $\frac{x}{h} = \frac{R}{H} \Rightarrow h = \frac{xH}{R}$, $S(x) = \frac{2H}{R}x\sqrt{R^2-x^2}$, $V = \frac{2H}{R}\int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}dx = -\frac{2}{3}\frac{H}{R}\sqrt{(R^2-x^2)^3}\Big|_0^R = \frac{2}{3}R^2H$.

2590. Пусть Oy — указанный диаметр, O — центр круга, тогда $-a \leqslant x \leqslant a$, $2\sqrt{a^2-x^2}$ — диагональ квадрата, $S(x) = 2(a^2-x^2)$, $V = 2\int_0^a 2(a^2-x^2)dx = 4(a^2x - \frac{x^3}{3})\Big|_0^a = \frac{8}{3}a^3$.

2595. $S = 2\pi\int_0^a y\sqrt{1+y'^2}dx = 2\pi\int_0^a \frac{x^3}{3}\sqrt{1+x^4}dx = \frac{\pi}{9}\sqrt{(1+x^4)^3}\Big|_0^a = \frac{\pi}{9}\left(\sqrt{(1+a^4)^3} - 1\right)$.

2601. Повернем дугу и хорду на $45°$ против часовой стрелки, получится дуга AB с концами $A\left(-a\frac{\sqrt{2}}{2},\ a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $B\left(a\frac{\sqrt{2}}{2},\ a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, теперь поднимем ось Ox на $a\frac{\sqrt{2}}{2}$, новая ордината $y_1 = y - a\frac{\sqrt{2}}{2}$; $S = 4\pi\int_0^{a\sqrt{2}/2}\left(y - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{1+y'^2}dx$ $[y = a\sin t,\ x = a\cos t,\ y' = -\operatorname{ctg} t,\ dx = -a\sin t\,dt,\ t_1 = \pi/2,\ t_2 = \pi/4] = 4\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(a\sin t - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t}\times a\sin t\,dt = 4\pi a^2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\sin t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)dt = 4\pi a^2(-\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}t)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \pi a^2\sqrt{2}(2 - \frac{\pi}{2})$.

2605. $S = 2\pi\int_0^\pi a(1+\cos\varphi)\sin\varphi\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = 2\pi a^2\int_0^\pi (1+\cos\varphi)\sin\varphi\cdot 2\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 16\pi a^2\int_0^\pi \cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi = -\frac{32}{5}\pi a^2\cos^5\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = \frac{32}{5}\pi a^2$.

2611. Пусть катеты треугольника OAB — оси Ox и Oy, тогда уравнение гипотенузы $y = a - x$, $M_x = \frac{1}{2}\int_0^a (a-x)^2dx =$

$= -\frac{1}{2}\frac{(a-x)^3}{3}\Big|_0^a = \frac{a^3}{6}$; $M_y = \int_0^a x(a-x)dx = (\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_0^a = \frac{a^3}{6}$; пусть теперь ось Ox совпадает с гипотенузой, Oy проходит через вершину прямого угла, тогда уравнения катетов $y = x + \frac{a}{\sqrt{2}}$, $-\frac{a}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant 0$, и $y = \frac{a}{\sqrt{2}} - x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{\sqrt{2}}$; $M_x = \frac{1}{2}\int_{-a/\sqrt{2}}^0 \left(x + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^{a/\sqrt{2}} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - x\right)^2 dx = \frac{1}{6}(x + \frac{a}{\sqrt{2}})^3\Big|_{-a/\sqrt{2}}^0 - \frac{1}{6}(\frac{a}{\sqrt{2}} - x)^3\Big|_0^{a/\sqrt{2}} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$.

2615. Т. к. полуокружность симметрична относительно оси Oy, $\xi = 0$; $y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, $ds = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx = \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$, $M_x = \int_{-r}^r y\,ds = \int_{-r}^r r\,dx = 2r^2$, $\eta = \frac{M_x}{L} = \frac{2r^2}{\pi r} = \frac{2}{\pi}r$.

2620. $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$, $ds = \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}}dx = \sqrt{\frac{a^4+(b^2-a^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}}dx$, $y\,ds = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}dx = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}dx$, где $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}$ — эксцентриситет эллипса; $M_x = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx = \frac{b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2} + \frac{a^2}{2\varepsilon}\arcsin\frac{\varepsilon x}{a}\right)\Big|_0^a = \frac{b}{a}\left(\frac{a}{2}\sqrt{a^2-\varepsilon^2a^2} + \frac{a^2}{2\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right) = b\left(\frac{b}{2} + \frac{a}{2\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right)$, т. к. $a^2 - \varepsilon^2a^2 = b^2$.

2625. $y^2 = x^3(a-x) \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant a$, $y = \pm x\sqrt{ax-x^2}$, кривая симметрична относительно $Ox \Rightarrow \eta = 0$; $S = \int_0^a 2x\sqrt{ax-x^2}\,dx = \int_0^a 2x\sqrt{a^2/4-(x-a/2)^2}dx$ [$x = a/2 + a/2\sin t$, $dx = a/2\cos t$, $t_1 = -\pi/2$, $t_2 = \pi/2$] $= \frac{a^3}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\sin t)\cos^2 t\,dt = \frac{a^3}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt + \frac{a^3}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\sin t\,dt = \frac{a^3}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt - \frac{\cos^3 t}{3}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi a^3}{8}$; $M_y = \int_0^a 2x^2\sqrt{ax-x^2}\,dx$ [$x = a/2 + a/2\sin t, \ldots$] $= \frac{a^4}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\sin t)^2\cos^2 t\,dt = \frac{a^4}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos^2 t + 2\cos^2 \sin t + \sin^2 t\cos^2 t)dt = \frac{a^4}{16}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt + \frac{a^4}{24}\cos^3 t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{a^4}{32}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt = \frac{\pi a^4}{16} + \frac{\pi a^4}{64} = \frac{5\pi a^4}{64}$; $\xi = \frac{M_y}{S} = \frac{5}{8}a$.

2631. $M_x = \frac{1}{2}\int_0^a y^2dx = -\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^0 3a^3\sin^7 t\cos^2 t\,dt = \frac{3}{2}a^3\int_{\pi/2}^0(\sin^7 t - \sin^9 t)dt = \frac{3}{2}a^3(\frac{6!!}{7!!} - \frac{8!!}{9!!}) = \frac{8}{105}a^3$; $M_y = \int_0^a xy\,dx = -\int_{\pi/2}^0 3a^3\cos^5 t\sin^4 t\,dt$ [$z = \sin t$, $dz = \cos t\,dt$, $z_1 = 0$, $z_2 = 1$] $= 3a^3\int_0^1 z^4(1-z^2)^2dz = 3a^3\int_0^1(z^8 - 2z^6 + z^4)dz = 3a^3(\frac{1}{9} - \frac{2}{7} + \frac{1}{5}) = \frac{8}{105}a^3$; $S = \int_0^a y\,dx =$

$= -\int_{\pi/2}^{0} 3a^2\sin^3 t\cos^2 t\,dt = 3a^2\int_{\pi/2}^{0}(\sin^4 t - \sin^6 t)dt = = \frac{3}{2}\pi a^2(\frac{3!!}{4!!} - \frac{5!!}{6!!}) = \frac{3}{32}\pi a^2$; $\xi = \frac{M_y}{S} = \frac{256}{315\pi}a$, $\eta = \frac{M_x}{S} = \frac{256}{315\pi}a$.

2635. $\rho(-\varphi) = \rho(\varphi) \Rightarrow$ кривая симметрична относительно $Ox \Rightarrow \eta = 0$; $I_1 = \int_0^{\pi} a^3(1+\cos\varphi)^3\cos\varphi d\varphi = = 8a^3\int_0^{\pi}\cos^6\frac{\varphi}{2}\cos\varphi d\varphi = [\varphi/2 = t]16a^3\int_0^{\pi/2}\cos^6 t(2\cos^2 t - - 1)dt = 16a^3\int_0^{\pi/2}(2\cos^8 t - \cos^6 t)dt = 8\pi a^3(2\frac{7!!}{8!!} - \frac{5!!}{6!!}) = = \frac{15}{8}\pi a^3$; $I_2 = \int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = 4a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}d\varphi = [\varphi/2 = = t]8a^2\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\,dt = 4\pi a^2\frac{3!!}{4!!} = \frac{3}{2}\pi a^2$; $\xi = \frac{2}{3}\frac{I_1}{I_2} = \frac{5}{6}a$.

2641. Пусть ось Oz совпадает с осью симметрии полусферы, тогда из соображений симметрии $\xi = \eta = 0$; $\zeta = \frac{M_{xy}}{S}$. Введем на основании полусферы полярные координаты и рассмотрим «прямоугольник» $[\rho,\ \rho + d\rho] \times [\varphi,\ \varphi + d\varphi]$, его площадь $dS = \rho d\rho d\varphi + o(d\varphi)$, момент части полусферы над этой областью равен (опуская бесконечно малые более высокого порядка) $z\sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\,dS = = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2-x^2-y^2} + \frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}\,dS = R\rho d\rho d\varphi$; момент, соответствующий кольцу $[\rho,\ \rho + d\rho]$ равен $\int_0^{2\pi} R\rho d\rho d\varphi = 2\pi R\rho d\rho$, наконец, момент всей полусферы $M_{xy} = 2\pi R\int_0^R \rho d\rho = \pi R^3$; т. к. $S = 2\pi R^2$, $\zeta = \frac{R}{2}$.

2645. $I_x = \int_{-R}^{R} y^2 ds$; $ds = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2-x^2}}dx = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx \Rightarrow I_x = \int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx = R\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\ [dx = = R\sin t] = R\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2\cos^2 t\,dt = \frac{\pi R^3}{2}$.

2649.2. Будем считать треугольник прямоугольным (от этого момент не изменится), ось Oy совпадает с катетом, начало координат в вершине острого угла, тогда уравнение его гипотенузы $y = \frac{h}{a}x$, момент инерции прямоугольника с основанием dx равен $\int_{hx/a}^{h} y^2 dy = \frac{1}{3}\left(h^3 - \frac{h^3}{a^3}x^3\right)dx$, отсюда момент треугольника $I = \frac{1}{3}\int_0^a\left(h^3 - \frac{h^3}{a^3}x^3\right)dx = \frac{1}{3}\left(h^3 x - \frac{h^3}{4a^3}x^4\right)\Big|_0^a = = \frac{ah^3}{4}$.

2650. $I_x = \int_{-R}^{R}\frac{y^3}{3}dx = \frac{1}{3}\int_{-R}^{R}\sqrt{(R^2 - x^2)^3}\ [dx = R\sin t] = = \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^4\cos^4 t\,dt = \frac{2}{3}R^4\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\,dt = \frac{2}{3}R^4\frac{3}{16}\pi = \frac{\pi R^4}{8}$.

2651. Разобьем круг на секторы с центральным углом $d\varphi$; с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $d\varphi$, заменим сектор треугольником с основанием $r\,d\varphi$ и высотой r, его момент инерции равен $\frac{r^4 d\varphi}{4}$(**2649.2**) $\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} \frac{r^4 d\varphi}{4} = \frac{\pi r^4}{2}$.

2655. Разобьем шар на цилиндрические слои высотой dx и радиусом основания $r = \sqrt{R^2 - x^2}$; момент инерции цилиндра равен $\frac{\pi r^4 dx}{2}$(**2651**) $\Rightarrow I = \int_{-R}^{R} \frac{\pi (R^2 - x^2)^2 dx}{2} = \frac{\pi}{2}\int_{-R}^{R}(R^4 - 2R^2x^2 + x^4)dx = \frac{8}{15}\pi R^5$.

2661. Рассмотрим слой высоты dx на расстоянии x от вершины; его боковая поверхность $ds = \pi\left(\frac{R}{H}x + \frac{R}{H}(x + dx)\right)\frac{L}{H}dx$ (L — образующая конуса) $= 2\pi\frac{RL}{H^2}x\,dx + o(dx)$, уравнение образующей конуса $y = \frac{R}{H}x \Rightarrow I = \int_0^H y^2 ds = 2\pi\frac{R^3 L}{H^4}\int_0^H x^3 dx = \frac{\pi R^3 L}{2} = \frac{MR^2}{2}$ ($M = \pi RL$ — масса боковой поверхности).

2665. Центр масс астроиды — точка $(0,\ 0)$, расстояние от него до прямой $x + y = a$ равно $\frac{a}{\sqrt{2}}$, длина кривой $L = 6a$ (**2532**), площадь $S = \frac{3}{8}\pi a^2$ (**2491**) $\Rightarrow V = 2\pi\frac{a}{\sqrt{2}}S = \frac{3\sqrt{2}\pi^2 a^3}{8}$, $S_{\text{пов}} = 2\pi\frac{a}{\sqrt{2}}L = 6\sqrt{2}\pi a^2$.

2670. 1. Пусть dm — масса участка длины dx, находящегося на расстоянии x от точки B, $dm = \frac{M}{l}dx$, $df = k\frac{Mm}{l(a+x)^2}dx$, $f = \int_0^l k\frac{Mm}{l(a+x)^2}dx = -k\frac{Mm}{l(a+x)}\Big|_0^l = k\frac{Mm}{a(a+l)}$. 2. Пусть m_1 — искомая масса, $k\frac{Mm}{a(a+l)} = k\frac{m_1 m}{(a+l)^2} \Rightarrow m_1 = M\frac{a+l}{a}$. 3. $A = -\int_{r_1}^{r_2} k\frac{Mm}{a(a+l)}da = -\frac{kMm}{l}\ln\frac{a}{a+l}\Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{kMm}{l}\ln\frac{r_1(r_2+l)}{r_2(r_1+l)}$.

2680. Пусть x — радиус сечения усеченного конуса на расстоянии h от верхнего основания, dh — толщина слоя песка радиуса x, dV и dm — объем и масса этого слоя; $\frac{h}{H} = \frac{x-r}{R-r} \Rightarrow x = r + \frac{h}{H}(R - r)$, $dV = \pi x^2 dh$, $dm = d\pi x^2 dh \Rightarrow A = \int_0^H g(H - h)dm = gd\pi\int_0^H x^2(H - h)dh = \frac{gd\pi}{H^2}\int_0^H (rH + h(R - r))^2(H - h)dh = \frac{gd\pi H^2}{12}(R^2 + 2Rr + 3r^2)$.

2685. Уравнение параболы $y = ax^2$, при $x = R$ $y = H \Rightarrow a = \frac{H}{R^2}$, $y = \frac{H}{R^2}x^2$; рассмотрим слой жидкости на расстоянии x от дна толщиной dx, его радиус $r = \sqrt{\frac{h}{a}} = \sqrt{\frac{h}{H}}R$, объем $dV = \frac{\pi R^2}{H}h\,dh$, работа по его выкачиванию $dA = \frac{\pi R^2}{H}dgh(H - h)dh \Rightarrow A = \frac{\pi R^2}{H}dg\int_0^H (Hh - h^2)dh = \frac{\pi dgH^2R^2}{6} \approx \frac{3{,}14\cdot 9{,}8\cdot 800\cdot 4\cdot 16}{6} \approx 2{,}6\cdot 10^5$ *Дж*.

2690. Пусть Ox совпадает с осью вращения; уравнение параболы $y = \pm k\sqrt{x}$, при $x = h$ $y = \frac{a}{2} \Rightarrow k = \frac{a}{2\sqrt{h}}$, $y = \pm\frac{a}{2}\sqrt{\frac{x}{h}}$; $J = 2\gamma d\int_0^h \frac{y^3}{3}dx = \frac{\gamma da^3}{12}\int_0^h \sqrt{\frac{x^3}{h^3}}dx = \frac{\gamma da^3 h}{30}$, $K = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{\gamma da^3 h\omega^2}{60} \approx 0{,}15$ *Дж.*

2695. Пусть h — расстояние от поверхности воды, x — ширина плотины на глубине h, тогда $\frac{h}{H} = \frac{x-b}{a-b}$, $x = b + \frac{h}{H}(a-b)$, площадь прямоугольника со сторонами x и dh $dS = \frac{1}{H}(bH + (a-b)h)$, сила давления воды на этот прямоугольник $df = \gamma gh\,dS = \frac{\gamma g}{H}(bH + (a-b)h)h\,dh$. $f = \frac{\gamma g}{H}\int_0^H (bHh + (a-b)h^2)dh = \frac{\gamma g}{H}\left(\frac{bH^3}{2} + \frac{(a-b)H^3}{3}\right) = \frac{\gamma gH^2(2a+b)}{6} \approx 2{,}5\cdot 10^5 H$.

2700. Пусть x — расстояние от центра шара до слоя толщиной dx по вертикали (если слой ниже центра, считаем $x < 0$), тогда объем слоя $dV = \pi(R^2 - x^2)dx$. На перемещение слоя под водой работа не затрачивается, т. к. плотность шара равна плотности воды, работа по перемещению слоя над водой $dA = g\,dV(R+x) = g\pi(R^2 - x^2)(R+x)dx \Rightarrow A = g\pi\int_{-R}^R (R^3 + R^2x - Rx^2 - x^3)dx = \frac{4}{3}g\pi R^4$.

2705. Пусть x — расстояние от верхнего края щели до слоя толщиной dx, площадь слоя $dS = b\,dx$, за 1 с из этого слоя вытекает $dV = v\,dS = \sqrt{2g(H+x)}b\,dx$ воды. Отсюда $V = b\sqrt{2g}\int_0^h \sqrt{H+x}\,dx = \frac{2b\sqrt{2g}}{3}((H+h)^{3/2} - H^{3/2})$.

2709. $dA = p\,dV$, $p = p_0(\frac{V_0}{V})^\gamma \Rightarrow A = -\int_{V_0}^{V_1} p_0(\frac{V_0}{V})^\gamma dV = \frac{p_0}{\gamma-1}\left(\frac{V_0^\gamma}{V_1^{\gamma-1}} - V_0\right) \approx 1{,}6\cdot 10^4$ *Дж.*

2711. Т. к. температура внешней среды равна 0, за время dt температура тела изменяется на $d\theta = -k\theta\,dt \Rightarrow \frac{d\theta}{\theta} = -k\,dt \Rightarrow \int\frac{d\theta}{\theta} = -k\int dt \Rightarrow \ln\theta = -kt + C \Rightarrow \theta = e^C e^{-kt}$, при $t = 0$ $\theta = \theta_0 \Rightarrow \theta = \theta_0 e^{-kt}$; при $t = t_1$ $\theta = \theta_1$, $\theta_1 = \theta_0 e^{-kt_1} \Rightarrow k = \frac{\ln\theta_0 - \ln\theta_1}{t_1} \approx 0{,}575$; $\theta_2 = \theta_0 e^{-kt_2} \approx 5{,}3°$.

2717. Пусть $T = 10$ мин, $k = 0{,}004$, $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, тогда $\theta = \theta_1 + \Delta\theta\frac{t}{T}$; за промежуток времени dt через проводник проходит $dQ = I\,dt = \frac{U\,dt}{R_0(1+k(\theta_1 + \Delta\theta t/T))} \Rightarrow Q = \frac{UT}{R_0}\int_0^T \frac{dt}{T + k(\theta_1 T + \Delta\theta t)} = \frac{UT}{k\Delta\theta R_0}\ln(T + k(\theta_1 T + \Delta\theta t))|_0^T = \frac{UT}{k\Delta\theta R_0}\ln\frac{1+k\theta_2}{1+k\theta_1} \approx 5110$ *Кл.*

2723. Пусть I — количество света; $dI = -kI\,dh \Rightarrow I = I_0 e^{-kh}$(**2711**); при $h = h_1$ $I = \frac{I_0}{2} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{h_1}$, $I = I_0(\frac{1}{2})^{h/h_1}$; $I_2 = I_0(\frac{1}{2})^{h_2/h_1} = I_0 2^{-10} = \frac{1}{1024}I_0$.

К ГЛАВЕ 9

2728. $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{(2n+1)-(2n-1)}{2(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \Rightarrow$ $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}$; $S = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

2733. $a_n = \frac{3^n+2^n}{6^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} + \frac{1}{3}\frac{1-(1/3)^n}{1-1/3} = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$; $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{2}$.

2736. Используя формулу $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$, докажем по индукции: $S_n = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$; при $n = 1$ $S_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, пусть $S_{n-1} = \operatorname{arctg}\frac{n-1}{n}$, тогда $S_n = \operatorname{arctg}\frac{n-1}{n} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg}\frac{2n^2-2n+1}{2n^2}\cdot\frac{2n^3}{2n^3-n+1} = \operatorname{arctg}\frac{(2n^2-2n+1)n}{(n+1)(2n^2-2n+1)} = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$; $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

2741. Сравним с расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+2)n} : \frac{1}{n} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ ряд расходится.

2746. Сравним со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2-4n+5} : \frac{1}{n^2} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ ряд сходится.

2752. $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n} = \frac{2}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}$; сравним со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})} : \frac{1}{n^{3/2}} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ ряд сходится.

2757. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+2}{4n-3} = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow$ ряд сходится.

2766. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{3} = \frac{e}{3} < 1 \Rightarrow$ ряд сходится.

2768. $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \int_2^{\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln\ln x\big|_2^{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty}\ln\ln x - \ln\ln 2 = \infty \Rightarrow$ ряд расходится.

2774. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+1)!} : \frac{n^2}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2} = 0 < 1 \Rightarrow$ ряд сходится.

2780. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{n}} = 2 > 1$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1\right) \Rightarrow$ ряд расходится.

2787. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{((2n+2)!)^2}\cdot\frac{(2n)!}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \times \frac{n+1}{(2n+2)^2(2n+1)^2} = e\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2(2n+2)(2n+1)^2} = 0 < 1 \Rightarrow$ ряд сходится$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2790. $|a_n|=\frac{1}{2n-1}$, сравним с расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1} : \frac{1}{n} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится; $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$, $|a_n| \downarrow \Rightarrow$ ряд сходится по признаку Лейбница, но не абсолютно.

2794. $|a_n| = \frac{1}{n2^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ ряд абсолютно сходится.

2798. $|a_n|=\frac{1}{n-\ln n}$, сравним с расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n} : \frac{1}{n} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится; $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$, $|a_n| \downarrow \Rightarrow$ ряд сходится по признаку Лейбница, но не абсолютно.

2803. $|a_n| = |\ln^n x|$, $\sqrt[n]{|a_n|} = |\ln x| < 1 \Rightarrow -1 < \ln x < 1 \Rightarrow \frac{1}{e} < x < e$; при $x = e$ $a_n(x) = 1$, при $x = \frac{1}{e}$ $a_n(x) = (-1)^n$, при этих x ряд расходится, поэтому интервал сходимости $(\frac{1}{e},\ e)$.

2807. При $|x| < 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ ряд расходится; при $x = 1$ $a_n(x) = \frac{1}{2}$, $-1 \notin D(a_n(x))$; ряд расходится; при $|x| > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{|x|\sqrt[n]{1+1/x^n}} = \frac{1}{|x|} < 1 \Rightarrow$ ряд сходится.

2810. При $|x| < 1$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|}{\sqrt[n]{1+x^{2n}}} = |x| < 1 \Rightarrow$ ряд сходится; при $x = 1$ $a_n(x) = \frac{1}{2}$, при $x = -1$ $a_n(x) = \frac{(-1)^n}{2}$ ряд расходится; при $|x| > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|}{x^2\sqrt[n]{1+1/x^{2n}}} = \frac{1}{|x|} < 1 \Rightarrow$ ряд сходится.

2814. При $x < 0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{e^{nx}} = \infty$, $\cos nx$ не стремится к $0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n(x) = \infty$, ряд расходится; при $x = 0$ $a_n(x) = 1$, ряд расходится; при $x > 0$ $|a_n(x)| \leqslant b_n = \frac{1}{e^{nx}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{e^x} < 1 \Rightarrow$ ряд сходится.

2820. $|a_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится по признаку Вейерштрасса.

2824. $S_n(x) = x - x^2 + x^2 - x^3 + \ldots + x^n - x^{n+1} = x - x^{n+1}$. $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} x, x \in [0,\ 1) \\ 0, x = 1 \end{cases}$, $\sup\limits_{[0,1]}|S - S_n| = 1 \Rightarrow$ ряд сходится неравномерно.

2829. $S'(x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$, $S''(x) = 1 - x + \ldots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \ldots = \frac{1}{1+x}$ $(x \in (-1, 1)) \Rightarrow S'(x) = \int \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) + C$, $S'(0) = 0 \Rightarrow C = 0$: $S(x) = \int \ln(1+x)dx = x\ln(1+x) - \int \frac{x}{1+x}dx = (x+1)\ln(x+1) - x + C$, $S(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

2835. $S = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3} + \ldots + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+1}} + \cdots = \int_2^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}}\right) dx = \int_2^{+\infty} \frac{1/x^2}{1-1/x}dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-x} = \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\Big|_2^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\frac{x-1}{x} - \ln\frac{1}{2} = \ln 2.$

2839. Проинтегрируем частичную сумму ряда: $\int S_m(x)dx = \ln(1+x) + \ln(1+x^2) + \ldots + \ln(1+x^m) = \ln\left((1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^{n-1}}\right) = \ln\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^{n-1}})}{1-x} = \ln\frac{1-x^{2^n}}{1-x} \Rightarrow \int S(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\frac{1-x^{2^n}}{1-x} = -\ln(1-x)$ $(x \in (-1,1)) \Rightarrow S(x) = \frac{1}{1-x}$.

2844. $y = \sin\frac{\pi(x-2+2)}{4} = \cos\frac{\pi(x-2)}{4} = 1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{(x-2)^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}\frac{(x-2)^{2n}}{(2n)!} + \ldots$.

2849. $y(0) = 1$: $y' = \cos x \operatorname{sh} x - \sin x \operatorname{ch} x$, $y'(0) = 0$; $y'' = -2\sin x \operatorname{sh} x$, $y''(0) = 0$; $y''' = -2\cos x \operatorname{sh} x - 2\sin x \operatorname{ch} x$, $y'''(0) = 0$; $y^{IV} = -4\cos x \operatorname{ch} x = -4y$, $y^{IV}(0) = -4 \Rightarrow y^{(4n)} = (-4)^n$, остальные производные равны 0; $y = 1 - \frac{4x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{4^n x^{4n}}{(4n)!} + \ldots$.

2854. $\ln y = x\ln(1+x) = x\left(x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots\right) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n} + \ldots$; $y = e^{\ln y} = 1 + \ln y + \frac{\ln^2 y}{2!} + \frac{\ln^3 y}{3!} + \ldots = 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3}\right) + \frac{x^4}{2}\ldots = 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{6} + \ldots$.

2858. $y = \frac{1}{2x^3}\left((1 + x^3 + \frac{x^6}{2} + \ldots + \frac{x^{3n}}{n!} + \ldots) - (1 - x^3 + \frac{x^6}{2} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{3n}}{n!} + \ldots)\right) = \frac{1}{x^3}(x^3 + \frac{x^9}{3!} + \ldots + \frac{x^{3(2n-1)}}{(2n-1)!} + \ldots) = 1 + \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{x^{6(n-1)}}{(2n-1)!} + \ldots$.

2863. $y = \ln(10+x) = \ln 10 + \ln(1 + \frac{x}{10}) = \ln 10 + \frac{x}{10} - \frac{x^2}{200} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n10^n} + \ldots$.

2869. $y = (1+x)(1-x)^{-3}$; по правилу Лейбница $y^{(n)} = (1+x)\left((1-x)^{-3}\right)^{(n)} + n\left((1-x)^{-3}\right)^{(n-1)}$; $\left((1-x)^{-3}\right)^{(n)} =$

$= \frac{(n+2)!}{2}(1-x)^{-(n+3)} \Rightarrow y^{(n)} = \frac{(n+2)!}{2}(1+x)(1-x)^{-(n+3)} + n\frac{(n+1)!}{2}(1-x)^{-(n+2)}$, $y^{(n)}(0) = \frac{(n+2)!}{2} + \frac{n(n+1)!}{2} = (n+1)\times(n+1)! = (n+1)^2 n!$; $y = 1 + 4x + 9x^2 + \ldots + (n+1)^2 x^n + \ldots$; $S = y(1/2) = 12$.

2874. $\lim\limits_{x\to\infty}(x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})) = \lim\limits_{x\to\infty}(x - x^2(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \ldots)) = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{2} - \frac{1}{3x} + \ldots) = \frac{1}{2}$.

2880. $R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)10^n}{n10^{n-1}} = 10$; при $x = 10$ $a_n = \frac{10}{n}$ ряд расходится, при $x = -10$ $a_n = (-1)^n\frac{10}{n}$ ряд сходится, интервал сходимости $[-10, 10)$.

2886. $R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n(n+1)!}{n!(n+1)^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$; при $x = \frac{1}{e}$ $a_n = \frac{n^n}{e^n n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c}{\sqrt{n}}$ расходится, при $x = -\frac{1}{e}$ ряд сходится по признаку Лейбница, интервал сходимости $[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$.

2893. $y = e^{-x} + xe^{-x} - e^x + xe^x = 2x\operatorname{ch}x - 2\operatorname{sh}x = 2x\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) - 2\left(x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\right) = 4\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{2x^5}{5!} + \ldots + \frac{nx^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right)$; при $x = 1$ $\frac{2}{e} = 4S \Rightarrow S = \frac{1}{2e}$.

2897. $e^2 = 1 + 2 + \frac{2^2}{2} + \ldots + \frac{2^n}{n!} + \ldots$; оценим остаток ряда: $r_n = \sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{2^m}{m!} = \frac{2^n}{n!}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{2^{m-n}}{(n+1)\ldots m} < \frac{2^n}{n!}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{2^{m-n}}{(n+1)^{n-m}} = \frac{2^{n+1}}{n!(n-1)}$; $r_n < 0{,}001$ при $n = 9 \Rightarrow e^2 \approx \sum_{n=1}^{9}\frac{2^n}{n!} \approx 7{,}389$.

2901. $\sin 1^\circ = \sin\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180} - \frac{\pi^3}{6\cdot 180^3} + \ldots$; т. к. $\frac{\pi^3}{6\cdot 180^3} < 0{,}0001$, $\sin 1^\circ \approx \frac{\pi}{180} \approx 0{,}0175$.

2905. $\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{27+3} = 3\left(1 + \frac{1}{27} + \sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\cdot 5\ldots(3n-4)}{n!3^{3n}}\right) = 3 + \frac{1}{9} - \frac{1}{243} + \frac{5}{3^9} - \ldots$; т. к. $\frac{5}{3^9} < 0{,}001$, $\sqrt[3]{30} \approx 3 + \frac{1}{9} - \frac{1}{243} \approx 3{,}107$.

2912. $\frac{1+x}{1-x} = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$; $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x\left(1 + \frac{x^2}{3} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2n+1} + \ldots\right) \Rightarrow \ln 3 = 1 + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{2^{2n}(2n+1)} + \ldots$; $r_n = \frac{1}{2^{2n+2}(2n+3)} + \frac{1}{2^{2n+4}(2n+5)} + \ldots < \frac{1}{2n+3}\left(\frac{1}{2^{2n+2}} + \frac{1}{2^{2n+4}} + \ldots\right) = \frac{4}{3(2n+3)4^n}$, $r_n < 0{,}0001$ при $n = 5 \Rightarrow \ln 3 \approx \sum_{n=0}^{4}\frac{1}{2^{2n}(2n+1)} \approx 1{,}0986$.

2915. I способ. Пусть $y = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots \Rightarrow xy = a_0x + \ldots + a_nx^{n+1} + \ldots$; т. к. $e^x = 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$, $xy + e^x = 1 + (a_0 + 1)x + \ldots + (a_{n-1} + \frac{1}{n!})x^n + \ldots = a_0 + \ldots + a_nx^n + \ldots \Rightarrow a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ \ldots a_n = 2 + \frac{1}{2!} + \ldots \frac{1}{n!}$. 2 способ. $xy + e^x = y$, при $x = 0$ $y = 1 \Rightarrow a_0 = 1$; дифференцируя равенство, получаем $y'(1-x) = y + e^x$, $y'(0) = 2$, $a_1 = \frac{2}{1!} = 2$, $y''(1-x) = 2y' + x$, $y''(0) = 5$, $a_2 = \frac{5}{2!} = 2\frac{1}{2} \ldots y^{(n)}(1-x) = ny^{(n-1)} + e^x$, $y^{(n)}(0) = 2n! + \frac{n!}{2!} + \ldots + 1 \Rightarrow a_n = 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

2920. $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\right) = 1 - \frac{x^2}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \ldots \Rightarrow \int \frac{\sin x}{x}dx = C + x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \ldots + +(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} + \ldots$, $-\infty < x < +\infty$.

2926. $\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = (1-x^4)^{-1/2} = 1 + \frac{x^4}{2} + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{4n} + \ldots \Rightarrow \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = x + \frac{x^5}{10} + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{2^n n!(4n+1)}x^{4n+1} + \ldots$, $-1 < x < 1$.

2930. $\int \frac{\cos x}{x}dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} - \ldots\right)dx = C + \ln|x| - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{96} - \ldots$; $\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\cos x}{x}dx = \ln\frac{3}{2} - \frac{\pi^2}{4}(\frac{1}{16} - \frac{1}{36}) + \frac{\pi^4}{96}(\frac{1}{4^4} - \frac{1}{6^4}) \approx 0{,}3230$, $\Delta < \int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{x^5}{720}dx < 0{,}0001$.

2935. $\int_{0,1}^{0.2}\frac{e^{-x}}{x^3}dx = \int_{0,1}^{0,2}\frac{1}{x^3}\left(1 - x + \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + \ldots\right)dx = \int_{0,1}^{0,2}(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{6} + \frac{x}{24} + \ldots)dx = (-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln x - \frac{x}{6} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{n-2}}{(n-2)n!} + \ldots)\Big|_{0.1}^{0.2}$; $\Delta < \frac{0{,}2^{n-2} - 0.1^{n-2}}{(n-2)n!} < 0.001$ при $n = 4 \Rightarrow I \approx (-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln x - \frac{x}{6})\Big|_{0,1}^{0,2} \approx 32{,}830$.

2939. $f(x) = \int_0^x e^{-x^2}dx = \int_0^x\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \ldots + (-1)^n \times \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots\right)dx = = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \ldots$; $g(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x^5}{10} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{7} + \ldots \Rightarrow |f(x) - g(x)| < \frac{5x^7}{42} < 0{,}0000001$.

2945. $y = \pm\sqrt{1+x^3} \Rightarrow S = 2\int_0^{1/2}\sqrt{1+x^3}dx = 2\int_0^{1/2}\left(1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{8} + \ldots\right)dx = 2\left(x + \frac{x^4}{8} - \frac{x^7}{56} + \ldots\right)\Big|_0^{1/2} = 1 + \frac{1}{64} - \frac{1}{3584} + \ldots \approx 1 + \frac{1}{64} \approx 1{,}015$, т. к. $\frac{1}{3584} < 0{,}001$.

2949. $V = \pi\int_0^{1/2}\operatorname{arctg}^2 x\,dx = \pi\int_0^{1/2}(x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{23}{45}x^6 + \ldots) = \pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{2}{15}x^5 + \frac{23}{315}x^7 + \ldots\right)\Big|_0^{1/2} = \pi(\frac{1}{24} - \frac{1}{240} + \frac{23}{315\cdot 2^7} + \ldots) \approx 0{,}119$.

К ГЛАВЕ 10

2958. $F(a,\ \frac{1}{a}) = \frac{\varphi(a)\psi(1/a)-\psi(a)\varphi(1/a)}{\varphi(1)\psi(1)}$; $F(a,\ \frac{1}{a}) = a - \frac{1}{a}$.

2964. $F(xy,\ uv) = \ln xy \ln uv = (\ln x + \ln y)(\ln u + \ln v) = \ln x \ln u + \ln x \ln v + \ln y \ln u + \ln y \ln v = F(x,\ u) + F(x,\ v) + F(y,\ u) + F(y,\ v)$.

2970. $u = x^2 + y^2$, $v = xy$, $z = \left(\frac{u+v}{u-v}\right)^v + u$.

2976. Линии пересекаются при $x = 0$, $x = 1$; $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$.

2981. Пусть H — высота, z — расстояние от центра шара до основания пирамиды; $V = \frac{1}{3}xyH$, $H = R \pm z$, $z = \sqrt{R^2 - \frac{x^2+y^2}{4}} \Rightarrow V = \frac{1}{3}xy\left(R \pm \frac{\sqrt{4R^2-x^2-y^2}}{2}\right)$, $0 < x$, $y < 2R$. Функция двузначна.

2988. $x \neq 0$, $-1 \leqslant \frac{y-1}{x} \leqslant 1 \Rightarrow$ при $x > 0$ $1 - x \leqslant y \leqslant 1 + x$, при $x < 0$ $1 + x \leqslant y \leqslant 1 - x$.

2997. $x \sin y \geqslant 0 \Rightarrow$ при $x \geqslant 0$, $\sin y \geqslant 0 \Leftrightarrow 2\pi n \leqslant y \leqslant \pi + 2\pi n$, или $x < 0$ $\sin y \leqslant 0 \Leftrightarrow \pi + 2\pi n \leqslant y \leqslant 2\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3000. $-1 \leqslant 2y(1+x^2) - 1 \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{1+x^2}$.

3004. $\lim\limits_{x,\ y\to 0} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\rho\to 0} \frac{\sqrt{1/4\rho^4\sin^2 2\varphi+1}-1}{\rho^2} = \frac{1}{4}\lim\limits_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\sin^2 2\varphi}{\sqrt{1/4\sin^2 2\varphi+1}+1} = 0$.

3009. Пусть $x \to 0$, $y \to 0$ по прямой $y = kx$, тогда $u = \frac{1+k}{1-k}$ принимает любые значения, кроме -1, при $x=0$, $y\to 0$ $\lim u = -1$; $\lim u = 1$ при $y = 0$, $x \to 0$; $\lim u = \frac{1+k}{1-k} = 2$ при $k = \frac{1}{3}$ $(x \to 0,\ y = \frac{x}{3})$.

3015.1. $f(x,\ y) = \frac{\rho^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\rho^2} = \frac{\rho^2\sin^2 2\varphi}{4} \to 0$ при $\rho \to 0$ независимо от $\varphi \Rightarrow$ функция непрерывна.

3015.6. $f(x,\ y) = \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2-2x^2y^2} = \frac{\rho^4\sin^2 2\varphi}{4(\rho^4-1/2\rho^4\sin^2 2\varphi)} = \frac{\sin^2 2\varphi}{4-2\sin^2 2\varphi}$; при $\varphi = 0$ $f(x,\ y) = 0$, при $\varphi = \frac{\pi}{4}$ $f(x,\ y) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{x,\ y\to 0} f(x,\ y)$ не существует, функция разрывна в $(0,\ 0)$.

3025. Пусть $z = C > 0 \Rightarrow y = -x\ln C - C$ — семейство прямых линий уровня.

3040. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3x^2(x^2+y^2)-2x(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$; из соображений симметрии $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y^4+3x^2y^2-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$.

3045. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}(1+\frac{y^2}{x^2})}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{y}{(x^2+y^2)\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}}$. $\frac{\partial z}{\partial y}=$ $=-\frac{1}{\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}(1+\frac{y^2}{x^2})}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{x}{(x^2+y^2)\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}}$.

3050. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}\cos^2\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=$ $=-\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}$.

3053. $\frac{\partial u}{\partial v}=\frac{1}{1+\frac{(v+w)^2}{(v-w)^2}}\frac{v-w-(v+w)}{(v-w)^2}=-\frac{w}{v^2+w^2}$, $\frac{\partial u}{\partial w}=\frac{1}{1+\frac{(v+w)^2}{(v-w)^2}}\times$ $\times\frac{v-w+(v+w)}{(v-w)^2}=\frac{v}{v^2+w^2}$.

3058. $z=x^{x^y}=e^{x^y\ln x}$. $\frac{\partial z}{\partial x}=x^{x^y}(yx^{y-1}\ln x+x^{y-1})=$ $=x^{x^y}x^{y-1}(y\ln x+1)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^{x^y}x^y\ln^2 x$.

3064. $u=e^{x^3+xy^2+xz^2}$, $\frac{\partial u}{\partial x}=(3x^2+y^2+z^2)e^{x(x^2+y^2+z^2)}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2xye^{x(x^2+y^2+z^2)}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=2xze^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

3070. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+y/2x}\left(1-\frac{y}{2x^2}\right)=\frac{2x^2-y}{2x^3+xy}$, при $x=1$, $y=$ $=2$ $\frac{\partial z}{\partial x}=0$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+y/2x}\cdot\frac{1}{2x}=\frac{1}{2x^2+y}$, при $x=1$, $y=2$ $\frac{\partial z}{\partial y}=$ $=\frac{1}{4}$.

3075. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+x^y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^y}}yx^{y-1}=\frac{y\sqrt{x^y}}{2x(1+x^y)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+x^y}\times$ $\times\frac{1}{2\sqrt{x^y}}x^y\ln x=\frac{y\sqrt{x^y}\ln x}{2(1+x^y)}$.

3081. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=$ $=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$.

3085. $\frac{\partial u}{\partial\psi}=\frac{2\sin(\varphi-2\psi)\cos(\varphi+2\psi))+2\sin(\varphi+2\psi)\cos(\varphi-2\psi)}{\cos^2(\varphi+2\psi)}=$ $=\frac{2\sin2\varphi}{\cos^2(\varphi+2\psi)}$, при $\varphi=\frac{\pi}{4}$, $\psi=\pi$ $\frac{\partial u}{\partial\psi}=\frac{2}{(1/\sqrt{2})^2}=4$.

3091. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{2}$, касательная плоскость к $z=$ $=\frac{x^2+y^2}{4}$ в точке $(2,4,5)$ имеет уравнение $z=5+(x-2)+$ $+2(y-4)$, при $y=4$ получаем прямую $z=x+3$, образующую с положительным направлением Ox угол $45°$.

3095. $d_xz=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx$, $d_yz=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$.

3100. $u'_p=1+\frac{qr}{p^2}+\frac{1}{2\sqrt{p+q+r}}$, $u'_p(1,3,5)=\frac{97}{6}\Rightarrow d_pu=$ $=\frac{97}{600}$.

3106. $dz=\frac{1}{1+(\frac{x+y}{1-xy})^2}\frac{(dx+dy)(1-xy)+(x+y)(dx+dy)}{(1-xy)^2}=$ $=\frac{dx+dy+x^2dy+y^2dx}{1+x^2+y^2+x^2y^2}=\frac{dx(1+y^2)+dy(1+x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}$.

3110. $dz = dx + dy - \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, при данных значениях $dz = 0{,}08$.

3115. $z = f(x,\ y) = x^y$, $dz = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$, при $x = 1$, $y = 2$, $dx = 0{,}04$, $dy = 0{,}02$ $dz = 0{,}08$; $f(1{,}04;\ 2{,}02) \approx f(1;\ 2) + dz = 1{,}08$.

3119. $\frac{\partial S}{\partial a} = a\frac{\sin B \sin C}{\sin(B+C)} = \frac{2S}{a}$, $\frac{\partial S}{\partial B} = \frac{1}{2}a^2\frac{\cos B \sin C \sin(B+C) - \sin B \sin C \cos(B+C)}{\sin^2(B+C)} = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin^2 C}{\sin^2(B+C)} = S\frac{\sin C}{\sin B \sin(B+C)}$, $\frac{\partial S}{\partial C} = S\frac{\sin B}{\sin C \sin(B+C)}$, $dS = \frac{2S}{a}da + S\frac{\sin C}{\sin B \sin(B+C)}dB + S\frac{\sin B}{\sin C \sin(B+C)}dC \Rightarrow \delta_S = \frac{dS}{S} = \frac{2}{a}da + \frac{\sin C}{\sin B \sin(B+C)}dB + \frac{\sin B}{\sin C \sin(B+C)}dC = 2\delta_a + \frac{B \sin C}{\sin B \sin(B+C)}\delta_B + \frac{C \sin B}{\sin C \sin(B+C)}\delta_C$.

3123. $r = \sqrt{r^2 - s^2} + p \Rightarrow r = \frac{p^2+s^2}{2p}$, $\frac{\partial r}{\partial p} = \frac{p^2-s^2}{2p^2}$, $\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{s}{p}$, $dr = \frac{p^2-s^2}{2p^2}dp + \frac{s}{p}ds$, при $s = 97{,}25$ мм, $p = 36{,}2$ мм, $ds = 0{,}25$ мм, $dp = -0{,}3$ мм $dr \approx 1{,}6$ мм.

3126. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$, $\frac{dx}{dt} = 3$, $\frac{dy}{dt} = 12t^2$, $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{3-12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$.

3128. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \ln y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{y}$, $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{v}$, $\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$, $\frac{\partial y}{\partial u} = 3$, $\frac{\partial y}{\partial v} = -2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u} = 2x \ln y \frac{1}{v} + 3\frac{x^2}{y} = \frac{2u}{v^2}\ln(3u-2v) + \frac{3u^2}{v^2(3u-2v)}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = -2x \ln y \frac{u}{v^2} - 2\frac{x^2}{y} = -\frac{2u^2}{v^3}\ln(3u-2v) - \frac{2u^2}{v^2(3u-2v)}$.

3131. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{z\sqrt{1-\frac{x^2}{z^2}}} = \frac{1}{\sqrt{z^2-x^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{x}{z^2\sqrt{1-\frac{x^2}{z^2}}} = -\frac{x}{z\sqrt{z^2-x^2}}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{z^2-x^2}} - \frac{x}{z\sqrt{z^2-x^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1 - \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}$.

3135. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{\frac{x^2+y^2}{xy}} + (x^2+y^2)e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}\frac{2x^2y - x^2y - y^3}{x^2y^2} = e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}\frac{x^4+2x^3y-y^4}{x^2y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}\frac{y^4+2xy^3-x^4}{xy^2}$, $dz = e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}\frac{(x^4-y^4+2x^3y)ydx + (y^4-x^4+2xy^3)xdy}{x^2y^2}$.

3140. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{f^2}f' \cdot 2x = -\frac{2xyf'}{f^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f - yf' \cdot (-2y)}{f^2}$, $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2yf'}{f^2} + \frac{1}{yf} + \frac{2yf'}{f^2} = \frac{1}{yf} = \frac{z}{y^2}$.

3145. $3x^2y + x^3\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx} - y^3 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^3-3x^2y}{x^3-3xy^2}$.

3150. $\frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.

3155. $y^x=x^y\Leftrightarrow x\ln y=y\ln x$; $\ln y+x\frac{y'}{y}=y'\ln x+\frac{y}{x}$, $xy\ln y+x^2y'=xyy'\ln x+y^2$, $y'=\frac{y}{x}\frac{y-x\ln y}{x-y\ln x}=\frac{y}{x}\frac{y-y\ln x}{x-x\ln y}=\frac{y^2}{x^2}\frac{\ln x-1}{\ln y-1}$.

3159. $x^2y^2+x^2+y^2-1=0\Rightarrow x^2y^2+x^2+y^2+1=2\Rightarrow(x^2+1)(y^2+1)=2(*)$; $y=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$, $x=\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\frac{-2x}{1+x^2}\Rightarrow\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=-\frac{dy(1+x^2)}{2x}=(*)-\frac{dy}{x(y^2+1)}=-\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\frac{\sqrt{1+y^2}}{1+y^2}=-\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$.

3165. Пусть $cx-ay=u$, $cy-bz=v$; дифференцируя по x, получаем $\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(c-a\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(-b\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$, $c\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\left(a\frac{\partial\varphi}{\partial u}+b\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{c\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{a\frac{\partial\varphi}{\partial u}+b\frac{\partial\varphi}{\partial v}}$; аналогично $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{a\frac{\partial\varphi}{\partial u}+b\frac{\partial\varphi}{\partial v}}\Rightarrow a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$.

3170. $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}v\Rightarrow v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $z=k\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

3175. $x^2=(u-v)^2\cos^2u-2(u-v)\sin u\cos u+\sin^2u$, $y^2=(u-v)^2\sin^2u+2(u-v)\sin u\cos u+\cos^2u$, $x^2+y^2=(u-v)^2+1=z+1\Rightarrow z=x^2+y^2-1$, $dz=2(xdx+ydy)$.

3180. Уравнения $f(x,y,z)=0$ и $F(x,y,z)=0$ задают y и z как функции от x; дифференцируя по x, получаем $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}=0$, $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx}=0$; решая систему уравнений относительно $\frac{dy}{dx}$ по формулам Крамера, получаем требуемое равенство.

3183. $\frac{\partial z}{\partial x}=e^x(\cos y+x\sin y+\sin y)$, $\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=e^x(\cos y-\sin y+x\cos y)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=e^x(-\sin y+x\cos y)$, $\frac{\partial^2z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=e^x(\cos y-\sin y+x\cos y)$.

3186. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial^2z}{\partial x^2}=-\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=\frac{x^3+(x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}$.

3191. $z=e^{\ln x\ln y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{\ln x\ln y}\frac{\ln y}{x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{\ln x\ln y}\frac{\ln x}{y}$, $\frac{\partial^2z}{\partial x^2}=e^{\ln x\ln y}\left(\frac{\ln^2y}{x^2}-\frac{\ln y}{x^2}\right)=e^{\ln x\ln y}\frac{\ln y(\ln y-1)}{x^2}$, $\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=e^{\ln x\ln y}\left(\frac{\ln x\ln y}{xy}+\frac{1}{xy}\right)=e^{\ln x\ln y}\frac{\ln x\ln y+1}{xy}$, $\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=e^{\ln x\ln y}\frac{\ln x(\ln x-1)}{y^2}$.

3195. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = \frac{4x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$.

3199. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x+e^y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x+e^y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2 = 0$.

3204. $\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 + ay^2$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2axy$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2ax$. $6x + 2ax = 0$ при $a = -3$.

3209. $f(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$; $\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{dx}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{x}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-3}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{vmatrix}$.

3215. $u = \frac{1}{x}(\varphi(x-y) + \psi(x-y))$, $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}(\varphi(x-y) + \psi(x-y)) + \frac{1}{x}(\varphi'(x-y) + \psi'(x-y))$, $x^2\frac{\partial u}{\partial x} = -(\varphi(x-y) + \psi(x-y)) + x(\varphi'(x-y) + \psi'(x-y))$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right) = x(\varphi''(x-y) + \psi''(x-y))$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x}(\varphi''(x-y) + \psi''(x-y))$.

3222. $\frac{\partial z}{\partial x} = \sin^2 y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x\sin 2y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \sin 2y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x\cos 2y \Rightarrow d^2 z = 2\sin 2y\,dx\,dy + 2x\cos 2y\,dy^2$.

3227. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{2x\,dx}{a^2} + \frac{2y\,dy}{b^2} + \frac{2z\,dz}{c^2} = 0$ (1), $\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{z\,d^2z + dz^2}{c^2} = 0$ (2); (1)$\Rightarrow$ $dz = -\frac{c^2}{z}\left(\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2}\right)$, (2)$\Rightarrow$ $z\,d^2 z + dz^2 = -c^2\left(\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2}\right) \Rightarrow d^2 z = -\frac{c^2}{z}\left(\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2}\right) - \frac{c^4}{z^3}\left(\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2}\right)^2 = -\frac{c^4}{z^3}\left(\left(\frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2}\right)\frac{dx^2}{a^2} + \frac{2xy\,dx\,dy}{a^2b^2} + \left(\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right)$.

3231. $x = e^z$, $y'_z = y'_x e^z \Rightarrow y'_x = y'_z e^{-z}$, $y''_{zz} = (y'_x e^z)'_z = y''_{xx}e^{2z} + y'_x e^z \Rightarrow y''_{xx} = (y''_{zz} - y'_x e^z)e^{-2z} = y''_{zz}e^{-2z} - y'_z e^{-2z}$, $A = e^{2z}y''_{xx} - 4e^z y'_x + y = y'' - 5y' + y$.

3235. $y = \frac{1}{v}$, $y' = -\frac{v'}{v^2}$, $y'' = \frac{2v'^2 - v''v}{v^3} \Rightarrow yy'' - 2(y^2 + y'^2) = \frac{2v'^2 - v''v}{v^4} - 2\left(\frac{1}{v^2} + \frac{v'^2}{v^4}\right) = -\frac{v'' + 2v}{v^3}$.

3237. $y = \rho\sin\varphi$, $x = \rho\cos\varphi \Rightarrow y' = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi}{\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi}$, $1 + y'^2 = \frac{\rho^2 + \rho'^2}{(\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi)^2}$, $y'' = \frac{(y')'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{2\rho'^2 + \rho^2 - \rho''\rho}{(\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi)^3}$; $k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{2\rho'^2 + \rho^2 - \rho''\rho}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}$.

3239. $y = \rho\sin\varphi$, $x = \rho\cos\varphi \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial\rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi$, $\frac{\partial u}{\partial\varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x}\rho\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\rho\cos\varphi$; решая систему, получаем $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial\rho}\cos\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\sin\varphi$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial\rho}\sin\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cos\varphi$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\cos\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\sin\varphi\right) - \frac{1}{\rho}\sin\varphi \times \times\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\cos\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\sin\varphi\right) = \cos\varphi\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\cos\varphi + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\sin\varphi - -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\varphi}\sin\varphi\right) - \frac{1}{\rho}\sin\varphi\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\varphi}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial\varphi}\sin\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial^2\varphi}\sin\varphi - -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cos\varphi\right)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\sin\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cos\varphi\right) + \frac{1}{\rho}\cos\varphi \times \times\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\sin\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cos\varphi\right) = \sin\varphi\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\sin\varphi - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cos\varphi + +\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\varphi}\cos\varphi\right) + \frac{1}{\rho}\cos\varphi\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\varphi}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial^2\varphi}\cos\varphi - -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\sin\varphi\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}$.

К ГЛАВЕ 11

3245. $f(x+h, y+k, z+l) = f(x,y,z) + f'_x h + f'_y k + f'_z l + +\frac{1}{2}\left(f''_{xx}h^2 + f''_{yy}k^2 + f''_{zz}l^2 + 2f''_{xy}hk + 2f''_{xz}hl + 2f''_{yz}kl\right) = Ax^2 + + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + (2Ax + Dy + Fz)h + (2By + + Dx + Ez)k + (2Cz + Ey + Fx)l + Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + Dhk + + Ekl + Fhl$.

3248. $f(x+h, y+k) = e^x\sin y + e^x\sin y h + e^x\cos y k + + \frac{1}{2}(e^x\sin y h^2 + 2e^x\cos y hk - e^x\sin y k^2) + \frac{1}{6}(e^x\sin y h^3 + + 3e^x\cos y h^2 k - 3e^x\sin y hk^2 - e^x\cos y k^3) + r_3(x)$; $z_1 = f(0 + + 0{,}1; 0{,}5\pi - 0{,}01\pi) \approx 1 + 0{,}1 + \frac{1}{2}(0{,}01 - 0{,}0001\pi^2) + \frac{1}{6}(0{,}001 - - 3\cdot 0{,}1\cdot 0{,}0001\pi^2) \approx 1{,}1042$.

3254. $z = \ln\frac{(1-x)(1-y)}{1-x-y} = \ln(1-x) + \ln(1-y) - \ln(1 - - x - y) = -x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots - y - \frac{y^2}{2} - \ldots - \frac{y^n}{n} - \ldots + + x + y + \frac{(x+y)^2}{2} + \ldots + \frac{(x+y)^n}{n} + \ldots = xy + x^2y + xy^2 + \ldots + + \frac{(x+y)^n - x^n - y^n}{n} + \ldots$.

3260. $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1) = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{2x}(2y+2) = = 0 \Rightarrow y = -1$, $x = \frac{1}{2}$.

3265.
$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{2\sqrt{1+x}} + \sqrt{1+y} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{2\sqrt{1+y}} + \sqrt{1+x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{1+x}\sqrt{1+y} = -y \\ 2\sqrt{1+y}\sqrt{1+x} = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2(1+x)+x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -\tfrac{2}{3}.$$

3270. Дифференцируя уравнение по x и y, получаем $10x + 10z\frac{\partial z}{\partial x} - 2y - 2z - 2x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y+z-5x}{5z-x-y}$; $10y + 10z\frac{\partial z}{\partial y} - 2x - 2x\frac{\partial z}{\partial y} - 2z - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x+z-5y}{5z-x-y}$; $\begin{cases} x+z-5y = 0 \\ y+z-5x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$. $z = 4x$, подставляя в исходное уравнение, имеем $72x^2 = 72 \Rightarrow x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $(1,1)$, $(-1,-1)$ — критические точки.

3277. $\frac{\partial z}{\partial x} = x^2y^2(36-4x-3y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3y(24-2x-3y)$; $\begin{cases} 4x+3y = 36 \\ 2x+3y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6$, $y = 4$, $(6,\ 4)$ — критическая точка; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2xy^2(36-6x-3y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = x^2y(72-8x-6y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^3(24-2x-6y)$; при $x = 6$, $y = 4$ $a_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2304$, $a_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 0$, $a_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2592$, $I = \begin{vmatrix} -2304 & 0 \\ 0 & -2592 \end{vmatrix} > 0$, $a_{11} < 0 \Rightarrow (6,\ 4)$ — точка максимума.

3281. $\frac{\partial z}{\partial x} = xy(6-3x) = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2(4-x-2y) = 0$, $(2,1)$ — критическая точка внутри области, $z(2,1) = 4$; при $x = 0$ $z = 0$; при $y = 0$ $z = 0$; при $x+y = 6$ $z(x) = -2x^2(6-x)$, $0 \leqslant x \leqslant 6$, $z' = 0$ при $x = 0$, $y = 6$ и $x = 4$, $y = 2$; $z(0,6) = 0$, $z(4,2) = -64 \Rightarrow z_{\max}(2,1) = 4$, $z_{\min}(4,2) = -64$.

3286. Расстояние от точки $(x,\ y)$ до прямой $x+2y-16 = 0$ равно $\frac{x+2y-16}{\sqrt{5}} \Rightarrow$ сумма трех расстояний $z(x,\ y) = x^2 + y^2 + \frac{(x+2y-16)^2}{5} \to \min$; $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \frac{2(x+2y-16)}{5} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + \frac{4(x+2y-16)}{5} = 0 \Rightarrow x = 1{,}6$, $y = 3{,}2$; $(1{,}6;3{,}2)$ — единственная критическая точка, по смыслу задачи в этой точке достигается наименьшее значение.

3290. Пусть x, y, z — измерения параллелепипеда, т. к. $x^2+y^2+z^2 = 4R^2$, $z = \sqrt{4R^2-x^2-y^2}$, $V = f(x,\ y) = xy\sqrt{4R^2-x^2-y^2} \to \max$; $\frac{\partial f}{\partial x} = y\sqrt{4R^2-x^2-y^2} - \frac{x^2y}{\sqrt{4R^2-x^2-y^2}} = \frac{y(4R^2-2x^2-y^2)}{\sqrt{4R^2-x^2-y^2}} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(4R^2-x^2-2y^2)}{\sqrt{4R^2-x^2-y^2}} = 0$;

$\begin{cases} x^2+2y^2=4R^2 \\ 2x^2+y^2=4R^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{2R}{\sqrt{3}},\ z=\sqrt{4R^2-x^2-y^2}=\frac{2R}{\sqrt{3}}$; куб с ребром $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ имеет наименьший объем.

3295. $F(x,y,z,\lambda)=x+y+z+\lambda(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1)$, $\frac{\partial F}{\partial x}=1-\frac{\lambda}{x^2}=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}=1-\frac{\lambda}{y^2}=0$, $\frac{\partial F}{\partial z}=1-\frac{\lambda}{z^2}=0$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}-1=0$; $x_{1,2}=y_{1,2}=z_{1,2}=\pm\sqrt{\lambda}$, если все знаки '+', $\frac{3}{\sqrt{\lambda}}=1, \lambda=9$, $x=y=z=3$, если два '+', один '–', например, $x>0$, $y>0$, $z<0$, $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=1$, $x=y=1$, $z=-1$, при других комбинациях знаков решения нет, поэтому $(3,3,3)$, $(1,1,-1)$, $(1,-1,1)$, $(-1,1,1)$ — критические точки, при $x=y=z=3$, $\lambda=9$ $F_1(x,y,z)=x+y+z+9(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1)$, $dF_1=dx+dy+dz-9(\frac{dx}{x^2}+\frac{dy}{y^2}+\frac{dz}{z^2})$, $d^2F_1=18(\frac{dx^2}{x^3}+\frac{dy^2}{y^3}+\frac{dz^2}{z^3})$, при $x=y=z=3$ $d^2F_1=\frac{2}{3}(dx^2+dy^2+dz^2)$ — положительно определенная квадратичная форма, поэтому $(3,3,3)$ — точка минимума; при $\lambda=1$ $F_2(x,y,z)=x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1$, $dF_1=dx+dy+dz-(\frac{dx}{x^2}+\frac{dy}{y^2}+\frac{dz}{z^2})$, $d^2F_2=2(\frac{dx^2}{x^3}+\frac{dy^2}{y^3}+\frac{dz^2}{z^3})$, при $x=y=1$, $z=-1$ $d^2F_2=2(dx^2+dy^2-dz^2)$ — неопределенная квадратичная форма, поэтому экстремума в этих точках нет.

3300. $F(x,y,z,\lambda)=y^2+4z^2-4yz-2xz-2xy+\lambda(2x^2+3y^2+6z^2-1)$, $\frac{\partial F}{\partial x}=-2z-2y+4\lambda x=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}=2y-4z-2x+6\lambda y=0$. $\frac{\partial F}{\partial z}=8z-4y-2x+12\lambda z=0$; однородная система $\begin{cases} 2\lambda x-y-z=0 \\ x-(1+3\lambda)y+2z=0 \\ x+2y-(4+6\lambda)z=0 \end{cases}$ имеет ненулевое решение только при $\begin{vmatrix} 2\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -(3\lambda+1) & 2 \\ 1 & 2 & -(6\lambda+4) \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 4\lambda^3+4\lambda^2-\lambda-1=0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(4\lambda^2-1)=0 \Leftrightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_{2,3}=\pm\frac{1}{2}$; при $\lambda=-1$ $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x+2y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow y=-z,\ x=0$, подставляя в $2x^2+3y^2+6z^2=1$, получаем $z=\pm\frac{1}{3}$, $y=\mp\frac{1}{3}$, $A_1(0,\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$, $A_2(0,-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$; при $\lambda=\frac{1}{2}$ $\begin{cases} x-y-z=0 \\ x-\frac{5}{2}y+2z=0 \\ x+2y-7z=0 \end{cases} \Rightarrow$

$x = 3z,\ y = 2z, x = \pm\frac{1}{2},\ y = \pm\frac{1}{3},\ z = \pm\frac{1}{6},\ A_3(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}),$

$A_4(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$; при $\lambda = -\frac{1}{2}$ $\begin{cases} x + y \quad +z = 0 \\ x + \dfrac{1}{2}y \quad +2z = 0 \\ x + 2y \quad -z = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$x = -3z,\ y = 2z,\ x = \mp\frac{1}{2},\ y = \pm\frac{1}{3},\ z = \pm\frac{1}{6},\ A_5(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}),$ $A_6(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$; $u_{\max}(A_{1,2}) = 1,\ u_{\min}(A_{3,4}) = -\frac{1}{2},\ u(A_{5,6}) = \frac{1}{2}.$

3305. x, y, z — измерения параллелепипеда, $V = xyz \to$ $\to \max$ при $xy + yz + xz = \frac{S}{2}$, $F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + yz + xz - S/2)$, $\frac{\partial F}{\partial x} = yz + \lambda(y + z) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = xz + \lambda(x + z) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z} = xy + \lambda(x + y) = 0$; последовательно вычитая уравнения, получаем $\begin{cases} (z + \lambda)(y - x) = 0 \\ (x + \lambda)(y - z) = 0 \\ (y + \lambda)(x - z) = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$x = y = z,\ 3x^2 = \frac{S}{2},\ x = y = z = \sqrt{\frac{S}{6}}$ — куб.

3310. x, y, z — наружные размеры ящика, тогда $x - 2\alpha$, $y - 2\alpha, z - \alpha$ — внутренние размеры, $V = (x - 2\alpha)(y - 2\alpha) \times (z - \alpha)$, расход материала равен $(xy + 2(yz + xz))\alpha$, $F(x, y, z, \lambda) = (xy + 2(yz + xz))\alpha + \lambda(x - 2\alpha)(y - 2\alpha)(z - \alpha)$, $\frac{\partial F}{\partial x} = \alpha(y + 2z) + \lambda(y - 2\alpha)(z - \alpha) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \alpha(x + 2z) + \lambda(x - 2\alpha)(z - \alpha) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 2\alpha(x + y) + \lambda(x - 2\alpha)(y - 2\alpha) = 0$; вычитая из 1 уравнения 2, из 3 удвоенные 1 и 2, получаем

$$\begin{cases} (\alpha + \lambda(z - \alpha))(x - y) = 0 \\ (2\alpha + \lambda(x - 2\alpha))(y - 2z) = 0 \\ (2\alpha + \lambda(y - 2\alpha))(x - 2z) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y,\ y = 2z,$$

$V = 4(x - \alpha)^3 \Rightarrow z = \sqrt[3]{\frac{V}{4}} + \alpha,\ x = y = \sqrt[3]{2V} + 2\alpha.$

3315. Расстояние от точки (x, y) до прямой $9x - 7y + 16 = 0$ равно $\frac{9}{\sqrt{130}}x - \frac{7}{\sqrt{130}}y + \frac{16}{\sqrt{130}}$, $F(x, y, \lambda) = \frac{9}{\sqrt{130}}x - \frac{7}{\sqrt{130}}y + \frac{16}{\sqrt{130}} + \lambda(2x^2 - 4xy + 2y^2 - x - y)$, $F'_x = \frac{9}{\sqrt{130}} + 4\lambda x - 4\lambda y - \lambda = 0$, $F'_y = -\frac{7}{\sqrt{130}} - 4\lambda x + 4\lambda y - \lambda = 0$; складывая уравнения, получаем $\lambda = \frac{1}{\sqrt{130}}$, $x - y = -2$, подставляя в уравнение связи, получаем $x = 3$, $y = 5$.

3321. $\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{xb^2}{ya^2}$, уравнение нормали $y - y_0 = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0) \Leftrightarrow a^2 y_0 x - b^2 x_0 y = (a^2 - b^2)x_0 y_0$ расстояние от начала координат до нормали

$d = \frac{(a^2-b^2)x_0y_0}{\sqrt{a^4y_0^2+b^4x_0^2}}$, $f(x, y) = d^2 = \frac{(a^2-b^2)^2x^2y^2}{a^4y^2+b^4x^2} \to \min$ при условии $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$; $F(x,y,\lambda) = \frac{(a^2-b^2)^2x^2y^2}{a^4y^2+b^4x^2} + \lambda(b^2x^2 + a^2y^2)$, $F'_x = \frac{2(a^2-b^2)a^4xy^4}{(a^4y^2+b^4x^2)^2} + 2\lambda b^2x = 0 \Rightarrow \frac{(a^2-b^2)a^4y^4}{(a^4y^2+b^4x^2)^2} + \lambda b^2 = 0(*)$, $F'_y = \frac{2(a^2-b^2)a^4x^4y}{(a^4y^2+b^4x^2)^2} + 2\lambda a^2y = 0 \Rightarrow \frac{(a^2-b^2)a^4x^4}{(a^4y^2+b^4x^2)^2} + \lambda a^2 = 0(**) \Rightarrow \frac{a^2-b^2}{(a^4y^2+b^4x^2)} + \lambda(a^2 + b^2) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{b^2-a^2}{(a^2+b^2)(a^4y^2+b^4x^2)}$; $(*) \Rightarrow \frac{(a^2-b^2)a^4y^4}{(a^4y^2+b^4x^2)^2} - \frac{(a^2-b^2)b^2}{(a^2+b^2)(a^4y^2+b^4x^2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^4y^4}{a^4y^2+b^4x^2} = \frac{b^2}{a^2+b^2}$, $(**) \Rightarrow \frac{b^4x^4}{a^4y^2+b^4x^2} = \frac{a^2}{a^2+b^2} \Rightarrow \frac{a^4y^4}{b^4x^4} = \frac{b^2}{a^2}$, $y^2 = \frac{b^3x^2}{a^3}$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2b}{a^3} = 1$, $x = \pm a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$, $y = \pm b\sqrt{\frac{b}{a+b}}$.

3325. $F(x,y) = a^2(x^4 + y^4) - x^3y^3 - 9a^6$, $F'_x = 4a^2x^3 - 3x^2y^3$, $F'_y = 4a^2y^3 - 3x^3y^2$, $y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{3x^2y^3-4a^2x^3}{4a^2y^3-3x^3y^2}$, $y'(a,2a) = \frac{24a^5-4a^5}{32a^5-12a^5} = 1$, $y - 2a = x - a \Leftrightarrow y = x + a$ — касательная, $y - 2a = -(x - a) \Leftrightarrow y = 3a - x$ — нормаль.

3330. $F(x,y) = y^2 - ax^2 - bx^5$, $F'_x = -2a - 5bx^4 = 0$, $F'_y = 2y = 0 \Rightarrow y = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$; точка $(-\sqrt[3]{\frac{a}{b}},0)$ не лежит на кривой, точка $(0,0)$ — особая; $F''_{xx} = -2a - 2bx^3$, $F''_{xx}(0,0) = -2a$, $F''_{xy} = 0$, $F''_{yy} = 2$, $I = \begin{vmatrix} -2a & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4a$; при $a > 0$ $I < 0$ — двойная точка, при $a < 0 I > 0$ — изолированная точка, при $a = 0$, $b \neq 0$ — точка возврата.

3335. $F(x,y) = x^3 + y^3 + 3axy = 0$, $F'_x = 3x^2 + 3ay = 0$, $F'_y = 3y^2 + 3ax = 0 \Rightarrow x = y = 0$; $F''_{xx} = 6x$, $F''_{xx}(0,0) = 0$, $F''_{xy} = 3a$, $F''_{yy} = 6y$, $F''_{yy}(0, 0) = 0$, $I = \begin{vmatrix} 0 & 3a \\ 3a & 0 \end{vmatrix} = -9a^2 < 0 \Rightarrow (0,0)$ — двойная точка.

3339. $F(x,y) = y^2 - 3(x - a)^3 = 0$, $F'_x = -3(x - a)^2 = 0$, $F'_y = 2y = 0 \Rightarrow x = a$, $y = 0$; $F''_{xx} = -6(x - a)$, $F''_{xx}(a, 0) = 0$, $F''_{xy} = 0$, $F''_{yy} = 2$, $I = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a,0)$ — точка возврата.

3345. $F'_a = x^3 + 2ay = 0 \Rightarrow a = -\frac{x^2}{2y}$, подставляя в уравнение $ax^2 + a^2y = 1$, получаем $y = -\frac{x^4}{4}$.

3351. $(a,\ ba^2)$ — центр окружности, $\sqrt{a^2+b^2a^4}$ — ее радиус, $(x-a)^2+(y-ba^2)^2 = a^2+b^2a^4 \Leftrightarrow x^2-2ax+y^2-2ba^2y = 0$ — уравнение семейства окружностей; $F'_a = -2x-4bay = 0$, $a = -\frac{x}{2by} \Rightarrow x^2+\frac{x^2}{by}+y^2-\frac{x^2}{2by} = 0$, $2by(x^2+y^2)+x^2 = 0$.

3355. $\frac{x}{c}+\frac{y}{d} = 1$ — уравнение прямой в отрезках, $cd = a \Rightarrow d = \frac{a}{c}$, $\frac{x}{c}+\frac{cy}{a} = 1$ — уравнение семейства прямых, $F'_c = -\frac{x}{c^2}++\frac{y}{a} = 0$, $c = \sqrt{\frac{ax}{y}}$, $\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{ax}}+\frac{\sqrt{axy}}{a\sqrt{y}} = 1 \Leftrightarrow xy = \frac{a}{4}$.

3361.3 $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\mathbf{r}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{r}\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$.

3368. $\frac{d\mathbf{r}}{dx} = \frac{d\mathbf{r}}{du}\varphi'$, $\frac{d^2\mathbf{r}}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{d\mathbf{r}}{du}\varphi') = \frac{d^2\mathbf{r}}{du^2}\varphi'^2 + \frac{d\mathbf{r}}{du}\varphi''$. $\frac{d^3\mathbf{r}}{dx^3} = \frac{d^3\mathbf{r}}{du^3}\varphi'^3++2\frac{d^2\mathbf{r}}{du^2}\varphi'\varphi''+\frac{d^2\mathbf{r}}{du^2}\varphi'\varphi''+\frac{d\mathbf{r}}{du}\varphi''' = \frac{d^3\mathbf{r}}{du^3}\varphi'^3+3\frac{d^2\mathbf{r}}{du^2}\varphi'\varphi''+\frac{d\mathbf{r}}{du}\varphi'''$.

3371. $\mathbf{v} = \mathbf{r}'\{a\cos t,\ a\sin t,\ 2bt\}$ — винтовая линия, $\mathbf{a} = \mathbf{r}''\{-a\sin t,\ a\cos t,\ 2b\}$ — окружность.

3375. $\frac{d\mathbf{r}}{dt}\{\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\}$; $\frac{dx}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\sin\theta\cos\varphi+\rho\cos\theta\cos\varphi\frac{d\theta}{dt} + \rho\sin\theta\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\sin\theta\sin\varphi+\rho\cos\theta\sin\varphi\frac{d\theta}{dt} + \rho\sin\theta\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{dz}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\cos\theta-\rho\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$; $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ — единичные касательные векторы к координатным линиям, поэтому их координаты находятся дифференцированием формул перехода от сферических координат к декартовым по ρ, θ, φ и последующим нормированием: $\mathbf{f}_\rho\{\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\varphi\}$, $|\mathbf{f}_\rho| = 1$, $\mathbf{e}_\rho = \mathbf{f}_\rho$; $\mathbf{f}_\theta\{\rho\cos\theta\cos\varphi,\ \rho\cos\theta\sin\varphi,\ -\rho\sin\varphi\}$, $|\mathbf{f}_\theta| = \rho \Rightarrow \mathbf{e}_\theta\{\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\varphi\}$; $\mathbf{f}_\varphi\{-\rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\sin\theta\cos\varphi,\ 0\}$, $|\mathbf{f}_\varphi| = \rho\sin\theta \Rightarrow \mathbf{e}_\varphi\{-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0\}$; $\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{e}_\rho = \frac{d\rho}{dt}$, $\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{e}_\theta = \rho\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{e}_\varphi = \rho\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta$.

3379. Точка соответствует значению $t_0 = \frac{\pi}{2}$; $x'(t) = 1-\cos t$, $x'(t_0) = 1$, $y'(t) = \sin t$, $y'(t_0) = 1$, $z'(t) = 2\cos\frac{t}{2}$, $z'(t_0) = \sqrt{2}$, $\frac{x-\pi/2+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ — касательная, $(x-\frac{\pi}{2}+1)+(y-1)+\sqrt{2}(z-2\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow x+y+\sqrt{2}z-\frac{\pi}{2}-4 = 0$ — нормальная плоскость.

3385. Пусть $y = t$, тогда $x = t^2$, $z = t^4$, $\mathbf{r}(t)\{t^2,t,t^4\}$, $\mathbf{r}'(t)\{2t,1,4t^3\}$, $\mathbf{r}''(t)\{2,0,12t^2\}$, при $t = 1$ $\mathbf{r}\{1,1,1\}$, $\mathbf{r}'\{2,1,4\}$, $\mathbf{r}''\{2,0,12\}$; $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6x-8y-z+3 = 0$ — соприкасающаяся плоскость, ее нормальный вектор $\beta\{6,-8,-1\}$

параллелен бинормали $\Rightarrow \frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{-1}$ — бинормаль; вектор $\nu = \mathbf{r}' \times \beta$ параллелен главной нормали, $\nu = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 4 \\ 6 & -8 & -1 \end{vmatrix} =$ $= 31\mathbf{i} + +26\mathbf{j} - 22\mathbf{k}$, $\frac{x-1}{31} = \frac{y-1}{26} = \frac{z-1}{-22}$ — главная нормаль.

3390. Линия — окружность $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ может быть задана уравнениями $x = \sqrt{2}\cos t$, $y = \sqrt{2}\sin t$, $z = 1$; в данной точке $t_0 = \frac{\pi}{4}$; $\mathbf{r}'(t)\{-\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t, 0\}$, $\mathbf{r}'(t_0)\{-1,\ 1,\ 0\}$, $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$ — касательная; $-(x-1)+(y-1) = 0 \Leftrightarrow y - x = 0$ — нормальная плоскость; $\mathbf{r}''(t)\{-\sqrt{2}\cos t, -\sqrt{2}\sin t, 0\}$, $\mathbf{r}''(t_0)\{-1,\ -1,\ 0\}$, $2\beta = \mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0) = 2\mathbf{k}$ — бинормальный вектор, $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}$ — бинормаль; $z = 1$ — соприкасающаяся плоскость; $\nu = \mathbf{r}'(t_0) \times \beta = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$ — главная нормаль; $(x-1) + (y-1) = 0 \Leftrightarrow x + y = 2$ — спрямляющая плоскость.

3396. $\mathbf{r}'(t)\{-\operatorname{tg} t,\ \operatorname{ctg} t,\ \sqrt{2}\}$, $\mathbf{r}''(t)\{-\frac{1}{\cos^2 t},\ -\frac{1}{\sin^2 t},\ 0\}$, $\mathbf{r}'''(t)\{-\frac{2\sin t}{\cos^3 t}, \frac{2\cos t}{\sin^3 t}, 0\}$, $|\mathbf{r}'| = \sqrt{\operatorname{tg}^2 t + \operatorname{ctg}^2 t + 2} = \frac{2}{\sin 2t}$, $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \frac{\sqrt{2}}{\sin^2 t}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{\cos^2 t}\mathbf{j} + \frac{4}{\sin 2t}\mathbf{k}$, $|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \sqrt{\frac{2}{\sin^4 t} + \frac{2}{\cos^4 t} + \frac{16}{\sin^2 2t}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sin^2 2t}$, $k = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3} = \frac{\sin 2t}{\sqrt{2}}$, $R = \frac{\sqrt{2}}{\sin 2t}$, $(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') = \begin{vmatrix} -\operatorname{tg} t & \operatorname{ctg} t & \sqrt{2} \\ -\frac{1}{\cos^2 t} & -\frac{1}{\sin^2 t} & 0 \\ -\frac{2\sin t}{\cos^3 t} & -\frac{2\cos t}{\sin^3 t} & 0 \end{vmatrix} = \frac{16\sqrt{2}\cos 2t}{\sin^3 2t}$, $T = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2} = \frac{\sin 2t}{\sqrt{2}} = k$.

3401. $\omega \times \tau = k\nu$, $\omega \times \beta = -T\nu \Rightarrow \omega,\ \beta,\ \tau \perp \nu \Rightarrow \omega = x\beta + y\tau$; $k\nu = \omega \times \tau = x\beta \times \tau = x\nu \Rightarrow x = k$; $-T\nu = y\tau \times \beta = -y\nu \Rightarrow y = T$; $\omega \times \nu = (k\beta + T\tau) \times \nu = k\beta \times \nu + T\tau \times \nu = -k\tau + T\beta$.

3405. $y = \frac{x^2}{3}$, $z = \frac{2x^3}{27}$, $y' = \frac{2x}{3}$, $z' = \frac{2x^2}{9}$, $L = \int_0^3 \sqrt{1 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{81}x^4}\,dx = \frac{1}{9}\int_0^3 \sqrt{4x^4 + 36x^2 + 81}\,dx = \frac{1}{9}\int_0^3 (2x^2 + 9)dx = 5$.

3409. $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2/a^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $z' = \frac{a^2}{2(a^2 - x^2)}$, $L = \int_0^{a/2} \sqrt{1 + \frac{a^2}{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{4(a^2 - x^2)^2}}\,dx =$

$= \int_0^{a/2} \frac{\sqrt{4(a^2-x^2)^2+4a^2(a^2-x^2)+a^4}}{2(a^2-x^2)}\,dx = \int_0^{a/2} \frac{2(a^2-x^2)+a^2}{2(a^2-x^2)}\,dx =$
$= \left(x + \frac{a}{4}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\right)\Big|_0^{a/2} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{\ln 3}{2}\right).$

3414. $z'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $z'_x(1,\,1) = -\frac{1}{2}$, $z'_y = \frac{x}{x^2+y^2}$, $z'_y(1,\,1) = \frac{1}{2}$, $z = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) \Leftrightarrow x - y + 2z = \frac{\pi}{2}$ — касательная плоскость, $\mathbf{n}\{1,\,-1,\,2\}$ — нормальный вектор, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-\pi/4}{2}$ — нормаль.

3420. Продифференцируем уравнение по x и y : $\frac{2x}{a^2} + \frac{2zz'_x}{c^2} = 0 \Rightarrow z'_x = -\frac{c^2x}{a^2z}$, $\frac{2y}{b^2} + \frac{2zz'_y}{c^2} = 0 \Rightarrow z'_y = -\frac{c^2y}{b^2z}$; уравнение касательной плоскости $z - z_0 = -\frac{c^2x_0}{a^2z_0}(x-x_0) - c^2y_0b^2x_0(y-y_0) \Leftrightarrow -a^2b^2z_0 + a^2b^2z_0z + b^2c^2x_0x + a^2c^2y_0y = a^2b^2z_0^2 + b^2c^2x_0^2 + a^2c^2y_0^2 \Leftrightarrow \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1.$

3425. $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\{\cos v,\ \sin v,\ -\frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}}\}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\{-u\sin v,\ u\cos v,\ 0\}$,
$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \cos v & \sin v & -\frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}} \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{u^2\cos v}{\sqrt{a^2-u^2}}(x-x_0) + \frac{u^2\sin v}{\sqrt{a^2-u^2}}(y - y_0) + u(z-z_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0}{z_0}(x-x_0) + \frac{y_0}{z_0}(y-y_0) + z - z_0 = 0 \Leftrightarrow x_0x + y_0y + z_0z = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \Leftrightarrow x_0x + y_0y + z_0z = a^2$ — касательная плоскость, $\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}$ — нормаль.

3429. Продифференцируем уравнение по x и y : $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{z'_x}{2\sqrt{z}} = 0 \Rightarrow z'_x = -\sqrt{\frac{z}{x}}$, $z'_y = -\sqrt{\frac{z}{y}}$, уравнение касательной плоскости $z - z_0 = -\sqrt{\frac{z_0}{x_0}}(x-x_0) - \sqrt{\frac{z_0}{y_0}}(y-y_0) \Leftrightarrow z\sqrt{x_0y_0} + x\sqrt{z_0y_0} + y\sqrt{x_0z_0} = z_0\sqrt{x_0y_0} + x_0\sqrt{z_0y_0} + y_0\sqrt{x_0z_0} \Leftrightarrow \frac{z}{\sqrt{z_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{x}{\sqrt{x_0}} = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} \Leftrightarrow \frac{z}{\sqrt{z_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{x}{\sqrt{x_0}} = \sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{z}{\sqrt{az_0}} + \frac{y}{\sqrt{ay_0}} + \frac{x}{\sqrt{ax_0}} = 1$, сумма отрезков равна $\sqrt{a}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = a$.

3435. Продифференцируем уравнение по x и y : $2x + 2zz'_x + 4z'_x = 0 \Rightarrow z'_x = -\frac{x}{z+2}$, $2y - 6 + 2zz'_y + 4z'_y = 0 \Rightarrow z'_y = \frac{3-y}{z+2}$, уравнение касательной плоскости α : $(z-z_0)(z_0 + 2) = -x_0(x-x_0) + (3-y_0)(y-y_0)$; $\alpha \parallel xOy$ при $z'_x = z'_y = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$, $y_0 = 3$; подставив в уравнение поверхности, получим $z^2 + 4z - 21 = 0$, $z_1 = 3$, $z_2 = -7$, $\alpha \parallel xOy$ в точках $(0,3,3)$ и $(0,3,-7)$; $\alpha \parallel yOz$ при $y_0 = 3$, $z_0 = -2$, $x^2 = 25$, $x_{1,2} = \pm 5$, $\alpha \parallel yOz$ в точках $(5,3,-2)$ и $(-5,3,-2)$;

$\alpha \parallel xOz$ при $x_0 = 0$, $z_0 = -2$, $y^2 - 6y - 16 = 0$, $y_1 = 8$, $y_2 = -2$, $\alpha \parallel xOz$ в точках $(0,8,-2)$ и $(0,-2,-2)$.

3441.2. $z'_x = yx^{y-1}$, $z'_x(2,2) = 4$; $z'_y = x^y \ln x$, $z'_y(2,2) = 4\ln 2$, $\operatorname{grad} z\{4,4\ln 2\}$, $\operatorname{tg}\varphi = |\operatorname{grad} z| = 4\sqrt{1+\ln^2 2} \approx 4{,}87$, $\varphi \approx 78{,}4^\circ \approx 78^\circ 24'$.

3448. $u'_x = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}$, $u'_y = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}$, $u'_z = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$, $(\operatorname{grad} u)^2 = \frac{4}{x^2+y^2+z^2}$, $2\ln 2 - \ln(\operatorname{grad} u)^2 = 2\ln 2 - \ln 4 + \ln(x^2 + y^2 + z^2) = \ln(x^2 + y^2 + z^2) = u$.

3452. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x+y}$, $y^2 = 4x \Leftrightarrow y = 2\sqrt{x}$ (при $y > 0$), $y'_x = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\mathbf{l}\{1, \frac{1}{\sqrt{x}}\}$ — касательный вектор к параболе, $|\mathbf{l}| = \sqrt{1+\frac{1}{x}}$; при $x = 1$, $y = 2$ $\operatorname{grad} z\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$, $\mathbf{l}\{1,1\}$, $|\mathbf{l}| = \sqrt{2}$, $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\operatorname{grad} z \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{l}|} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

3457. $\operatorname{grad} u\{-\frac{2x^2}{a^2}, -\frac{2y^2}{b^2}, -\frac{2z^2}{c^2}\}$, $\overrightarrow{MO}\{-x,-y,-z\}$, $|\overrightarrow{MO}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$, $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{1}{r}(-\frac{2x^2}{a^2} - \frac{2y^2}{b^2} - \frac{2z^2}{c^2}) = -\frac{2u}{r}$.

К ГЛАВЕ 12

3462. Масса dm прямоугольного участка со сторонами dx и dy равна $\gamma\, dx\, dy$, кинетическая энергия $dE = \frac{dmv^2}{2} = \frac{\gamma\omega^2 y^2\, dx\, dy}{2} \Rightarrow E = \frac{\omega^2}{2} \iint_D y^2 \gamma(x,y)\, dx\, dy$.

3469. $F(x,y) = x + xy - x^2 - y^2$, $F'_x = 1 + y - 2x = 0$, $F'_y = x - 2y = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $F(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$; при $x = 0$ $F(y) = -y^2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$, $F(0,0) = 0$, $F(0,2) = -4$; при $x = 1$ $F(y) = y - y^2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$, $F'(y) = 1 - 2y = 0$ при $y = \frac{1}{2}$, $F(1,0) = 0$, $F(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, $F(1,2) = -2$; при $y = 0$ $F(x) = x - x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $F'(x) = 1 - 2x = 0$ при $x = \frac{1}{2}$, $F(\frac{1}{2},0) = \frac{1}{4}$; при $y = 2$ $F(x) = 3x - x^2 - 4$, $F'(x) = 3 - 2x > 0 \Rightarrow F_{\max}(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$, $F_{\min}(0,2) = -4$, $S(D) = 2 \Rightarrow -8 \leqslant \iint_D (x + xy - x^2 - y^2)\, d\sigma \leqslant \frac{2}{3}$.

3476. $F(x,y,z,\lambda) = x + y - z + 10 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3)$, $F'_x = 1 + 2\lambda x = 0$, $F'_y = 1 + 2\lambda y = 0$, $F'_z = -1 + 2\lambda z = 0 \Rightarrow x = y = -\frac{1}{2\lambda}$, $z = \frac{1}{2\lambda}$, $\frac{3}{4\lambda^2} = 3$, $\lambda = \pm\frac{1}{2}$; при $\lambda = \frac{1}{2}$ $x = y = -1$, $z = 1$, $f_{\min} = 7$, при $\lambda = \frac{1}{2}$ $x = y = 1$, $y = -1$, $f_{\max} = 13$, $V(\Omega) = 4\sqrt{3}\pi \Rightarrow 28\sqrt{3}\pi \leqslant \iiint_\Omega (x + y - z + 10)\, dv \leqslant 52\sqrt{3}\pi$.

3480. $I = \iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2} = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{dy}{(x+y+1)^2} = \int_0^1 dx \left(\frac{-1}{x+y+1}\right)\Big|_0^1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \ln\frac{x+1}{x+2}\Big|_0^1 = \ln\frac{4}{3}$.

3484. $I = \iint_D x^2 y\cos(xy^2)dxdy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} xdx \int_0^2 \cos(xy^2)d(xy^2) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} xdx\sin(xy^2)|_0^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\sin 4x dx = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} xd(-\cos 4x) = -\frac{1}{8}x\cos 4x|_0^{\pi/2} + \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}\cos 4x dx = -\frac{\pi}{16} + \frac{1}{32}\sin 4x|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{16}$.

3490. $\frac{x^2}{4} \leqslant 1 \Rightarrow -2 \leqslant x \leqslant 2$, $\frac{y^2}{9} \leqslant 1 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow -\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2} \leqslant y \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$; $I = \int_{-2}^9 dx \int_{-3\sqrt{4-x^2}/2}^{3\sqrt{4-x^2}/2} f(x, y)dy$.

3497. Точки пересечения $x = \pm 2$, $y = \pm\sqrt{5}$; при $-3 \leqslant x \leqslant -2$ и $2 \leqslant x \leqslant 3$ выполняется $-\sqrt{9-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{9-x^2}$, при $-2 \leqslant x \leqslant 2$ выполняется $-\sqrt{1+x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1+x^2} \Rightarrow I = \int_{-3}^{-2} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)dy + \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y)dy + \int_2^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)dy$.

3500. $y = \sqrt{2rx - x^2} \Rightarrow (x-r)^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow x = r \pm \sqrt{r^2 - y^2}$, при $0 \leqslant x \leqslant r$ $x = r - \sqrt{r^2-y^2}$, $0 \leqslant y \leqslant r \Rightarrow I = \int_0^r dy \int_{r-\sqrt{r^2-y^2}}^{y} f(x, y)dx$.

3504.2. $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $y = \frac{3-x}{2}$, $1 \leqslant x \leqslant 3 \Leftrightarrow x = 3-2y$, $0 \leqslant y \leqslant 1 \Rightarrow I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y)dx$.

3505.4. Левая дуга $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{1-y^2}$, $0 \leqslant y \leqslant 1$; правая дуга $(x-3)^2 + y^2 = 1$, $3 \leqslant x \leqslant 4 \Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{1-y^2}$, $0 \leqslant y \leqslant 1$; верхняя дуга $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$, $1 \leqslant x \leqslant 3$, $y \geqslant 2 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2y-y^2} \Rightarrow I = \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{3+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)dx + \int_1^2 dy \int_{2-\sqrt{2y-y^2}}^{2+\sqrt{2y-y^2}} f(x, y)dx$.

3509. $\frac{1}{x} = x$ при $x = 1$, D: $1 \leqslant x \leqslant 2$, $\frac{1}{x} \leqslant y \leqslant x$, $I = \int_1^2 dx \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2}dy = \int_1^2 x^2 dx(-\frac{1}{y})|_{1/x}^x = \int_1^2 (x^3 - x)dx = (\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2})|_1^2 = \frac{9}{4}$.

3516. D: $-R \leqslant x \leqslant R$, $-\sqrt{R^2-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2-x^2}$, $\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy = \int_{-R}^R dx \left(\frac{y}{2}\sqrt{R^2-x^2-y^2} + \frac{R^2-x^2}{2}\arcsin\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)\Big|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} = \int_{-R}^R \frac{\pi}{2}(R^2-x^2)dx = \frac{\pi}{2}(R^2 x - \frac{x^3}{3})|_{-R}^R = \frac{2}{3}\pi R^3$, $S(D) = \pi R^2 \Rightarrow M = \frac{2}{3}R$.

3521. $\int_0^{e-1}dx\int_0^{e-x-1}dy\int_0^{x+y+e}\frac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(x+y+e)}dz$ $[z_1 = z-x-y,\ dz_1 = dz,\ z_1(e) = e-x-y,\ z_1(x+y+e) = e] = \int_0^{e-1}dx\int_0^{e-x-1}\frac{dy}{(x-e)(x+y-e)}\int_{e-x-y}^{e}\ln z_1\,dz_1 = \int_0^{e-1}dx\int_0^{e-x-1}\frac{dy}{(x-e)(x+y-e)}(z_1\ln z_1 - z_1)|_{e-x-y}^{e} = \int_0^{e-1}dx\int_0^{e-x-1}\frac{dy}{(x-e)(x+y-e)}(e-x-y-(e-x-y)\ln(e-x-y)) = \int_0^{e-1}dx\int_0^{e-x-1}\frac{\ln(e-x-y)-1}{x-e}dy$ $[y_1 = e-x-y,\ dy_1 = dy,\ y_1(0) = e-x,\ y_1(e-x-1) = 1] = \int_0^{e-1}\frac{dx}{x-e}\int_1^{e-x}(\ln y_1 - 1)dy_1 = \int_0^{e-1}\frac{dx}{x-e}(y_1\ln y_1 - 2y_1)|_1^{e-x} = \int_0^{e-1}\frac{dx}{x-e}((e-x)\ln(e-x) - 2(e-x)+2) = \int_0^{e-1}(-\ln(e-x)+2+\frac{2}{e-x})dx = ((e-x)\ln(e-x) - (e-x) + 2x + 2\ln(e-x))|_0^{e-1} = 2e-5.$

3524. $\Omega\ :\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x},\ 0 \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2} - x;\ I = \int_0^{\pi/2}dx\int_0^{\sqrt{x}}dy\int_0^{\pi/2-x}y\cos(z+x)dz = \int_0^{\pi/2}dx\int_0^{\sqrt{x}}ydy\sin(z+x)|_0^{\pi/2-x} = \int_0^{\pi/2}dx\int_0^{\sqrt{x}}y(1-\sin x)dy = \int_0^{\pi/2}(1-\sin x)dx\frac{y^2}{2}|_0^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(x - x\sin x)dx = \frac{x^2}{4}|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}x\,d(\cos x) = \frac{\pi^2}{16} + x\cos x|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$

3530. $x^2+y^2 = \rho^2,\ x^2-y^2 = \rho^2\cos 2\varphi$, уравнение равносильно $\rho^4 = a^2\rho^2\cos 2\varphi \Leftrightarrow \rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\cos 2\varphi \geqslant 0$ при $-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{5\pi}{4}$, правая петля при $-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$; $I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\rho d\rho.$

3535. $y = Rx \Leftrightarrow \rho\sin\varphi = R\rho\cos\varphi \Leftrightarrow \varphi = \operatorname{arctg}R;\ y = \sqrt{R^2-x^2} \Leftrightarrow x^2+y^2 = R^2 \Leftrightarrow \rho = R$; D — сектор с центром в начале координат, $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi \Rightarrow I = \int_0^{\operatorname{arctg}R}f(\operatorname{tg}\varphi)d\varphi\int_0^R\rho d\rho = \frac{R^2}{2}\int_0^{\operatorname{arctg}R}f(\operatorname{tg}\varphi)d\varphi.$

3540. $x^2+y^2 = 1 \Leftrightarrow \rho = 1,\ x^2+y^2 = 9 \Leftrightarrow \rho = 3,\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6},\ y = x\sqrt{3} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{3},\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \varphi \Rightarrow I = \int_{\pi/6}^{\pi/3}\varphi d\varphi\int_1^3\rho d\rho = \int_{\pi/6}^{\pi/3}\varphi d\varphi\frac{\rho^2}{2}|_1^3 = 4\frac{\varphi^2}{2}|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\pi^2}{6}.$

3545. $x = a\rho\cos\varphi,\ y = b\rho\sin\varphi,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \rho = 1 \Rightarrow I = \int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1 ab\rho^2\cos\varphi\sin\varphi ab\rho d\rho = \frac{a^2b^2}{2} \times \int_0^{\pi/2}\sin 2\varphi d\varphi\int_0^1\rho^3 d\rho = \frac{a^2b^2}{8}\int_0^{\pi/2}\sin 2\varphi d\varphi = -\frac{a^2b^2}{16} \times \cos 2\varphi|_0^{\pi/2} = \frac{a^2b^2}{8}.$

3550. Перейдем к цилиндрическим координатам: $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2 \Leftrightarrow |z| \leqslant \sqrt{R^2-\rho^2},\ (x^2+y^2)^2 = R^2(x^2-y^2) \Leftrightarrow \rho = R\sqrt{\cos 2\varphi},$

$\cos 2\varphi \geqslant 0,\ x \geqslant 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{R\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho d\rho \int_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\,dz.$

3555. Перейдем к сферическим координатам: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}$, $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2} \Leftrightarrow 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1 \Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{8}$.

3560. $V = \iint_D \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\right) dx\,dy = \int_0^a dx \int_0^b \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\right) dy = \int_0^a (\frac{x^2 b}{2p} + \frac{b^3}{6q}) dx = \frac{ab}{6}(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q})$.

3565. При $z = 0$ область D: $0 \leqslant x \leqslant 6$, $\sqrt{x} \leqslant y \leqslant 2\sqrt{x}$; $x + z = 6 \Leftrightarrow z = 6 - x \Rightarrow V = \iint_D (6-x)dx\,dy = \int_0^6 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (6-x)dy = \int_0^6 (6-x)\sqrt{x}\,dx = (4x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2})|_0^6 = \frac{48}{5}\sqrt{6}$.

3570. Уравнение цилиндра $x^2 + z^2 = r^2$, $z \geqslant 0 \Rightarrow z = \sqrt{r^2 - x^2}$, $D:\ 0 \leqslant x \leqslant r,\ 0 \leqslant y \leqslant a - \frac{ax}{r} \Rightarrow V = \int_0^r dx \int_0^{a-ax/r} \sqrt{r^2-x^2}dy = a\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}(1-\frac{x}{r})$ $[x = r\sin t,\ dx = r\cos t\,dt] = \int_0^{\pi/2} r^2\cos^2 t(1-\sin t)dt = ar^2 \int_0^{\pi/2}(\cos^2 t - \cos^2 t \sin t)dt = ar^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\cos^3 t}{3}\right)|_0^{\pi/2} = ar^2(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3})$.

3575. При $z = 0$ $y = \pm x$, $V = \int_0^3 dx \int_{-x}^{x} (x^2 - y^2)dy = \int_0^3 dx(x^2 y - \frac{y^3}{3})|_{-x}^{x} = \int_0^3 \frac{4}{3}x^3 dx = 27$.

3580. При $z = 0$ $y = e^x$, $y = e^{-x} \Rightarrow y > 0$, $y^2 = e^2 \Rightarrow y = e$, $e^x = e$ при $x = 1$, $e^x = e^{-x}$ при $x = 0$, область симметрична относительно $Oy \Rightarrow V = 2\int_0^1 dx \int_{e^x}^{e} (e^2 - y^2)dy = 2\int_0^1 dx(e^2 y - \frac{y^3}{3})|_{e^x}^{e} = 2\int_0^1 (\frac{2}{3}e^3 - e^{x+2} + \frac{1}{3}e^{3x})dx = (\frac{4}{3}e^3 x - 2e^{x+2} + \frac{2}{9}e^{3x})|_0^1 = 2(e^2 - \frac{2e^3+1}{9})$.

3585. Найдем линию пересечения конической поверхности и плоскости $x + z = 2$: $\begin{cases} 4y^2 = x(2-z) \\ x + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - z \\ 4y^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 - x \\ y = \pm\dfrac{x}{2} \end{cases}$. Проекция этой линии на плоскость $z = 0$ $y = \pm\frac{x}{y}$, проекция плоскости $x + z = 2$ — прямая $x = 2$, проекция поверхности $4y^2 = x(2-z)$ — парабола $y^2 = \frac{x}{2}$, таким образом объем тела разбивается на два: V_1, ограниченный сверху плоскостью $z = 2 - x$, снизу областью D_1 : $0 \leqslant x \leqslant 2$, $-\frac{x}{2} \leqslant y \leqslant \frac{x}{2}$ и V_2, ограниченный сверху поверхностью $z = 2 - \frac{4y^2}{x}$, снизу областью D_2: $0 \leqslant x \leqslant 2$, $\frac{x}{2} \leqslant |y| \leqslant \leqslant \sqrt{\frac{x}{2}}$, $V_1 = 2\int_0^2 dx \int_0^{x/2}(2-x)dy = 2\int_0^2 dx(2-x)y|_0^{x/2} = = \int_0^2(2x - x^2)dx = (x^2 - \frac{x^3}{3})|_0^2 = \frac{4}{3}$; $V_2 = 2\int_0^2 dx \int_{x/2}^{\sqrt{x/2}}(2 - - 4\frac{y^2}{x})dy = 2\int_0^2(2y - \frac{4}{3x}y^3)|_{x/2}^{\sqrt{x/2}} = \int_0^2(\frac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt{x} - 2x + \frac{x^3}{3})dx = = (\frac{8}{9}\sqrt{2}x^{3/2} - x^2 + \frac{x^3}{9})|_0^2 = \frac{4}{9}$; $V = V_1 + V_2 = \frac{16}{9}$

3591. $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \Leftrightarrow z^2 = a^2 - - \rho^2$, $x^2 + y^2 = ax \Leftrightarrow \rho = a\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$; D: $\rho \leqslant a\cos\varphi$; $V = 2\iint_D \sqrt{a^2 - \rho^2}\,d\sigma = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - \rho^2}\rho\,d\rho = = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi\left(-\frac{1}{3}\sqrt{(a^2 - \rho^2)^3}\right)|_0^{a\cos\varphi} = \frac{4}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(1 - - \sin^3\varphi)d\varphi = \frac{4}{3}a^3(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})$.

3596. $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $x^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow \rho = = R$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $z = h\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} \Leftrightarrow z = = h\varphi$; $V = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R h\varphi\rho\,d\rho = h\frac{R^2}{2}\int_0^{\pi/2}\varphi\,d\varphi = \frac{\pi^2 hR^2}{16}$.

3600. $y^2 = \frac{b^2}{a}x \Leftrightarrow x = \frac{ay^2}{b^2}$, $y = \frac{b}{a}x \Leftrightarrow x = \frac{ay}{b}$, $\frac{ay^2}{b^2} = = \frac{ay}{b} \Leftrightarrow y = 0$ или $y = b$; $S = \int_0^b dy \int_{ay^2/b^2}^{ay/b} dx = \int_0^b(\frac{ay}{b} - - \frac{ay^2}{b^2})dy = a(\frac{y^2}{2b} - \frac{y^3}{3b^2})|_0^b = \frac{ab}{6}$.

3604. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) \Leftrightarrow \rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{5\pi}{4}$. Из соображений симметрии $S = 4\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho\,d\rho = 4a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\varphi\,d\varphi = = 2a^2\sin 2\varphi|_0^{\pi/4} = 2a^2$.

3610. $V = \int_0^1 dx \int_x^{2x} dy \int_{x^2+y^2}^{x^2+2y^2} dz = \int_0^1 dx \int_x^{2x} y^2 dy = = \int_0^1 \frac{7}{3}x^3 dx = \frac{7}{12}$.

3615. $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$; сфера $\rho^2 + z^2 = 4$, параболоид $\rho^2 = 3z$, линия пересечения $z^2 + 3z - 4 = 0 \Rightarrow z = 1$ $(z \geqslant 0)$, $\rho^2 = 3$, ее проекция на xOy: $\rho = \sqrt{3}$; $V_1 = = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho\,d\rho \int_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-\rho^2}\rho - \frac{\rho^3}{3}\right)d\rho = = \int_0^{2\pi} d\varphi\left(-\frac{1}{3}\sqrt{(4-\rho^2)^3} - \frac{1}{12}\rho^4\right)|_0^{\sqrt{3}} = \frac{19}{6}\pi$; $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = = \frac{32}{3}\pi$, $V_2 = V_{\text{шара}} - V_1 = \frac{15}{2}\pi$.

3620. $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$, $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, $(x^2+y^2+z^2)^2 = axyz \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{4}a\sin 2\varphi\sin 2\theta\cos\theta$; $xyz \geqslant 0$ в 4 из 8 октантов, из соображений симметрии объемы в каждом из октантов равны, следовательно $V = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a/4\sin 2\varphi\sin 2\theta\cos\theta} \rho^2\sin\theta\, d\rho =$
$= 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{a/4\sin 2\varphi\sin 2\theta\cos\theta} =$
$= \frac{a^3}{48}\int_0^{\pi/2}\sin^3 2\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi/2}\sin^3 2\theta\sin^4\theta\, d\theta =$
$= \frac{a^3}{6}\int_0^{\pi/2}\sin^3 2\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi/2}\sin^7\theta\cos^3\theta\, d\theta =$
$= \frac{a^3}{6}\int_0^{\pi/2}\sin^3 2\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi/2}(\sin^7\theta - \sin^9\theta)\, d(\sin\theta) =$
$= \frac{a^3}{6}\int_0^{\pi/2}\sin^3 2\varphi\, d\varphi \left(\frac{\sin^8\theta}{8} - \frac{\sin^{10}\theta}{10}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^3}{240}\int_0^{\pi/2}\sin^3 2\varphi\, d\varphi =$
$= \frac{a^3}{480}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 2\varphi)\, d(-\cos 2\varphi) = \frac{a^3}{360}$.

3624. $(x^2+y^2)^2 + z^4 = a^3 z$ $[x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta] \Leftrightarrow \rho^4(\sin^4\theta + \cos^4\theta) = a^3\rho\cos\theta \Leftrightarrow \rho^3(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta) = a^3\cos\theta \Leftrightarrow \rho = a\sqrt[3]{\frac{2\cos\theta}{2-\sin^2 2\theta}}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$,
$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\sqrt[3]{2\cos\theta/(1+\cos^2 2\theta)}} \rho^2\sin\theta\, d\rho =$
$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \frac{1}{3}a^3 \frac{2\cos\theta}{1+\cos^2 2\theta}\, d\theta =$
$= \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\theta}{1+\cos^2 2\theta}\, d\theta$ $[\cos 2\theta = t]$ $=$
$= \frac{a^3}{6}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{a^3}{6}\int_0^{2\pi}\frac{\pi}{2}\, d\varphi = \frac{\pi^2 a^3}{6}$.

3630. $y^2 + z^2 = x^2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{x^2 - y^2}$; рассмотрим $S/2$ — площадь верхней части конуса; $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $z'_y = \frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}$;
$S = 2\iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2-y^2} + \frac{y^2}{x^2-y^2}}\, dx\, dy = 2\iint_D \frac{|x|\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-y^2}}\, dx\, dy =$
$[x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi] = 8\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\int_0^R \rho\, d\rho =$
$= 4\sqrt{2}R^2\int_0^{\pi/4}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}$ $[t = \sin\varphi,\ dt = \cos\varphi\, d\varphi]$ $=$
$= 4\sqrt{2}R^2\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{dt}{\sqrt{1-2t^2}} = 4R^2 \arcsin t\sqrt{2}\Big|_0^{\sqrt{2}/2} = 2\pi R^2$.

3635. $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ (верхняя часть), $z'_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, $z'_y = -\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, D: круг $x^2 + y^2 \leqslant R^2$,
$S = 2\iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\, dx\, dy = 2a\iint_D \frac{dx\, dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} =$
$[x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi] = 2a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} =$
$= 2a\int_0^{2\pi} d\varphi \left(-\sqrt{a^2-\rho^2}\right)\Big|_0^R = 2a\int_0^{2\pi}\left(a - \sqrt{a^2-R^2}\right) d\varphi =$
$= 4\pi a\left(a - \sqrt{a^2-R^2}\right)$.

3641. Линия пересечения $z^2+2az-3a^2=0 \Rightarrow z=a$ $(z \geqslant 0)$, $x^2+y^2=2a^2$, D: $x^2+y^2 \leqslant 2a^2$, $S=S_1+S_2$. S_1 — площадь поверхности параболоида $z=\frac{x^2+y^2}{2a}$; $z'_x=\frac{x}{a}$, $z'_y=\frac{y}{a}$; $S_1=\iint_D \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}}\,dx\,dy=[x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi]=$ $=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{a\sqrt2}\frac{\sqrt{a^2+\rho^2}}{a}\rho\,d\rho=\frac{1}{2a}\int_0^{2\pi}d\varphi\frac{2}{3}\sqrt{(a^2+\rho^2)^3}\Big|_0^{a\sqrt2}=$ $=\frac{1}{3a}\int_0^{2\pi}(3\sqrt3a^3-a^3)d\varphi=2\pi a^2\frac{3\sqrt3-1}{3}$; S_2 — площадь поверхности сферы $z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$, $z'_x=-\frac{x}{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}}$, $z'_y=-\frac{y}{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}}$, $S_2=\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{3a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy=$ $=\iint_D\frac{a\sqrt3}{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$ $[x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi]=$ $=a\sqrt3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{a\sqrt2}\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{3a^2-\rho^2}}=-a\sqrt3\int_0^{2\pi}d\varphi\sqrt{3a^2-\rho^2}\Big|_0^{a\sqrt2}=$ $=a\sqrt3\int_0^{2\pi}(a\sqrt3-a)d\varphi=2\pi a^2(3-\sqrt3)$; $S=S_1+S_2=$ $=2\pi a^2(3-\frac13)=\frac{16}{3}\pi a^2$.

3645. Пусть Ox совпадает с касательной, Oy проходит через центр круга; уравнение окружности $x^2+(y-R)^2=R^2 \Leftrightarrow$ $x^2+y^2-2Ry=0 \Leftrightarrow \rho=2\sin\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, $M_x=\iint_D y\,dx\,dy[x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi]=$ $=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2R\sin\varphi}\rho^2\sin\varphi\,d\rho=\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{2R\sin\varphi}=$ $=\frac83R^3\int_0^{\pi}\sin^4\varphi\,d\varphi=\frac{16}{3}R^3\int_0^{\pi/2}\sin^4\varphi\,d\varphi=\frac{16}{3}R^3\cdot\frac{3!!}{4!!}\frac{\pi}{2}=\pi R^3$.

3650. Пусть Ox совпадает с биссектрисой угла, Oy проходит через центр круга; из соображений симметрии $\eta=0$; $\xi=\frac{M_y}{S}$, $M_y=\iint_D x\,dx\,dy$ $[x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi]=$ $=\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}d\varphi\int_0^R\rho^2\cos\varphi\,d\rho=\frac{R^3}{3}\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\cos\varphi\,d\varphi=\frac23R^3\sin\frac{\alpha}{2}$, $S_{\text{сект}}=\frac{R^2\alpha}{2}\Rightarrow\xi=\frac43R\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$.

3655. $I_x=\iint_D y^2\,dx\,dy$ $[x=a\rho\cos\varphi,\ y=b\rho\sin\varphi,\ J=ab\rho]=$ $=ab^3\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\int_0^1\rho^3d\rho=\frac{ab^3}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi=\frac{\pi ab^3}{4}$; $I_y=$ $=\iint_D x^2\,dx\,dy$ $[x=a\rho\cos\varphi,\ y=b\rho\sin\varphi,\ J=ab\rho]=$ $=a^3b\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\int_0^1\rho^3d\rho=\frac{a^3b}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{\pi a^3b}{4}$; $I=$ $=I_x+I_y=\frac{\pi ab(a^2+b^2)}{4}$.

3659. Уравнение параболы $y=kx$, при $x=\frac{a}{2}$ $y=h\Rightarrow$ $h=k\frac{a^2}{4}$, $y=\frac{4hx^2}{a^2}$, $I_x=\iint_D y^2\,dx\,dy=\frac{16h^2}{a^4}\iint_D x^4\,dx\,dy=$ $=\frac{32h^2}{a^4}\int_0^{a/2}x^4dx\int_{4hx^2/a^2}^{h}dy=\frac{32h^2}{a^4}\int_0^{a/2}x^4(h-\frac{4hx^2}{a^2})dx=$ $=\frac{32h^3}{a^4}(\frac{x^5}{5}-\frac{4x^7}{7a^2})\Big|_0^{a/2}=\frac{h^3}{a^4}(\frac{a^5}{5}-\frac{a^7}{7})=\frac{2}{35}ah^3$,

$I_y = \iint_D x^2\,dx\,dy = 2\int_0^{a/2} x^2dx\int_{4hx^2/a^2}^{h} dy = 2\int_0^{a/2} x^2(h - - \frac{4hx^2}{a^2})dx = 2h(\frac{x^3}{3} - \frac{4x^5}{5a^2})|_0^{a/2} = a^3h(\frac{1}{12} - \frac{1}{20}) = \frac{1}{30}a^3h$, $I = = \frac{ah}{5}(\frac{2h^2}{7} + \frac{a^2}{6})$.

3665. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$; $M_z = = \iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy\int_0^{1-x^2/a^2-y^2/b^2} z\,dz$ $[x = = a\rho\cos\varphi,\ y = b\rho\sin\varphi,\ J = ab\rho] = = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 ab\rho\,d\rho\int_0^{c\sqrt{1-\rho^2}} z\,dz = \frac{abc^2}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 (1-\rho^2)\rho\,d\rho = = \frac{abc^2}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4})|_0^1 = \frac{abc^2}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi abc^2}{4}$.

3670. Из соображений симметрии $\xi = \eta = 0$. Линия пересечения $z^2 + 2az - 3a^2 = 0 \Rightarrow z = a$, $D: x^2 + + y^2 = 2a^2 \Leftrightarrow \rho = a\sqrt{2}$; $V = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = = \iint_D dx\,dy\int_{(x^2+y^2)/2a^2}^{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}} dz$ $[x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ J = \rho] = = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{a\sqrt{2}} \rho\,d\rho\int_{\rho^2/2a}^{\sqrt{3a^2-\rho^2}} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{a\sqrt{2}} (\sqrt{3a^2-\rho^2}\,\rho - \frac{\rho^3}{2a})d\rho = = \int_0^{2\pi} d\varphi\left(-\frac{1}{3}\sqrt{(3a^2-\rho^2)^3} - \frac{\rho^4}{8a}\right)|_0^{a\sqrt{2}} = \int_0^{2\pi}(a^3\sqrt{3} - \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2})d\varphi = =\pi a^3\frac{6\sqrt{3}-5}{3}$; $M_{xy} = \iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy\int_{(x^2+y^2)/2a^2}^{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}} z\,dz = = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{a\sqrt{2}} \rho\,d\rho\int_{\rho^2/2a}^{\sqrt{3a^2-\rho^2}} z\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{a\sqrt{2}} (3a^2 - \rho^2 - - \frac{\rho^4}{4a^2})\rho\,d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\left(\frac{3}{2}a^2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{24a^2}\right)|_0^{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(3a^4 - a^4 - - \frac{a^4}{4})d\varphi = \frac{5}{3}\pi a^4$; $\zeta = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{5}{6\sqrt{3}-5}a = 5a\frac{6\sqrt{3}+5}{83}$.

3674. Из соображений симметрии $\xi = \eta = 0$; линия пересечения $x^2 + y^2 = 2$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 2$, $z = \frac{x^2+y^2}{2}$, $z'_x = x$, $z'_y = = y$, $S = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho = = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi\sqrt{(1+\rho^2)^3}|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(3\sqrt{3} - 1)d\varphi = = \frac{2\pi}{3}(3\sqrt{3} - 1)$; $M_{xy} = \frac{1}{2}\iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}(x^2 + y^2)dx\,dy = = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+\rho^2}\rho^3 d\rho$ $[t = 1 + \rho^2,\ dt = 2\rho\,d\rho,\ t_1 = = 1,\ t_2 = 3] = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_1^3 \sqrt{t}(t-1)dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi(\frac{2}{5}t^{5/2} - - \frac{2}{3}t^{3/2})|_1^3 = \frac{\pi}{2}(\frac{18\sqrt{3}}{5} - \frac{2}{5} - 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}) = \frac{12\sqrt{3}+2}{15}\pi$; $\zeta = \frac{M_{xy}}{S} = = \frac{55+9\sqrt{3}}{130}$.

3679. Уравнения поверхностей $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $x^2 + y^2 + + z^2 = R^2$; $I_z = \gamma\iiint_\Omega (x^2 + y^2)dx\,dy\,dz$ $[x = \rho\cos\varphi\sin\theta,\ y = = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ z = \rho\cos\theta] = \gamma\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} d\theta\int_r^R \rho^2\sin^2\theta\rho^2\sin\theta\,d\rho = = \gamma\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} \sin^3\theta\,d\theta\int_r^R \rho^4 d\rho = \gamma\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} \sin^3\theta\frac{R^5-r^5}{5}d\theta =$

$= \gamma \frac{R^5 - r^5}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (1 - \cos^2\theta) d(-cos\theta) = \gamma \frac{R^5 - r^5}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi (\frac{\cos^3\theta}{3} - - \cos\theta)|_0^{\pi} = \frac{8}{15}\pi\gamma(R^5 - r^5)$; $\gamma = \frac{M}{V}$, $V = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) \Rightarrow I_z = = \frac{2}{5} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$.

3683. Уравнение образующей конуса в плоскости xOz: $z = = \frac{H(R-x)}{R-r}$, отсюда уравнение боковой поверхности усеченного конуса: $z = \frac{H(R - \sqrt{x^2+y^2})}{R-r}$, $z'_x = -\frac{Hx}{(R-r)\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y = = -\frac{Hy}{(R-r)\sqrt{x^2+y^2}}$, $ds = \sqrt{1 + \frac{H^2}{(R-r)^2}} dx\,dy = \frac{L}{R-r} dx\,dy$, где $L = \sqrt{H^2 + (R-r)^2}$ — образующая, D: $r \leqslant \rho \leqslant R$; $I_z = \gamma \iint_D (x^2 + y^2) ds = \frac{\gamma L}{R-r} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^R \rho^3 d\rho = = \frac{\gamma L(R^4 - r^4)}{4(R-r)} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi\gamma L(R^4 - r^4)}{2(R-r)}$; $\gamma = \frac{M}{\pi(R+r)L} \Rightarrow I_z = = \frac{M(R^4 - r^4)}{2(R^2 - r^2)} = M \frac{R^2 + r^2}{2}$.

3688. Oz — ось цилиндра; $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $M = \iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2) dx\,dy\,dz [x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi] = = \iiint_\Omega (\rho^2 + z^2) \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^H (\rho^2 + z^2) dz = = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (\rho^3 H + \rho \frac{H^3}{3}) d\rho = \int_0^{2\pi} (\frac{R^4 H}{4} + \frac{R^2 H^3}{6}) d\varphi = = \pi R^2 H (\frac{R^2}{2} + \frac{H^2}{3})$.

3693. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ $(z \geqslant 0)$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (R - z)^2 = R^2 \Rightarrow z = R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ $(z \leqslant R)$, шары пересекаются при $z = \frac{R}{2}$, линия пересечения $x^2 + y^2 = \frac{3R^2}{4}$, $\gamma(x,y,z) = z$, $M_{xy} = \iiint_\Omega z^2 dx\,dy\,dz$ $[x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi] = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R\sqrt{3}/2} \rho\, d\rho \int_{R - \sqrt{R^2 - \rho^2}}^{\sqrt{R^2 - \rho^2}} z^2 dz = = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R\sqrt{3}/2} \left(\sqrt{(R^2 - \rho^2)^3} - (R - \sqrt{R^2 - \rho^2})^3\right) \rho\, d\rho$ $[t = = R^2 - \rho^2,\ dt = -2\rho\, d\rho,\ t_1 = R^2,\ t_2 = = R^2/4] = \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R^2/4}^{R^2} (2t^{3/2} - R^3 + 3R^2 t^{1/2} - 3Rt) dt = = \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} d\varphi (\frac{4}{5} t^{5/2} - R^3 t + 2R^2 t^{3/2} - \frac{3}{2} R t^2)|_{R^2/4}^{R^2} = \frac{59}{480} \pi R^5$.

3697. Рассмотрим элемент объема в цилиндрических координатах $[\rho, \rho + d\rho] \times [\varphi,\ \varphi + d\varphi] \times [\theta,\ \theta + d\theta]$, его объем $dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$, $dm = \lambda z^2 \rho\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$, расстояние до точечной массы $r = \sqrt{\rho^2 + (2R - z)^2}$, $dF = k \frac{m\,dm}{r^2} = = km\lambda \frac{z^2 \rho\, d\rho\, d\varphi\, d\theta}{\rho^2 + (2R - z)^2}$, составляющая силы вдоль оси Oz $dF_z = = dF \cos\alpha$, где α — угол между осью Oz и линией, соединяющей элемент объема и точечную массу, $\cos\alpha = \frac{2R-z}{\sqrt{\rho^2+(2R-z)^2}} \Rightarrow dF_z = km\lambda\frac{z^2(2R-z)\rho\,d\rho\,d\varphi\,d\theta}{(\rho^2+(2R-z)^2)^{3/2}}$, $F = \iiint_\Omega dF_z\,dx\,dy\,dz$ $[x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi] = km\lambda\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-R}^{R}z^2(2R-z)dz\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{\rho\,d\rho}{\rho^2+(2R-z)^2)^{3/2}}$ $[t = \rho^2+(2R-z)^2,\ dt = 2\rho d\rho,\ t_1 = (2R-z)^2,\ t_2 = 5R^2 - 4Rz] = \frac{1}{2}km\lambda\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-R}^{R}z^2(2R-z)dz\int_{(2R-z)^2}^{5R^2-4Rz}\frac{dt}{t^{3/2}} = -km\lambda\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-R}^{R}z^2(2R-z)dz\frac{1}{\sqrt{t}}\Big|_{(2R-z)^2}^{5R^2-4Rz} = km\lambda \times$ $\times\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-R}^{R}\left(z^2-\frac{z^2(2R-z)}{\sqrt{5R^2-4Rz}}\right)dz$ $[u = \sqrt{5R^2-4Rz},\ z = \frac{5R^2-u^2}{4R},\ dz = -\frac{u\,du}{2R},\ u_1 = 3R,\ u_2 = R] = km\lambda\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{z^3}{3}\Big|_{-R}^{R} - \int_R^{3R}\frac{(5R^2-u^2)^2}{16R^2u}\left(2R-\frac{5R^2-u^2}{4R}\right)\frac{u\,du}{2R}\right) = km\lambda\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{2R^3}{3}-\frac{1}{128R^4}\int_R^{3R}(5R^2-u^2)^2(3R^3+u^2)du\right) = km\lambda\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{2R^3}{3}-\frac{1}{128R^4}\int_R^{3R}(75R^6-5R^4u^2-7R^2u^4+u^6)du\right) = 2\pi km\lambda\left(\frac{2R^3}{3}-\frac{1}{128R^4}(75R^6u-\frac{5}{3}R^4u^3-\frac{7}{5}R^2u^5+\frac{1}{7}u^7)\Big|_R^{3R}\right) = \frac{17}{210}\pi km\lambda R^3$; $M = \iiint_\Omega \lambda z^2\,dx\,dy\,dz$ $[x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi] = \lambda\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-R}^{R}z^2dz\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\rho\,d\rho = \frac{\lambda}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-R}^{R}z^2(R^2-z^2)dz = \frac{\lambda}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi(\frac{R^2z^3}{3}-\frac{z^5}{5})\Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{15}\pi\lambda R^5 \Rightarrow F = \frac{17}{56}k\frac{Mm}{R^2}$.

3700.1 Пусть a — основание треугольника, β — плоскость, совпадающая с поверхностью жидкости, ось Oz совпадает с высотой треугольника и направлена вниз, A — точка на высоте треугольника с аппликатой z; рассмотрим полоску $[z, z+dz]$ длины l, из соображений подобия $\frac{l}{a} = \frac{h-z}{h} \Rightarrow l = \frac{a(h-z)}{h}$, площадь полоски $dS = \frac{a(h-z)dz}{h}$, глубина погружения полоски $z\sin\alpha$, сила давления на полоску $dF = \rho g z\sin\alpha dS = a\rho g\frac{z(h-z)dz}{h}\sin\alpha$, $dM_\beta = dF z\sin\alpha = a\rho g\frac{z^2(h-z)dz}{h}\sin^2\alpha$, $M_\beta = \frac{a\rho g\sin^2\alpha}{h}\int_0^h(hz^2-z^3)dz = \frac{a\rho g h^3\sin^2\alpha}{12}$; $F = \frac{a\rho g\sin\alpha}{h}\int_0^h(hz-z^2)dz = \frac{a\rho g h^2\sin\alpha}{6}$; $\eta = \frac{M_\beta}{F} = \frac{h}{2}\sin\alpha$.

3705. $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+a^2)^2} = \int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{+\infty}\frac{\rho\,d\rho}{(\rho^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}d\varphi\frac{1}{\rho^2+a^2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2a^2}\int_0^{\pi/2}d\varphi = \frac{\pi}{4a^2}$.

3710. $\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}e^{-y^2}dy = \int_0^{+\infty}dy\int_0^{y}e^{-y^2}dx = \int_0^{+\infty}ye^{-y^2}dy = -\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$.

3715. $I = \iint_D \frac{\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\cos\rho^2}{\rho}\,d\rho$; $\lim\limits_{\rho\to 0}\cos\rho^2 = 1 \Rightarrow \frac{\cos\rho^2}{\rho} \sim \frac{1}{\rho}$; $\int_0^R \frac{d\rho}{\rho}$ расходится, значит I расходится.

3720. $\iiint_\Omega \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\ln\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}$ $[x = \rho\cos\varphi\sin\theta,\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ z = \rho\cos\theta] = \iiint_\Omega \frac{\rho^2\sin\varphi}{\rho^3\ln\rho^{2/3}}d\rho\,d\varphi\,d\theta = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi d\theta\int_0^R\frac{d\rho}{\rho\ln\rho}$ $[t = \ln\rho,\ dt = \frac{d\rho}{\rho}] = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi d\theta\int_{-\infty}^{\ln R}\frac{dt}{t} = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi d\theta\ln|t|\big|_{-\infty}^{\ln R}$ — расходится.

3725. $V = \iint_{\mathbf{R}^2} x^2y^2e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{+\infty}\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi e^{-\rho^2}\rho\,d\rho$ $[t = \rho^2,\ dt = 2\rho\,d\rho] = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\,d\varphi\int_0^{+\infty}t^2e^{-t}dt$; $I = \int_0^{+\infty}t^2e^{-t}dt = -\int_0^{+\infty}t^2d(e^{-t}) = -t^2e^{-t}|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty}te^{-t}dt = -2\int_0^{+\infty}t\,d(e^{-t}) = -2te^{-t}|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty}e^{-t}dt = -2e^{-t}|_0^{+\infty} = 2$; $V = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\,d\varphi\cdot 2 = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)d\varphi = \frac{\pi}{4}$.

3728. Пусть начало координат совпадает с вершиной конуса, ось — высота; в сферических координатах уравнение боковой поверхности конуса $\theta = \operatorname{arctg}\frac{R}{H}$, уравнение основания $\rho\cos\theta = H$; рассмотрим элемент объема $[\rho,\rho + d\rho]\times[\varphi,\varphi+d\varphi]\times[\theta,\theta+d\theta]$; $dV = \rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$, $dm = \gamma\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$, $dF = k\frac{m\,dm}{\rho^2} = km\gamma\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$, составляющая силы вдоль оси Oz $dF_z = dF\cos\theta = km\gamma\sin\theta\cos\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$, $F = \iiint_\Omega dF_z\,dx\,dy\,dz = km\gamma\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\operatorname{arctg}R/H}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^{H/\cos\theta}d\rho = km\gamma\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\operatorname{arctg}R/H}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\frac{H}{\cos\theta} = km\gamma H\int_0^{2\pi}d\varphi\cos\theta|_{\operatorname{arctg}R/H}^0 = 2\pi k\gamma Hm(1-\cos\operatorname{arctg}\frac{R}{H}) = 2\pi k\gamma Hm(1-\frac{1}{\sqrt{1+R^2H^2}}) = 2\pi k\gamma Hm(1-\frac{H}{L})$, где L — образующая конуса.

3733. $F(a) = \int_0^b\frac{dx}{a^2+b^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{b}{a} \Rightarrow F'(a) = -\int_0^b\frac{2a\,dx}{(a^2+x^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}}(-\frac{b}{a^2}) = -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}+\frac{b}{a^2+b^2}\right) \Rightarrow G(a) = \int_0^b\frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}+\frac{b}{a^2+b^2}\right)$, $G'(a) = \int_0^b\frac{-4a\,dx}{(a^2+x^2)^3} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}+\frac{b}{a^2+b^2}\right)' = -\frac{3}{2a^4}\operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \frac{b}{2a^3(a^2+b^2)} - \frac{2a^2b+b^3}{a^3(a^2+b^2)^2} = -\frac{b}{2a^4}\left(\frac{3}{ab}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}+\frac{5a^2+3b^2}{(a^2+b^2)^2}\right) \Rightarrow \int_0^b\frac{dx}{(a^2+x^2)^3} = \frac{b}{8a^4}\left(\frac{3}{ab}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}+\frac{5a^2+3b^2}{(a^2+b^2)^2}\right)$.

3738. $F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}} dx \Rightarrow F'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2e^{-ax^2}}{xe^{x^2}} dx = \int_0^{+\infty} xe^{-(a+1)x^2} dx = -\frac{1}{2(a+1)} e^{-(a+1)x^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2(a+1)} - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2(a+1)} e^{-(a+1)x^2} = \frac{1}{2(a+1)}$, т. к. $a+1 > 0 \Rightarrow F(a) = \int \frac{da}{2(a+1)} = \frac{1}{2}\ln(a+1) + C$, при $a = 0$ $F(a) = 0 \Rightarrow C = 0$.

3743. $F(a) = \int_0^{\pi} \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x} dx \Rightarrow F'(a) = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+a\cos x}$ $[t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ t_1 = 0,\ t_2 = +\infty] = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{1+t^2+a-at^2} = \frac{2}{1-a}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\frac{1+a}{1-a}} = \frac{2}{(1-a)\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}} \times \operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$; $F(a) = \int \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}} da = \pi \arcsin a + C$, при $a = 0$ $F(a) = 0 \Rightarrow C = 0$.

3748. $F(a,b,c) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\cos bx - \cos cx}{x} dx$, $\frac{\partial F}{\partial b} = I = -\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{1}{b}\int_0^{+\infty} e^{-ax} d(\cos bx) = \frac{1}{b} e^{-ax}\cos bx\Big|_0^{+\infty} + \frac{a}{b}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\, dx = -\frac{1}{b} + \frac{a}{b^2}\int_0^{+\infty} e^{-ax} d(\sin bx) = -\frac{1}{b} + \frac{a}{b^2} e^{-ax}\sin bx\Big|_0^{+\infty} + \frac{a^2}{b^2}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\, dx = -\frac{1}{b} - \frac{a^2}{b^2} I \Rightarrow I = -\frac{b}{a^2+b^2} \Rightarrow$ $F(a,b,c) = -\int \frac{b}{a^2+b^2} db + \varphi(a,c) = -\frac{1}{2}\ln(a^2+b^2) + \varphi(a,c)$, при $b = c$ $F(a,b,c) = 0 \Rightarrow \varphi(a,c) = \frac{1}{2}\ln(a^2+c^2)$, $F(a,b,c) = \frac{1}{2}\ln\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}$.

3753.1 $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-z^2x} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi x}}\int_0^{+\infty} e^{-(z\sqrt{x})^2} d(z\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \int_0^{+\infty} \cos x\, dx \int_0^{+\infty} e^{-z^2x} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} dz \int_0^{+\infty} e^{-z^2x}\cos x\, dx$; $I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-z^2x}\cos x\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-z^2x} d(\sin x) dx = e^{-z^2x}\sin x\Big|_0^{+\infty} + z^2\int_0^{+\infty} e^{-z^2x}\sin x\, dx = -z^2\int_0^{+\infty} e^{-z^2x} d(\cos x) = -z^2e^{-z^2x}\cos x\Big|_0^{+\infty} - z^4\int_0^{+\infty} e^{-z^2x}\cos x\, dx = z^2 - z^4 I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{z^2}{1+z^4}$, $I = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{z^2dz}{1+z^4}$ $[z = \frac{1}{t},\ dt = -\frac{dz}{z^2},\ t_1 = +\infty,\ t_2 = 0] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} =$ **(2047)** $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Big(\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)\Big)\Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(0 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3756. $f(x) = e^{-x^n}$, $f(+\infty) = 0$, $f(0) = 1$; $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^n} - e^{-bx^n}}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(x\sqrt[n]{a}) - f(x\sqrt[n]{b})}{x} dx = -\ln\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\ln b - \ln a}{n}$.

3761. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $\int_A^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ сходится при любом $A > 0$, т.к. мажорируется сходящимся интегралом $\int_A^{+\infty}\frac{dx}{x^2} \Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{b\sin ax - a\sin bx}{x^2}dx = ab\int_0^{+\infty}\frac{\frac{\sin ax}{ax}-\frac{\sin bx}{bx}}{x}dx = ab\int_0^{+\infty}\frac{f(b)-f(a)}{x}dx = abf(0)\ln\frac{b}{a} = ab\ln\frac{b}{a}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = ab(\ln b - \ln a)$.

3767. $y(x) = \int_{-1}^{1}(z^2-1)^{n-1}e^{xz}dz$, $y' = \int_{-1}^{1}(z^2-1)^{n-1}ze^{xz}dz$, $y'' = \int_{-1}^{1}(z^2-1)^{n-1}z^2e^{xz}dz$; $xy'' + 2ny' - xy = \int_{-1}^{1}(z^2-1)^{n-1}e^{xz}(xz^2+2nz-x)dz = x\int_{-1}^{1}(z^2-1)^{n}e^{xz}dz + 2n\int_{-1}^{1}(z^2-1)^{n-1}e^{xz}z\,dz = x\int_{-1}^{1}(z^2-1)^{n}e^{xz}dz + \int_{-1}^{1}(z^2-1)^{n-1}e^{xz}d((z^2-1)^n) = x\int_{-1}^{1}(z^2-1)^{n}e^{xz}dz + e^{xz}(z^2-1)^n\big|_{-1}^{1} - x\int_{-1}^{1}(z^2-1)^{n}e^{xz}dz = 0$.

К ГЛАВЕ 13

3772. Координаты точек пересечения $(0,0)$ и $(2p,2p)$, $y^2 = 2px \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2p}$, $x'_y = \frac{y}{p}$, $ds = \sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}dy$, $\int_L y\,ds = \int_0^{2p}y\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}dy = \frac{1}{p}\int_0^{2p}y\sqrt{p^2+y^2}dy = \frac{1}{2p}\int_0^{2p}\sqrt{p^2+y^2}d(y^2+p^2) = \frac{1}{3p}\sqrt{(p^2+y^2)^3}\big|_0^{2p} = p^2\frac{5\sqrt{5}-1}{3}$.

3778. В полярных координатах L: $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2) \Leftrightarrow \rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\rho' = -a\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, $ds = \sqrt{\rho^2+\rho'^2} = \frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, $\int_L x\sqrt{x^2-y^2}ds = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\rho^2\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = a\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\rho^2\cos\varphi\,d\varphi = a^3\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \frac{a^3}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\cos 3\varphi+\cos\varphi)\,d\varphi = \frac{a^3}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\sqrt{2}\right) = \frac{2}{3}a^3\sqrt{2}$.

3782. $x'_t = \cos t - t\sin t$, $y'_t = \sin t + t\cos t$, $z'_t = 1$, $ds = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\,dt = \sqrt{t^2+2}\,dt$, $\int_L(2z - x\sqrt{x^2+y^2})\,ds = \int_0^{2\pi}t\sqrt{t^2+2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{t^2+2}\,d(t^2+2) = \frac{1}{3}\sqrt{(t^2+2)^3}\big|_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left((2\pi^2+1)^{3/2}-1\right)$.

3786. $M = \int_L y\,ds = \int_0^{\pi/2}b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\pi/2}b\sin t\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cos^2 t}\,dt$ $(\varepsilon = \frac{a^2-b^2}{a}) = ab\int_0^{\pi/2}\sin t\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt$ $[u = \cos t,\ du = -\sin t\,dt,\ u_1 = 1,\ u_2 = 0] = ab\int_0^1\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}\,du = ab\varepsilon\int_0^1\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-u^2}\,du = ab\varepsilon\left(\frac{u}{2}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-u^2}+\frac{1}{2\varepsilon^2}\arcsin\varepsilon u\right)\Big|_0^1 = \frac{ab}{2}\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right) = (\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{b}{a}) = \frac{b^2}{2}+\frac{ab}{2\varepsilon}\arcsin\varepsilon$.

3791. $ds = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2}}\,dt = \frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}dt$, $I_x = \int_L (y^2+z^2)ds = \int_0^{2\pi}\left(a^2\sin^2 t + \frac{h^2t^2}{4\pi^2}\right)\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}dt = \frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(a^2\frac{1-\cos 2t}{2} + \frac{h^2t^2}{4\pi^2}\right)dt = \frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}\left(a^2\frac{t}{2} - a^2\frac{\sin 2t}{4} + \frac{h^2t^3}{12\pi^2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)$; $I_y = \int_L (x^2+z^2)ds = \int_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2 t + \frac{h^2t^2}{4\pi^2}\right)\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}dt = \sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right) = I_x$; $I_z = \int_L (x^2+y^2)ds = \int_0^{2\pi} a^2\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}dt = a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$.

3795. В полярных координатах L: $\rho = R$, $ds = \sqrt{R^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}\,d\varphi = R\,d\varphi$, $\int_L z\,ds = \int_L \frac{xy}{2R} = 4\int_0^{\pi/2}\frac{R^2\cos\varphi\sin\varphi}{2R}R\,d\varphi = R^2\int_0^{\pi/2}\sin 2\varphi\,d\varphi = R^2$.

3800. Пусть ось Ox совпадает с проводником, ось Oy проходит через точечную массу, тогда $ds = dx$, $r = \sqrt{x^2+a^2}$, $\sin\alpha = \frac{a}{x^2+a^2}$, $dF = mI\frac{a\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$, силы, соответствующие всем элементам dx параллельны между собой, отсюда $F = 2mI\int_0^{+\infty}\frac{a\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$ $\left[x = a\operatorname{tg}t,\ dx = a\frac{dt}{\cos^2 t},\ t_1 = 0,\ t_2 = \frac{\pi}{2}\right] = \frac{2mI}{a}\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt = \frac{2mI}{a}$.

3805. Пусть A — точка на контуре, $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = R\,dt$, $r = \sqrt{R^2+h^2}$, $\sin\alpha = 1$, т.к. ток направлен по касательной перпендикулярно прямой AP; из соображений симметрии результирующая сила направлена вдоль оси Oz, поэтому $F = \int_L dF\cos\beta$, где β — угол между AP и Oz, $\cos\beta = \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}$; $F = \int_L \frac{mI\,ds}{r^2}\cos\beta = \int_0^{2\pi}\frac{mIR^2\,dt}{(R^2+h^2)^{3/2}} = \frac{2\pi mIR^2}{(R^2+h^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial F}{\partial R} = 2\pi mIR\frac{2h^2-R^2}{(R^2+h^2)^{5/2}} = 0$ при $h = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

3810. Уравнение отрезка $y = 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi \Rightarrow dy = 2dx$, $\int_{(0,\,0)}^{(\pi,\,2\pi)} -x\cos y\,dx + y\sin x\,dy = \int_0^{\pi}(-x\cos 2x + 4x\sin x)dx = \int_0^{\pi} x\,d\left(-\frac{\sin 2x}{2} - 4\cos x\right) = \left(-x\frac{\sin 2x}{2} - 4x\cos x\right)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{2} + 4\cos x\right)dx = 4\pi - \frac{\cos 2x}{4}\Big|_0^{\pi} + 4\sin x\Big|_0^{\pi} = 4\pi$.

3815. $\int_L \frac{y^2dx - x^2dy}{x^2+y^2} = \int_0^{\pi}\frac{-a^3\cos^3 t - a^3\sin^3 t}{a^2}dt = -a\int_0^{\pi}(\cos^3 t + \sin^3 t)dt = a\int_0^{\pi}(1-\cos^2 t)d(\cos t) - a\int_0^{\pi}(1-\sin^2 t)d(\sin t) = a\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} - \sin t + \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Big|_0^{\pi} = -\frac{4}{3}a$.

3821. Представим кривую параметрически, выразив x и y через z: $Rx+z^2 = R^2 \Rightarrow x = R-\frac{z^2}{R}$, $y^2 = Rx-x^2 = Rz-z^2-(R-\frac{z^2}{R})^2 = \frac{z^2(R^2-z^2)}{R^2} \Rightarrow y = \pm\frac{z\sqrt{R^2-z^2}}{R}$, $dy = \pm\frac{R^2-2z^2}{R\sqrt{R^2-z^2}}$ таким образом, кривая состоит из двух симметричных относительно плоскости $y=0$ ветвей $L_1\,(y>0)$ и $L_2(y<0)$ противоположной ориентации; $\int_{L_1}y^2dx = -\int_{L_2}y^2dx \Rightarrow \int_L y^2dx = 0$; $\int_{L_1}x^2dz = -\int_{L_2}x^2dz \Rightarrow \int_L x^2dz = 0$; $\int_{L_1}z^2dy = \int_{L_2}z^2dy$, т.к. меняется не только ориентация кривой, но и знак $dy \Rightarrow \int_L z^2dy = 2\int_{L_1}z^2dy = 2\int_0^R\frac{z^2R^2-z^4}{R\sqrt{R^2-z^2}}dz$ $[z = R\sin t] = 2R^3\int_0^{\pi/2}(\sin^2 t-2\sin^4 t)dt = -\frac{\pi R^3}{4}$.

3825.1. а) $\int_L(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy = [x = a\cos t,\ y = b\sin t] = \int_0^{2\pi}((ab\cos t\sin t+a\cos t+b\sin t)(-a\sin t)+(ab\cos t\sin t+a\cos t-b\sin t)b\cos t)dt = \int_0^{2\pi}(ab^2\cos^2 t\sin t-a^2b\sin^2 t\cos t+ab\cos 2t-\frac{a^2+b^2}{2}\sin 2t)dt = \left(-ab^2\frac{\cos^3 t}{3}-a^2b\frac{\sin^3 t}{3}+ab\frac{\sin 2t}{2}+\frac{a^2+b^2}{4}\cos 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 0$.

б) $\frac{\partial P}{\partial y} = x+1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = y+1$, $I = \iint_D(y-x)dx\,dy$ $[x = a\rho\cos\varphi,\ y = b\rho\sin\varphi] = ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(b\rho\sin\varphi-a\rho\cos\varphi)\rho\,d\rho = \frac{ab}{3}\int_0^{2\pi}(b\rho\sin\varphi-a\rho\cos\varphi)d\varphi = 0$.

3829. $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x-1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$, $I = \iint_D dx\,dy = S$.

3840. $\int_{(3,4)}^{(5,12)}\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\int_{(3,4)}^{(5,12)}\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \ln\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{(3,4)}^{(5,12)} = \ln\frac{13}{5}$.

3846. $du = 4(x^2-y^2)x\,dx-4(x^2-y^2)y\,dy$, $u = \int 4(x^2-y^2)x\,dx+\varphi(y) = x^4-2x^2y^2+\varphi(y)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -4x^2y+\varphi'(y) = -4(x^2-y^2) \Rightarrow \varphi'(y) = 4y^3$, $\varphi(y) = y^4+C$, $u = x^4-2x^2y^2+y^4+C = (x^2-y^2)^2+C$.

3850. $u = \int(2x\cos y-y^2\sin x)dx+\varphi(y) = x^2\cos y+y^2\cos x+\varphi(y)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2\sin y+2y\cos x+\varphi'(y) = 2y\cos x-x^2\sin y \Rightarrow \varphi'(y) = 0$, $\varphi(y) = C$, $u = x^2\cos y+y^2\cos x+C$.

3857. $u = \int\frac{yz\,dx}{1+x^2y^2z^2}+\varphi(y,z) = \mathrm{arctg}\,xyz+\varphi(y,z)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xz}{1+x^2y^2z^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$, $\varphi(y,z) = \varphi(z)$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{yx}{1+x^2y^2z^2}+\varphi'(z) \Rightarrow \varphi'(z) = 0$, $\varphi(z) = C$, $u = \mathrm{arctg}\,xyz+C$.

3862. $S = \frac{1}{2}\int_L x\,dy-y\,dx$ $[x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t] = \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}(\cos^2 t\sin^4 t+\sin^2 t\cos^4 t)dt = \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\,dt = \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt = \frac{3}{8}\pi a^2$.

3868. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{12} = xy$ $[y = xt^2]$ $\Leftrightarrow$ $(\sqrt{x}(1+t))^{1}2 = x^2t^2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^3}$, $y = \frac{t^2\sqrt{t}}{(1+t)^3}$, $dx = \frac{1-5t}{2\sqrt{t}(1+t)^4}dt$, $dy = \frac{t\sqrt{t}(5-t)}{2(1+t)^4}dt$, $x = y = 0$ при $t = 0$ и при $t \to +\infty \Rightarrow$ кривая замкнута; $S = \frac{1}{2}\int_L x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2(5-t)-t^2(1-5t)}{2(1+t)^7}dt = \int_0^{+\infty}\frac{t^2+t^3}{(1+t)^7}dt = \int_0^{+\infty}\frac{t^2-1+1}{(1+t)^6}dt = \int_0^{+\infty}\frac{t-1}{(1+t)^5}dt + \int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)^6} = \int_0^{+\infty}\frac{t+1-2}{(1+t)^5}dt + \int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)^6} = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)^4}dt - 2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)^5}dt\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)^6} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$.

3873. $|F| = \frac{k}{z}$, проекции силы на оси $F_x = \frac{k}{z}\cos\alpha = \frac{kx}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $F_y = \frac{ky}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $F_z = \frac{kz}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, уравнение отрезка $x = at$, $y = bt$, $z = ct$, $1 \leqslant t \leqslant 2 \Rightarrow A = \int_L F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = k\int_1^2\frac{a^2+b^2+c^2}{ct\sqrt{a^2+b^2+c^2}}dt = k\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c}\int_1^2\frac{dt}{t} = k\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c}\ln 2$.

3878. D — проекция S на Oxy, D: $x^2+y^2 \leqslant R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $z'_x = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $z'_y = -\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $\iint_S x\,dq = \iint_D x\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy = R\iint_D\frac{x\,dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = R\int_0^R dy\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}\frac{x\,dx}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = -R\int_0^R dy\sqrt{R^2-x^2-y^2}\Big|_0^{\sqrt{R^2-y^2}} = R\int_0^R dy\sqrt{R^2-y^2}dy = \left(\frac{Ry}{2}\sqrt{R^2-y^2} + \frac{R^3}{2}\arcsin\frac{y}{R}\right)\Big|_0^R = \frac{\pi R^3}{4}$.

3884. D: $x^2+y^2 \leqslant R^2$, $z = xy$, $z'_x = y$, $z'_y = x$, $\iint_S\frac{dq}{r} = \iint_D\frac{\sqrt{1+x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho = 2\pi\left(\frac{\rho}{2}\sqrt{1+\rho^2} + \frac{1}{2}\ln|\rho+\sqrt{1+\rho^2}|\right)\Big|_0^R = \pi\left(R\sqrt{1+R^2} + \ln(R+\sqrt{1+R^2})\right)$.

3889. D — эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = \pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$; интегралы по верхней и нижней половине эллипсоида равны, т. к. меняют знак интеграл (за счет изменения ориентации) и подынтегральная функция; $\iint_S z\,dx\,dy = 2\iint_D c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$ $[x = a\rho\cos\varphi,\ y = b\rho\sin\varphi]$ $= 2abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho = -\frac{2}{3}abc\int_0^{2\pi}d\varphi\sqrt{(1-\rho^2)^3}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}\pi abc$.

3895. а) $\int_L x^2y^3\,dx+dy+z\,dz$ $[x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ z=t]$ $=\int_0^{2\pi}(R^5\cos^2 t\sin^3 t(-R\sin t)+R\cos t)dt=$ $=-R^5\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^4 t\,dt+R\sin t|_0^{2\pi}=-\frac{R^6}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\sin^2 t\,dt=$ $=-\frac{R^6}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t(1-\cos 2t)\,dt=-\frac{R^6}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt+$ $+\frac{R^6}{16}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,d(\sin 2t)=-\frac{\pi R^6}{8}$. б) $\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2y^2$, $\frac{\partial P}{\partial z}=$ $=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial R}{\partial y}=0\Rightarrow\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$ $=-\iint_S\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy=-3\iint_S x^2y^2\,dx\,dy$ $[x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi]=$ $=-3\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi\int_0^R\rho^5d\rho=-\frac{R^6}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\,d\varphi=$ $=-\frac{R^6}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)\,d\varphi=-\frac{\pi R^6}{8}$.

3899. $\iint_S(x^3\cos(N,x)+y^3\cos(N,y)+z^3\cos(N,z))dq=$ $=\iiint_\Omega(3x^2+3y^2+3z^2)dx\,dy\,dz$ $[x=\rho\cos\varphi\sin\theta,\ y=$ $=\rho\cos\varphi\sin\theta,\ z=\rho\cos\theta]=3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^R\rho^4d\rho=$ $=\frac{3}{5}R^5\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=\frac{6}{5}R^5\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{12}{5}\pi R^5$.

К ГЛАВЕ 14

3905. $x\frac{dy}{dx}=y^2-y$, $\frac{dy}{y^2-y}=\frac{dx}{x}$, $y\neq 0$, $y\neq 1$, проверка показывает, что $y=0$ и $y=1$ — решения; $\int\frac{dy}{y^2-y}=$ $=\int\frac{dx}{x}$, $\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|=\ln|x|+\ln|C|$, $\frac{y-1}{y}=Cx$, $y=Cxy+1$, $y=$ $=0$ ($y=1$ получается из общего решения при $C=0$).

3909. $\frac{dy}{dx}=10^x10^y$, $\int 10^{-y}dy=\int 10^x dx$, $-\frac{10^{-y}}{\ln 10}=\frac{10^x}{\ln 10}+$ $+C_1$, $10^x=-10^{-y}+C$, где $C=C_1\ln 10$; в дальнейшем мы будем обозначать все константы буквой C.

3915. $\sin y\cos x\,dy=\cos y\sin x\,dx$, $\int\operatorname{tg} y\,dy=\int\operatorname{tg} x\,dx$, $-\ln|\cos y|=-\ln|\cos x|+C$, $y(0)=\frac{\pi}{4}\Rightarrow-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=-\ln 1+$ $+C$, $C=\ln\sqrt{2}$; $\ln|\cos y|=\ln|\cos x|-\ln\sqrt{2}$, $\cos y=\frac{\cos x}{\sqrt{2}}$.

3926. $K=\frac{mv^2}{2}$, $v_{\text{ср}}=\frac{s}{t}\Rightarrow\frac{m}{2}(\frac{ds}{dt})^2=k\frac{s}{t}$, $\frac{ds}{dt}=$ $=\sqrt{\frac{2ks}{mt}}$, $\frac{ds}{\sqrt{s}}=\frac{\sqrt{2k}\,dt}{\sqrt{mt}}$, $\sqrt{s}=\sqrt{\frac{2kt}{m}}+C$, $s(0)=0\Rightarrow C=$ $=0$, $s=\frac{2kt}{m}$, $v=\frac{2k}{m}=const$.

3931. $y'=\cos(x-y)$, $[u=x-y,\ y=x-u,\ y'=$ $=1-u']$ $1-u'=\cos u$, $\int\frac{du}{1-\cos u}=\int dx$, $-\operatorname{ctg}\frac{u}{2}=x+C$, $x+\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2}=C$.

3942. $y'=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$ $[y=tx,\ y'=t'x+t]$ $t'x+t=$ $=t\ln t$, $\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dt}{t(\ln t-1)}$, $\ln|x|+\ln|C|=\ln|\ln t-1|$, $Cx=$ $=\ln\frac{y}{x}-1$, $y=xe^{1+Cx}$.

3947. $y' = \frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}$, $[y = tx,\ y' = t'x+t]$ $t'x+t = \frac{t^2-2t-1}{t^2+2t-1}$ $\frac{dt}{dx}x = -\frac{t^3+t^2+t+1}{t^2+2t-1}$, $\frac{dx}{x} = -\int\frac{t^2+2t-1}{(t^2+1)(t+1)}$, $\frac{t^2+2t-1}{(t^2+1)(t+1)} = \frac{2t}{t^2+1} - \frac{1}{t+1} \Rightarrow \ln|x|+\ln|C| = -\ln\frac{t^2+1}{|t+1|}$, $Cx = \frac{t+1}{t^2+1}$, $Cx = \frac{x(x+y)}{x^2+y^2}$, $x+y = C(x^2+y^2)$, $y(1) = -1 \Rightarrow C = 0$, $y = -x$.

3950. $A(x,\ y)$ — точка касания, $B(0,\ y_B)$ — точка пересечения касательной с Oy; $y_B - y = y'(-x) \Rightarrow y_B = y - xy'$, $(y-xy')^2 = xy$, $y' = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\frac{y}{x}}$, $[y = tx]$ $t'x + t = t \pm \sqrt{t}$, $\int\frac{dx}{x} = \pm\int\frac{dt}{\sqrt{t}}$, $\ln|x| = \pm 2\sqrt{t} + \ln|C|$, $x = Ce^{\pm 2\sqrt{y/x}}$.

3955. $y'+2xy = xe^{-x^2}$, $[y = uv,\ y' = u'v+uv']$ $u'v+u(v'+2vx) = xe^{-x^2}$, $v'+2vx = 0$, $\int\frac{dv}{v} = -\int 2x\,dx$, $v = e^{-x^2}$, $u'e^{-x^2} = xe^{-x^2}$, $u' = x$, $u = \frac{x^2}{2}+C$, $y = e^{-x^2}(\frac{x^2}{2}+C)$.

3961. $y' = \frac{1}{2x-y^2} \Leftrightarrow x' = 2x - y^2$, $[x = uv]$ $u'v + u(v' - 2v) = -y^2$, $v' - 2v = 0$, $\frac{dv}{v} = 2dy$, $v = e^{2y}$, $u'e^{2y} = -y^2$, $u = -\int e^{-2y}y^2dy = \frac{1}{2}\int y^2 d(e^{-2y}) = \frac{1}{2}y^2e^{-2y} - \int ye^{-2y}dy = \frac{1}{2}y^2e^{-2y} + \frac{1}{2}\int y\,d(e^{-2y}) = (\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y)e^{-2y} - \frac{1}{2}\int e^{-2y}dy = e^{-2y}(\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4})+C$, $x = \frac{y^2}{2}+\frac{y}{2}+\frac{1}{4}+Ce^{2y}$.

3965. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}$, $[y = uv]$ $u'v+u(v'-v\,\mathrm{tg}\,x) = \frac{1}{\cos x}$, $v' - v\,\mathrm{tg}\,x = 0$, $\int\frac{dv}{v} = \int\mathrm{tg}\,x\,dx$, $\ln|v| = -\ln|\cos x|$, $v = \frac{1}{\cos x}$, $\frac{u'}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$, $u = x + C$, $y = \frac{x}{\cos x} + \frac{C}{\cos x}$, $y(0) = 0 \Rightarrow C = 0$, $y = \frac{x}{\cos x}$.

3970. $I(x) = \int_0^x F(x,z)dz \Rightarrow I'(x) = \int_0^x F'_x(x,z)dz + F(x,x) = \int_0^x ze^{zx-z^2}dz + e^{x^2-x^2} = 1 + \int_0^x(z-\frac{x}{2})e^{zx-z^2}dz + \frac{x}{2}\int_0^x e^{zx-z^2}dz = 1 - \frac{1}{2}\int_0^x e^{zx-z^2}d(zx-z^2) + \frac{x}{2}I(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{zx-x^2}|_0^x + \frac{x}{2}I(x) = 1 + \frac{x}{2}I(x) \Rightarrow I(x)$ — решение уравнения $y' = 1 + \frac{xy}{2}$, $y(0) = 0$; $[y = uv]$ $u'v + u(v' - \frac{vx}{2}) = 1$, $v' - \frac{vx}{2} = 0$, $\frac{dv}{v} = \frac{x\,dx}{2}$, $v = e^{\frac{x^2}{4}}$, $u' = e^{-\frac{x^2}{4}}$, $u = \int_0^x e^{-\frac{z^2}{4}}dz + C$, $y = e^{\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{4}}dz + Ce^{\frac{x^2}{4}}$, $I(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

3975. $F_1 = kt^3$, $F_2 = k_1vt$, $F_1 - F_2 = ma \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = -k_1vt + kt^3$ — линейное уравнение относительно v; $v = rs$, $v' = r's + rs'$, $mr's + mrs' + k_1rst = kt^3$, $r(ms' + k_1st) = 0$, $m\frac{ds}{s} = -k_1t\,dt$, $m\ln s = -\frac{k_1t^2}{2} \Rightarrow s = e^{-\frac{k_1t^2}{2m}}$; $mr'e^{-\frac{k_1t^2}{2m}} = kt^3$, $r = \frac{k}{m}\int e^{\frac{k_1t^2}{2m}}t^3dt$ $[y = t^2] = \frac{k}{2m}\int ye^{\frac{k_1y}{2m}}dy = \frac{k}{k_1}\int y\,d(e^{\frac{k_1y}{2m}}) = \frac{k}{k_1}ye^{\frac{k_1y}{2m}} - \frac{k}{k_1}\int e^{\frac{k_1y}{2m}}dy =$

$= e^{\frac{k_1 y}{2m}}\left(\frac{k}{k_1}y - \frac{2mk}{k_1^2}\right) + C = e^{\frac{k_1 t^2}{2m}}\left(\frac{k}{k_1}t^2 - \frac{2mk}{k_1^2}\right) + C$, $v = Ce^{-\frac{k_1 t^2}{2m}} + \frac{k}{k_1}t^2 - \frac{2mk}{k_1^2}$; $v(0) = v_0 \Rightarrow C - \frac{2mk}{k_1^2} = v_0$, $v = (v_0 + \frac{2mk}{k_1^2})e^{\frac{-k_1 t^2}{2m}} + \frac{kt^2}{k_1} - \frac{2mk}{k_1^2}$.

3978. $E_0 \sin\omega t = L\frac{dI}{dt} + RI$; $I = uv$, $Lu'v + Luv' + Ruv = E_0\sin\omega t$, $u(Lv' + Rv) = 0$, $\frac{dv}{v} = -\frac{R}{L}dt$, $v = e^{-\frac{R}{L}t}$, $Lu'e^{-\frac{R}{L}t} = E_0\sin\omega t$, $u = \int \frac{E_0}{L}e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,dt$ $[\frac{R}{L} = a]$ $= \frac{E_0}{aL}\int \sin\omega t\, d(e^{at}) = \frac{E_0}{aL}e^{at}\sin\omega t - \frac{E_0\omega}{aL}\int e^{at}\cos\omega t\,dt = \frac{E_0}{aL}e^{at}\sin\omega t - \frac{E_0\omega}{a^2L}\int \cos\omega t\,d(e^{at}) = \frac{E_0}{aL}e^{at}\sin\omega t - \frac{E_0\omega}{a^2L} \times \times e^{at}\cos\omega t - \frac{E_0\omega^2}{a^2L}\int e^{at}\sin\omega t\,dt = \frac{E_0}{aL}e^{at}\sin\omega t - \frac{E_0\omega}{a^2L}e^{at}\cos\omega t - \frac{\omega^2}{a^2}u \Rightarrow u = \frac{a^2}{a^2+\omega^2}\frac{E_0}{R}e^{at}(\sin\omega t - \frac{\omega}{a}\cos\omega t) + C$, $I = \frac{E_0 R}{R^2+L^2\omega^2}(\sin\omega t - \frac{\omega}{a}\cos\omega t) + Ce^{-\frac{R}{L}t}$; $I_0 = 0 \Rightarrow C = \frac{E_0 L\omega}{R^2+L^2\omega^2}$, $I = \frac{E_0 R}{R^2+L^2\omega^2}(R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t + L\omega e^{-\frac{R}{L}t})$.

3985. $x^3y' = y(y^2+x^2)$ $[y = tx] \Leftrightarrow x^3(t'x+t) = tx(t^2x^2 + x^2)$, $t'x + t = t^3 + t$, $\int\frac{dt}{t^3} = \int\frac{dx}{x}$, $-\frac{1}{2t^2} = \ln|x| + \ln|C|$, $Cx = e^{-\frac{x^2}{2y^2}}$.

3996. $[z = y^2,\ z' = 2yy']$ $\frac{z'\sin x}{2} = \cos x(\sin x - z)$, $z' = -2z\,\mathrm{ctg}\,x + 2\cos x$, $z = uv$, $u'v + uv' + 2uv\,\mathrm{ctg}\,x = 2\cos x$, $u(v' + 2\,\mathrm{ctg}\,x) = 0$, $\frac{dv}{v} = -2\,\mathrm{ctg}\,x$, $\ln|v| = -2\ln|\sin x|$, $v = \frac{1}{\sin^2 x}$, $\frac{u'}{\sin^2 x} = 2\cos x$, $u = 2\int \sin^2 x\cos x\,dx = \frac{2}{3}\sin^3 x + C$, $y^2 = \frac{C}{\sin^2 x} + \frac{2}{3}\sin x$.

4000. $[y = uv]$ $u'v + uv' - \frac{uv}{1-x^2} = 1 + x$, $u(v' - \frac{v}{1-x^2}) = 0$, $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{1-x^2}$, $\ln|v| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$, $v = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $u' = \sqrt{1-x^2}$, $u = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C$, $y = \frac{x(1+x)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\arcsin x + C\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $y(0) = 1 \Rightarrow C = 1$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + 2\right)$.

4006. (x, y) — координаты точки касания, yy' — отрезок нормали, тогда $yy' = \frac{x+y}{2}$, $y' = \frac{x}{2y} + \frac{1}{2}$, $y = tx$, $t'x + t = \frac{1}{2t} + \frac{1}{2}$, $\frac{dt}{dx}x = \frac{1+t-2t^2}{2t}$, $\frac{dx}{x} = \frac{2t\,dt}{1+t-2t^2}$, раскладывая на простые дроби, получаем $\ln|x| = -\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t-1} - \frac{2}{3}\int\frac{dt}{2t+1}$, $\ln|x| = -\frac{2}{3}\ln|t - 1| - \frac{1}{3}\ln|2t+1| + \ln|C|$, $x^3(t-1)^2(2t+1) = C$, $(y-x)^2(2y + x) = C$, $y(1) = 0 \Rightarrow C = 1$, $(y-x)^2(2y+x) = 1$.

4010. $\xi = \frac{M_y}{S} = \frac{\int_0^a xy\,dx}{\int_0^a y\,dx} = \frac{3a}{4} \Rightarrow 4\int_0^a xy\,dx = 3a\int_0^a y\,dx$, дважды дифференцируя по a, получаем $4ay = 3\int_0^a y\,dx + 3ay$, $ay = 3\int_0^a y\,dx$, $y + ay' = 3y$, $a\frac{dy}{da} = 2y$, $\ln|y| = 2\ln|a| + \ln|C|$, $y = Ca^2$ или, заменяя переменную, $y = Cx^2$.

4015. По 2 закону Ньютона, $ma = mg - F_{\text{сопр}} \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = mg - k^*v^2$, $\frac{dv}{dt} = g - kv^2$, где $k = \frac{k^*}{m}$, $dt = \frac{dv}{g-kv^2}$, $t = \int\frac{dv}{g-kv^2} = \frac{1}{2\sqrt{kg}}\ln\left|\frac{\sqrt{g/k}+v}{\sqrt{g/k}-v}\right| + C$, $t \to +\infty$ только при $v \to \pm\sqrt{\frac{g}{k}}$, т. к. $v > 0$, $v \to \sqrt{\frac{g}{k}}$.

4021. Пусть x — количество первого продукта, y — второго продукта, m — количество исходного вещества; по закону сохранения массы $\frac{dx}{dt} = k_1(m_0 - x)$, $dt = \frac{dx}{k_1(m_0-x)}$, $t = -\frac{1}{k_1}(\ln(m_0 - x) + \ln C)$, $C(m_0 - x) = e^{-k_1t}$, $x(0) = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{m_0}$, $x = m_0(1 - e^{-k_1t})$; $\frac{dy}{dt} = k_2(x - y)$, $\frac{dy}{dt} + k_2y = k_2m_0(1 - e^{-k_1t})$ $[y = uv]$ $u'v + u(v' + k_2v) = k_2m_0(1 - e^{-k_1t})$, $\frac{dv}{dt} = -k_2v$, $v = e^{-k_2t}$, $u'e^{-k_2t} = k_2m_0(1 - e^{-k_1t})$, $u = \int k_2m_0(e^{k_2t} - e^{(k_1-k_2)t})dt = m_0e^{k_2t} - m_0\frac{k_2}{k_2-k_1}e^{(k_2-k_1)t} + C$, $y = m_0 - m_0\frac{k_2}{k_2-k_1}e^{-k_1t} + Ce^{-k_2t}$, $y(0) = 0 \Rightarrow C = m_0\frac{k_1}{k_2-k_1}$, $y = m_0 + \frac{m_0}{k_1-k_2}(k_2e^{-k_1t} - k_1e^{-k_2t})$.

4025. $y' = \frac{2y-x-5}{2x-y+4}$, $\begin{cases} 2y - x - 5 = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1,\ y = 2$; перенесем начало координат в точку $(-1, 2)$: $x_1 = x + 1$, $y_1 = y - 2 \Rightarrow x = x_1 - 1$, $y = y_1 + 2$, $y_1' = \frac{2y_1-x_1}{2x_1-y_1}$, $[y_1 = tx_1]$ $t'x_1 + t = \frac{2t-1}{2-t}$, $\frac{dx_1}{x_1} = \frac{2-t}{t^2-1}dt$, $\ln|x_1| = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-1} - \frac{3}{2}\int\frac{dt}{t+1}$, $2\ln|x_1| = \ln|t-1| - 3\ln|t+1| + \ln|C|$, $x_1^2 = C\frac{t-1}{(t+1)^3}$, $C\frac{y_1-x_1}{(x_1+y_1)^3} = 1$, $(x + y - 1)^3 = C(x + y - 3)$.

4030. $y' = \frac{y^3}{2(xy^2-x^2)}$, $x' = 2(\frac{x}{y} - \frac{x^2}{y^3})$, $[z = x^{-1}$, $x' = -\frac{z'}{z^2}]$ $-\frac{z'}{z^2} = 2(\frac{1}{zy} - \frac{1}{z^2y^3})$, $z' + \frac{2z}{y} = \frac{2}{y^3}$, $[z = uv]$ $u'v + u(v' + \frac{2v}{y}) = \frac{2}{y^3}$, $v' + \frac{2v}{y} = 0$, $v = \frac{1}{y^2}$, $\frac{u'}{y^2} = \frac{2}{y^3}$, $u = 2\int\frac{dy}{y} = 2\ln|y| + C$, $z = \frac{C+2\ln y}{y^2}$, $\frac{1}{x} - \frac{\ln y^2}{y^2} = \frac{C}{y^2}$, $\ln y^2 - \frac{y^2}{x} = C$, $y^2e^{-y^2/x} = C$.

4036. $x\,dx + y\,dy + x(x\,dy - y\,dx) = 0$, $(x - xy)dx + (x^2 + y)dy = 0$, $x' = \frac{x^2+y}{x(y-1)}$, $x' - \frac{x}{y-1} = \frac{y}{x(y-1)}$ $[z = x^2$, $z' = 2xx']$ $\frac{z'}{2x} - \frac{x}{y-1} = \frac{y}{x(y-1)}$, $z' - \frac{2z}{y-1} = \frac{2y}{y-1}$ $[z = uv]$

$u'v+u(v'-\frac{2v}{y-1}) = \frac{2y}{y-1}$, $v' = \frac{2v}{y-1}$, $v = (y-1)^2$, $u'(y-1)^2 = \frac{2y}{y-1}$, $u' = \frac{2y}{(y-1)^3}$; $u = \int\left(\frac{2}{(y-1)^2}+\frac{2}{(y-1)^3}\right)dy = -\frac{2}{y-1} - \frac{1}{(y-1)^2}+C$, $z = -2(y-1)-1+C(y-1)^2$, $x^2+2y-1 = C(y-1)^2$, $x^2+y^2-(y-1)^2 = C(y-1)^2$, $x^2+y^2 = C(y-1)^2$.

4040. $y^{n-1}(ay'+y) = x$, $ay'+y = \frac{x}{y^{n-1}}$, $[y = uv]$ $au'v + u(av'+v) = \frac{x}{(uv)^{n-1}}$, $av'+v = 0$, $v = e^{-\frac{x}{a}}$, $au'e^{-\frac{x}{a}} = \frac{x}{u^{n-1}e^{-(n-1)x/a}}$; $au^{n-1}u' = xe^{nx/a}$, $\frac{a}{n}u^n = \frac{a}{n}\int x\,d(e^{nx/a}) = \frac{a}{n}\left(xe^{nx/a}-\int e^{nx/a}dx\right) = \frac{a}{n}(xe^{nx/a}-\frac{a}{n}e^{nx/a})+C$, $u = \sqrt[n]{e^{nx/a}(x-a/n)+C} = e^{x/a}\sqrt[n]{(x-\frac{a}{n})+Ce^{-nx/a}}$, $y = \sqrt[n]{(x-\frac{a}{n})+Ce^{-nx/a}}$, $ny^n = nx-a+Ce^{-nx/a}$.

4045. $xy'-4y-x^2\sqrt{y} = 0$, $y'-4\frac{y}{x}-x\sqrt{y} = 0$, $[y = uv]$ $u'v+u(v'-4\frac{v}{x}) = x\sqrt{uv}$, $\frac{dv}{v} = 4\frac{dx}{x}$, $v = x^4$, $u'x^4 = x^3\sqrt{u}$, $\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x}$, $2\sqrt{u} = \ln|Cx|$, $u = \frac{\ln^2|Cx|}{4}$, $y = \frac{x^4\ln^2|Cx|}{4}$.

4050. $u = \int(2x^3-xy^2)dx+\varphi(y) = \frac{x^4}{2}-\frac{x^2y^2}{2}+\varphi(y)$, $\frac{\partial u}{\partial x} = -x^2y+\varphi'(y) = 2y^3-x^2y \Rightarrow \varphi'(y) = 2y^3$, $\varphi(y) = \frac{y^4}{2}$, решение уравнения $u = C \Leftrightarrow x^4-x^2y^2+y^4 = C$.

4055. $u = \int\left(\frac{y}{\cos^2(xy)}+\sin x\right)dx+\varphi(y) = \operatorname{tg}(xy)-\cos x + \varphi(y)$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\cos^2(xy)}+\varphi'(y) = \frac{x}{\cos^2(xy)}+\sin y \Rightarrow \varphi'(y) = \sin y$, $\varphi(y) = -\cos y$, $\operatorname{tg}(xy)-\cos x-\cos y = C$.

4060. $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 1 = F(x) \Rightarrow$ существует интегрирующий множитель $M(x)$, $\ln M(x) = \int F(x)dx = x$, $M(x) = e^x$; $e^x(x^2+y^2+2x)dx+2e^xy\,dy = 0$ — уравнение в полных дифференциалах, $u = \int e^x(x^2 + y^2+2x)dx+\varphi(y) = e^x(x^2+y^2+2x)-\int e^x(2x+2)dx + \varphi(y) = e^x(x^2+y^2+2x-2x-2)+2e^x+\varphi(y) = e^x(x^2+y^2) + \varphi(y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^xy+\varphi'(y) = 2e^xy \Rightarrow \varphi'(y) = 0$, $\varphi(y) = C$, $e^x(x^2+y^2) = C$.

4065. $\frac{\partial(MX)}{\partial y} = \frac{\partial(MY)}{\partial x} \Leftrightarrow M\frac{\partial(MX)}{\partial y}+XF'(x+y) = M\frac{\partial(MY)}{\partial x}+YF'(x+y) \Leftrightarrow F'(x+y) = \frac{1}{Y-X}\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)$; множитель такого вида существует $\Leftrightarrow \frac{1}{Y-X}\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right) = F_1(x+y)$.

4070. $[y = tx]$ $t'x + t = \frac{t^2+t-1}{t^2}$, $\frac{dx}{x} = \frac{t^2 dt}{t^2+t-1-t^3}$, $\ln|x| + \ln|C| = -\int \frac{t^2 dt}{(t-1)^2(t+1)} = -\frac{3}{4}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t-1)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t+1} = -\frac{3}{4}\ln|t-1| + \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{4}\ln|t+1|$, $\ln(x^4(t-1)^3(t+1)) = \ln|C| + \frac{2}{t-1}$, $(y-x)^3 \cdot (x+y) = Ce^{2x/(y-x)}$.

4075. $\frac{\partial X}{\partial y} = 2x + x^2 + y^2$, $\frac{\partial Y}{\partial x} = 2x$, $\frac{1}{Y}\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 1 = F(x) \Rightarrow$ существует интегрирующий множитель $M(x)$, $\ln M(x) = \int F(x)dx = x$, $M(x) = e^x$; $e^x(x^2y + \frac{y^3}{3} + 2xy)dx + e^x(x^2+y^2)dy = 0$ — уравнение в полных дифференциалах, $u = \int e^x(x^2y + \frac{y^3}{3} + 2xy)dx + \varphi(y) = e^x(x^2y + \frac{y^3}{3} + 2xy) - \int e^x(2xy + 2y)dx + \varphi(y) = e^x(x^2y + \frac{y^3}{3}) + \varphi(y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = e^x(x^2+y^2) + \varphi'(y) = e^x(x^2+y^2) \Rightarrow \varphi'(y) = 0$, $\varphi(y) = C$, $e^x(x^2y + \frac{y^3}{3}) = C$.

4080. $y' + y\mathrm{tg}x = \frac{1}{\cos x}$ $[y = uv]$ $u'v + u(v' + v\mathrm{tg}x) = \frac{1}{\cos x}$, $\frac{dv}{v} = -\mathrm{tg}x\,dx$, $v = \cos x$, $u' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $u = \mathrm{tg}x + C$, $y = \sin x + C\cos x$.

4085. $y' = \frac{x - \sin y}{\cos y}$, $[z = x - \sin y,\ z' = 1 - \cos y \cdot y']$ $1 - z' = z$, $\frac{dz}{1-z} = dx$, $\ln|1-z| = \ln|C| - x$, $z = 1 - Ce^{-x}$, $x - 1 + Ce^{-x} = \sin y$.

4090. $A(x,y)$ — точка касания, $B(x_1,y_1)$ — точка пересечения касательной с Ox, $C(x_2,\ y_2)$ — точка пересечения с $y = ax+b$; $y_1 = 0$, $x_1 = x - \frac{y}{y'}$, $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2} \Rightarrow x_2 = x + \frac{y}{y'}$, $y_2 = 2y$, $y_2 = ax_2 + b \Rightarrow a(x + \frac{y}{y'}) + b = 2y$, $y'(ax - 2y + b) + ay = 0$, $x' = -\frac{x}{y} + \frac{2y-b}{ay}$, $[x = uv]$ $v = \frac{1}{y}$, $u' = \frac{2y-b}{a}$, $u = \frac{y^2-by}{a} + C$, $x = \frac{y-b}{a} + \frac{C}{y}$, $y^2 - by - axy = C$.

4097. $y = ax^2$, $y' = 2ax \Rightarrow a = \frac{y'}{2x}$, $y = \frac{xy'}{2}$, $y' = 2\frac{y}{x}$ — дифференциальное уравнение семейства парабол, $2\frac{y}{x} = k_1 \Leftrightarrow y = kx$ — множество изоклин.

4103. Пусть шаг $h = 0{,}05$, $x_0 = 0$, $x_i = x_0 + ih$, $y_0 = 0$, $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, $\Delta y_i = hx_i^2(x_iy_i + 1)$; $y_1 = 0$, $y_2 = 0{,}0001$, $y_3 = 0{,}0006$, $y_4 = 0{,}0018$, $y_5 = 0{,}0038$, $y_6 = 0{,}0069$, $y_7 = 0{,}0114$, $y_8 = 0{,}0175$, $y_9 = 0{,}0256$, $y_{10} = 0{,}0358$, $y_{11} = 0{,}0486$, $y_{12} = 0{,}0641$, $y_{13} = 0{,}0828$, $y_{14} = 0{,}1050$, $y_{15} = 0{,}1313$, $y_{16} = 0{,}1619$, $y_{17} = 0{,}1980$, $y_{18} = 0{,}2402$, $y_{19} = 0{,}2894$, $y(1) = y_{20} = 0{,}3470 \approx 0{,}35$.

4107. $y' = y^2+xy+x^2$, $y(0)=1 \Leftrightarrow y = 1+\int_0^x(y^2+ty+t^2)dt$; $y_0 = 1$, $y_1 = 1+\int_0^x(y_0^2+ty_0+t^2)dt = 1+\int_0^x(1+t+t^2)dt = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$, $y_2 = 1+\int_0^x\left((1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3})^2+t(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3})+t^2\right)dt = 1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{13}{24}x^4+\frac{1}{4}x^5+\frac{1}{18}x^6+\frac{1}{63}x^7$.

4110. $y(0)=1 \Rightarrow y = 1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\ldots$, $y' = a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+\ldots$, $y^2 = 1+2a_1x+(a_1^2+2a_2x)x^2+\ldots$, $x^2y^2-1 = -1+x^2+2a_1x^3+(a_1^2+2a_2)x^4+\ldots$; сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, имеем $a_1=-1$, $a_2=0$, $a_3=\frac{1}{3}$, $a_4=-\frac{1}{2}$, $a_5=\frac{1}{5}$.

4115. $y(0)=0 \Rightarrow y = a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+\ldots$, $y' = a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+6a_6x^5+\ldots$, $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\ldots$, $\sin y-\sin x = a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+\frac{(a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5)^3}{6}+\frac{(a_1x+a_2x^2)^5}{120}-(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120})+\ldots = (a_1-1)x+a_2x^2+(a_3-\frac{a_1^3}{6}+\frac{1}{6})x^3+(a_4-\frac{a_1^2a_2}{2})x^4+(a_5-\frac{a_1a_2^2}{2}-\frac{a_1^2a_3}{2}+\frac{a_1^5}{120}-\frac{1}{120})x^5+\ldots$, $y' = \sin y-\sin x \Rightarrow a_1=0$, $a_2=-\frac{1}{2}$, $a_3=-\frac{1}{3}$, $a_4=a_5=0$, $a_6=-\frac{1}{6!}$.

4120. $y = xy'+\sqrt{1+y'^2}$, $[y'=p]$ $y = xp+\sqrt{1+p^2}$, $y' = p = xp'+p+\frac{pp'}{\sqrt{1+p^2}}$, $p'\left(x+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$; $p'=0$, $p = C$, $y = Cx+\sqrt{1+C^2}$ — семейство прямых, общее решение; $x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$, $y = -\frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}}+\sqrt{1+p^2} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$, $x^2+y^2 = 1$, $y>0$ — особый интеграл.

4124. $2yy' = xy'^2+4x$, $y = \frac{xy'}{2}+\frac{2x}{y'}$, $[p=y']$ $y = \frac{xp}{2}+\frac{2x}{p}$, $y' = p = \frac{p+xp'}{2}+\frac{2(p-xp')}{p^2}$, $(p'x-p)(p^2-4)=0$; $p'x-p=0$, $p = \bar{C}x$, $y = \frac{\bar{C}x^2}{2}+\frac{2}{\bar{C}}$, $[C = \frac{\bar{C}}{2}]$ $y = Cx^2+\frac{1}{C}$ — общее решение; $p^2=4$, $p=\pm2$, $y=\pm2x$ — особые решения.

4131. $y = y'+\frac{e^x}{y'}$, $[y'=p]$ $y = p+\frac{e^x}{p}$, $p = p'+\frac{e^xp-e^xp'}{p^2}$, $p(p^2-e^x) = p'(p^2-e^x)$; $p=p'$, $p=Ce^x$, $y = Ce^x+\frac{1}{C}$ — общее решение; $p^2=e^x$, $p=\pm e^{x/2}$, $y=2p$, $y^2=4e^x$ — особые решения.

4135. A и B — точки пересечения касательной с Ox и Oy; пусть $x>0$, $y>0$, тогда $y'<0$; $OA = x-\frac{y}{y'}$,

$OB = y - xy'$, $S = \frac{1}{2}(x - \frac{y}{y'})(y - xy') = a^2$, $(y - xy')^2 = -2a^2y'$, $y = xy' + a\sqrt{-2y'}$, $[y' = p]$ $p = p + xp' - \frac{ap}{\sqrt{-2p}}$, $p'(x - \frac{a}{\sqrt{-2p}}) = 0$, $p' = 0$, $p = C$, $y = Cx + a\sqrt{-2C}$ — общее решение, $x - \frac{a}{\sqrt{-2p}} = 0$, $p = -\frac{a^2}{2x^2}$, $y = -\frac{a^2}{2x} + a\sqrt{\frac{a^2}{x^2}} = \frac{a^2}{2x}$, $2xy = a^2$ — кривая в первой четверти, из соображений симметрии $2xy = \pm a^2$.

4140. A и B — точки пересечения нормали с Ox и Oy; пусть $x > 0$, $y > 0$, тогда $y' > 0$; $OA = x + yy'$, $OB = y + \frac{x}{y'}$, $(x + yy')^2 + (y + \frac{x}{y'})^2 = a^2$, $(x + yy')^2(1 + y'^2) = a^2y'^2$, $[y' = \operatorname{tg}\alpha]$ $(x + y\operatorname{tg}\alpha)^2\frac{1}{\cos^2\alpha} = a^2\operatorname{tg}^2\alpha$, $(x + y\operatorname{tg}\alpha)^2 = a^2\sin^2\alpha$, $x = a\sin\alpha - y\operatorname{tg}\alpha$, $dx = a\cos\alpha\, d\alpha - \operatorname{tg}\alpha\, dy - y\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$, $[dx = \frac{dy}{\operatorname{tg}\alpha}]$ $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)dy = (a\cos\alpha - \frac{y}{\cos^2\alpha})d\alpha$, $\frac{dy}{d\alpha} + y\operatorname{tg}\alpha = a\cos^2\alpha\sin\alpha$, $[y = uv]$ $u'v + u(v + \operatorname{tg}\alpha) = a\cos^2\alpha\sin\alpha$, $v = \cos\alpha$, $u' = a\cos\alpha\sin\alpha$, $u = \frac{a}{2}\sin^2\alpha + C$, $y = \cos\alpha(\frac{a}{2}\sin^2\alpha + C)$, $x = a\sin\alpha - \sin\alpha(\frac{a}{2}\sin^2\alpha + C) = \sin\alpha(a - \frac{a}{2}\sin^2\alpha - C)$.

4145. $\begin{cases} (2a - x)y^2 = x^3 \\ 2(2a - x)yy' - y^2 = 3x^2 \end{cases}$, $2a - x = \frac{x^3}{y^2}$, $\frac{2x^3y'}{y} - y^2 = 3x^2$ — дифф. уравнение семейства циссоид; подставим $-\frac{1}{y'}$ вместо y', получим дифф. уравнение ортогональной траектории: $-\frac{2x^3}{yy'} = 3x^2 + y^2$, $y' = -\frac{2x^3}{y(3x^2+y^2)}$, $[y = tx]$ $t'x + t = -\frac{2}{t(3+t^2)}\frac{dt}{dx}x = -\frac{t^4+3t^2+2}{t(3+t^2)}$, $\frac{dx}{x} = -\frac{t(t^2+3)dt}{(t^2+1)(t^2+2)}$, $\ln|x| = -\int\frac{t(t^2+3)dt}{(t^2+1)(t^2+2)}$ $[u = t^2]$ $= -\frac{1}{2}\int\frac{(u+3)du}{(u+1)(u+2)} = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{2}{u+1} - \frac{1}{u+2}\right) = \frac{1}{2}\ln|u + 2| - \ln|u + 1| + \ln|C|$, $x^2 = C\frac{u+2}{(u+1)^2}$, $(x^2 + y^2)^2 = C(2x^2 + y^2)$.

4149. $y^2 = 4ax$, $2yy' = 4a \Rightarrow y = 2y'x$ — дифф. уравнение парабол; $\operatorname{tg}\alpha = \pm 1$, выбирая $\operatorname{tg}\alpha = -1$, подставляем вместо y' $\frac{1+y'}{1-y'}$, $y = 2\frac{1+y'}{1-y'}x$, $y' = \frac{y-2x}{y+2x}$, $[y = tx]$ $t'x + t = \frac{t-2}{t+2}$, $\frac{dx}{x} = -\frac{(t+2)dt}{t^2+t+2}$, $\ln|x| = -\int\frac{(t+1/2)dt}{t^2+t+2} - \frac{3}{2}\int\frac{dt}{(t+1/2)^2+7/4} = -\frac{1}{2}\ln(t^2 + t + 2) - \frac{3}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C$, $\ln(2x^2 + xy + y^2) + \frac{6}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x+2y}{x\sqrt{7}} = C$.

4154. Эвольвента — траектория, ортогональная к касательным эволюты. $y'_x = -\frac{1}{t}$, $y - 3t^2 - \frac{1}{t}(x + 2t^3) = 0 \Leftrightarrow$

$y = t^2 - \frac{x}{t}$ — семейство касательных, $t = -\frac{1}{y'}$, $y = \frac{1}{y'^2} + xy'$ подставим $-\frac{1}{y'}$ вместо y', $y = y'^2 - \frac{x}{y'}$, $[y' = p]$ $y = p^2 - \frac{x}{p}$, $y' = p = 2pp' - \frac{p - xp'}{p^2}$, $p' = \frac{p^3+p}{2p^3+x}$, $x' = \frac{x}{p^3+p} + \frac{2p^2}{p^2+1}$, $[x = uv]$ $u'v + u\left(v' - \frac{v}{p(p^2+1)}\right) = \frac{2p^2}{p^2+1}$, $\frac{dv}{v} = \frac{dp}{p(p^2+1)}$, $\ln|v| = \int\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right) = \ln|p| - \frac{1}{2}\ln(p^2+1)$, $v = \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}$, $u' = \frac{2p}{\sqrt{p^2+1}}$, $u = 2\sqrt{p^2+1} + C$, $x = 2p + \frac{Cp}{\sqrt{p^2+1}}$, $y = p^2 - \frac{x}{p} = p^2 - 2 - \frac{C}{\sqrt{p^2+1}}$, подстановкой $p = \operatorname{tg} t$ получаем указанный ответ.

4157. $y' = \int \ln x\,dx = x\ln x - x + C_1$, $y = \int(x\ln x - x + C_1)dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^2 + C_1x + C_2$.

4162. $xy'' = y'\ln\frac{y'}{x}$. $[z = y',\ y'' = z']$ $xz' = z\ln\frac{z}{x}$, $[z = tx]$ $t'x + t = t\ln t$, $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t(\ln t - 1)}$, $\ln|x| - \ln|C_1| = \int\frac{d(\ln t)}{\ln t - 1} = \ln|\ln t - 1|$, $\frac{x}{C_1} = \ln\frac{z}{x} - 1$, $y' = xe^{x/C_1+1}$, $y = C_1\int x\,d(e^{x/C_1} + 1) = C_1xe^{x/C_1+1} - C_1\int e^{x/C_1+1}dx = C_1(x - C_1)e^{x/C_1+1} + C_2$.

4167. $(y')^2 + 2yy'' = 0$ $[y' = p(y),\ y'' = p\frac{dp}{dy}]$ $p^2 + 2py\frac{dp}{dy} = 0$, $-2\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$, $\frac{1}{p^2} = C_1y$, $p = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$, $\frac{2}{3}y^{3/2} = C_1x + C_2$, $y = (C_1x + C_2)^{2/3} = C_1(x + C_2)^{2/3}$ (в случае необходимости мы переобозначаем произвольные постоянные).

4175. $y'' = 2yy' = 0$ $[y' = p(y),\ y'' = p\frac{dp}{dy}]$ $p\frac{dp}{dy} = 2py$, $p = y^2 + \bar{C}_1$, $x = \int\frac{dy}{y^2+\bar{C}_1}$; a) $\bar{C}_1 > 0$, $\bar{C}_1 = C_1^2$, $x = \int\frac{dy}{y^2+C_1^2} = \frac{1}{C_1}\operatorname{arctg}\frac{y}{C_1}$, $y = C_1\operatorname{tg}(C_1x + C_2)$, b) $\bar{C}_1 < 0$, $\bar{C}_1 = -C_1^2$, $x = \int\frac{dy}{y^2 - C_1^2} = \frac{1}{2C_1}\ln\left|\frac{y - C_1}{y + C_1}\right| + C_2$, $y = -C_1\operatorname{cth}(C_1x + C_2)$, c) $C_1 = 0$, $x = \int\frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + C$, $y = -\frac{1}{x+C}$.

4181. $yy'y'' = (y')^3 + (y'')^2$, $[y' = p,\ y'' = p\frac{dp}{dy}]$ $p^2(y\frac{dp}{dy} - p - (\frac{dp}{dy})^2) = 0$, $p = 0$, $y = C$; $p = y\frac{dp}{dy} - (\frac{dp}{dy})^2$, $[t = \frac{dp}{dy}]$ $p = yt - t^2$, $t = \frac{dp}{dy} = t + t'y - 2tt'$, $t'(y - 2t) = 0$; a) $t' = 0$, $t = C_1$, $p = \frac{dy}{dx} = C_1y - C_1^2$, $x = \int\frac{dy}{C_1y - C_1^2} = \frac{1}{C_1}\ln|y - C_1| - \ln|C_2|$, $y = C_1 + C_2e^{C_1x}$; b) $y = 2t$, $p = t^2$, $p = \frac{y^2}{4}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{4}$, $y = \frac{4}{C - x}$.

4185. $yy'' + (y')^2 = x$, $[yy' = p,\ yy'' + (y')^2 = p']$ $p' = x$, $yy' = \frac{x^2}{2} + C_1$, $2y\,dy = x^2 + C_1$, $y^2 = \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2$.

4190. $xy''+x(y')^2-y'=0$, $[z=y']$ $z'-\frac{z}{x}+z^2=0$, $[z==uv]$ $u'v+u(v'-\frac{v}{x})=-u^2v^2$, $v=x$, $u'=-u^2x$, $\frac{1}{u}=\frac{x^2}{2}++C$, $u=\frac{2}{x^2+C}$, $z=\frac{2x}{x^2+C}$, $z(2)=1\Rightarrow C=0$, $y'=\frac{2}{x}$, $y==2\ln x+C$, $y(2)=2\Rightarrow C=2-\ln 4$, $y=2+\ln\frac{x^2}{4}$.

4195. $y^4-y^3y''=1$, $[y'=p,\ y''=p\frac{dp}{dy}]$ $pdp==\frac{y^4-1}{y^3}dy$, $\frac{p^2}{2}=\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2y^2}+C$. $p(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow C=-1$, $p==\pm(y-\frac{1}{y})$, т.к. $p(\sqrt{2})>0$, $p=y-\frac{1}{y}$, $dx=\frac{y\,dy}{y^2-1}$, $x==\frac{1}{2}\ln|y^2-1|+C$, $y(0)=\sqrt{2}\Rightarrow C=0$, $y=\sqrt{1+e^{2x}}$.

4202. $TP=\frac{y}{y'}$, $PM=y$, $S_{MTP}=\frac{y^2}{2y'}$, $S_{OMP}==\int_0^x y(t)dt\Rightarrow\frac{y^2}{y'}=2k\int_0^x y(t)dt$; продифференцировав, получаем $\frac{2yy'^2-y^2y''}{y'^2}=2ky$, $2y'^2-yy''=2ky'^2$, $[y'=p(y)]$ $2p^2--py\frac{dp}{dy}=2kp^2$, $\frac{dy}{y}=\frac{dp}{2p(1-k)}$, $p=C_1y^{2-2k}$, $C_1dx==y^{2k-2}dy$, $C_1x=\frac{y^{2k-1}}{2k-1}+C_2$, $y(0)=0\Rightarrow C_2=0$, $y^{2k-1}==Cx$.

4205. Пусть форма нити задается уравнением $y=f(x)$, рассмотрим участок нити, соответствующий отрезку dx оси Ox, его длина $ds=\sqrt{1+y'^2}dx\approx dx$ (знак $\approx$ будем понимать как "равенство с точностью до б.м. порядка выше первого"). α_1 и α_2 — углы между касательными, соответственно, в левом и правом концах участка и осью Ox, F_1 и F_2 — силы упругости, действующие на участок слева и справа; т.к. нить нерастяжима, $|F_1|=|F_2|=T$. Рассмотрим проекцию равнодействующей силы на ось Oy. $F_y=|F_2|\sin\alpha_2-|F_1|\sin\alpha_1==T(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)\approx T(\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1)=T(y'(x_2)-y'(x_1))\approx\approx Ty''$. Нить покоится, поэтому $Ty''=Mg$, $y''=k$, $y==\frac{kx^2}{2}+C_1x+C_2$ — парабола.

4211. $x^2y'''=(y'')^2$, $[z=y'',\ z'=y''']$ $x^2z'=z^2$, $\frac{dz}{z^2}==\frac{dx}{x^2}$, $\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\bar{C}$, a) $\bar{C}=0$, $z=x$, $y=\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2$, b) $\bar{C}==\frac{1}{C_1}$, $z=\frac{C_1x}{x+C_1}$, $y'=C_1x-C_1^2\ln|x+C_1|+\bar{C}_2$, $y=\frac{C_1x^2}{2}--C_1^2(x+C_1)\ln|x+C_1|+C_1^2x+\bar{C}_2x+C_3=\frac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3--C_1^2(x+C_1)\ln|x+C_1|$.

4215. $yy'''-y'y''=0$, $\frac{yy'''-y'y''}{y^2}=0$, $\left(\frac{y''}{y}\right)'=0$, $y''==C_1y$, $[y'=p(y)]$ $p\frac{dp}{dy}=C_1y$, $p^2=C_1y^2+C_2$, $x==\int\frac{dy}{\sqrt{C_1y^2+C_2}}$, a) $C_1>0$, $C_2>0$ $C_1x=\int\frac{dy}{\sqrt{y^2+C_2^2}}=$

$= \ln|y+\sqrt{y^2+C_2^2}|+C_3 = \operatorname{arsh}\frac{y}{C_2}+C_3$, $y = C_2\operatorname{sh}(C_1x+$ $+C_3)$; b) $C_1 > 0$, $C_2 < 0$, $y = C_2\operatorname{ch}(C_1x+C_3)$; c) $C_1 <$ < 0, $C_2 > 0$ $C_1x = \int\frac{dy}{\sqrt{C_2^2-y^2}}+C_3$, $C_1x = \arcsin\frac{y}{C_2}+C_3$, $y =$ $= C_2\sin(C_1x+C_3)$; d) $C_1 = 0$, $y = C_1x+C_2$.

4220. $xyy'' = xy'-y$; $y = 1+a_2(x-1)^2+\ldots+a_5(x-1)^5+$ $+\ldots$, $y' = 2a_2(x-1)+3a_3(x-1)^2+4a_4(x-1)^3+\ldots$, $y'' =$ $= 2a_2++6a_3(x-1)+12a_4(x-1)^2+20a_5(x-1)x^3+\ldots$, $x =$ $= 1+(x-1)$, $xyy'' = 2a_2+(2a_2+6a_3)(x-1)+(12a_4+2a_2^2+$ $+6a_3)(x-1)^2+(20a_5+8a_2a_3+12a_4+2a_2^2)(x-1)^3+\ldots$, $xy'-$ $-y = -1+2a_2(x-1)+(3a_3+a_2)(x-1)^2+(4a_4+2a_3)(x-$ $-1)^3+\ldots$, $xyy'' = xy'-y \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = 0$, $a_4 =$ $= -\frac{1}{12}$, $a_5 = \frac{1}{120}$, $y = 1-\frac{(x-1)^2}{2!}-\frac{2(x-1)^4}{4!}+\frac{(x-1)^5}{5!}+\ldots$.

4227. $W = \begin{vmatrix} x^3 & x^4 \\ 3x^2 & 4x^3 \end{vmatrix} = x^6 \neq 0$ на любом интервале, не содержащем 0: $\begin{vmatrix} x^3 & x^4 & y \\ 3x^2 & 4x^3 & y' \\ 6x & 12x^2 & y'' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^6y''-6x^5y'+12x^4 =$ $= 0 \Leftrightarrow x^2y''-6xy'+12 = 0$ — искомое уравнение.

4234. $y''+\frac{2}{x}y'+y = 0$, $y_1 = \frac{\sin x}{x}$, $y_2 = \frac{\sin x}{x}\times$ $\times\int e^{-2\ln x}\frac{x^2}{\sin^2 x}dx = \frac{\sin x}{x}\int\frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{x}$, $y = \frac{C_1\sin x+C_2\cos x}{x}$.

4238. $y''-\operatorname{tg}x\cdot y'+2y = 0$, $y_1 = \sin x$ — решение, $y_2 = \sin x\int e^{-\ln|\cos x|}\frac{dx}{\sin^2 x} = \sin x\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos x}$ $[t =$ $= \sin x] = \sin x\int\frac{dt}{t^2(1-t^2)} = \sin x\left(\int\frac{dt}{t^2}+\int\frac{dt}{1-t^2}\right) =$ $= \sin x\left(-\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\right) = \sin x\ln|\operatorname{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|-1$.

4241. $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y = 0$, $[y = zx$, $y' = z'x+$ $+z$, $y'' = z''x+2z'$, $y''' = z'''x+3z']$ $z'''x^4 = 0$, $z''' = 0$, $z =$ $= C_1x^2+C_2x+C_3$.

4245. $y''+\frac{2xy'}{1+x^2}-\frac{2y}{1+x^2} = 4-\frac{2}{1+x^2}$; решим однородное уравнение $y''+\frac{2xy'}{1+x^2}-\frac{2y}{1+x^2} = 0$, $y_1 = x$ (подбором) $y_2 =$ $= x\int e^{-\ln(1+x^2)}\frac{dx}{x^2} = x\int\frac{dx}{x^2(1+x^2)} = x\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx =$ $= -x\operatorname{arctg}x-1$, $y = C_1x+C_2(x\operatorname{arctg}x+1)+x^2$ — общее решение исходного уравнения; $y' = C_1+C_2(\operatorname{arctg}x+\frac{x}{1+x^2})+$ $+2x$, $y(-1) = y'(-1) = 0 \Rightarrow C_2 = 2$, $C_1 = \frac{\pi}{2}+3$, $y = x^2+$ $+x(2\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}+3)+2$.

4250. $y''+xy'=x^2y$, $y_1=1+a_2x^2+\ldots+a_5x^5+\ldots$, $y_1'=2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots$, $y_1''=2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+\ldots$, $y_1''+xy_1'=2a_2+6a_3x+(12a_4+2a_2)x^2+(20a_5+3a_3)x^3+\ldots$, $x^2y_1=x^2+a_2x^4+\ldots\Rightarrow a_2=a_3=0$, $a_4=\frac{1}{12}$, $a_5=0$, $y_1=1+\frac{x^4}{12}+\ldots$; $y_2=x+b_2x^2+\ldots+b_5x^5+\ldots$, $y_2'=1+2b_2x+3b_3x^2+4b_4x^3++5b_5x^4+\ldots$, $y_2''=2b_2+6b_3x+12b_4x^2+20b_5x^3$, $y_2''+xy_2'=2b_2+(6b_3+1)x+(12b_4+2b_2)x^2+(20b_5+3b_3)x^3+\ldots$; $x^2y_2=x^3+\ldots\Rightarrow b_2=0$, $b_3=-\frac{1}{6}$, $b_4=0$, $b_5=\frac{3}{40}$, $y=C_1\left(1+\frac{x^4}{12}+\ldots\right)+C_2\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\ldots\right)$.

4255. $3y''-2y'-8y=0$, $3k^2-2k-8=0$, $k_1=2$, $k_2=-\frac{4}{3}$, $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-4x/3}$.

4260. $4k^2-20k+25=0$, $k_{1,2}=\frac{5}{2}$, $y=(C_1+C_2t)e^{5t/2}$.

4266. $k^2+9=0$, $k_{1,2}=\pm 3i$, $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$, $y'=-3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x$, $y(\pi)=-1$, $y'(-\pi)=1\Rightarrow C_1=1$, $C_2=-\frac{1}{3}$, $y=\cos 3x-\frac{1}{3}\sin 3x$.

4270. $k^2-7k+6=0$, $k_1=1$, $k_2=6$, $y_0=C_1e^x+C_2e^{6x}$ — общее решение однородного уравнения, i не корень характеристического уравнения, поэтому частное решение $y_1=A\cos x+B\sin x$, $y_1'=-A\sin x+B\cos x$, $y_1''=-A\cos x-B\sin x$; подставляя в уравнение и приравнивая, получаем $\begin{cases}5A-7B=0\\5B+7A=1\end{cases}$, $A=\frac{7}{74}$, $B=\frac{5}{74}$, $y=C_1e^x+C_2e^{6x}+\frac{5\sin x+7\cos x}{74}$.

4275.9. $k^2-3k+2=0$, $k_1=2$, $k_2=1$, $y_0=C_1e^{2x}+C_2e^x$; y_1 — решение $y''-3y'+2y=2e^x$, 1 — корень хар. уравнения $\Rightarrow y_1=Axe^x$, $y_1'=e^x(Ax+A)$, $y_1''=e^x(Ax+2A)$, $A=2$, $y_1=-2xe^x$; y_2 — решение $y''-3y'+2y=-e^{-2x}$, -2 — не корень хар. уравнения $\Rightarrow y_2=Ae^{-2x}$, $A=-\frac{1}{12}$, $y=C_1e^{2x}+C_2e^x-2xe^x-\frac{1}{12}e^{-2x}$.

4280. $y''+y+\mathrm{ctg}^2x=0$, $k^2+1=0$, $y=C_1\cos x+C_2\sin x$ — решение однородного уравнения, $y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$ — решение неоднородного уравнения, $\begin{cases}C_1'\cos x+C_2'\sin x=0\\-C_1'\sin x+C_2'\cos x=-\mathrm{ctg}^2x\end{cases}$, $C_1'=\frac{\cos^2x}{\sin x}$, $C_2'=-\frac{\cos^3x}{\sin^2x}$,

$C_1(x) = \int \frac{\cos^2 x \sin x}{\sin^2 x} dx$ $[u = \cos x] = \int \frac{u^2}{u^2-1} du = u +$ $+ \frac{1}{2}\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C_1 = \cos x + \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C_1$, $C_2(x) = -\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} =$ $= -\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} d(\sin x) = \sin x + \frac{1}{\sin x} + C_2$, $y = \cos^2 x +$ $+ \cos x \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C_1 \cos x + \sin^2 x + 1 + C_2 \sin x = \cos x \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| +$ $+ 2 + C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

4286. $k^2 - 2k = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = 2$, $y = C_1 e^{2x} + C_2$ — решение однородного уравнения, 1 — не корень хар. уравнения $\Rightarrow$ $y = e^x(Ax^2 + Bx + C)$, $A = -1$, $B = -1$, $C =$ $= 1$, $y = C_1 e^{2x} + C_2 - e^x(x^2 + x - 1)$, $y' = 2C_1 e^{2x} - e^x(x^2 +$ $+ 3x)$, $y(0) = y'(0) = 2 \Rightarrow C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $y = e^{2x} - e^x(x^2 +$ $+ x - 1)$.

4290. $x^2 y'' + xy' + y = x$ $[x = e^t$, $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} e^t \Rightarrow y' =$ $= e^{-t}\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}(y'e^t) = e^t(y' + \frac{d}{dt}(y')) = e^t(y' + e^t y'') \Rightarrow$ $y'' = e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})]$ $y''_{tt} + y = e^t$, $y_0 = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $y_1 =$ $= Ae^t$, $A = \frac{1}{2}$, $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{2}e^t = C_1 \cos\ln|x| +$ $+ C_2 \sin\ln|x| + \frac{x}{2}$.

4296. Пусть x — расстояние от точки до A. x' — производная по времени; $mx'' = F - k(a - x)$, $ka = f \Rightarrow k = \frac{f}{a}$, $x'' =$ $= \frac{F}{m} + \frac{f}{ma}x - \frac{f}{m}$, $x'' - A^2 x = B$, $A^2 = \frac{f}{ma}$, $B = \frac{F-f}{m}$, $k^2 -$ $- A^2 = 0$, $k_{1,2} = \pm A$, $x_0 = C_1 \operatorname{ch} At + C_2 \operatorname{sh} At$, $x_1 = P =$ $= const$, $P = -\frac{B}{A^2} = -\frac{F-f}{f}a$, $x = C_1 \operatorname{ch} At + C_2 \operatorname{sh} At -$ $- \frac{F-f}{f}a$, $x' = AC_1 \operatorname{sh} At + AC_2 \operatorname{ch} At$, $x(0) = 0 \Rightarrow C_1 =$ $= \frac{F-f}{f}a$, $x'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$, $x = \frac{F-f}{f}a(\operatorname{ch} At - 1)$; $x(t) =$ $= a \Rightarrow \frac{F-f}{f}(\operatorname{ch} At - 1) = 1$, $\operatorname{ch} At = \frac{F}{F-f}$, $t = \frac{1}{A}\operatorname{arch}\frac{F}{F-f} =$ $= \sqrt{\frac{ma}{f}} \ln \frac{F + \sqrt{f(2F-f)}}{F-f}$.

4302. $y^{IV} - 13y'' + 36y = 0$, $k^4 - 13k^2 + 36 = 0$, $k_{1,2} =$ $= \pm 2$, $k_{3,4} = \pm 3$, $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x} + C_4 e^{4x}$.

4308. $y^{(n)} = y^{(n-2)}$, $k^n - k^{n-2} = 0$, $k_{1,2} = \pm 1$, $k_3 = \ldots =$ $= k_n = 0$, $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x^{n-3} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$.

4313. $y^V = y'$, $k^5 - k = 0$, $k_1 = 0$, $k_{2,3} = \pm 1$, $k_{4,5} =$ $= \pm i$, $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + C_4 \cos x + C_5 \sin x$, подставляя н.у., получаем $C_1 = -2$, $C_2 = C_4 = 1$, $C_3 = C_5 = 0$, $y =$ $= e^x + \cos x - 2$.

4317. $y^{IV} + 2a^2 y'' + a^4 y = \cos ax$, $k^4 + 2a^2 k^2 + a^4 =$ $= 0$, $(k^2 + a^2)^2 = 0$, $k_{1,2} = ai$, $k_{3,4} = -ai$, $y_0 = (C_1 x +$

$+C_2)\cos ax+(C_3x+C_4)\sin ax$; ai — корень х.у. кратности $2 \Rightarrow y_1 = Ax^2\cos ax + Bx^2\sin ax$; $B=0$, $A=-\frac{1}{8a^2}$, $y=(C_1x+ C_2)\cos ax+(C_3x+C_4)\sin ax-\frac{x^2}{8a^2}\cos ax$.

4322. $y'''-y'=3(2-x^2)$, $k^3-k=0$, $k_{1,2}=\pm 1$, $k_3 = 0$, $y_0=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3$, 0 — простой корень х.у. $\Rightarrow y_1 = Ax^3+Bx^2+Cx$, $A=1$, $B=C=0$, $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+ C_3+x^3$, $y'=C_1e^x-C_2e^{-x}+3x^2$, $y''=C_1e^x+C_2e^{-x}+ 6x$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=1 \Rightarrow C_1+C_2+C_3=1$, $C_1- C_2=1$, $C_1+C_2=1 \Rightarrow C_1=1$, $C_2=C_3=0$, $y=e^x+x^3$.

4324.4. Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2=0 \Leftrightarrow (\lambda^2-1)(\lambda-2)=0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=2$ — характеристические числа; при $\lambda=1$ $\begin{cases} -k_2+k_3=0 \\ k_1-k_3=0 \\ 2k_1-k_2-k_3=0 \end{cases} \Rightarrow k_1=k_2=k_3=1$, $x_1=e^t$, $y_1=e^t$, $z_1=e^t$; при $\lambda=-1$ $k_1=1$, $k_2=-3$, $k_3=-5$, $x_2 = e^{-t}$, $y_2=-3e^{-t}$, $z_2=-5e^{-t}$; при $\lambda=2$ $k_2=0$, $k_1 = k_3=1$, $x_3=e^{2t}$, $y_3=0$, $z_3=e^{2t}$, $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+ C_3e^{2t}$, $y=C_1e^t-3C_2e^{-t}$, $z=C_1e^t-5C_2e^{-t}+C_3e^{2t}$.

4324.7. Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda^2)(\lambda^2-6\lambda+10)=0$, $\lambda_1=2$, $\lambda_{2,3}=3\pm i$ — характеристические числа; при $\lambda=2$ $k_1=1$, $k_2=0$, $k_3 = -1$, при $\lambda=3+i$ $\begin{cases} -(1+i)k_1+k_2=0 \\ k_1-ik_2-k_3=0 \\ -k_1+2k_2-ik_3=0 \end{cases} \Rightarrow k_1 = 1$, $k_2=1+i$, $k_3=2-i$, $x_{2.3}=e^{(3+i)t}=e^{3t}(\cos t+ i\sin t)$, $y_{2.3}=(1+i)e^{3t}(\cos t+i\sin t)=e^{3t}(\cos t-\sin t+ i(\sin t+\cos t))$, $y_2=e^{3t}(\cos t-\sin t)$, $y_3=e^{3t}(\cos t+ \sin t)$, $z_{2.3}=(2-i)e^{3t}(\cos t+i\sin t)=e^{3t}(2\cos t+\sin t+ i(2\sin t-\cos t))$, $z_2=e^{3t}(2\cos t+\sin t)$, $z_3=e^{3t}(2\sin t- \cos t)$, $x=C_1e^{2t}+e^{3t}(C_2\cos t+C_3\sin t)$, $y=e^{3t}((C_2+ C_3)\cos t-(C_2-C_3)\sin t)$, $z=C_1e^{2t}+e^{3t}((2C_2-C_3)\cos t+ (C_2+2C_3)\sin t)$.

4326. Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 1 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2+11\lambda+28=0$, $\lambda_1=-4$, $\lambda_2=-7$ — характеристические числа; при $\lambda=-4$ $k_1=2$, $k_2=1$, $x_1=2e^{-4t}$, $y_1=e^{-4t}$, при $\lambda=-7k_1=1$, $k_2=-1$, $x_2=e^{-7t}$, $y_2=-e^{-7t}$, $x_0=2C_1e^{-4t}+C_2e^{-7t}$, $y_0=C_1e^{-4t}-C_2e^{-7t}$ — общее решение однородной системы, частное решение исходной системы ищем методом неопределенных коэффициентов в виде $X=Ae^t+Be^{-2t}$, $Y=Ce^t+De^{-2t}$; $X'=Ae^t-2Be^{-2t}$, $Y'=Ce^t-2De^{-2t} \Rightarrow A=\frac{7}{40}$, $B=\frac{1}{5}$, $C=\frac{1}{40}$, $D=\frac{3}{10}$, $x=2C_1e^{-4t}+C_2e^{-7t}+\frac{7}{40}e^t+\frac{1}{5}e^{-2t}$, $y=C_1e^{-4t}-C_2e^{-7t}+\frac{1}{40}e^t+\frac{3}{10}e^{-2t}$.

4333. Дважды дифференцируя второе уравнение, получаем $\frac{d^4x}{dt^4}=\frac{d^2y}{dx^2}=x$, $x^{IV}=x$, $k^4-1=0$, $k_{1,2}=\pm1$, $k_{3,4}=\pm i \Rightarrow x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t$, $y=x''=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\sin t$.

4340. Пусть $y=f(x)$ и $y=g(x)$ — уравнения первой и второй линий, $f-f'x$ и $g-g'x$ — ординаты точек пересечения касательных с осью Oy, $ff'+x$ и $gg'+x$ — абсциссы точек пересечения нормалей с осью Ox, получаем систему $\begin{cases} (f'-g')x=f-g \\ ff'=gg' \end{cases}$ $[z=f-g]$ $z'x-x=0$, $z=Cx$, $z(1)=1 \Rightarrow z=x$, $f=g+x$, $f'=g'+1$ $(g+x)(g'+1)=gg'$, $g'x+g+x=0$, $(gx)'=-x$, $gx=-\frac{x^2}{2}+C$, $g=-\frac{x}{2}+\frac{C}{x}$, $g(1)=1 \Rightarrow C=\frac{3}{2}$, $g=\frac{3-x^2}{2x}$, $f=\frac{3+x^2}{2x}$.

4345. $\begin{cases} \dfrac{dA}{dt}=kAB \\ \dfrac{dB}{dt}=-k_1A \end{cases}$

$-\frac{1}{k_1}\frac{d^2B}{dt^2}=\frac{dA}{dt} \Rightarrow -\frac{1}{k_1}\frac{d^2B}{dt^2}=-\frac{k}{k_1}B\frac{dB}{dt}$, $[B'=\frac{dB}{dt}]$ $B''=kBB'$ $[B'=p(B)]$ $p\frac{dp}{dB}=kBp$ $(B\neq C)$, $p=\frac{kB^2}{2}+C$, $t=\int\frac{2dB}{kB^2+C}=\frac{2}{k}\int\frac{dB}{B^2+C}$, $\frac{dB}{dt}<0 \Rightarrow C<0$, $C=-\alpha^2$, $k\alpha t=\ln\left|\frac{B-\alpha}{B+\alpha}\right|-\ln\beta$, $B=\alpha\frac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}}$, $\frac{dB}{dt}=-\frac{k\alpha^2}{2}\left(1-\left(\frac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}}\right)^2\right)$, $A=\frac{k\alpha^2}{2k_1}\left(1-\left(\frac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}}\right)^2\right)$, $B(0)=B_0 \Rightarrow \beta=\frac{\alpha-B_0}{\alpha+B_0}$, $A(0)=A_0 \Rightarrow \alpha=\sqrt{B_0^2+\frac{2k_1}{k}A_0}$.

4355. $y = 1 + a_2(x-1)^2 + \ldots + a_6(x-1)^6 + \ldots$, $y' = 2a_2(x-1) + 3a_3(x-1)^2 + \ldots + 6a_6(x-1)^5 + \ldots$, $y'' = 2a_2 + 6a_3(x-1) + 12a_4(x-1)^2 + 20a_5(x-1)^3 + 30a_6(x-1)^4 + \ldots$, $x = 1 + (x-1)$, $y' - y + x = (2a_2 + 1(x-1) + (3a_3 - a_2)(x-1)^2 + (4a_4 - a_3)(x-1)^3 + (5a_5 - a_4)(x-1)^4 + \ldots \Rightarrow$ $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{6}$, $a_4 = \frac{1}{24}$, $a_5 = 0$, $a_6 = -\frac{1}{720}$; $y = 1 + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} - \frac{(x-1)^6}{720} + \ldots \approx 1{,}001624$.

К ГЛАВЕ 15

4360. $\cos nx = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} = \frac{(\cos x+i\sin x)^n+(\cos x-i\sin x)^n}{2} = \cos^n x - C_n^2\cos^{n-2}x\sin^2 x + C_n^4\cos^{n-4}x\sin^4 x + \ldots$; т.к. $\sin x$ входит только в четных степенях, $\cos nx = P_n(\cos x)$.

4363. $S = \sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi = \frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\sin\varphi + \ldots + \sin\frac{\varphi}{2}\sin n\varphi\right) = \frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{3\varphi}{2} + \cos\frac{3\varphi}{2} - \cos\frac{5\varphi}{2} + \ldots + \cos\frac{(n-1)\varphi}{2} - \cos\frac{(n+1)\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{(n+1)\varphi}{2}\right) = \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$; $S = 0$ при $\varphi = \frac{2\pi k}{n}$, $\varphi = \frac{2\pi k}{n+1}$, $k = 0, \ldots, n$.

4370. $f(x)\cos nx$ — нечетная функция $\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$; $b_{2k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 2kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin 2kx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin 2kx\,dx$ $[y = x+\pi]$ $= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(y-\pi)\sin 2k(y-\pi)dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin 2kx\,dx = 0$.

4376.1. $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,d(\sin nx) = \frac{1}{\pi n}x^2\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} x\,d(\cos nx) = \frac{2}{\pi n^2}x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{4(-1)^n}{n^2} - \frac{2}{\pi n^3}x\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2}$; $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$; при $x = \pi$ $\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow s_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; при $x = 0$ $0 - \frac{\pi^2}{3} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow s_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$; $s_3 = \frac{s_1+s_2}{2} = \frac{\pi^2}{8}$.

4380. $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2h}{\pi}$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{h}\cos nx\,dx = \frac{2\sin nh}{\pi n}$, $f(x) = \frac{h}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh\cos nx}{n}$.

4386. $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin ax \sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos(a-n)x - \cos(a+n)x)dx = \frac{1}{\pi(a-n)}\sin(a-n)x\Big|_0^\pi - \frac{1}{\pi(a+n)}\sin(a+n)x\Big|_0^\pi = \frac{(a+n)\sin(\pi a-\pi n)-(a-n)\sin(\pi a+\pi n)}{\pi(a^2-n^2)} = \frac{2(-1)^n n\sin\pi a}{\pi(a^2-n^2)}$, $\sin ax = \frac{2}{\pi}\sin\pi a\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{a^2-n^2}\sin nx.$

4390. $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{ch} x\,dx = \frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{ch} x\cos nx\,dx$; $I = \int_0^\pi \cos nx\,d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{sh} x\cos nx|_0^\pi + n\int_0^\pi \operatorname{sh} x\sin nx\,dx = (-1)^n\operatorname{sh}\pi + n\int_0^\pi \sin nx\,d(\operatorname{ch} x) = (-1)^n\operatorname{sh}\pi + n\operatorname{ch} x\sin nx|_0^\pi - n^2\int_0^\pi \operatorname{ch} x\cos nx\,dx = (-1)^n\operatorname{sh}\pi - n^2 I \Rightarrow I = \frac{(-1)^n\operatorname{sh}\pi}{n^2+1}$, $\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left(1 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2+1}\right).$

4395. $\varphi'(x) = -4x(\pi^2-x^2)$, $\varphi''(x) = 12x^2-4\pi^2$, $\varphi'''(x) = 24x$; $\varphi(-x) = \varphi(x) \Rightarrow b_n = 0$; $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi^4 - 2\pi^2x^2 + x^4)dx = \frac{16}{15}\pi^4$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \varphi(x)d(\sin nx) = \frac{2}{\pi n}\varphi(x)\sin nx|_0^\pi - \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \varphi'(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi n^2}\int_0^\pi \varphi'(x)d(\cos nx) = \frac{2}{\pi n^2}\varphi'(x)\cos nx|_0^\pi - \frac{2}{\pi n^2}\int_0^\pi \varphi''(x)\cos nx\,dx = -\frac{2}{\pi n^3}\int_0^\pi \varphi''(x)d(\sin nx) = -\frac{2}{\pi n^3}\varphi''(x)\sin nx|_0^\pi + \frac{2}{\pi n^3}\int_0^\pi \varphi'''(x)\sin nx\,dx = -\frac{48}{\pi n^4}\int_0^\pi x\,d(\cos nx) = -\frac{48}{\pi n^4}x\cos nx|_0^\pi + \frac{48}{\pi n^4}\int_0^\pi \cos nx\,dx = \frac{(-1)^{n+1}48}{n^4}$; $\varphi(x) = \frac{8}{15}\pi^4 + 48\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^4}$; при $x = 0$ $\pi^4 = \frac{8}{15}\pi^4 + 48S \Rightarrow S = \frac{7}{720}\pi^4.$

4398. $f'(x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+n}{n^4+1}\sin nx$, $\frac{\pi-x}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} \Rightarrow$ $f'(x) + \frac{\pi-x}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{n^3+n}{n^4+1}\right)\sin nx = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n(n^4+1)}\sin nx \Rightarrow$ $f(x) = \frac{(\pi-x)^2}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^2(n^4+1)}\cos nx + C$, по условию $f(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^4+1} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^4+1} = \frac{\pi^2}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^2(n^4+1)} + C$, $C = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^4+1} - \frac{n^2-1}{n^2(n^4+1)}\right) - \frac{\pi^2}{4} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{4} = -\frac{\pi^2}{12}$, $f(x) = \frac{(\pi-x)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^2(n^4+1)}\cos nx.$

К ГЛАВЕ 16

4403. $\frac{dx}{-\omega y} = \frac{dy}{\omega x} = \frac{dz}{h} \Rightarrow \omega(x\,dx + y\,dy) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = C_1$, $y = \sqrt{C_1 - x^2}$, $\frac{dx}{-\omega\sqrt{C_1 - x^2}} = \frac{dz}{h} \Rightarrow z = -\frac{h}{\omega}\arcsin\frac{x}{\sqrt{C_1}} + C_2$, $x = \sqrt{C_1}\sin(-\frac{\omega}{h}z + C_2)$, $y = \sqrt{C_1}\cos(-\frac{\omega}{h}z + C_2)$ — винтовая линия.

4407. $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 2xyz\cdot 3 = 6xyz$;
$\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\boldsymbol{i} - (\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z})\boldsymbol{j} + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\boldsymbol{k} = x(z^2 - y^2)\boldsymbol{i} + y(x^2 - z^2)\boldsymbol{j} + z(y^2 - x^2)\boldsymbol{k}$.

4413. $\boldsymbol{F} = -\frac{kx}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\boldsymbol{i} - \frac{ky}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\boldsymbol{j} - \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\boldsymbol{k}$,
$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = -\frac{k}{z}\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} - \frac{k}{z}\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} + \frac{kz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = -\frac{k}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

4419. Пусть поле пространственное. $A_x = \frac{f(|\boldsymbol{r}|)}{|\boldsymbol{r}|}x$, $|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $|\boldsymbol{r}|'_x = \frac{x}{|\boldsymbol{r}|} \Rightarrow \frac{\partial A_x}{\partial x} = \left(\frac{f(|\boldsymbol{r}|)}{|\boldsymbol{r}|}\right)'x + \frac{f(|\boldsymbol{r}|)}{|\boldsymbol{r}|} = \frac{f'(|\boldsymbol{r}|)\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}|\boldsymbol{r}| - \frac{x}{|\boldsymbol{r}|}f(|\boldsymbol{r}|)}{|\boldsymbol{r}|^2}x + \frac{f(|\boldsymbol{r}|)}{|\boldsymbol{r}|} = \frac{x^2(f'(|\boldsymbol{r}|)|\boldsymbol{r}| - f(|\boldsymbol{r}|)) + f(|\boldsymbol{r}|)|\boldsymbol{r}|^2}{|\boldsymbol{r}|^3} \Rightarrow$
$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \frac{(x^2+y^2+z^2)(f'(|\boldsymbol{r}|)|\boldsymbol{r}| - f(|\boldsymbol{r}|)) + 3f(|\boldsymbol{r}|)|\boldsymbol{r}|^2}{|\boldsymbol{r}|^3} = \frac{f'(|\boldsymbol{r}|)|\boldsymbol{r}| + 2f(|\boldsymbol{r}|)}{|\boldsymbol{r}|} = f'(|\boldsymbol{r}|) + 2\frac{f(|\boldsymbol{r}|)}{|\boldsymbol{r}|}$; $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0 \Rightarrow \frac{df}{d|\boldsymbol{r}|} + 2f = 0$, $\frac{df}{f} = 2\frac{d|\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{r}|}$, $f = \frac{C}{|\boldsymbol{r}|^2}$.

4424. Пусть $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки на окружности, α — угол между $\boldsymbol{v}$ и положительным направлением оси абсцисс; $|\boldsymbol{v}| = \omega|\boldsymbol{r}|$, $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{r} \Rightarrow \boldsymbol{v}_x = -\omega|\boldsymbol{r}|\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\omega|\boldsymbol{r}|\sin\alpha = -\omega y$, $\boldsymbol{v}_y = \omega x$, $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = 2\omega\boldsymbol{k}$ (ось Oz параллельна оси вращения).

4431. $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r} \Rightarrow \boldsymbol{F}_x = -kx$, $\boldsymbol{F}_y = -ky$, $\boldsymbol{F}_z = -kz$, $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_x}{\partial z} = \ldots = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \operatorname{rot}\boldsymbol{F} = 0$, поле потенциально с потенциалом U, $U = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} -kx\,dx - ky\,dy - kz\,dz = -\frac{k}{2}(x^2+y^2+z^2) + C$.

4434. $\boldsymbol{F} = -k\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^2}$, где $\boldsymbol{r}\{x,\ y,\ 0\} \Rightarrow \boldsymbol{F}_x = -\frac{kx}{|\boldsymbol{r}|^2}$, $\boldsymbol{F}_y = -\frac{ky}{|\boldsymbol{r}|^2}$, $\boldsymbol{F}_z = 0$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = 0$, поле потенциально с потенциалом U, $U = -k\int_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)} \frac{x\,dx}{x^2+y^2} + \frac{y\,dy}{x^2+y^2} = -\frac{k}{2}\ln(x^2+y^2) + C$.

4440. Потенциал материальной точки массы m в точке, находящейся от нее на расстоянии r равен $\frac{km}{r}$; рассмотрим участок линии, соответствующий значениям параметра $[t, t + dt]$, $r = \sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2t^2} = \sqrt{a^2 + b^2t^2}$, $dm = \delta dl = \delta\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt = \delta\sqrt{a^2+b^2}\,dt$, $dU = k\frac{dm}{r} = k\delta\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2t^2}}dt \Rightarrow U = \int_0^{2\pi} dU = \frac{k\delta\sqrt{a^2+b^2}}{b}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{a^2/b^2+t^2}} = \frac{k\delta\sqrt{a^2+b^2}}{b}\ln\left|t + \sqrt{\frac{a^2}{b^2}+t^2}\right|\Big|_0^{2\pi} = \frac{k\delta\sqrt{a^2+b^2}}{b}\ln\frac{2\pi b+\sqrt{a^2+4\pi^2b^2}}{a}$.

4445.1. Рассмотрим элемент объема в цилиндрических координатах: $dv = r\,dr\,d\varphi dz$, $dm = \delta dv$, $dU = \frac{k\delta\,dv}{\sqrt{r^2+z^2}}$, $U = \iiint_\Omega \frac{k\delta r\,dr\,d\varphi\,dz}{\sqrt{r^2+z^2}} = k\delta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^H dz\int_0^R\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = k\delta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^H\left(\sqrt{R^2+z^2}-z\right)dz = k\delta\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{z}{2}\sqrt{R^2+z^2}+\frac{R^2}{2}\ln|z+ \sqrt{z^2+R^2}|-\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^H = \pi k\delta\left(H\sqrt{R^2+H^2}+R^2\ln\frac{H+\sqrt{H^2+R^2}}{R}-H^2\right)$.

4453. Циркуляция: $\oint(x^3-y)dx+(y^3+x)dy$ $[x = R\cos t$, $y = R\sin t] = \int_0^{2\pi}((R^3\cos^3 t - R\sin t)(-R\sin t) + (R^3\sin^3 t + R\cos t)R\cos t\,dt = R^2\int_0^{2\pi}(\sin^2 t - R^2\cos^3 t\sin t + R^2\sin^3 t\cos t + \cos^2 t)dt = R^2\int_0^{2\pi}(1 - \frac{R^2}{2}\sin 2t\cos 2t)dt = R^2\int_0^{2\pi}(1 - \frac{R^2}{4}\sin 4t)dt = 2\pi R^2$; поток:$\Phi = \oint An\,dl = \int_0^{2\pi}((x^3-y)\cos t + (y^3+x)\sin t)R\,dt = R^4\int_0^{2\pi}(\cos^4 t + \sin^4 t)dt = R^4\int_0^{2\pi}(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t)dt = \frac{3}{2}\pi R^4$.

4458. Уравнение цилиндрической поверхности S в цилиндрических координатах $r = R$, $\boldsymbol{r}\perp S \Rightarrow \mathbf{r}\parallel \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = |\boldsymbol{r}| = R$, $dS = R\,d\varphi dz$, $\Phi = \iint_S \boldsymbol{r}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^H R^2dz = 2\pi R^2H$.

4463. $\boldsymbol{r}\{x,y,z\}$, $\int_{AB}\boldsymbol{r}\,dl = \int_{AB}x\,dx + y\,dy + z\,dz$ $[x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt] = \int_0^{2\pi}(-a^2\cos t\sin t + a^2\sin t\cos t + b^2t)dt = 2\pi^2b^2$.

4465. Т. к. поле вектора $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ соленоидально, поток этого вектора через замкнутую поверхность равен 0, поэтому поток через поверхность параболоида равен потоку через круг $x^2+y^2 \leqslant 1$, последний по формуле Стокса равен $\oint A\,dl = \oint y\,dx + z\,dy[x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0] = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t\,dt = -\pi$.