где x_1, y_1 — новые координаты (после переноса), a, b, c, d — постоянные. Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\frac{\varphi(x_1, y_1)}{r^{1+\varepsilon}} \to 0, \quad \frac{\psi(x_1, y_1)}{r^{1+\varepsilon}} \to 0 \quad \text{при} \quad x_1 \to 0,\ y_1 \to 0,$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Очевидно, это условие выполняется (при любом $\varepsilon < 1$), если функции P и Q в исследуемой точке дважды дифференцируемы. Предположим еще, что вещественные части всех корней характеристического уравнения (5) отличны от нуля. Тогда особая точка $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ системы (9) будет того же типа, что особая точка системы (3), получаемой отбрасыванием функций φ и ψ. Далее, угловые коэффициенты направлений, по которым траектории входят в особую точку, для систем (3) и (9) одни и те же (однако прямым $y = kx$ для системы (3) могут соответствовать кривые для системы (9)), а в случае фокуса — направление закручивания траекторий одно и то же.

В том случае, когда для системы (3) особая точка — центр, для системы (9) она может быть фокусом или центром. Для наличия центра достаточно (но не необходимо), чтобы траектории системы (9) имели ось симметрии, проходящую через исследуемую точку. Ось симметрии, очевидно, существует, если уравнение вида (2), к которому можно привести систему (9), не меняется от замены x на $-x$ (или y на $-y$). Для наличия фокуса необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение системы (9) было асимптотически устойчиво при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$. Исследование на устойчивость можно провести с помощью функции Ляпунова. Это сделать нелегко, так как в рассматриваемом случае функцию Ляпунова часто приходится брать в виде суммы членов второй, третьей и четвертой степеней относительно x, y.

В задачах **961—978** исследовать особые точки написанных ниже уравнений и систем. Дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y).

961. $y' = \dfrac{2x + y}{3x + 4y}$. **962.** $y' = \dfrac{x - 4y}{2y - 3x}$.

963. $y' = \dfrac{y - 2x}{y}$. **964.** $y' = \dfrac{x + 4y}{2x + 3y}$.

965. $y' = \dfrac{x - 2y}{3x - 4y}$. **966.** $y' = \dfrac{2x - y}{x - y}$.

967. $y' = \dfrac{y - 2x}{2y - 3x}$. **968.** $y' = \dfrac{4y - 2x}{x + y}$.

969. $y' = \dfrac{y}{x}$.

970. $y' = \dfrac{4x - y}{3x - 2y}$.

971. $\begin{cases} \dot{x} = 3x, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

972. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$

973. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -6x - 5y. \end{cases}$

974. $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

975. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y, \\ \dot{y} = 2x + 2y. \end{cases}$

976. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = y - x. \end{cases}$

977. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4y - 6x. \end{cases}$

978. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x, \\ \dot{y} = 2y - 4x. \end{cases}$

В задачах **979—992** найти и исследовать особые точки данных уравнений и систем.

979. $y' = \dfrac{2y - x}{3x + 6}$.

980. $y' = \dfrac{2x + y}{x - 2y - 5}$.

981. $y' = \dfrac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}$.

982. $y' = \dfrac{2y}{x^2 - y^2 - 1}$.

983. $y' = \dfrac{x^2 + y^2 - 2}{x - y}$.

984. $y' = \dfrac{y + \sqrt{1 + 2x^2}}{x + y + 1}$.

985. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = \ln(1 - x + x^2) - \ln 3. \end{cases}$

986. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(2 - y^2), \\ \dot{y} = e^x - e^y. \end{cases}$

987. $\begin{cases} \dot{x} = (2x-y)(x-2), \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$

988. $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2, \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}(x^2 + xy). \end{cases}$

989. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = x^2 - (y - 2)^2. \end{cases}$

990. $\begin{cases} \dot{x} = \ln \dfrac{y^2 - y + 1}{3}, \\ \dot{y} = x^2 - y^2. \end{cases}$

991. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 - y + y^2), \\ \dot{y} = 3 - \sqrt{x^2 + 8y}. \end{cases}$

992. $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{(x - y)^2 + 3} - 2, \\ \dot{y} = \mathrm{e}^{y^2 - x} - \mathrm{e}. \end{cases}$

Для уравнений **993—997** дать чертеж расположения интегральных кривых в окрестности начала координат.

Указание. В задачах **993—997** особые точки не принадлежат к рассмотренным в начале § 16 типам. Для их исследования можно построить несколько изоклин. Затем надо выяснить, с каких сторон интегральные кривые входят в особую точку.

993*. $y' = \dfrac{xy}{x + y}$.

994*. $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y}$.

995*. $y' = \dfrac{2xy}{y + x^2}$.

996*. $y' = \dfrac{xy}{y - x^2}$.

997*. $y' = \dfrac{y^2}{y + x^2}$.

998. Доказать, что если особая точка уравнения

$$(ax + by)\,\mathrm{d}x + (mx + ny)\,\mathrm{d}y = 0$$

является центром, то это уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Обратное неверно.

999*. Доказать, что если уравнение предыдущей задачи не является уравнением в полных дифференциалах, но имеет интегрирующий множитель, непрерывный в окрестности начала координат, то особая точка — седло (если $an \neq bm$).

1000*. Пусть в уравнении

$$y' = \frac{ax + by + p(x, y)}{cx + dy + q(x, y)} \tag{1}$$

функции p и q определены и непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $(0, 0)$, а в самой точке

$(0,0)$ $p = p'_x = p'_y = q = q'_x = q'_y = 0$. Доказать, что если уравнение (1) не меняется от замены y на $-y$, а корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & d \\ a & b-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

чисто мнимы, то особая точка $(0,0)$ — центр.

§ 17. ФАЗОВАЯ ПЛОСКОСТЬ

1. О понятиях фазового пространства, фазовой плоскости, автономной системы, траектории см. [1], гл. VII, § 1, п. 4, или [3], § 15, или [4], гл. 3, § 1.

2. Чтобы построить траектории системы

$$\dot{x} = f_1(x, y), \quad \dot{y} = f_2(x, y) \tag{1}$$

на фазовой плоскости x, y, можно или исследовать непосредственно эту систему, или, разделив одно уравнение на другое, свести ее к уравнению первого порядка

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)}. \tag{2}$$

Траектории системы (1) будут интегральными кривыми уравнения (2). Их можно построить или решив уравнение (2) (часто оно решается проще, чем система (1)), или с помощью метода изоклин (§ 1), при этом необходимо исследовать особые точки системы (методами § 16).

Для построения траекторий уравнения $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ на фазовой плоскости надо от этого уравнения перейти к системе $\dot{x} = y$, $\dot{y} = f(x, y)$, которая исследуется так же, как система (1).

3. Предельным циклом называется замкнутая траектория, у которой существует окрестность, целиком заполненная траекториями, неограниченно приближающимися к этой замкнутой траектории при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$. Предельный цикл называется устойчивым, если траектории приближаются к нему только при $t \to +\infty$, неустойчивым — если только при $t \to -\infty$, полуустойчивым — если с одной стороны цикла траектории приближаются к нему при $t \to +\infty$, а с другой стороны при $t \to -\infty$. О предельных циклах см. [3], § 28, [2], § 25.

В задачах **1001—1020** для данных уравнений начертить траектории на фазовой плоскости. По чертежу сделать выводы о поведении решений при $t \to +\infty$.

1001. $\ddot{x} + 4x = 0$. **1002.** $\ddot{x} - x = 0$.

1003. $\ddot{x} - x + x^2 = 0$. **1004.** $\ddot{x} - 3x^2 = 0$.

1005. $\ddot{x} + 2x^3 = 0$. **1006.** $\ddot{x} + 2x^3 - 2x = 0$.

1007. $\ddot{x} + e^x - 1 = 0$. **1008.** $\ddot{x} - 2^x + x + 1 = 0$.

1009. $\ddot{x} - \sin x = 0$. **1010.** $\ddot{x} + 2\cos x - 1 = 0$.

1011. $\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0$. **1012.** $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$.

1013. $\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0$. **1014.** $\ddot{x} + 2\dot{x} + \dot{x}^2 + x = 0$.

1015. $\ddot{x} + \dot{x} + 2x - x^2 = 0$.

1016. $\ddot{x} + \dot{x}^2 - x^2 + 1 = 0$.

1017. $\ddot{x} + 2^{\dot{x}} - x^2 = 0$. **1018.** $\ddot{x} + \sqrt{x^2 + \dot{x}^2} - 1 = 0$.

1019. $\ddot{x} + 5\dot{x} - 4\ln\frac{x^2+1}{2} = 0$.

1020. $\ddot{x} + \dot{x} + \operatorname{arctg}(x^2 - 2x) = 0$.

В задачах **1021—1034** начертить на фазовой плоскости траектории данных систем и исследовать особые точки.

1021. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y^2 - 1, \\ \dot{y} = 6x - y^2 + 1. \end{cases}$ **1022.** $\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 4x^2, \\ \dot{y} = 4y - 8. \end{cases}$

1023. $\begin{cases} \dot{x} = 4 - 4x - 2y, \\ \dot{y} = xy. \end{cases}$ **1024.** $\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2x. \end{cases}$

1025. $\begin{cases} \dot{x} = 2 + y - x^2, \\ \dot{y} = 2x(x - y). \end{cases}$ **1026.** $\begin{cases} \dot{x} = xy - 4, \\ \dot{y} = (x-4)(y-x). \end{cases}$

1027. $\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2xy. \end{cases}$

1028. $\begin{cases} \dot{x} = 2(x - 1)(y - 2), \\ \dot{y} = y^2 - x^2. \end{cases}$

1029. $\begin{cases} \dot{x} = (x+y)^2-1, \\ \dot{y} = -y^2-x+1. \end{cases}$ **1030.** $\begin{cases} \dot{x} = (2x-y)^2-9, \\ \dot{y} = 9-(x-2y)^2. \end{cases}$

1031. $\begin{cases} \dot{x} = (2x-y)^2-9, \\ \dot{y} = (x-2y)^2-9. \end{cases}$

1032. $\begin{cases} \dot{x} = x^2+y^2-6x-8y, \\ \dot{y} = x(2y-x+5). \end{cases}$

1033. $\begin{cases} \dot{x} = x^2-y, \\ \dot{y} = (x-y)(x-y+2). \end{cases}$

1034. $\begin{cases} \dot{x} = x^2+y^2-5, \\ \dot{y} = (x-1)(x+3y-5). \end{cases}$

1035. Вывести уравнение движения маятника без сопротивления. Для случая, когда все постоянные, входящие в уравнение, равны 1, начертить траектории на фазовой плоскости. Дать физическое истолкование траекториям различных типов.

1036. Вывести уравнение движения маятника с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости. Дать чертеж траекторий на фазовой плоскости.

Указание. Воспользоваться чертежом, построенным для задачи **1035**.

1037. Вывести уравнение движения маятника, на который действует постоянная сила, равная половине веса маятника и направленная всегда в одну сторону по касательной к дуге окружности, по которой движется маятник.

Приняв постоянные l и g равными 1, нарисовать траектории полученного уравнения на фазовой плоскости. Какие движения маятника изображаются траекториями различных типов?

1038. Груз массы m прикреплен к пружине. При отклонении груза на расстояние x пружина действует на него с силой kx, направленной к положению равновесия. Сила трения равна $f = \mathrm{const}$ и направлена в сторону, противоположную скорости груза. При $t = 0$ груз находится на расстоянии h от положения равновесия и имеет нулевую скорость.

Вывести уравнение движения груза. Приняв $m = 2$, $k = 2$, $f = 1$, $h = 5$, изобразить движение груза на фазовой плоскости.

1039. Изобразить на фазовой плоскости малые колебания маятника переменной длины, считая, что при движении маятника вверх его длина равна l, а при движении вниз равна $L > l$. Во сколько раз увеличится амплитуда за одно полное колебание? (Пример: раскачка качелей.)

Указание. При малых колебаниях считать $\sin x \approx x$. Изменение длины маятника происходит мгновенно (скачком), при этом угол отклонения маятника и его момент количества движения относительно оси не испытывают скачков.

Начертить на фазовой плоскости траектории систем **1040—1046**, записанных в полярных координатах, и исследовать, имеются ли предельные циклы.

1040. $\dfrac{dr}{dt} = r(1 - r^2), \qquad \dfrac{d\varphi}{dt} = 1.$

1041. $\dfrac{dr}{dt} = r(r - 1)(r - 2), \qquad \dfrac{d\varphi}{dt} = 1.$

1042. $\dfrac{dr}{dt} = r(1 - r)^2, \qquad \dfrac{d\varphi}{dt} = 1.$

1043. $\dfrac{dr}{dt} = \sin r, \qquad \dfrac{d\varphi}{dt} = 1.$

1044. $\dfrac{dr}{dt} = r(|r - 1| - |r - 2| - 2r + 3), \quad \dfrac{d\varphi}{dt} = 1.$

1045. $\dfrac{dr}{dt} = r \sin \dfrac{1}{r}, \qquad \dfrac{d\varphi}{dt} = 1.$

1046. $\dfrac{dr}{dt} = r(1 - r) \sin \dfrac{1}{1 - r}, \qquad \dfrac{d\varphi}{dt} = 1.$

1047*. При каких условиях система

$$\frac{dr}{dt} = f(r), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = 1,$$

где функция $f(r)$ непрерывна, имеет предельный цикл? При каких условиях этот цикл устойчив? Неустойчив? Полуустойчив?

1048*. При каких значениях постоянной a система

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = (r-1)(a+\sin^2\varphi)$$

имеет устойчивый предельный цикл? Неустойчивый?

Для уравнений **1049—1052** с помощью изоклин построить траектории на фазовой плоскости и исследовать особые точки. По чертежу сделать заключение о поведении решений при $t \to +\infty$ и о возможности существования замкнутых траекторий.

1049. $\ddot{x} + \dot{x}^3 - \dot{x} + x = 0.$

1050. $\ddot{x} + (x^2-1)\dot{x} + x = 0.$

1051. $\ddot{x} + \dot{x} - 2\operatorname{arctg}\dot{x} + x = 0.$

1052. $\ddot{x} + 2^{\dot{x}} - \dot{x} + x = 0.$

1053*. Для уравнения $\ddot{x} + 2a\dot{x} - b\operatorname{sgn}\dot{x} + x = 0$ $(0 < a < 1,\ b > 0)$ построить траектории на фазовой плоскости и найти точки, в которых предельный цикл пересекает ось Ox.

Указание. Найти зависимость между абсциссами двух последовательных пересечений траектории с осью Ox.

1054. Показать, что уравнение $\ddot{x} + F(\dot{x}) + x = 0$, где функция F непрерывна и $F(y) > 0$ при $y > 0$, $F(y) < 0$ при $y < 0$, не может иметь предельных циклов на фазовой плоскости.

Указание. Исследовать знак полной производной $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2+y^2)$.

1055*. Пусть $f(x, y)$ и f'_x, f'_y непрерывны, $f(0, 0) < 0$, а при $x^2+y^2 > b^2$ имеем $f(x, y) > 0$. Доказать, что уравнение $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + x = 0$ имеет периодическое решение $x(t) \not\equiv 0$.

Указание. Перейти на фазовую плоскость и исследовать знак полной производной $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2+y^2)$. Построить кольцо, из которого не может выйти ни одна траектория. Применить теорему 21 из [3].

§ 18. ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ОТ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ И ПАРАМЕТРОВ. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Рассмотрим систему в векторной записи

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,\, x), \tag{1}$$

где $x = (x_1,\, \ldots,\, x_n)$, $f = (f_1,\, \ldots,\, f_n)$. Пусть в рассматриваемой области вектор-функция f непрерывна по t, x и удовлетворяет условию Липшица[1] по x

$$\|f(t,\, y) - f(t,\, x)\| \leqslant k\|y - x\|. \tag{2}$$

Через $\|\ \|$ обозначается любая из обычно применяемых норм вектора:

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2},$$
$$\|x\| = |x_1| + \ldots + |x_n|$$

или

$$\|x\| = \max_{i=1,\, \ldots,\, x_n} |x_i|.$$

Пусть $x(t)$ — решение системы (1), а $y(t)$ — вектор-функция, удовлетворяющая неравенствам

$$\left\|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - f(t,\, y)\right\| \leqslant \eta, \quad \|y(0) - x(0)\| \leqslant \delta.$$

Тогда имеет место оценка

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant \delta\, \mathrm{e}^{k|t|} + \frac{\eta}{k}\left(\mathrm{e}^{k|t|} - 1\right). \tag{3}$$

Это неравенство можно применять для грубой оценки ошибки приближенного решения $y(t)$ системы (1), а также для оценки сверху разности решения $x(t)$ системы (1) и решения $y(t)$ системы $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(t,\, y)$, если $\|g(t,\, y) - f(t,\, y)\| \leqslant \eta$.

2. Если в системе уравнений

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_i(t,\, x_1,\, \ldots,\, x_n,\, \mu), \quad i = 1,\, \ldots,\, n \tag{4}$$

---

[1] Если в выпуклой по x области имеем $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \leqslant a$ $(i,\, j = 1,\, \ldots,\, n)$, то в этой области выполнено условие Липшица с $k = na$.

с начальными условиями

$$x_i(0) = a_i(\mu), \quad i = 1, \ldots, n \tag{5}$$

μ является параметром, функции f_i и a_i ($i = 1, \ldots, n$) непрерывны и имеют непрерывные производные по $x_1, \ldots, x_n, \mu$, то решение имеет непрерывную производную по параметру μ. Производные $\frac{\partial x_i}{\partial \mu} = u_i$, $i = 1, \ldots, n$ удовлетворяют линейной системе уравнений

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_j + \frac{\partial f_i}{\partial \mu}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

и начальным условиям $u_i(0) = a_i'(\mu)$, $i = 1, \ldots, n$. Значения производных $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ и $\frac{\partial f_i}{\partial \mu}$ в формуле (6) берутся при $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$, где $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — решение системы (4) с начальными условиями (5).

В частности, если положить $a_k(\mu) = \mu$, $a_i(\mu) = \mathrm{const}$ при $i \neq k$ и считать, что все функции $f_1, \ldots, f_n$ не зависят от μ, то из предыдущего утверждения будет следовать, что для системы (4) с начальными условиями $x_i(0) = a_i$, $i = 1, \ldots, n$ производные $\frac{\partial x_i}{\partial a_k} = u_i$ ($i = 1, \ldots, n$) от компонент решения $x_1, \ldots, x_n$ по начальному условию a_k существуют и удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_j, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и начальным условиям $u_i(0) = 0$ при $i \neq k$, $u_k(0) = 1$.

3. Если в (4) и (5) функции f_i и a_i имеют непрерывные производные по $x_1, \ldots, x_n, \mu$ (вблизи значения $\mu = 0$) до порядка m включительно, то решение тоже имеет непрерывные производные по μ до порядка m и, следовательно, разлагается по степеням параметра μ по формуле Тейлора:

$$x(t) = v_0(t) + \mu v_1(t) + \mu^2 v_2(t) + \ldots + \mu^m v_m(t) + o(\mu^m). \tag{7}$$

Здесь x и v_i — n-мерные вектор-функции. Чтобы найти функции $v_i(t)$, можно разложить правые части в (4) и (5) по степеням μ, подставить туда разложение (7) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях μ. Получим систему дифференциальных уравнений, из которой последовательно определяются $v_0(t), v_1(t), \ldots$

В случае, когда f_i и a_i — аналитические функции от $x_1, \ldots, x_n, \mu$, решение $x(t)$ разлагается в сходящийся при малых μ степенной ряд по μ (в силу теоремы об аналитической зависимости решения от параметра, см. [4], гл. 1, § 6). Коэффициенты этого ряда совпадают с коэффициентами разложения (7).

Изложенный метод можно использовать для отыскания решения дифференциального уравнения при малых μ в тех случаях, когда при $\mu = 0$ уравнение решается известными методами.

Пример. Разложить по степеням параметра μ решение задачи

$$\dot{x} = x^2 + 2\mu t^{-1}, \quad x(1) = -1. \tag{8}$$

Ищем решение в виде $x(t) = v_0(t) + \mu v_1(t) + \mu^2 v_2(t) + \ldots$

Подставляя это в (8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получаем систему

$$\begin{aligned}
&\dot{v}_0 = v_0^2, && v_0(1) = -1,\\
&\dot{v}_1 = 2v_0v_1 + 2t^{-1}, && v_1(1) = 0,\\
&\dot{v}_2 = 2v_0v_2 + v_1^2, && v_2(1) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Из первого уравнения и начального условия находим $v_0(t) = -t^{-1}$. Подставляя это во второе уравнение, получаем

$$\dot{v}_1 = -2t^{-1}v_1 + 2t^{-1}, \quad v_1(1) = 0.$$

Отсюда

$$v_1(t) = 1 - t^{-2}.$$

Подставляя найденные v_0 и v_1 в третье уравнение, получаем

$$\dot{v}_2 = -2t^{-1}v_2 + (1 - t^{-2})^2, \quad v_2(1) = 0.$$

Решив это линейное уравнение и воспользовавшись начальным условием, найдем $v_2(t) = \frac{t}{3} - \frac{2}{t} + \frac{8}{3t^2} - \frac{1}{t^3}$. Следовательно, решение задачи (8) имеет вид

$$x(t) = -\frac{1}{t} + \mu\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) + \mu^2\left(\frac{t}{3} - \frac{2}{t} + \frac{8}{3t^2} - \frac{1}{t^3}\right) + o(\mu^2).$$

Это разложение можно продолжить дальше тем же способом.

Аналогичным методом можно получать разложения по степеням параметра периодических решений нелинейных уравнений, в частности, уравнений вида

$$\ddot{x} + a^2x = \mu f(t, x, \dot{x}, \mu), \tag{9}$$

где функция f периодическая по t. Переходить от уравнения 2-го порядка к системе при этом не нужно. Произвольные постоянные, возникающие при отыскании $v_0(t)$, $v_1(t)$, ..., определяются уже не из начальных условий, а из условий периодичности (см. [4], гл. 2, § 8).

В случае, когда правая часть (9) не зависит от t, период решения $x(t)$ заранее не известен. Тогда в уравнении (9) надо перейти от t к новому независимому переменному $\tau = t(1 + b_1\mu + b_2\mu^2 + \ldots)$ и искать решения $x(\tau)$ периода $2\pi/a$. Коэффициент b_1 обычно определяется из условия существования периодического решения для $v_1(\tau)$, и т. д. (см. [4], гл. 2, § 8).

4. Если функция $f(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) аналитическая, т. е. разлагается в ряд по степеням $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$, то решение уравнения $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ тоже является аналитической функцией, т. е. разлагается в степенной ряд в окрестности точки x_0 (см. [2], § 18 и [1], гл. II, § 1, п. 6). Аналогичное утверждение справедливо для уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Пример. Найти в виде ряда решение уравнения $y'' = xy^2 - y'$ с начальными условиями $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Ищем решение в виде ряда

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots = 2 + x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots, \qquad (10)$$

так как из начальных условий следует, что $a_0 = 2$, $a_1 = 1$. Подставляя ряд в дифференциальное уравнение, получаем

$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \ldots = x(2 + x + a_2x^2 + \ldots)^2 - 1 - 2a_2x - 3a_3x^2 - \ldots$$

Представляя правую часть в виде степенного ряда и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях уравнения, получаем $2a_2 = -1$, $6a_3 = 4 - 2a_2$, $12a_4 = 4 - 3a_3$, ... Отсюда находим

$$a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{5}{6}, \quad a_4 = \frac{1}{8}, \ \ldots$$

Следовательно,

$$y = 2 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \ldots$$

5. Для уравнения

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0, \qquad (11)$$

у которого все $p_i(x)$ аналитические в окрестности точки $x = 0$ и $p_0(x_0) = 0$, т. е. коэффициент при старшей производной обращается в нуль в точке x_0, решений в виде степенного ряда может не существовать. В этом случае могут существовать решения в виде обобщенных степенных рядов

$$a_0(x-x_0)^r + a_1(x-x_0)^{r+1} + a_2(x-x_0)^{r+2} + \ldots \qquad (12)$$

где число r не обязательно целое (см. [1], гл. VI, § 2, п. 2, или [4], гл. 2, § 7). Чтобы их найти, надо подставить ряд (12) в уравнение (11) и, приравняв коэффициенты при наименьшей степени $(x-x_0)$, найти возможные значения показателя r, а затем для каждого из этих значений r определить коэффициенты a_i.

1056. Оценить, на сколько может измениться при $0 \leqslant x \leqslant 1$ решение уравнения $y' = x + \sin y$ с начальным условием $y(0) = y_0 = 0$, если число y_0 изменить меньше, чем на 0,01.

1057. Оценить, на сколько может измениться при $0 \leqslant t \leqslant T$ решение уравнения маятника $\ddot{x} + \sin x = 0$ с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, если в правую часть уравнения добавить такую функцию $\varphi(t)$, что $|\varphi(t)| \leqslant 0{,}1$ (т. е. если приложить некоторую внешнюю силу).

1058. Чтобы приближенно найти решение уравнения $\ddot{x} + \sin x = 0$, его заменили уравнением $\ddot{x} + x = 0$. Оценить при $0 \leqslant t \leqslant 2$ возникающую от этого ошибку в решении с начальными условиями $x(0) = 0{,}25$, $\dot{x}(0) = 0$, если известно, что $|x - \sin x| < 0{,}003$ при $|x| \leqslant 0{,}25$.

В задачах **1059—1063** оценить ошибку приближенного решения на указанном отрезке.

1059. $y' = \frac{x}{4} - \frac{1}{1+y^2}$, $y(0) = 1$; $\tilde{y} = 1 - \frac{x}{2}$, $|x| \leqslant \frac{1}{2}$.

1060. $\dot{x} = x - y$, $\dot{y} = tx$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$; $\tilde{x} = 1 + t + \frac{t^2}{2}$, $\tilde{y} = \frac{t^2}{2}$, $|t| \leqslant 0{,}1$.

1061. $y'' - x^2 y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$; $\tilde{y} = \mathrm{e}^{x^4/12}$, $|x| \leqslant 0{,}5$.

1062. $y' = \frac{1}{y} + x$, $y(0) = 1$; $\tilde{y} = 1 + x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$.

1063. $y' = 2xy^2 + 1$, $y(0) = 1$; $\tilde{y} = \frac{1}{1-x}$, $|x| \leqslant \frac{1}{4}$.

Указание. Сначала выделить ограниченную область, в которой содержится приближенное решение $\tilde{y}$ и, предположительно, точное решение y. Для этой области оценить постоянную в условии

Липшица, затем оценить $|y-\tilde{y}|$. С помощью этой оценки проверить, содержится ли y в выделенной области.

В задачах **1064—1073** найти производные по параметру или по начальным условиям от решений данных уравнений и систем.

1064. $y' = y + \mu(x + y^2)$, $y(0) = 1$; найти $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

1065. $y' = 2x + \mu y^2$, $y(0) = \mu - 1$; найти $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

1066. $y' = y + y^2 + xy^3$, $y(2) = y_0$; найти $\left.\frac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0}$.

1067. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{x}{t} + \mu t\,\mathrm{e}^{-x}$, $x(1) = 1$; найти $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

1068. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + \mu t x^3$, $x(0) = 1 + \mu$; найти $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

1069. $\begin{cases} \dot{x} = 4ty^2, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = 1 + 5\mu x, & y(0) = 0; \end{cases}$ найти $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

1070. $\begin{cases} \dot{x} = xy + t^2, & x(1) = x_0, \\ 2\dot{y} = -y^2, & y(1) = y_0; \end{cases}$ найти $\left.\frac{\partial x}{\partial y_0}\right|_{\substack{x_0=3 \\ y_0=2}}$.

1071. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, & x(0) = 1 + \mu, \\ \dot{y} = 2x + \mu y^2, & y(0) = -2; \end{cases}$ найти $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

1072. $\ddot{x} - \dot{x} = (x+1)^2 - \mu x^2$; $x(0) = \frac{1}{2}$, $\dot{x}(0) = -1$; найти $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=1}$.

1073. $\ddot{x} = \frac{2}{t} - \frac{2}{x}$, $x(1) = 1$, $\dot{x}(1) = b$; найти $\left.\frac{\partial x}{\partial b}\right|_{b=1}$.

Указание. При $b = 1$ решением служит функция $x = t$.

В задачах **1074—1078** найти 2–3 члена разложения решения по степеням малого параметра μ.

1074. $y' = 4\mu x - y^2$, $y(1) = 1$.

1075. $y' = \frac{2}{y} - 5\mu x$, $y(1) = 2$.

1076. $xy' = \mu x^2 + \ln y$, $y(1) = 1$.

1077. $y' = \frac{6\mu}{x} - y^2$, $y(1) = 1 + 3\mu$.

1078. $y' = \mathrm{e}^{y-x} + \mu y$, $y(0) = -\mu$.

Для уравнений **1079—1085** с помощью метода малого параметра (см. [4], гл. 2, § 8) найти приближенно периодические решения с периодом, равным периоду правой части уравнения; μ — малый параметр.

1079. $\ddot{x} + 3x = 2\sin t + \mu\dot{x}^2$.

1080. $\ddot{x} + 5x = \cos 2t + \mu x^2$.

1081. $\ddot{x} + 3x + x^3 = 2\mu\cos t$.

1082. $\ddot{x} + x^2 = 1 + \mu\sin t$.

1083. $\ddot{x} + \sin x = \mu\sin 2t$.

1084*. $\ddot{x} + x = \sin 3t - \sin 2t + \mu x^2$; найти лишь нулевое приближение.

1085*. $\ddot{x} + x = 6\mu\sin t - x^3$.

В задачах **1086—1090** с помощью метода малого параметра (см. [4], гл. 2, § 8, п. 4) приближенно найти периодические решения данных уравнений.

1086. $\ddot{x} + x - x^2 = 0$. **1087.** $\ddot{x} + x + x^3 = 0$.

1088. $\ddot{x} + \sin x = 0$. **1089.** $\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}$.

1090. $\ddot{x} + x = \mu(\dot{x} - \dot{x}^3)$.

В каждой из задач **1091—1097** найти в виде степенного ряда решение, удовлетворяющее данным начальным условиям. Вычислить несколько первых коэффициентов ряда (до коэффициента при x^4 включительно).

1091. $y' = y^2 - x$; $y(0) = 1$.

1092. $y' = x + \frac{1}{y}$; $y(0) = 1$.

1093. $y' = y + x\,\mathrm{e}^y$; $y(0) = 0$.

1094. $y' = 2x + \cos y$; $y(0) = 0$.

1095. $y' = x^2 + y^3$; $y(1) = 1$.

1096. $y'' = xy' - y^2;\qquad y(0) = 1,\quad y'(0) = 2.$

1097. $y'' = y'^2 + xy;\qquad y(0) = 4,\quad y'(0) = -2.$

1098*. Построив мажорирующее уравнение (см. [2], § 18), оценить снизу радиус сходимости степенного ряда, представляющего решение уравнения $y' = y^2 - x$ с начальным условием $y(0) = 1$.

1099*. Оценить, с какой точностью можно получить при $|x| \leqslant 0{,}2$ решение уравнения $y' = e^y - x^2 y$ с начальным условием $y(0) = 0$, если в степенном ряде, представляющем решение, взять только четыре члена (до $a_4 x^4$ включительно).

В задачах **1100—1109** найти линейно независимые решения каждого из данных уравнений в виде степенных рядов. В тех случаях, когда это легко сделать, сумму полученного ряда выразить с помощью элементарных функций.

1100. $y'' - x^2 y = 0.$

1101. $y'' - xy' - 2y = 0.$

1102. $(1 - x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0.$

1103. $(x^2 + 1)y'' + 5xy' + 3y = 0.$

1104. $(1 - x)y'' - 2y' + y = 0.$

1105. $(x^2 - x + 1)y'' + (4x - 2)y' + 2y = 0.$

1106. $y'' - xy' + xy = 0.$

1107. $y'' + y \sin x = 0.$

1108. $xy'' + y \ln(1 - x) = 0.$

1109. $y''' - xy'' + (x - 2)y' + y = 0.$

В задачах **1110—1116** найти те решения данных уравнений, которые выражаются степенными (или обобщенными степенными) рядами.

1110. $xy'' + 2y' + xy = 0.$

1111. $2x^2 y'' + (3x - 2x^2)y' - (x + 1)y = 0.$

1112. $9x^2y'' - (x^2 - 2)y = 0.$

1113. $x^2y'' - x^2y' + (x - 2)y = 0.$

1114. $x^2y'' + 2xy' - (x^2 + 2x + 2)y = 0.$

1115. $xy'' - xy' - y = 0.$

1116. $xy'' + y' - xy = 0.$

1117*. Найти с точностью до $O(x^5)$ при $x \to 0$ решение уравнения $xy''+y'-xy = 0$, линейно независимое с решением, указанным в ответе задачи **1116**.

В задачах **1118—1120** указать, имеют ли данные уравнения решение в виде степенного ряда (или обобщенного степенного ряда).

1118. $x^2y'' + xy' - (x + 2)y = 0.$

1119. $x^2y'' + xy' + (1 - x)y = 0.$

1120. $x^2y'' + (3x - 1)y' + y = 0.$

В задачах **1121—1125** найти в виде тригонометрических рядов (см. [1], гл. VI, § 1, п. 3 или [4], гл. 2, § 7) периодические решения данных уравнений.

1121. $y'' - 3y = f(x), \quad f(x) = |x|$ при $|x| \leqslant \pi$, $f(x + 2\pi) \equiv f(x)$.

1122. $y'' + y' + y = |\sin x|.$

1123. $y''' - y' - y = \dfrac{2\sin x}{5 - 4\cos x}.$

У к а з а н и е. Разложение в ряд Фурье правой части уравнения **1123** имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\sin nx$.

1124. $y'' - \pi^2y = f(x)$, $f(x) = x(1 - x)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $f(x + 1) \equiv f(x)$.

1125. $y'' + 9y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2kx}{k^2}.$

В задачах **1126—1129** с помощью метода ломаных Эйлера (с итерациями или без них, см. [4], гл. 1, § 6, § 7) найти приближенно на указанном отрезке решения данных уравнений с указанными начальными условиями. Вычисления вести с двумя или тремя десятичными знаками после запятой с шагом $h = 0{,}2$ или $h = 0{,}1$.

1126. $y' = y^2 + x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad y(0) = 0{,}3.$

1127. $y' = \frac{1}{y} + x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad y(0) = 1.$

1128. $y' = \frac{x}{y} - y, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad y(0) = 1.$

1129. $y' = \frac{x^2}{x+y}, \qquad 1 \leqslant x \leqslant 2; \quad y(1) = 0.$

В задачах **1130—1135** с помощью метода Адамса или Штермера (см. [4], гл. 1, § 7) вычислить приближенно решения написанных ниже уравнений на указанном отрезке. Вычисления вести с тремя знаками после запятой. Значения решения в начальных точках вычислить с помощью степенного ряда.

1130. $y' = y, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad y(0) = 1.$

1131. $y' = y^2 - x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad y(0) = 0{,}5.$

1132. $y' = \frac{1}{y} - x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad y(0) = 1.$

1133. $y' = x^2 - y^2, \qquad 1 \leqslant x \leqslant 2; \quad y(1) = 1.$

1134. $y'' = xy, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$

1135. $xy'' + y' + xy = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

Задачи **1136—1140** можно решить, сравнивая наклон поля направлений (определяемого уравнением $y' = f(x, y)$) в точках некоторых кривых $y = \varphi_i(x)$ с наклоном этих кривых.

1136*. Оценить сверху и снизу решение уравнения $y' = 2 + \sin x - y^2$, $0 \leqslant x < +\infty$, $y(0) = 1$. (На плоскости x, y построить полосу $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$, из которой не может выйти это решение.)

1137*. Оценить сверху и снизу решение уравнения $y' = \frac{1}{y} + 2x$, $0 \leqslant x < +\infty$, $y(0) = 1$.

1138*. Доказать, что решение уравнения $y' = x - y^2$ с начальным условием $y(4) = 2$ удовлетворяет неравенствам $\sqrt{x} - 0{,}07 < y(x) < \sqrt{x}$ при $4 < x < \infty$.

1139*. Доказать, что для решения $y(x)$ уравнения $y' = x - y^2$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$, где $x_0 \geqslant 0$, $y_0 \geqslant 0$, имеем

$$y(x) - \sqrt{x} \to 0 \text{ при } x \to +\infty.$$

1140*. Оценить сверху и снизу то периодическое решение уравнения $y' = 2y^2 - \cos^2 5x$, которое лежит в области $y < 0$.

§ 19. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

1. Систему дифференциальных уравнений можно свести путем исключения неизвестных к одному уравнению (иногда к нескольким уравнениям с одной неизвестной функцией в каждом). Подробнее см. [1], гл. VII, § 1, п. 2, или [4], гл. 3, § 2.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$y' = \frac{z}{x}, \quad z' = \frac{(y-z)^2 + xz}{x^2}. \tag{1}$$

Решение. Исключаем z из данных уравнений. Из первого уравнения имеем $z = xy'$. Подставляя во второе уравнение, получаем после упрощений

$$x^3 y'' = (y - xy')^2.$$

Данная система уравнений (1) приведена к одному уравнению второго порядка. Это уравнение может быть решено методами, изложенными в § 10 (путем понижения порядка). После того как из этого уравнения будет найдено y, следует найти z, пользуясь равенством $z = xy'$.

2. При решении системы уравнений путем исключения неизвестных обычно получается уравнение более высокого порядка, поэтому во многих случаях удобнее решать систему путем отыскания интегрируемых комбинаций (см. [1], гл. VII, § 5, п. 2).

Пример 2. Решить систему[1]

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}. \tag{2}$$

---

[1]Система (2) записана в симметрической форме. О симметрической форме системы дифференциальных уравнений см. [1], гл. VII, § 5, п. 1, или [4], гл. 3, § 3.

Первые две дроби образуют интегрируемую комбинацию. Сокращая равенство $\dfrac{\mathrm{d}x}{xz} = \dfrac{\mathrm{d}y}{yz}$ на $\dfrac{1}{z}$ и интегрируя, получаем первый интеграл[1]

$$\frac{x}{y} = C_1. \tag{3}$$

Чтобы найти вторую интегрируемую комбинацию, воспользуемся следующим свойством равных дробей: если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = t$, то при любых $k_1, k_2, \ldots, k_n$ имеем

$$\frac{k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_na_n}{k_1b_1 + k_2b_2 + \ldots + k_nb_n} = t.$$

Пользуясь этим свойством, получаем из (2)

$$\frac{y\cdot \mathrm{d}x + x\cdot \mathrm{d}y}{y\cdot xz + x\cdot yz} = \frac{\mathrm{d}z}{-xy}; \quad \frac{\mathrm{d}(xy)}{2xyz} = \frac{\mathrm{d}z}{-xy}; \quad \mathrm{d}(xy) = -2z\,\mathrm{d}z.$$

Следовательно,

$$xy + z^2 = C_2. \tag{4}$$

Очевидно, первый интеграл (3) и первый интеграл (4) независимы. Система решена.

Вместо того чтобы искать вторую интегрируемую комбинацию, можно, воспользовавшись знанием первого интеграла (3), исключить из системы (2) одно из неизвестных, например, x. Из (3) имеем $x = C_1y$. Подставляя во второе из уравнений (2), получаем $\dfrac{\mathrm{d}y}{yz} = \dfrac{\mathrm{d}z}{-C_1y^2}$. Отсюда $-C_1y\,\mathrm{d}y = z\,\mathrm{d}z$; $z^2 = -C_1y^2 + C_2$. Подставляя сюда выражение для C_1 из формулы (3), находим еще один первый интеграл: $z^2 + xy = C_2$.

В задачах **1141—1160** решить данные системы уравнений.

1141. $y' = \frac{x}{z}, \quad z' = -\frac{x}{y}.$

1142. $y' = \frac{y^2}{z-x}, \quad z' = y + 1.$

1143. $y' = \frac{z}{x}, \quad z' = \frac{z(y+2z-1)}{x(y-1)}.$

1144. $y' = y^2z, \quad z' = \frac{z}{x} - yz^2.$

1145. $2zy' = y^2 - z^2 + 1, \quad z' = z + y.$

---

[1] О первых интегралах см. [1], гл. VII, § 4 или [3], § 23.

1146. $\frac{dx}{2y-z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$.

1147. $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}$.

1148. $\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y}$.

1149. $\frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{x+y+z} = \frac{dz}{x-y}$.

1150. $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{u} = \frac{dz}{x} = \frac{du}{y}$.

1151. $\frac{dx}{y-u} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{u-y} = \frac{du}{x-z}$.

1152. $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}$.

1153. $\frac{dx}{z^2-y^2} = \frac{dy}{z} = -\frac{dz}{y}$.

1154. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy+z}$.

1155. $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}}$.

1156. $\frac{dx}{x+y^2+z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$.

1157. $\frac{dx}{x(y+z)} = \frac{dy}{z(z-y)} = \frac{dz}{y(y-z)}$.

1158. $-\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy-2z^2} = \frac{dz}{xz}$.

1159. $\frac{dx}{x(z-y)} = \frac{dy}{y(y-x)} = \frac{dz}{y^2-xz}$.

1160. $\frac{dx}{x(y^2-z^2)} = -\frac{dy}{y(z^2+x^2)} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)}$.

В задачах **1161—1163** для данных систем дифференциальных уравнений и данных функций φ проверить, являются ли соотношения $\varphi = C$ первыми интегралами этих систем.

1161. $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2-t}{y}$, $\frac{dy}{dt} = -x$; $\varphi_1 = t^2 + 2xy$; $\varphi_2 = x^2 - ty$.

1162. $\dot{x} = xy$, $\dot{y} = x^2 + y^2$; $\varphi_1 = x \ln y - x^2 y$; $\varphi_2 = \frac{y^2}{x^2} - 2 \ln x$.

1163. $\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = \frac{dz}{u} = -\frac{du}{z}$; $\varphi = yz - ux$.

1164. Проверить, являются ли независимыми первые интегралы $\frac{x+y}{z+x} = C_1$, $\frac{z-y}{x+y} = C_2$ системы

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

1165*. Доказать, что в области, содержащей особую точку типа узла или фокуса, для системы

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = P(x, y), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Q(x, y)$$

не может существовать первого интеграла вида $\varphi(x, y) = C$ с непрерывной функцией φ, $\varphi \not\equiv \mathrm{const}$ в сколь угодно малой окрестности особой точки.

1166. Пусть $\varphi_1(t, x, y) = C_1$, $\varphi_2(t, x, y) = C_2$ — первые интегралы системы $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f_1(t, x, y)$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = = f_2(t, x, y)$; функции f_1, f_2 и их первые производные по x, y непрерывны. Пусть в пространстве t, x, y поверхности $\varphi_1(t, x, y) = 1$, $\varphi_2(t, x, y) = 2$ имеют только одну общую линию (т. е. пересекаются или касаются друг друга по этой линии). Доказать, что эта линия является интегральной кривой данной системы.

§ 20. УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Чтобы решить уравнение в частных производных

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = b, \tag{1}$$

где $a_1, \ldots, a_n, b$ зависят от $x_1, \ldots, x_n, z$, надо написать систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{a_1} = \ldots = \frac{\mathrm{d}x_n}{a_n} = \frac{\mathrm{d}z}{b} \tag{2}$$

и найти n независимых первых интегралов этой системы

$$\left.\begin{array}{c} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n, z) = C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x_1, \ldots, x_n, z) = C_n. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Общее решение уравнения (1) в неявном виде записывается так:

$$F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 0, \tag{4}$$

где F — произвольная дифференцируемая функция.

В частности, если z входит только в один из первых интегралов (3), например в последний, то общее решение можно написать и так:

$$\varphi_n(x_1, \ldots, x_n, z) = f(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}), \tag{5}$$

где f — произвольная дифференцируемая функция. Разрешив равенство (5) относительно z, получим общее решение уравнения (1) в явном виде.

2. Чтобы найти поверхность $z = z(x, y)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$a_1(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + a_2(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = b(x, y, z) \tag{6}$$

и проходящую через данную линию

$$x = u(t), \quad y = v(t), \quad z = w(t), \tag{7}$$

надо найти два независимых первых интеграла системы

$$\frac{\mathrm{d}x}{a_1} = \frac{\mathrm{d}y}{a_2} = \frac{\mathrm{d}z}{b}. \tag{8}$$

В эти первые интегралы

$$\varphi_1(x, y, z) = C_1, \quad \varphi_2(x, y, z) = C_2 \tag{9}$$

надо подставить вместо x, y, z их выражения (7) через параметр t. Получатся два уравнения вида

$$\Phi_1(t) = C_1, \quad \Phi_2(t) = C_2. \tag{10}$$

Исключив из них t, получим соотношение $F(C_1, C_2) = 0$. Подставив сюда вместо C_1 и C_2 левые части первых интегралов (9), получим искомое решение.

В том случае, когда в оба уравнения (10) не входит t, тогда линия (7) является интегральной кривой системы (8), т. е. характеристикой уравнения (6), и задача Коши имеет бесконечно много решений (см. [1], гл. VIII, § 3, п. 4).

Пример. Найти общее решение уравнения

$$xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = -xy, \tag{11}$$

а также интегральную поверхность, проходящую через кривую

$$y = x^2, \quad z = x^3. \tag{12}$$

Решение. Составляем систему уравнений

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz} = \frac{\mathrm{d}y}{yz} = \frac{\mathrm{d}z}{-xy}$$

и находим ее первые интегралы (см. § 19, пример 2)

$$\frac{x}{y} = C_1, \quad z^2 + xy = C_2. \tag{13}$$

Следовательно, общее решение уравнения (11) можно написать в неявном виде

$$F\left(\frac{x}{y}, z^2 + xy\right) = 0,$$

где F — произвольная функция. Так как z входит только в один из первых интегралов (13), то общее решение можно написать и в явном виде. Мы получим

$$z^2 + xy = f\left(\frac{x}{y}\right); \quad z = \pm\sqrt{f\left(\frac{x}{y}\right) - xy},$$

где f — произвольная функция.

Чтобы найти интегральную поверхность, проходящую через линию (12), запишем эту линию в параметрическом виде, например, взяв x в качестве параметра:

$$x = x, \quad y = x^2, \quad z = x^3.$$

Подставив эти выражения в (13), получим

$$\frac{1}{x} = C_1, \quad x^6 + x^3 = C_2.$$

Исключив x, получим

$$\frac{1}{C_1^6} + \frac{1}{C_1^3} = C_2.$$

Подставив вместо C_1 и C_2 левые части первых интегралов (13), найдем искомое решение

$$\left(\frac{y}{x}\right)^6 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = z^2 + xy.$$

3. О решении системы двух уравнений в частных производных первого порядка и о решении уравнения Пфаффа см. [1], гл. IX, § 1 и § 2, пп. 1, 2, 3.

Для каждого из уравнений **1167—1188** найти общее решение.

1167. $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

1168. $(x+2y)\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

1169. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$

1170. $(x-z)\frac{\partial u}{\partial x} + (y-z)\frac{\partial u}{\partial y} + 2z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$

1171. $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x - y.$

1172. $e^x\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = y\,e^x.$

1173. $2x\frac{\partial z}{\partial x} + (y-x)\frac{\partial z}{\partial y} - x^2 = 0.$

1174. $xy\frac{\partial z}{\partial x} - x^2\frac{\partial z}{\partial y} = yz.$

1175. $x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2y + z.$

1176. $(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0.$

1177. $2y^4\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} = x\sqrt{z^2+1}.$

1178. $x^2z\frac{\partial z}{\partial x} + y^2z\frac{\partial z}{\partial y} = x + y.$

1179. $yz\frac{\partial z}{\partial x} - xz\frac{\partial z}{\partial y} = e^z.$

1180. $(z-y)^2\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = xy.$

1181. $xy\frac{\partial z}{\partial x} + (x-2z)\frac{\partial z}{\partial y} = yz.$

1182. $y\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x}.$

1183. $\sin^2 x\frac{\partial z}{\partial x} + \operatorname{tg} z\frac{\partial z}{\partial y} = \cos^2 z.$

1184. $(x+z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = x + y.$

1185. $(xz+y)\frac{\partial z}{\partial x} + (x+yz)\frac{\partial z}{\partial y} = 1 - z^2.$

1186. $(y+z)\frac{\partial u}{\partial x} + (z+x)\frac{\partial u}{\partial y} + (x+y)\frac{\partial u}{\partial z} = u.$

1187. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + (z+u)\frac{\partial u}{\partial z} = xy.$

1188. $(u-x)\frac{\partial u}{\partial x} + (u-y)\frac{\partial u}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial z} = x+y.$

Найти решения уравнений **1189—1193**, удовлетворяющие указанным условиям.

1189. $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0;$ $\quad z = 2x$ при $y = 1.$

1190. $\frac{\partial z}{\partial x} + (2\,\mathrm{e}^x - y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0;$ $\quad z = y$ при $x = 0.$

1191. $2\sqrt{x}\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0;$ $\quad z = y^2$ при $x = 1.$

1192. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial z} = 0;$ $\quad u = yz$ при $x = 1.$

1193. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + xy\frac{\partial u}{\partial z} = 0;$ $\quad u = x^2 + y^2$ при $z = 0.$

В задачах **1194—1210** найти поверхность, удовлетворяющую данному уравнению и проходящую через данную линию.

1194. $y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = x;$ $\ x = 0,\ z = y^2.$

1195. $x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2;$ $\ y = 1,\ z = x^2.$

1196. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy;$ $\ x = 2,\ z = y^2 + 1.$

1197. $\operatorname{tg} x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z;$ $\ y = x,\ z = x^3.$

1198. $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z^2(x - 3y);$ $\ x = 1,\ yz + 1 = 0.$

1199. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2;$ $\ y = -2,\ z = x - x^2.$

1200. $yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = xy;$ $\ x = a,\ y^2 + z^2 = a^2.$

1201. $z\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz;$ $\ x + y = 2,\ yz = 1.$

1202. $z\frac{\partial z}{\partial x} + (z^2 - x^2)\frac{\partial z}{\partial y} + x = 0;$ $\ y = x^2,\ z = 2x.$

1203. $(y - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial z}{\partial y} = x - y;$ $\ z = y = -x.$

1204. $x\frac{\partial z}{\partial x} + (xz + y)\frac{\partial z}{\partial y} = z;$ $\ x + y = 2z,\ xz = 1.$

1205. $y^2\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0;$ $\ x - y = 0,\ x - yz = 1.$

1206. $x\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = y;$ $\ y = 2z,\ x + 2y = z.$

1207. $(y+2z^2)\frac{\partial z}{\partial x} - 2x^2z\frac{\partial z}{\partial y} = x^2;\ \ x=z,\ \ y=x^2.$

1208. $(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-z)\frac{\partial z}{\partial y} = 2z;\ \ x-y=2,\ z+2x=1.$

1209. $xy^3\frac{\partial z}{\partial x} + x^2z^2\frac{\partial z}{\partial y} = y^3z;\ \ x=-z^3,\ \ y=z^2.$

1210*. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy;\ \ y=x,\ \ z=x^2.$

1211. Найти общее уравнение поверхностей, пересекающих под прямым углом поверхности семейства

$$z^2 = Cxy.$$

1212. Найти поверхность, проходящую через прямую

$$y=x,\quad z=1$$

и ортогональную к поверхностям

$$x^2+y^2+z^2 = Cx.$$

1213. Написать уравнение в частных производных, которому удовлетворяют цилиндрические поверхности с образующими, параллельными вектору $(a,\ b,\ c)$. Найти общее решение этого уравнения.

1214. Пользуясь результатом предыдущей задачи, найти уравнение цилиндрической поверхности с образующими, параллельными вектору $(1,-1,1)$, и направляющей

$$x+y+z=0,\quad x^2+xy+y^2=1.$$

1215. Написать уравнение в частных производных, которому удовлетворяют все конические поверхности с вершиной в данной точке $(a,\ b,\ c)$, и решить его.

1216. Найти поверхности, у которых любая касательная плоскость пересекает ось Ox в точке с абсциссой, вдвое меньшей абсциссы точки касания.

В задачах **1217—1219** решить данные системы уравнений

1217. $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{z}{x}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2z}{y}. \end{cases}$ **1218.** $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = y - z, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = xz. \end{cases}$

1219. $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2yz - z^2, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = xz. \end{cases}$

В задачах **1220—1223** найти поверхности, удовлетворяющие данным уравнениям Пфаффа.

1220. $(x - y)\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y - x\,\mathrm{d}z = 0.$

1221. $3yz\,\mathrm{d}x + 2xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z = 0.$

1222. $(z + xy)\,\mathrm{d}x - (z + y^2)\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z = 0.$

1223. $(2yz + 3x)\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z = 0.$

ДОБАВЛЕНИЕ

Задачи, предлагавшиеся на письменных экзаменах

В §§ 21—27 содержатся задачи, предлагавшиеся на письменных экзаменах и коллоквиумах на 2-м курсе механико-математического факультета МГУ в 1992—1996 годах, а также небольшое число задач, дававшихся для подготовки к экзаменам. Исключены самые трудные задачи. Сокращено число задач на решение уравнений стандартными методами (подобные задачи содержатся в предыдущих параграфах этого сборника).

Ниже приводятся для примера три экзаменационные письменные работы (указаны номера задач из §§ 21—27).

Работа 15.05.94 г. состояла из задач
17, **63**, **81**, **98**, **170**, **198**.

Работа 4.06.94 г. состояла из задач
28, **51**, **69**, **122**, **127**, **148**, **190**.

Работа 18.05.95 г. состояла из задач
22, **56**, **70**, **129**, **135**, **194**, **216**.

На выполнение работы студентам давалось 3 часа. Для получения оценки «отлично» требовалось решить 5–6 задач.

§ 21. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

1. Теоретические вопросы

Вопросы **1—5** рассчитаны на лиц, изучавших доказательство существования решения дифференциального уравнения, основанное на переходе к интегральному уравнению и построении последовательных приближений [1], [2].

1. Обосновать связь условия Липшица и дифференцируемости.

2. Изложить общий план доказательства теоремы существования и единственности.

3. Сформулировать и доказать утверждение о переходе от дифференциального уравнения к интегральному.

4. Доказать, что последовательные приближения сходятся к непрерывной функции.

5. Доказать, что предел последовательных приближений есть решение интегрального уравнения.

6. Сформулировать и доказать утверждение о единственности решения.

7. Сформулировать теорему о существовании и единственности решения дифференциального уравнения порядка n.

8. Сформулировать и доказать лемму об интегральном неравенстве.

2. Существование решения и последовательные приближения

9. Перейти от уравнения $\mathrm{e}^x\, y''' + xy = 2yy'$ к системе нормального вида и при начальных условиях $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$ построить два последовательные приближения к решению.

10. Построить три последовательные приближения y_0, y_1, y_2 к решению задачи

$$y' = 2t + y^2, \quad y(0) = 1.$$

11. а) Задачу $y' = y^2 + x, \quad y(1) = 0$ свести к интегральному уравнению и построить последовательные приближения y_0, y_1, y_2.

б) Указать какой-либо отрезок, на котором сходятся последовательные приближения, и доказать их равномерную сходимость.

12. Существует ли решение задачи

$$y' = f(y),\ y(0) = 0, \quad \text{где} \quad f(y) = \begin{cases} 1 \text{ при } y < 0 \\ -1 \text{ при } y \geqslant 0? \end{cases}$$

Обосновать ответ.

13. а) Свести задачу

$$y''' = \frac{y\,\mathrm{e}^x \sin x - xy''}{(y' - x)^a},\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ y''(1) = 2$$

к задаче для системы нормального вида.

б) При каких a существование и единственность решения гарантируется теоремой?

14. а) Указать все значения параметров α, a, A, при которых теорема существования и единственности гарантирует однозначную разрешимость задачи

$$(\alpha t + \alpha)y''' + 2\alpha y'' - (\alpha - 1)t^2 y \operatorname{tg} t = \ln \frac{3 + t}{3 - t},$$

$$y(a) = 1,\ y'(a) = A,\ y''(a) = \alpha.$$

б) На какой максимальный интервал можно продолжить решение этой задачи в случае $\alpha = -1$, $a = -2$, $A = -3$?

15. Задачу $xy' = \frac{y}{4x} - \frac{4}{xy}$, $y(-2) = 4$ свести к интегральному уравнению, построить последовательные приближения и найти их предел.

16. При каких начальных условиях существование единственного решения уравнения $y''' \sin x + x \ln y + \operatorname{tg} x = 1$ гарантируется теоремой?

3. Применение теоремы единственности

17. Для уравнения $y'' = \frac{(y')^2}{y} - 1$ известны два решения: $y_1 = 1 + \sin x$, $y_2 = \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 1\right)^2$, проходящие через точку $(0, 1)$. Как это согласуется с теоремой единственности?

В задачах **18—22** требуется выяснить, при каких n наличие указанных решений у написанных уравнений не противоречит теореме единственности.

18. $y''' = f(t, y, y', y'')$, $f \in C^1$, решения $y_1 = 1 + t + nt^2$, $y_2 = 1/(1-t)$ $(-1 < t < 1/2)$.

19. $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$, $f \in C^1$, решения $y_1 = 2\cos x$, $y_2 = 2 - x^2$.

20. $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$, все $a_i(x)$ непрерывны, решение $y_1 = x(\mathrm{e}^x - 1)$.

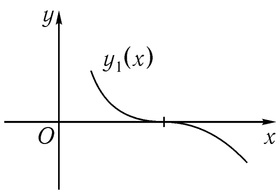

Рис. 9

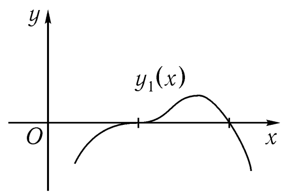

Рис. 10

21. Уравнение то же, что в задаче **20**, график решения y_1 указан на рис. 9

22. Уравнение то же, что в задаче **20**, график решения y_1 указан на рис. 10.

23. Сколько решений имеет задача

$$(a^3 - 4a)y''' + (a^2 + 2a)y'' + y' - 2y = x + a, \ y(1) = 0, \ y'(1) = 1$$

в зависимости от значений параметра a?

24. Тот же вопрос для задачи

$$(1 - a^2)(ay''' - y'') = ay' + y^2, \ y(0) = 2, \ y'(0) = 4.$$

25. Сколько решений имеет задача

$$y^{(n)} = x + y^2, \; y(-1) = a, \; y'(-1) = 0$$

в зависимости от a и n?

26. Тот же вопрос для задачи

$$y^{(n)} = 2y^2 - a^2 x, \; y(1) = 1, \; y'(1) = a.$$

27. Тот же вопрос для задачи

$$y^{(n)} = x + 2y' + y^2, \; y(-1) = \ln(4 + a), \; y'(-1) = 1.$$

4. Продолжение решений

28. Существует ли при $-\infty < x < \infty$ решение задачи $y' = \mathrm{e}^{-y} \sin(\mathrm{e}^y)$, $y(0) = 0$?

29. Для задачи $(2 - x^2)y' - xy^2 = 0$, $y(x_0) = y_0$, где $x_0 = \sqrt{2 + 3\,\mathrm{e}^{-1}}$, $y_0 = -2$,

а) определить максимальный интервал существования решения;

б) нарисовать график решения.

30. а) Найти все решения уравнения

$$y' = xy^2/(\pi^2 - x^2).$$

б) Найти непродолжаемое решение этого уравнения с начальным условием $y(-\sqrt{3}) = 1/(\ln\sqrt{\pi^2 - 3} - 1)$ и нарисовать его график.

31. Доказать, что решение задачи $y' = x - y^2$, $y(1) = 0$ может быть продолжено на полуинтервал $1 \leqslant x < \infty$.

32. Имеет ли система $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \sin y$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = x^3$ решение, которое нельзя продолжить на интервал $-\infty < t < \infty$?

33*. Доказать, что решение задачи $y' = x + y^2$, $y(0)=0$ не продолжается на полуинтервал $0 \leqslant x < \infty$.

34*. На каком интервале можно гарантировать существование решения задачи

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x) \;\; (t \in R, \;\; x \in R^n, \;\; f \in C^1), \;\; x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ если}$$

$|f(t, x)| \leqslant |x|^2$? Дать неулучшаемую оценку интервала, общую для всех таких $f(t, x)$, и подтвердить неулучшаемость примером.

§ 22. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

1. Теоретические вопросы

35. Сформулировать теорему существования и единственности решения линейного уравнения порядка n на заданном интервале.

36. Сформулировать и доказать теорему об общем решении линейной однородной системы.

37. Дать определение фундаментальной системы решений для линейной системы уравнений и доказать ее существование.

38. а) Что называется общим решением линейного неоднородного уравнения?

б) Сформулировать теорему об этом решении.

39. а) Сформулировать основные свойства детерминанта Вронского.

б) Пусть $W(t)$ — детерминант Вронского для скалярных функций $y_1(t),\ \ldots,\ y_n(t)$ класса C^n. Если $W(t) \equiv 0$ при $a \leqslant t \leqslant b$, то можно ли сделать вывод о линейной зависимости данных функций на отрезке $[a,\, b]$? Обосновать ответ.

40. а) Дать определение фундаментальной матрицы.

б) Написать фундаментальную матрицу для системы $\dot{x} = y$, $\dot{y} = 0$.

41. Как из одной фундаментальной матрицы можно получить другие?

42. Сформулировать и доказать теорему об оценке решений системы

$$\dot{x} = A(t)x \quad (x \in R^n).$$

43. Сформулировать и доказать теорему существования периодического решения линейного уравнения первого порядка с периодическими коэффициентами.

(Задачи **42** и **43** только для студентов, которым читались эти теоремы.)

2. Линейные однородные уравнения

44. а) Написать общий вид линейного однородного уравнения порядка n с переменными коэффициентами. При каких требованиях на коэффициенты это уравнение имеет единственное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям?

б) Пусть эти требования выполнены и известно, что уравнение имеет частное решение $y_1 = x^k$. Каким может быть порядок уравнения?

45. а) Сформулировать теорему существования и единственности решения уравнения $y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = 0$ с начальными условиями.

б) Для какого наибольшего натурального числа m наличие у этого уравнения решения $y = (\mathrm{e}^x - 1)^m$ не противоречит сформулированной теореме?

46. Найти два линейно независимых решения уравнения $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ и их детерминант Вронского. Принимает ли он нулевое значение? Как это согласуется с известными свойствами детерминанта Вронского?

47. Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ — решения уравнения $(x+2)y'' - 3y' + y\sqrt{1-x} = 0$ с начальными условиями $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$, $y_2(0) = 3$, $y_2'(0) = 2$.

а) Указать интервал, на который их можно продолжить.

б) Составляют ли они фундаментальную систему?

в) Чему равен детерминант Вронского этих решений при $x = -1$?

48. Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ — решения уравнения $-(t+1)y''' - 2y'' + 2t^2y\,\mathrm{tg}\,t = 0$ с начальными условиями при $t = 1$:

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = 2, &&\varphi_1' = 0, &&\varphi_1'' = 0;\\ &\varphi_2 = -1, &&\varphi_2' = 1, &&\varphi_2'' = -1;\\ &\varphi_3 = 0, &&\varphi_3' = 0, &&\varphi_3'' = -2. \end{aligned}$$

а) Указать интервал, на который можно продолжить эти решения по известной теореме.

б) Составляют ли они фундаментальную систему?

в) Найти явное выражение для их детерминанта Вронского на этом интервале.

г) Решение $y(t)$ с начальными условиями $y(1) = a$, $y'(1) = b$, $y''(1) = c$ выразить через $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$.

49. Существует ли такое значение параметра a, при котором детерминант любой фундаментальной матрицы системы

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax,\ x \in R^3,\ A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

остается постоянным при изменении t?

50. Сколько линейно независимых решений, определенных при $-\infty < t < \infty$, имеет уравнение $t^2\ddot{x} = 90x$? Обосновать ответ.

51*. Тот же вопрос для системы $t\dot{x} = 2x$, $t\dot{y} = 3y$.

52. Построить линейное однородное уравнение возможно низшего порядка, имеющее на интервале $(0, 1)$ такие четыре решения:

$$y_1 = 1 - x,\ y_2 = (x-2)^2,\ y_3 = x^2 + x - 1,\ y_4 = x^2 - 2x + 2.$$

53. Известны два решения линейного однородного уравнения 2-го порядка: $y_1 = x$, $y_2 = x^2 - 1$. Найти решение с начальными условиями $y(2) = 4$, $y'(2) = -3$.

54. Известны два частных решения $y_1 = x^2 - 2x + 3$, $y_2 = x\,\mathrm{e}^x + 2$ линейного однородного уравнения 3-го порядка. Достаточно ли этого для отыскания решения с начальными условиями $y(0) = 5$, $y'(0) = -8$, $y''(0) = 2$? Обосновать ответ.

55. Для уравнения $x^3(x-1)y''' + x^2(5-3x)y'' + x(6x - 12)y' + (12-6x)y = 0$ известны два частных решения: $y_1 = x$, $y_2 = x^3$. Найти общее решение.

56. Для линейного однородного уравнения 3-го порядка известны два частных решения y_1 и y_2. Описать способ отыскания общего решения.

3. Линейные неоднородные уравнения

57. Известны два частных решения линейного неоднородного уравнения первого порядка: $y_1 = x$, $y_2 = \mathrm{e}^x$. Найти решение с начальным условием $y(1) = -1$.

58. Известны три частных решения линейного неоднородного уравнения 2-го порядка: $y_1 = x+1$, $y_2 = x-1$, $y_3 = 1-x^2$. Найти общее решение этого уравнения.

59. Известны три частных решения линейного неоднородного уравнения 2-го порядка: $y_1 = x^2$, $y_2 = 1-x$, $y_3 = 1-3x$. Найти решение с начальными условиями $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

60. Даны три функции: $y_1 = x+1$, $y_2 = 1-2x$, $y_3 = x^2-3$. Составить линейное неоднородное уравнение 2-го порядка, которому они удовлетворяют.

61. Известны два частных решения $y_1 = x-1$ и $y_2 = (x^2-x+1)/x$ уравнения $(x^2-2x)y'' + 4(x-1)y' + 2y = 6x-6$. Найти общее решение.

62. Известны два частных решения $y_1 = xe^x$, $y_2 = (x-2)\,e^x$ уравнения $xy'' - (x+1)y' + y = (x-1)\,e^x$. Найти общее решение.

4. Краевые задачи

63. Пусть известно, что уравнение $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ с непрерывными на $[a, b]$ функциями $p(x)$ и $q(x)$ не имеет решений $y(x) \not\equiv 0$, для которых $y(a) = y(b) = 0$. Доказать, что для любых чисел c, d существует единственное решение, для которого $y(a) = c$, $y(b) = d$.

64*. Найти наименьшее положительное число T такое, что для уравнения $\ddot{x} - 2\dot{x} = 8\sin^2 t$ разрешима краевая задача с условиями $\dot{x}(0) = -1$, $\dot{x}(T) = -1$.

65. Известно, что при некоторой непрерывной функции $f(x)$ краевая задача

$$y'' - 2y' + 2y = f(x),\ y(0) = 2,\ y(\pi) = -2$$

имеет решение. Единственно ли это решение?

66. Найти наименьшее положительное p, при котором краевая задача

$$y'' + py = 0,\ y(0) = 1,\ y(1) = 2$$

не имеет решений.

67. Найти наибольшее из таких чисел a, что при каждом $p \in (1, a)$ краевая задача

$$y'' + 2y' + py = 0,\ y(0) = 2,\ y(\pi) = 3$$

имеет решение.

§ 23. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Отыскание решений

Найти все вещественные решения уравнений **68—71**.

68. $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = \mathrm{e}^t + \sin t$.

69. $\ddot{x} + 4x = (\mathrm{e}^{2t} + 2)\sin 2t$.

70. $y'' + y = 4x\cos x$.

71. $y'' + y = 5x\,\mathrm{e}^{-2x} + 4\sin x$.

Указать вид общего решения (в задачах **72** и **73** общего вещественного решения) с неопределенными коэффициентами. Не находить числовых значений коэффициентов.

72. $y''' - 2y'' + y' = t\,\mathrm{e}^t(1 + \cos t) + t$.

73. $y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2x}(x + \sin x)$.

74. $y'' - 2iy = 8\,\mathrm{e}^x\cos x$.

75. $y'' - 2iy' - y = 4\sin x$.

76. $y'' + 4iy' - 5y = \mathrm{e}^x\cos 2x$.

77. $y''' + 8iy = \sin x\cos x$.

2. Периодические и ограниченные решения

Имеют ли уравнения **78—80** периодические решения?

78. $y''' + y = \cos t$.

79. $\ddot{x} + x = \left(\sin\frac{t}{4}\right)^4$.

80. $\ddot{x} - 2\dot{x} = 8\sin^2 t$.

81. При каких $\omega \in R$ существует периодическое решение уравнения $\dddot{x} + 4\dot{x} = 2\cos\omega t$?

82. При каких целых b и c уравнение $y''' + b^2y' = \sin x + c\sin^2 x$ не имеет периодических решений?

83. а) При каких $\omega \in R$ уравнение $y^{(5)} + 4y''' + 4y' = \cos\omega t$ не имеет периодических решений?

б) Найти все периодические решения в случае $\omega = 3$.

84. Найти периодическое решение уравнения $\ddot{x}+\dot{x}+25x = \sin\omega t$. Нарисовать график его амплитуды как функцию от ω.

85. При каких целых a уравнение $y'' + a^2y = \sin 4x\cos 2x$

а) не имеет решений с периодом π?

б)* имеет только одно решение с периодом π?

86*. Те же вопросы для уравнения

$$y'' + (a-1)(a-2)y' + a^2y = \sin 2x.$$

Для каждого из уравнений **87** и **88** выяснить, при каких $a \in R$ все решения этого уравнения не ограничены при $-\infty < t < \infty$.

87. $\ddot{x} + ax = \sin^2 t$.

88. $\dddot{x} + \dot{x} = \cos at$.

89. При каких $a \in R$ хотя бы одно решение уравнения

$$y''' + y'' - 2y' = \mathrm{e}^{at} + \sin 2at$$

ограничено при $t \geqslant 0$?

90. Тот же вопрос для уравнения

$$y''' + a^2y' = \cos at\cos 2t.$$

91. Найти все значения a, α и β, при которых задача

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = a\,\mathrm{e}^t\cos 2t - 17\sin 2t,\ \ x(0) = \alpha,\ \ \dot{x}(0) = \beta$$

имеет решение, ограниченное при $t \geqslant 0$.

92. Пусть $x = \varphi(t)$ и $x = \psi(t)$ — решения уравнения $\dddot{x} - \ddot{x} + 4\dot{x} - 4x = 0$ с начальными условиями $\varphi(0) = a$, $\varphi'(0) = b$, $\varphi''(0) = c$; $\psi(\pi) = \alpha$, $\psi'(\pi) = \beta$, $\psi''(\pi) = \gamma$. Указать какие-нибудь числовые значения a, b, c, α, β, γ так, чтобы $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ были периодическими и линейно независимыми.

3. Системы уравнений

Решить системы **93—95**.

93. $\begin{cases} \dot{x} = y + x - 4, \\ \dot{y} = 3y - x. \end{cases}$ **94.** $\begin{cases} \dot{x} = -5y, \\ \dot{y} = 2x + 2y. \end{cases}$

95. $\begin{cases} \dot{x} = z - x - y, \\ \dot{y} = x - y - z, \\ \dot{z} = -y; \end{cases}$ $\lambda_1 = 0,$ $\lambda_{2,3} = -1.$

96. При каких матрицах A все вещественные решения системы $\dot{x} = Ax$ выражаются только через синусы, косинусы и константы?

97. Для одного частного решения системы $\dot{x} = Ax$ известна только первая координата: $x_1 = t^2 + t\sin t$. Каким может быть порядок матрицы A?

98. Найти фундаментальную матрицу системы $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, нормированную при $t = 0$.

99. Доказать, что для системы $\dot{x} = Ax$ с вещественной кососимметрической матрицей A нормированная при $t = 0$ фундаментальная матрица при каждом t является ортогональной.

100. Найти все вещественные периодические решения системы

$$\dot{x} = 2y - x + 2\cos t,\ \dot{y} = 4y - 2x + \cos t.$$

101. Найти решение с периодом π системы

$$\dot{x} = x - y,\ \dot{y} = 2x - y + 6\sin^2 t.$$

102. а) Найти все вещественные периодические решения системы

$$\dot{x} = x - y + 3\sin 2t,\ \dot{y} = 2x - y.$$

б) Найти все решения с периодом π.

103. При каких a система

$$\dot{x} = y + \sin 2t,\ \dot{y} = -4x + a\cos 2t$$

имеет периодическое решение?

104. Для каких вещественных чисел a и b все решения системы

$$\dot{x} = 2y - 4x + a,\ \dot{y} = 2x - y + b$$

ограничены при $t \geqslant 0$?

105. Для каких матриц A каждое решение системы $\dot{x} = Ax$ ограничено при $-\infty < t < \infty$.

4. Показательная функция матрицы

106. Сформулировать свойства показательной функции матрицы.

В задачах **107—110** найти e^{tA}.

107. $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. **108.** $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

109. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **110.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

111. Найти вектор $e^{\frac{\pi}{3}A}\,b$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

В задачах **112—114**

а) не вычисляя матрицу e^{tA}, найти ее детерминант и собственные значения;

б) найти e^{tA}.

112. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. **113.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

114. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

115. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти $\det \int\limits_0^2 e^{tA}\, dt$.

116. При каких матрицах A имеем $e^{tA} \to 0$ при $t \to +\infty$?

117. Найти фундаментальную матрицу системы $\dot{x} = t^{-1} A x$.

118. Если A — такая матрица, что $e^A = E$, то обязательно ли $A = 0$?

119*. Что можно сказать о жордановой форме матрицы A, если

$$e^{tA} \equiv \sum_{k=0}^{5} k!\, t^k A^k?$$

120*. Если при всех t матрица e^{tA} симметрическая, то обязательно ли матрица A симметрическая?

121*. Если $e^{tA} e^{tB} \equiv e^{t(A+B)}$, то обязательно ли $AB = BA$?

122*. Если матрица e^{tA} ортогональная при каждом $t \in R$, то обязательно ли $A^* = -A$?

5. Линейные системы с периодическими коэффициентами

123. Что называется мультипликатором системы $\dot{x} = A(t)x$ с периодической матрицей $A(t)$?

124. Какому условию должны удовлетворять мультипликаторы линейной системы для того, чтобы все ее решения стремились к нулю при $t \to +\infty$?

125. Найти мультипликатор для уравнения $\dot{x} = (a + \sin^2 t)x$.

126*. При каких значениях параметра $a \in R$ уравнение $\dot{x} = (a + \sin^2 t)x + 1$ имеет ровно одно периодическое решение?

127*. Пусть матрица $A(t)$ имеет период T, и $\|A(t)\| \leqslant a$ при всех t. Доказать, что для системы $\dot{x} = A(t)x$ модули мультипликаторов не превосходят e^{aT}.

§ 24. УСТОЙЧИВОСТЬ

1. Теоретические вопросы

128. Дать определение устойчивости по Ляпунову.

129. Сформулировать и доказать теорему об устойчивости при наличии функции Ляпунова $v(x)$.

130. Сформулировать теорему об устойчивости по первому приближению.

131. Сформулировать необходимые и достаточные условия устойчивости по Ляпунову нулевого решения системы $\dot{x} = Ax$ ($x \in R^n$, матрица A постоянная).

132. Доказать, что если одно решение линейной системы устойчиво, то устойчиво каждое решение этой системы.

133. Какому необходимому и достаточному условию должна удовлетворять матрица A, чтобы для любой непрерывной функции $h(t)$ каждое решение системы $\dot{x} = A\,x + h(t)$ было устойчивым по Ляпунову?

134. а) При каких матрицах A система $\dot{x} = Ax$ имеет более одного положения равновесия?

б) При каких дополнительных предположениях все эти положения равновесия устойчивы?

135. Система $\dot{x} = Ax$, где $x \in R^3$, A — постоянная матрица, имеет частное решение, у которого известна только первая координата: $x_1 = e^{-t} + \cos t$. Устойчиво ли нулевое решение?

136. Система $\dot{x} = Ax$ $(x \in R^4)$ имеет частное решение, у которого известны только две координаты: $x_1 = \sin t + 2\cos t$, $x_2 = \cos 2t$. Устойчиво ли нулевое решение?

137. Если для системы $\dot{x} = Ax$ $(x \in R^n)$ нулевое решение неустойчиво, то обязательно ли оно неустойчиво для каждой системы вида $\dot{x} = Ax + \varphi(x)$, где $\varphi(x) \in C^1$, $\varphi(x) = o(|x|)$ при $x \to 0$?

138*. Пусть $f(t, x) \in C^1$, $x \in R^n$ и пусть разность каждых двух решений уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$. Следует ли отсюда при каком-либо n, что всякое решение этого уравнения асимптотически устойчиво?

2. Исследование устойчивости конкретных систем

Для уравнений **139—144** и систем **145—147** найти положения равновесия и исследовать их на устойчивость.

139. $\dot{x} = -x^2$.

140. $\dot{x} = \sin x - x$.

141. $\dot{x} = -x \sin^2 x$.

142. $\dot{x} = -x \sin^2 t$.

143. $\dot{x} = x \sin^3 t$.

144. $\dot{x} = \frac{x^2}{t^2+1}$.

145. $\dot{x} = y,\ \dot{y} = -x^3$.

146. $\dot{x} = y,\ \dot{y} = 3x^2 - 2x$.

147. $\dot{x} = y - x + (y - x)^2, \quad \dot{y} = 0$.

В задачах **148—155** выяснить, при каких значениях параметра a нулевое решение является

а) асимптотически устойчивым;

б) устойчивым, но не асимптотически;

в) неустойчивым.

148. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ay - x^3 - a^2 x. \end{cases}$

149. $\begin{cases} \dot{x} = ax + y + (a+1)x^2, \\ \dot{y} = x + ay. \end{cases}$

150. $\begin{cases} \dot{x} = ax + a \sin y, \\ \dot{y} = ax^3 - a^2 y. \end{cases}$

151. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x(1+x^4) - ay. \end{cases}$

152. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = ay - \operatorname{tg} x. \end{cases}$

153. $\begin{cases} \dot{x} = 3y^2 - ay, \\ \dot{y} = 2x + (2-a)y. \end{cases}$

154. $\begin{cases} \dot{x} = y - ax^2 - y^2, \\ \dot{y} = -(a+1)x - ay. \end{cases}$

155. $\begin{cases} \dot{x} = -ax + (a-1)y, \\ \dot{y} = x + ay^2. \end{cases}$

156. а) При каких $a \in R$ существуют ограниченные при $-\infty < t < \infty$ решения системы

$$\dot{x} = 2y - 4x + 1, \quad \dot{y} = 2x - y + a.$$

Найти все такие решения.

б) Устойчивы ли они?

157. Устойчиво ли решение системы

$$\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = 2x - y + 6\sin^2 t,$$

имеющее период π?

В задачах **158—160**

а) найти все значения параметра $a \in R$, при которых все решения уравнения неограничены при $t \geqslant 0$ (не требуется отыскивать решения);

б) выяснить, являются ли эти решения устойчивыми или асимптотически устойчивыми.

158. $\ddot{x} + ax = \sin^2 t$. **159.** $\dddot{x} + \dot{x} = \cos at$.

160. $\ddot{x} + ax = \cos at$.

§ 25. ФАЗОВАЯ ПЛОСКОСТЬ

1. Траектории линейных систем

161. При каких соотношениях между коэффициентами a, b, c, d особая точка системы $\dot{x} = ax + by$, $\dot{y} = cx + dy$ является

а) седлом,

б) узлом?

162. При каких a, b, c, d для каждого решения системы $\dot{x} = ax + by$, $\dot{y} = cx + dy$ полярный угол точки $(x(t), y(t))$ возрастает при увеличении t?

В задачах **163—165** определить тип особой точки и нарисовать траектории системы на плоскости x, y.

163. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = 5y - x. \end{cases}$ **164.** $\begin{cases} \dot{x} = x - 5y, \\ \dot{y} = 5x - 5y. \end{cases}$

165. $\begin{cases} \dot{x} = y + x - 4, \\ \dot{y} = 3y - x. \end{cases}$

166. При каких a особая точка системы $\dot{x} = a(x + y)$, $\dot{y} = a^2 y$ является седлом?

167. а) Может ли траектория системы

$$\dot{x} = 2y - x, \quad \dot{y} = 3x - 2y$$

из точки $(-a^2 - 1, -1)$ попасть в точку $(1, a^2 + 1)$?

б) Устойчиво ли положение равновесия?

168. а) определить тип особой точки и нарисовать траектории системы

$$\dot{x} = ax - y, \quad \dot{y} = by + x$$

при $a = -2$, $b = -3$.

б) На плоскости параметров a, b указать такую область, что при любых (a, b) из этой области вторая компонента $y(t)$ любого решения указанной выше системы имеет бесконечно много нулей при $t \geqslant 0$.

169. Рассматривается система

$$\dot{x} = a^2 x - y, \quad \dot{y} = 5x - (3 + 2a)y.$$

а) Будет ли нулевое решение системы при $a = 1$ асимптотически устойчивым? Обосновать ответ.

б) Нарисовать траектории системы при $a = -3$.

в) Существует ли такое значение $a \in R$, при котором траектории — замкнутые кривые?

В задачах **170—173** исследовать

а) при каких значениях параметра $a \in R$ нулевое решение асимптотически устойчиво и при каких — устойчиво;

б) при каких значениях параметра $a \in R$ особая точка — седло? узел? фокус?

в) при указанном значении a дать чертеж траекторий.

170. $\begin{cases} \dot{x} = x + ay, \\ \dot{y} = ax + y; \end{cases} \quad a = \frac{1}{2}.$

171. $\begin{cases} \dot{x} = ax + y, \\ \dot{y} = ay - (2a+1)x; \end{cases} \quad a = 1.$

172. $\begin{cases} \dot{x} = 2ax + y, \\ \dot{y} = ay - 2ax; \end{cases} \quad a = 1.$

173. $\begin{cases} \dot{x} = x + (2-a)y, \\ \dot{y} = ax - 3y; \end{cases} \quad a = 4.$

2. Траектории нелинейных систем

174. Найти и нарисовать траектории системы

$$\dot{x} = x^3 - 3xy^2, \quad \dot{y} = 3x^2y - y^3.$$

175. Имеет ли уравнение $\ddot{x} + x^5 = 0$ ненулевые решения, определенные при $-\infty < t < \infty$?

176. Имеются ли у уравнения $\ddot{x} = 4x - 4x^3$ неограниченные решения?

177. Перейти от уравнения $\ddot{x} + a\dot{x} + x - x^3 = 0$ к автономной системе двух уравнений. Для этой системы

а) найти особые точки;

б) указать значения a, при которых все эти точки неустойчивы;

в) существует ли значение a, при котором ровно две особые точки устойчивы?

178. Для уравнения $\ddot{x} + 4x - 6x^2 = 0$

а) найти уравнение $y = \varphi(x)$ траектории, проходящей через точку $(1, 0)$;

б) нарисовать эту траекторию, учитывая значение предела $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{y}{x}$;

в) найти решение данного уравнения с начальными условиями $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$.

179. Для уравнения $\ddot{x} = -u'(x)$, где $u(x) = -x^4 + x^2 - 1$,

а) дать чертеж траекторий на фазовой плоскости;

б) найти особые точки и исследовать их на устойчивость;

в) найти наклоны сепаратрис и периоды малых колебаний;

г) добавить $+a\dot{x}$ в левую часть уравнения и для $a > 0$ исследовать типы особых точек полученного уравнения.

180. Для уравнения $\ddot{x} = 2x - 2x^3$ провести такое же исследование, как в предыдущей задаче.

181. Для уравнения $\ddot{x} + x = x^2$

а) найти и исследовать особые точки на фазовой плоскости;

б) найти решение $x(t)$, убывающее и стремящееся к 1 при $t \to +\infty$, а также его траекторию на фазовой плоскости;

в) выяснить, при каких a решение с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = a$ периодическое;

г) указать на фазовой плоскости область, заполненную замкнутыми траекториями;

д) устойчиво ли решение с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$?

В задачах **182** и **183**

а) дать чертеж траекторий на фазовой плоскости;

б) найти особые точки и исследовать их на устойчивость;

в) выяснить, определены ли все решения при $-\infty < t < \infty$.

182. $\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2, \\ \dot{y} = y^2. \end{cases}$ **183.** $\begin{cases} \dot{x} = x - x^3, \\ \dot{y} = -y^3. \end{cases}$

184*. Для системы

$$\dot{x} = y - x^2y - y^3, \quad \dot{y} = x^5 + x^3y^2 - x^3$$

а) найти все особые точки;

б) линеаризовать систему в каждой из точек $(0, 0)$, $(1, 0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

в) исследовать устойчивость этих линеаризованных систем;

г) исследовать на устойчивость те же три особые точки для исходной системы;

д) дать чертеж траекторий на фазовой плоскости;

е) выяснить, имеет ли данная система неограниченные решения;

ж) описать множество точек, через которые проходят периодические решения.

§ 26. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ И ПО НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЯМ

1. Дифференцирование по параметру

185. Сформулировать теорему о дифференцируемости решения системы дифференциальных уравнений по параметру. Написать систему дифференциальных уравнений в вариациях.

В задачах **186—194** найти производную от решения данного дифференциального уравнения (или системы) по параметру μ при $\mu = 0$.

186. $y' = \mu x + \frac{1}{2y}$ $(x > 0)$, $y(1) = 1 - 2\mu$.

187. $y' = \frac{y}{x} + \mu x\,\mathrm{e}^{-y}$ $(x > 0)$, $y(1) = 1 + 2\mu$.

188. $y' = y - x + \mu x\,\mathrm{e}^{2y}$, $y(1) = 2 - \mu$.

189. $y' = \mu x + \sin y$, $y(0) = 2\mu$.

190. $\ddot{x} = x \sin \dot{x} + \sin(x^2)$, $x(0) = \mu$, $\dot{x}(0) = \mu$.

191. $\ddot{x} = x + \sin(\dot{x}^2)$, $x(0) = \mu$, $\dot{x}(0) = \mu^2$.

192. $\ddot{x} + x = 2\mu \sin t + \mu x^2$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

193. $\ddot{x} - 2\dot{x} = \mu t x$, $x(0) = 4$, $\dot{x}(0) = \mu^2 + 3\mu$.

194. $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x + 3\mu y^2$, $x(0) = 2 - 4\mu$, $y(0) = 0$.

2. Дифференцирование по начальным условиям

195. Сформулировать теорему о дифференцируемости решения системы дифференциальных уравнений по начальным условиям. Написать систему уравнений в вариациях и начальные условия для нее.

196. Доказать, что в случае $y \in R^1$ производная по y_0 от решения задачи $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ всегда положительна (предполагается $f \in C^1$).

В задачах **197—199** найти производную от решения по y_0 при $y_0 = 0$.

Указание. При $y_0 = 0$ каждая из этих задач имеет нулевое решение.

197. $y' = 2xy + \sin y, \;\; y(1) = y_0.$

198. $y' = y^3 \sin x + y \cos x, \;\; y(0) = y_0.$

199. $\begin{cases} \dot{x} = y - x + x^2, \\ \dot{y} = y - 2x + xy, \end{cases} \;\; x(0) = 0, \; y(0) = y_0.$

200*. $\ddot{x} + \sin x = 0, \;\; x(0) = \alpha, \;\; \dot{x}(0) = \beta.$
Найти $\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta}$ при $\alpha = \beta = 0.$

3. Разложение решения по степеням параметра

В задачах **201** и **202** найти разложение решения по степеням параметра μ до μ^2 включительно.

201. $y' = 5\mu x + \frac{1}{2y} \;\; (x \geq 1), \;\; y(1) = 1 - \mu.$

202. $\ddot{x} = 2x - 2x^3, \;\; x(0) = 1, \;\; \dot{x}(0) = \mu.$

§ 27. УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Теоретические вопросы

203. Написать общий вид квазилинейного уравнения с частными производными первого порядка. Что называется характеристикой этого уравнения?

204. Сформулировать и доказать утверждение о связи решения уравнения с его характеристиками.

205. Как можно использовать первые интегралы некоторой вспомогательной системы дифференциальных уравнений для получения решения данного уравнения с частными производными?

206. Сформулировать постановку задачи Коши для квазилинейного уравнения с частными производными и теорему существования ее решения.

207. Сформулировать и доказать теорему о существовании решения задачи Коши для квазилинейного уравнения с частными производными первого порядка.

2. Задачи

208. Найти общее решение уравнения

$$z\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = y.$$

Решить следующие задачи Коши (**209—215**).

209. $xy\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = yz$, $z = 1 + y^2$ при $x = 1$.

210. $\frac{\partial z}{\partial x} + (z - x^2)\frac{\partial z}{\partial y} = 2x$, $z = x^2 + x$ при $y = 2x^2$.

211. $y\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = yz$, $z = -y^2$ при $x = 0$.

212. $xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + y$, $z = 4y^3$ при $x = 3y^2$.

213. $y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 z$, $z = \mathrm{e}^{y^2/2}$ при $x = 2y$.

214. $x\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = z + 2x^2$, $z = x$ при $y = \frac{1}{4} - x^2$.

215. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x + y + z$, $z = x + y$ при $y = x + 1$.

Решить следующие задачи Коши (**216—218**) в тех случаях, когда решение существует.

216. $\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = 5$, $z = 0$ при $y = kx$.

217. $\frac{\partial z}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial y} = 2$, а) $z = y^2$ при $x = 1$;
б) $z = 2x$ при $y = 3x$.

218. $2\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 2$, $z = 2ay$ при $x = (a^2 + a - 2)y$.