Гродзенскі дзяржаўны універсітэт імя Янкі Купалы
Кафедра агульнай фізікі
Лабараторыя механікі
аўд. 408

Лабараторная работа №15

ВЫЗНАЧЭННЕ МОМАНТАЎ ІНЕРЦЫІ І ЭЛІПСОІДАЎ ІНЕРЦЫІ ЦВЁРДЫХ ЦЕЛАЎ

для студэнтаў спецыяльнасці “ФІЗІКА”

Гродна, 2010

ВЫЗНАЧЭННЕ МОМАНТАЎ ІНЕРЦЫІ І ЭЛІПСОІДАЎ ІНЕРЦЫІ ЦВЁРДЫХ ЦЕЛАЎ

Мэта работы:

Доследнае вызначэнне момантаў інерцыі цвёрдых целаў пры дапамозе круцільных вагаў.

Прылады і абсталяванне:

Круцільныя вагі, два цвёрдыя целы (паралелепіпед і куб), тэхнічныя вагі, штангенцыркуль.

Тэарэтычныя асновы

Абсалютна цвёрдае цела (цвёрдае цела) – цела, адлегласці паміж асобнымі часцінкамі не змяняюцца падчас руху.

Пры паступальным руху *мерай інертнасці цела* з'яўляецца *маса*.

Пры *руху вярчальным мерай інертнасці цвёрдага цела* з'яўляецца фізічная велічыня – *момант інерцыі*.

Разгледзім цвёрдае цела, замацаванае такім чынам, што яно можа свабодна вярцецца вакол нерухомага цэнтра мас. Возьмем дэкартаву сістэму каардынатаў з пачаткам у цэнтры мас.

Выдзелім бясконца малы i-элемент цела, які мае каардынаты x_i, y_i, z_i, мае хуткасць $\vec{\upsilon}_i = \left[\vec{\omega}, \vec{r}_i\right]$, дзе $\vec{\omega}$ – вектар вуглавой хуткасці, які апісвае вярчэнне цвёрдага цела, $\vec{r}_i$ – радыус-вектар, праведзены з пачатку каардынатаў у пункт, дзе знаходзіцца i-ы элемент (малюнак 1). Няхай маса гэтага элемента роўна Δm_i. *Момант імпульсу цела адносна пункту* (цэнтра мас) будзе роўны суме момантаў імпульсу асобных яго элементаў:

$$\vec{L} = \sum_i \Delta m_i \left[\vec{r}, \vec{\upsilon}_i\right] = \sum_i \Delta m_i \left[\vec{r}_i, \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]\right]. \qquad (1)$$

Скарыстаемся формулай раскладу двайнога вектарнага здабытку:

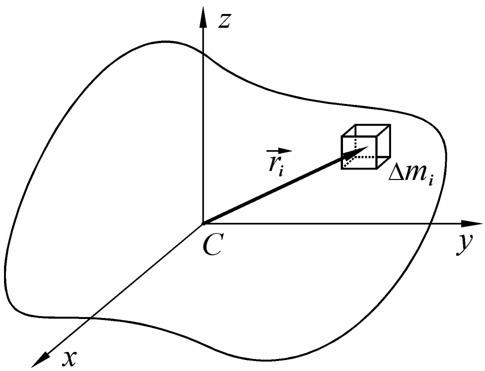
$$\left[\vec{A}, \left[\vec{B}, \vec{C}\right]\right] = \vec{B}\left(\vec{A}, \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A}, \vec{B}\right), \qquad (2)$$

Тады выраз (1) набудзе выгляд:

$$\vec{L} = \sum_i \Delta m_i \vec{\omega}(\vec{r}_i, \vec{r}_i) - \sum_i \Delta m_i \vec{r}_i (\vec{r}_i, \vec{\omega}). \qquad (3)$$

Вектарную роўнасць можна запісаць у выглядзе трох праекцый на восі каардынатаў:

$$\begin{cases} \vec{L}_x = \omega_x \sum\limits_i \Delta m_i r_i^{\,2} - \sum\limits_i \Delta m_i x_i \left(\vec{r}_i, \vec{\omega}\right); \\ \vec{L}_y = \omega_y \sum\limits_i \Delta m_i r_i^{\,2} - \sum\limits_i \Delta m_i y_i \left(\vec{r}_i, \vec{\omega}\right); \\ \vec{L}_z = \omega_z \sum\limits_i \Delta m_i r_i^{\,2} - \sum\limits_i \Delta m_i z_i \left(\vec{r}_i, \vec{\omega}\right). \end{cases} \tag{4}$$



Мал. 1.

Улічваючы, што $\left(\vec{r}_i, \vec{\omega}\right) = x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z$, сістэма (4) набудзе выгляд:

$$\begin{cases} \vec{L}_x = \sum\limits_i \Delta m_i \left(r_i^{\,2} - x_i^{\,2}\right)\omega_x - \sum\limits_i \Delta m_i x_i y_i \omega_y - \sum\limits_i \Delta m_i x_i z_i \omega_z; \\ \vec{L}_y = -\sum\limits_i \Delta m_i y_i x_i \omega_x + \sum\limits_i \Delta m_i \left(r_i^{\,2} - y_i^{\,2}\right)\omega_y - \sum\limits_i \Delta m_i y_i z_i \omega_z; \\ \vec{L}_z = -\sum\limits_i \Delta m_i z_i x_i \omega_x - \sum\limits_i \Delta m_i z_i y_i \omega_y + \sum\limits_i \Delta m_i \left(r_i^{\,2} - z_i^{\,2}\right)\omega_z. \end{cases} \tag{5}$$

Увядзем наступныя пазначэнні:

$$\sum\limits_i \Delta m_i \left(r_i^{\,2} - x_i^{\,2}\right) = I_{xx}; \qquad -\sum\limits_i \Delta m_i x_i y_i = I_{xy};$$

$$\sum\limits_i \Delta m_i \left(r_i^{\,2} - y_i^{\,2}\right) = I_{yy}; \qquad -\sum\limits_i \Delta m_i x_i z_i = I_{xz};$$

$$\sum\limits_i \Delta m_i \left(r_i^{\,2} - z_i^{\,2}\right) = I_{zz}; \qquad -\sum\limits_i \Delta m_i y_i z_i = I_{yz};$$

і так далей.

Сістэма (5) пасля адпаведных заменаў набывае выгляд:

$$\begin{cases} L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z; \\ L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z; \\ L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z. \end{cases} \qquad (6)$$

Такім чынам, момант імпульсу цела вельмі складана залежыць ад размеркавання мас у целе і яго напрамак не супадае ў агульным выпадку з вектарам вуглавой хуткасці вярчэння цела.
Сукупнасць велічынь

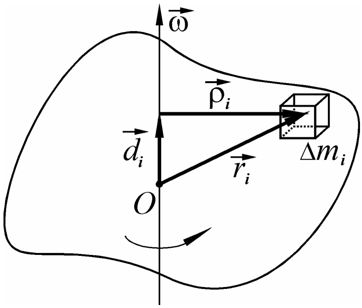
$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Называецца *тэнзарам інерцыі*.

Велічыні I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} з'яўляюцца дыяганальнымі элементамі тэнзара і называюцца *восевымі момантамі інерцыі*; I_{yz}, I_{zx}, I_{zy} з'яўляюцца недыяганальнымі элементамі тэнзара і называюцца *цэнтрабежнымі момантамі інерцыі*. Тэнзар, які валодае сіметрыяй ($I_{xy} = I_{yx}$; $I_{zy} = I_{yz}$; $I_{xz} = I_{zx}$), называецца *сіметрычным тэнзарам*.
Сіметрычны тэнзар можна прывесці да дыяганальнага выгляду, гэта значыць выбраць такую сістэму каардынатаў, вызначаемую формай і становішчам цела, у якой усе недыяганальныя элементы будуць роўныя нулю. Адпаведныя напрамкі каардынатных восей называюцца *галоўнымі восямі інерцыі*, а велічыні момантаў інерцыі адносна галоўных восей $I_x = I_{xx}$; $I_y = I_{yy}$; $I_z = I_{zz}$ – *галоўнымі момантамі інерцыі*. Калі галоўныя восі вярчэння вызначаны адносна цэнтра мас, то гэтыя восі будуць *восямі свабоднага вярчэння*.
Калі цвёрдае цела верціцца *вакол замацаванай восі*, то выгадна прадставіць радыус-вектар у выглядзе (малюнак 2):

$$\vec{r}_i = \vec{d}_i + \vec{\rho}_i, \qquad (8)$$

дзе вектары $\vec{d}_i \parallel \vec{\omega}$; $\vec{\rho}_i \perp \vec{\omega}$, а вектар вуглавой хуткасці $\vec{\omega}$ – накіраваны ўздоўж восі вярчэння ў адпаведнасці з *правілам правага свярдзёлка* (*правай рукі*). У гэтым выпадку хуткасць i-ага элемента $\vec{\upsilon}_i = [\vec{\omega}, \vec{\rho}_i]$.



Мал. 2.

Можна ўвесці паняцце *моманту імпульсу адносна фіксаванай восі*. Калі вось праходзіць праз цэнтр мас, то адпаведны момант імпульсу роўны:

$$\vec{L} = \sum_i \Delta m_i [\vec{\rho}_i, \vec{\upsilon}_i] = \sum_i \Delta m_i [\vec{\rho}_i, [\vec{\omega}, \vec{\rho}_i]] = \sum_i \Delta m_i {\rho_i}^2 \vec{\omega} = I\vec{\omega}, \qquad (9)$$

дзе $I = \sum_i \Delta m_i {\rho_i}^2$ (10)

з'яўляецца *момантам інерцыі адносна восі*, якая вызначае напрамак вектара вуглавой хуткасці $\vec{\omega}$.

Выразім момант інерцыі I, разбіўшы цела на асобныя элементы, праз каардынаты i-ага элемента. Увядзём накіроўваючыя косінусы:

$$\cos\alpha = \frac{\omega_x}{\omega}; \ \cos\beta = \frac{\omega_y}{\omega}; \ \cos\gamma = \frac{\omega_z}{\omega}; \qquad (11)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}, \qquad (12)$$

прадставім $\rho_i^2 = r_i^2 - d_i^2$ (малюнак 2). (13)

Разгледзім:

$$d_i^2 = \left(\vec{r}_i, \frac{\vec{\omega}}{\omega} \right)^2 = \left(x_i \frac{\omega_x}{\omega} + y_i \frac{\omega_y}{\omega} + z_i \frac{\omega_z}{\omega} \right)^2 =$$
$$= \left(x_i \cos\alpha + y_i \cos\beta + z_i \cos\gamma \right)^2 . \qquad (14)$$

Улічваючы трыганаметрычную тоеснасць

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 , \qquad (15)$$

а таксама выразы (13), (14), (15) прадставім момант інерцыі цела адносна восі ў выглядзе:

$$I = \sum_i \Delta m_i \left(r_i^2 - d_i^2 \right) =$$
$$= \sum_i \Delta m_i \left\{ \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \right) \left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \right) - \right.$$
$$\left. - \left(x_i \cos\alpha + y_i \cos\beta + z_i \cos\gamma \right)^2 \right\} . \qquad (16)$$

Групіруючы ў (16) аднасклады па ступенях косінусаў, атрымаем выраз у выглядзе:

$$I = I_{xx} \cos^2\alpha + I_{yy} \cos^2\beta + I_{zz} \cos^2\gamma +$$
$$+ 2 I_{xy} \cos\alpha \cos\beta + 2 I_{xz} \cos\alpha \cos\gamma + 2 I_{yz} \cos\beta \cos\gamma . \qquad (17)$$

У выразе (17) кампаненты тэнзара I_{xx}, I_{xy} і так далей пры вярчэнні цела змяняюць сваю велічыню, таму што яны знаходзяцца з дапамогай нерухомай сістэмы каардынат, а не сістэмай каардынат, звязанай з целам. Калі ўвесці такую сістэму каардынат, для якой у некаторы момант часу тэнзар інерцыі прымае дыяганальны выгляд:

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} ,$$

Для такога моманту часу атрымаем:

$$I = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma . \qquad (18)$$

З іншага боку (вынікае з азначэння (10)) момант інерцыі не павінен змяняцца пры вярчэнні цела. Таму для вызначэння I па выразе (17) можна браць любы момант часу, у тым ліку і той, калі сістэма каардынатаў, звязаная з целам, супадае з некаторай нерухомай сістэмай, гэта значыць у (17) можна разглядаць I_{xx}, I_{xy}, і так далей, вызначанымі ў некаторы момант у сістэме каардынатаў, звязанай з целам.

Разгледзім геаметрычную інтэрпрэтацыю выразу (17). Выберам дэкартаву сістэму каардынатаў, і для кожнага значэння α, β, γ адкладзем уздоўж восяў Ox, Oy, Oz адпаведныя велічыні:

$$x = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{I(\alpha,\beta,\gamma)}}, \qquad y = \frac{\cos\beta}{\sqrt{I(\alpha,\beta,\gamma)}}, \qquad z = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{I(\alpha,\beta,\gamma)}} \tag{19}$$

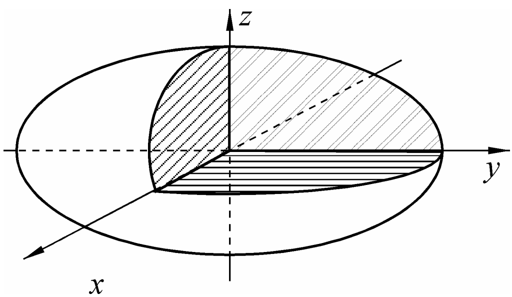
Мноства пунктаў з каардынатамі (x, y, z) вызначаюць нейкую паверхню. Каб знайсці ўраўненне гэтай паверхні, падставім у (17) накіроўваючыя косінусы, вызначаныя праз каардынаты (x, y, z):

$$\cos\alpha = x\sqrt{I}, \qquad \cos\beta = y\sqrt{I}, \qquad \cos\gamma = z\sqrt{I}. \tag{20}$$

Пры гэтым атрымаем ураўненне паверхні другога парадку:

$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 + 2I_{xy}xy + 2I_{xz}xz + 2I_{yz}yz = 1. \tag{21}$$

Гэта паверхня (геаметрычна – эліпсоід) называецца *эліпсоідам інерцыі адносна адвольна выбранага пункта O* (малюнак 3). Восі эліпсоіда інерцыі называюцца *галоўнымі восямі інерцыі цела ў гэтым пункце*. Такім чынам, у кожным пункце існуюць тры ўзаемна перпендыкулярныя восі інерцыі. З дапамогай эліпсоіда інерцыі лёгка вызначыць значэнне моманту інерцыі, калі зададзены накіроўваючыя косінусы восей.



Мал. 3. Эліпсоід інерцыі

З аналітычнай геаметрыі вядома, што эліпсоід мае тры ўзаемна перпендыкулярныя восі. Ураўненне эліпсоіда, аднесенае да гэтых восей, мае найбольш просты выгляд (кананічны выгляд). Яно не ўтрымлівае членаў са здабыткамі розных каардынатаў. Таму, прымаючы галоўныя восі інерцыі за восі каардынатаў, цэнтрабежныя моманты інерцыі будуць роўнымі нулю ($I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$). Улічваючы ўраўненне (21) атрымаем выраз:

$$I = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma \qquad (22)$$

У гэтым выпадку момант інерцыі вызначаецца трыма велічынямі. Эліпсоід інерцыі называецца *цэнтральным*, калі ён выбраны адносна цэнтра мас, а яго галоўныя восі называюцца *галоўнымі цэнтральнымі восямі інерцыі*. Для аднародных сіметрычных цел галоўныя цэнтральныя восі – *гэта восі сіметрыі цела*.

Калі ўлічыць, што размернасць моманту інерцыі ML^2, тады момант інерцыі цела можна прадставіць у выглядзе:

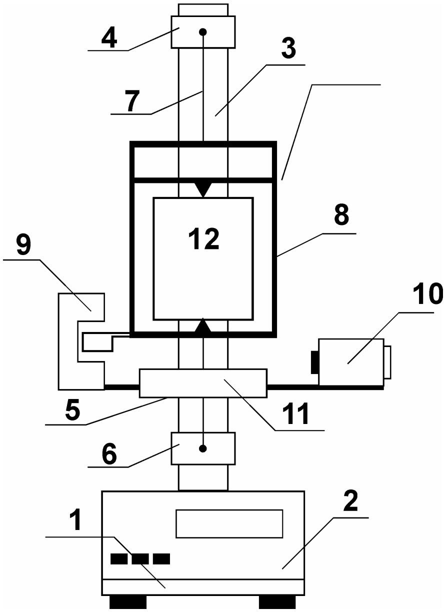
$$I = mr_{\varphi}^2, \qquad (23)$$

дзе m – маса ўсяго цела, момант інерцыі якога вызначаецца, r_{φ} – *радыус інерцыі цела* – адлегласць ад восі, на якой неабходна памясціць матэрыяльны пункт, з масай, роўнай масе ўсяго цела, каб момант інерцыі адносна гэтага матэрыяльнага пункта быў роўны моманту інерцыі цела.

Калі цвёрдае цела мае простую геаметрычную форму, то яго момант інерцыі можна вылічыць дакладнымі разлікамі. У астатніх выпадках момант інерцыі адносна восі рэальнага цела можна знайсці доследна.

Доследная прылада

Круцільны маятнік, з дапамогай якога выконваецца работа, прадстаўлены на малюнку 4. На аснове 1, якая мае чатыры ножкі з рэгуляванай вышынёй, зманціравана прыборная панель з мілісекундамерам 2. На аснове замацавана калона 3, на якой пры дапамозе заціскальных шрубаў прымацаваны кранштэйны 4, 5, 6. Кранштэйны 4 і 6 маюць заціскі, з дапамогай якіх замацаваны стальны дрот 7. Да дроту прымацавана рамка 8. На кранштэйне 5 замацавана стальная пліта, якая служыць асновай фотаэлектрычнаму датчыку 9, электрамагніту 10 і вуглавой шкале 11. Электрамагніт 10 можа змяніць сваё становішча на пліце, яго становішча адносна фотаэлектрычнага датчыка паказвае на шкале стрэлка, прымацаваная да магніта. Канструкцыя рамкі дазваляе замацоўваць грузы 12, якія значна адрозніваюцца масай у параўнанні з масай самой рамкі.

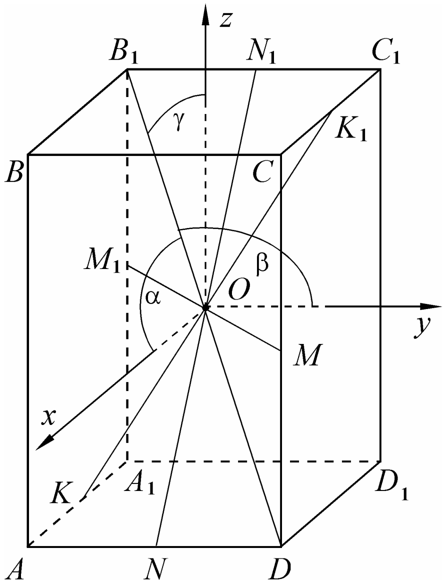


Мал. 4. Доследная прылада

Цела, для якога вызначаецца момант інерцыі ў дадзенай рабоце – аднародны металічны паралелепіпед (малюнак 5).

Тэорыя метаду

Змесцім пачатак сістэмы каардынатаў у цэнтр мас паралелепіпеда (малюнак 5), восі каардынатаў накіруем уздоўж яго восей сіметрыі. Накіруем вось Ox перпендыкулярна да найбольшай па велічыні грані паралелепіпеда, вось Oy перпендыкулярна да сярэдняй грані паралелепіпеда, вось Oz перпендыкулярна да найменшай грані. Пасярэдзіне кожнай грані зроблены невялічкія паглыбленні для замацавання цела пры вярчэнні вакол восяў Ox, Oy, Oz. Паглыбленні зроблены таксама ў месцах, якія дазваляюць замацаваць цела пры яго вярчэнні вакол восяў MM_1, KK_1, NN_1, DB_1.



Мал. 5.

Паралелепіпед нерухома замацоўваюць у рамцы, і з дапамогай электрамагніта паварочваюць на некаторы вугал. Пасля вызвалення рамкі, яна будзе здзяйсняць круцільныя ваганні, перыяд якіх можна вызначыць, ведаючы лік N і працягласць t ваганняў:

$$T = t/N. \qquad (24)$$

Такім чынам перыяд ваганняў рамкі з грузам роўны:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I}{D}}, \qquad (25)$$

дзе I_0 і I – моманты інерцыі рамкі і грузу адпаведна, D – модуль кручэння дроту.

Для выключэння велічыні D і моманту інерцыі самой рамкі з грузам неабходна вымераць перыяды ваганняў рамкі без грузу T_0, рамкі з эталонным грузам $T_э$ (грузам, момант інерцыі якога вядомы) і рамкі з даследуемым паралелепіпедам T. Тады можна запісаць адпаведныя выразы для перыядаў ваганняў:

$$T_0 \approx 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}}; \qquad T_э \approx 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_э}{D}}; \qquad T \approx 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I}{D}}, \qquad (26)$$

дзе I_0 – момант інерцыі пустой рамкі, $I_э$ – момант інерцыі эталоннага грузу, I – момант інерцыі паралелепіпеда.

Выключаючы з гэтых ураўненняў велічыні I_0 і D, атрымаем выраз для разліку моманту інерцыі паралелепіпеда:

$$I = I_э \frac{T^2 - T_0^2}{T_э^2 - T_0^2}. \qquad (27)$$

Карыстаючыся выразам (27), можна вызначыць восевыя (галоўныя) моманты інерцыі цела I_x, I_y, I_z адносна восяў Ox, Oy, Oz, вызначыўшы перыяды ваганняў даследуемага паралелепіпеда T_x, T_y, T_z адносна ўказаных восяў.

У якасці эталоннага грузу выбіраецца кубік. Момант інерцыі куба адносна любой восі, якая праходзіць праз яго цэнтр мас, перпендыкулярна двум процілеглым граням, роўны:

$$I_э = \frac{1}{6} m l^2, \qquad (28)$$

дзе m – маса куба, l – даўжыня яго рабра.

Ведаючы моманты інерцыі I_x, I_y, I_z можна вызначыць момант інерцыі прамавугольнага паралелепіпеда адносна любой іншай восі, якая праходзіць праз цэнтр мас па выразе (22).

Няхай даўжыня рабра паралелепіпеда па восі Ox роўна a, па восі Oy роўна b, па восі Oz роўна c. Квадраты накіроўваючых косінусаў для яго дыяганалі роўныя:

$$\cos^2 \alpha = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

$$\cos^2\beta = \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}, \qquad (29)$$

$$\cos^2\gamma = \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Тады выраз (22) для разліку моманту інерцыі паралелепіпеда, адносна восі, супадаючай з дыяганалямі паралелепіпеда, набудзе выгляд:

$$I = \frac{I_x a^2 + I_y b^2 + I_z c^2}{a^2+b^2+c^2}. \qquad (30)$$

Парадак выканання работы:

1. Вызначце час 10 поўных вярчальных ваганняў рамкі без грузу.
2. Вызначце перыяд ваганняў рамкі без грузу T_0.
3. Паўтарыце пп. 1–2 яшчэ 2 разы і вызначце сярэдняе значэнне перыяду ваганняў.
4. Замацуйце у рамцы куб адносна любой з восяў, якая праходзіць праз цэнтры двух процілеглых граняў і цэнтр мас куба.
5. Вызначце сярэдняе значэнне перыяду ваганняў эталоннага грузу з рамкай $T_э$ аналагічна пп.1–3.
6. Замацуйце ў рамцы прамавугольны паралелепіпед.
7. Вызначце сярэднія перыяды ваганняў паралелепіпеда адносна восяў T_x, T_y, T_z аналагічна пп.1–3.
8. Разлічыце моманты інерцыі I_x, I_y, I_z па выразе (27).
9. Вызначце перыяды ваганняў паралелепіпеда адносна ўсіх магчымых восей, не супадаючых з восямі каардынатаў (дзе маюцца адпаведныя паглыбленні для замацавання ў рамцы) аналагічна пп. 1–3.
10. Вызначце моманты інерцыі адносна гэтых восяў па выразе (27).
11. Разлічыце моманты інерцыі паралелепіпеда адносна тых жа восяў па выразе (30).
12. Ацаніце хібнасці вымярэнняў. Зрабіце высновы.

Пытанні для самакантролю:

1. Дайце азначэнне цвёрдага цела.
2. Вызначце паняцце моманту імпульсу і моманту інерцыі адносна пункту.
3. Вызначце паняцце моманту імпульсу і моманту інерцыі адносна восі.
4. Вызначце паняцце тэнзару інерцыі.
5. Дайце геаметрычную інтэрпрэтацыю тэнзару інерцыі.
6. Азначце паняцці: галоўныя восі вярчэння, галоўныя моманты інерцыі, свабодныя восі.