

Ответы на вопросы программы-минимум
по дисциплине Теория вероятностей и математическая статистика
для студентов 2 курса факультета математики и информатики
специальности «Программное обеспечение информационных технологий», 4 семестр

1. Определение суммы двух событий.

Объединением (суммой) двух событий A и B называют событие C , происходящее тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из двух событий A или B . Используют обозначение $C = A \cup B$ или для несовместных событий A и B – обозначение $C = A + B$.

2. Определение произведения двух событий?

Пересечением (произведением) двух событий A и B называют событие C , происходящее тогда и только тогда, когда одновременно происходят оба события A и B , то есть событие, состоящее только из тех и только тех элементарных исходов, которые принадлежат и событию A и событию B . Используют обозначение $C = A \cap B$ или $C = AB$.

3. Определение достоверного и невозможного событий.

Событие, состоящее из всех элементарных исходов, то есть событие, которое обязательно происходит в данном опыте, называют достоверным и обозначают Ω .

Событие, не содержащее ни одного элементарного исхода, то есть событие, которое никогда не происходит в данном опыте, называют невозможным и обозначают \emptyset .

4. Какие два события называют несовместными?

Событий A и B называют несовместными, если их пересечение является невозможным событием, то есть $A \cap B = \emptyset$.

5. Определение полной группы событий.

События A_1, A_2, \dots, A_n образуют полную группу событий, если

- 1) события попарно несовместны;
- 2) сумма этих событий есть достоверное событие: $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$.

6. Классическое определение вероятности.

Вероятностью события A называется число, рассчитываемое по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n – число всех равновозможных исходов эксперимента, m – число исходов, благоприятствующих событию A .

7. Какие значения может принимать вероятность события?

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

8. Как определить вероятность события противоположного к A , если известна $P(A)$?

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

9. Определение выборки. Чем отличаются размещения от сочетаний?

Результат выбора m элементов из группы, содержащей n элементов, называется выборкой из n по m элементов. Размещение – это выборка, в которой учитывается порядок элементов, сочетание – выборка, в которой не учитывается порядок элементов.

10. Какая выборка называется перестановкой из n элементов?

Размещение без повторений из n по n элементов называется перестановкой из n элементов.

11. Формула для числа сочетаний из n по m элементов.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

12. Формула для числа размещений из n по m элементов.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

13. Формула для числа перестановок из n элементов.

$$P_n = n!.$$

14. Формула для числа размещений с повторениями из n по m элементов.

$$\tilde{A}_n^m = n^m.$$

15. Геометрическое определение вероятности.

Вероятность попадания в область A , $A \subset \Omega$, при бросании точки наудачу в область Ω , это число определяемое по формуле

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \text{ где } \mu(\cdot) - \text{мера множества.}$$

16. Определение условной вероятности.

Условной вероятностью события A при условии события B , $P(B) > 0$, называется величина

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

17. Определение независимости двух событий A и B .

События A и B называются независимыми или статически независимыми относительно вероятности P , если выполняется равенство

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

18. Формула для вероятности произведения двух зависимых событий.

$$P(AB) = P(A)P(B/A)$$

19. Формула для вероятности суммы двух событий в случае несовместных событий A и B

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

20. Формула для вероятности суммы двух событий в случае совместных событий A и B .

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

21. Формула полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i),$$

здесь A – сложное событие, которое наступает одновременно с одним из событий H_1, H_2, \dots, H_n , образующих полную группу.

22. Формула Байеса.

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)} = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)}, \quad k = \overline{1, n}.$$

23. Свойство, которому должны удовлетворять вероятности гипотез при использовании формулы полной вероятности.

$$\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1.$$

24. Определение схемы независимых испытаний Бернулли.

Схемой Бернулли или последовательностью независимых испытаний называется последовательность испытаний, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) при каждом испытании различают лишь два исхода – появление некоторого события A , что называют «успехом» или появление \bar{A} , что называют «неудачей»;
- 2) испытания являются независимыми;
- 3) вероятность «успеха» во всех испытаниях постоянна и равна p , $p = P(A)$, а «неудачи» – q , $q = P(\bar{A}) = 1 - p$.

25. Формула Бернулли, перечислить все обозначения в данной формуле.

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = \overline{0, n}, \text{ где}$$

n – общее число проведенных независимых испытаний,

m – число «успехов»,

p – вероятность «успеха» в каждом из испытаний,

$q = 1 - p$ – вероятность «неудачи»,

$P_n(m)$ – вероятность того, что в n независимых испытаниях произошло ровно m «успехов».

26. Неравенство для определения наиболее вероятного числа успехов в схеме Бернулли.

Наивероятнейшее число «успехов» в схеме Бернулли можно определить, как целое число, удовлетворяющее неравенству

$$np - q \leq m_0 \leq np + p.$$

27. Локальная предельная теорема Муавра – Лапласа

При большом числе испытаний n , проводимых по схеме Бернулли с вероятностью успеха p , $0 < p < 1$, справедлива следующая приближенная формула:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Обозначения:

n – общее число проведенных независимых испытаний,

m – число «успехов»,

p – вероятность «успеха» в каждом из испытаний,

$q = 1 - p$ – вероятность «неудачи»,

$P_n(m)$ – вероятность того, что в n независимых испытаниях произошло ровно m «успехов».

28. Записать вид функции $\varphi(x)$ и перечислить ее свойства.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Свойства функции $\varphi(x)$:

1) значения $\varphi(x)$ можно найти по таблице специальных приложений;

2) функция $\varphi(x)$ чётная, значит $\varphi(-x) = \varphi(x)$;

3) функция $\varphi(x)$ монотонно убывающая: $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$, причем можно считать, что при $x \geq 4$, $\varphi(x) \approx 0$.

29. Интегральная предельная теорема Муавра – Лапласа.

При большом числе испытаний n , проводимых по схеме Бернулли с вероятностью успеха p , $0 < p < 1$, справедлива следующая приближенная формула:

$$P_n(m_1, m_2) = P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ – функция Лапласа, } x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Обозначения: n – общее число проведенных независимых испытаний,

m – число «успехов»,

p – вероятность «успеха» в каждом из испытаний,

$q = 1 - p$ – вероятность «неудачи»,

$P_n(m_1, m_2)$ – вероятность того, что в n независимых испытаниях произошло от m_1 до m_2 «успехов».

30. Записать вид функции Лапласа $\Phi(x)$ и перечислить ее свойства.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Свойства функции $\Phi(x)$:

1) значения $\Phi(x)$ можно найти по таблице специальных приложений;

2) Функция $\Phi(x)$ нечётная, значит $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;

3) функция $\Phi(x)$ монотонно возрастает: $\Phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$, причем можно считать, что при $x \geq 5$

$$\Phi(x) \approx \frac{1}{2}.$$

31. Предельная теорема Пуассона.

При большом числе испытаний n , проводимых по схеме Бернулли с вероятностью успеха p , в случае, когда $p \rightarrow 0$, справедлива следующая приближенная формула:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np.$$

Обозначения:

n – общее число проведенных независимых испытаний,

m – число «успехов»,

p – вероятность «успеха» в каждом из испытаний,

$q = 1 - p$ – вероятность «неудачи»,

$P_n(m)$ – вероятность того, что в n независимых испытаниях произошло ровно m «успехов».

32. Как вы понимаете, что такое случайная величина (СВ)? Привести пример СВ.

Под СВ будем понимать такую величину, которая в результате опыта принимает неизвестное заранее значение, причем это значение от опыта к опыту меняется. Например, время безотказной работы электроприбора.

33. Определение функции распределения вероятностей СВ.

Функцией распределения $F_\xi(x)$ СВ ξ называют функцию:

$$F_\xi(x) = P(\omega: \xi(\omega) < x) = P(\xi < x), \quad x \in R,$$

т.е. значение ф.р. в точке $x \in R$ есть вероятность того, что СВ примет значение меньше чем x .

34. Как найти $P(x_1 \leq \xi < x_2)$ с помощью функции распределения СВ?

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1).$$

35. Определение дискретной СВ (ДСВ) или СВ, имеющей дискретное распределение.

СВ ξ имеет дискретное распределение (является дискретной), если она принимает конечное или счётное множество значений x_1, x_2, \dots, x_n с определенными вероятностями удовлетворяющими условиям:

$$1) p_i = P(\xi = x_i) > 0, \quad \forall i;$$

$$2) \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \text{ (свойство нормировки).}$$

36. Свойство нормировки для вероятностей ДСВ.

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

37. Определение непрерывной СВ (НСВ) или СВ, имеющей абсолютно непрерывное распределение. Какая функция называется плотностью распределения вероятностей?

СВ ξ имеет абсолютно непрерывные распределения или называется непрерывной, если существует неотрицательная функция $p_{\xi}(x)$, такая что $\forall x \in R$ функция распределения представима в виде

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x p_{\xi}(t) dt .$$

Плотностью распределения вероятностей СВ ξ называют неотрицательную функцию $p_{\xi}(x)$, удовлетворяющую приведенному соотношению.

38. Свойство нормировки для НСВ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(x) dx = 1 .$$

39. Как найти $P(x_1 \leq \xi < x_2)$ с помощью плотности распределения вероятностей НСВ?

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p_{\xi}(x) dx .$$

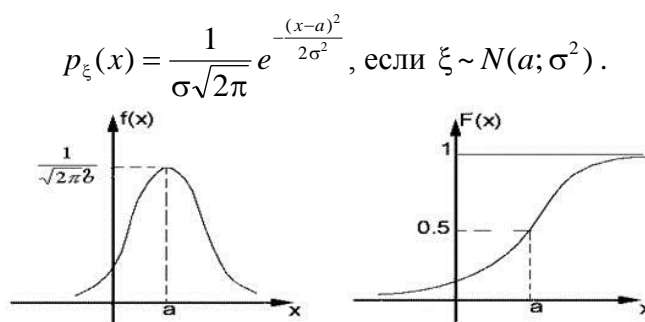
40. Как определить $p_{\xi}(x)$ через $F_{\xi}(x)$?

$$p_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x) .$$

41. Как определить $F_{\xi}(x)$ через $p_{\xi}(x)$?

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x p_{\xi}(t) dt .$$

42. Плотность распределения вероятностей нормального распределения. График кривой распределения.



43. Смысл параметров распределения a и σ^2 нормального распределения.

Параметр a – математическое ожидание или среднее значение нормальной СВ; параметр σ^2 – дисперсия нормальной СВ или рассеяние значений вокруг математического ожидания.

44. Плотность равномерного распределения вероятностей на отрезке $[a, b]$.

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

45. Формула вычисления математического ожидания ДСВ.

$$M_{\xi} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i - \text{ДСВ.}$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины или среднее взвешенное по вероятности.

46. Формула вычисления математического ожидания НСВ.

$$M_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{\xi}(x) dx - \text{НСВ.}$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины или среднее взвешенное по вероятности.

47. Определение дисперсии.

$$D_{\xi} = M(\xi - M_{\xi})^2.$$

Дисперсия характеризует «разброс» или «рассеивание» значений СВ ξ вокруг среднего значения M_{ξ} .

48. Упрощенная формула для вычисления дисперсии.

$$D_{\xi} = M_{\xi^2} - (M_{\xi})^2.$$

49. Формулы для расчета дисперсии ДСВ.

$$D_{\xi} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \right)^2.$$

50. Формулы для расчета дисперсии НСВ.

$$D_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_{\xi}(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x p_{\xi}(x) dx \right)^2.$$

51. Среднее квадратическое отклонение.

$$\sigma_{\xi} = +\sqrt{D_{\xi}}.$$

52. Формула вычисления выборочной средней.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s x_i n_i$$

53. Формула вычисления выборочной дисперсии.

$$D_B = \overline{x^2} - \bar{x}^2, \text{ где } \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s x_i^2 n_i.$$