УСРС – 3

Проверка статистических гипотез. Проверка гипотезы о нормальном распределении выборочной совокупности. Критерий Хи-квадрат

Описание УСРС – 3

1. Изучить теоретический блок и примеры решения задач.
2. Выполнить индивидуальное практическое задание в соответствии с вариантом.
3. Работа должна включать не только расчетную часть, но и содержательные выводы.
4. Работа должна быть защищена не позже срока, указанного преподавателем.

Теоретический блок и примеры решения задач

Проверка статистических гипотез

Наряду с задачами оценивания параметров большую группу задач математической статистики составляют так называемые задачи проверки статистических гипотез. ***Статистической гипотезой*** называется предположение относительно параметров или вида распределения изучаемой случайной величины. Например, после анализа выборки, то есть после того, как мы построили статистический ряд, определили выборочные характеристики, построили полигон, гистограмму, функцию распределения, мы делаем предположение, что данная случайная величина распределена по нормальному закону с определенными параметрами. Выдвинутое предположение является статистической гипотезой. После этого нужно принять решение: противоречат экспериментальные данные высказанной гипотезе или нет. Процесс принятия решения называется ***проверкой статистической гипотезы***, а алгоритм проверки – ***решающим правилом***. Поскольку мы выдвигали гипотезу, опираясь только на случайные выборочные значения, наши выводы будут носить вероятностный характер. Мы не дадим точного ответа: да или нет. Можно будет лишь с некоторой долей уверенности (с некоторой вероятностью) утверждать, что данные не противоречат или противоречат предположению.

Статистические гипотезы можно разделить на следующие основные группы:

1) гипотезы о параметрах распределения,
2) гипотезы о виде распределения.

Выдвинутую гипотезу называют ***нулевой*** и обозначают ее через H_0. Наряду с H_0 рассматривают ***конкурирующую*** (или ***альтернативную***) гипотезу H_1. Например:

а) если H_0: «генеральная совокупность распределена нормально», то H_1: «генеральная совокупность не распределена нормально»;

б) если H_0: «математическое ожидание ξ равно 5», то H_1: «математическое ожидание ξ не равно 5».

Таким образом, ставится задача проверки гипотезы H_0 относительно конкурирующей гипотезы H_1 на основе выборки X объема n. Правило, по которому принимается или отвергается гипотеза, называется ***статистическим критерием***. Принципы проверки статистических гипотез впервые были сформулированы в работах известных математиков Е.Неймана и Э.Пирсона. Они исходили из того что, принимая или отвергая гипотезу H_0, можно допустить ошибки двух видов.

Ошибка первого рода: H_0 отвергается (принимается H_1) в то время, как в действительности верна гипотеза H_0. Вероятность ошибки первого рода называют ***уровнем значимости*** и обозначают α:

$$P(H_1 / H_0) = \alpha.$$

Величину $1-\alpha$, то есть вероятность принять верную гипотезу, называют ***уровнем доверия*** (***доверительным уровнем***):

$$P(H_0 / H_0) = 1-\alpha.$$

Ошибка второго рода: H_0 принимается, в то время как верна гипотеза H_1. Вероятность ошибки второго рода обозначается β:

$$P(H_0 / H_1) = \beta.$$

Вероятность принять гипотезу H_1, если она верна, называют ***мощностью критерия***:

$$P(H_1 / H_1) = 1-\beta.$$

Возможные ситуации наглядно иллюстрируются следующей таблицей.

Гипотеза H_0	Принимается	Отвергается
Верна	Правильное решение	Ошибка 1-го рода
Неверна	Ошибка 2-го рода	Правильное решение

Применяя юридическую терминологию, α – вероятность вынесения судом обвинительного приговора, когда на самом деле обвиняемый невиновен, β – вероятность вынесения судом оправдательного приговора, когда на самом деле обвиняемый виновен в совершенном преступлении.

Нам хотелось бы, конечно, сделать вероятности ошибок первого и второго рода нулевыми. Однако это оказывается невозможным. Более того, как правило, уменьшая вероятность ошибки первого рода, мы увеличиваем вероятность ошибки второго рода и наоборот.

Суть проверки статистической гипотезы заключается в том, что используется специально составленная выборочная характеристика (***статистика***) $K = K(x_1, ..., x_n)$, полученная по выборке X, так, чтобы в случае, если гипотеза H_0 верна, точное или приближенное распределение K было бы известным, например χ^2-распределением. Построение критерия, в зависимости от вида гипотезы H_0, заключатся в выборе таких значений $K_{кр}^1$ и $K_{кр}^2$, что если $K_{кр}^1 < K < K_{кр}^2$, то гипотеза H_0 принимается. При этом возможно $K_{кр}^1 = -\infty$ или $K_{кр}^2 = +\infty$. Значения $K_{кр}^1$ и $K_{кр}^2$ называются критическими, а область

$$K_Д = \left\{K : K_{кр}^1 < K < K_{кр}^2\right\}$$

называется областью допустимых значений.

Таким образом, множество возможных значений статистики K разбивается на два непересекающихся подмножества: ***критическую область*** – множество значений K, при которых H_0 отвергается – $\overline{K_Д}$, и ***область допустимых значений*** (область принятия решений) – множество значений K, при которых H_0 принимается – $K_Д$. При этом точки $K_{кр}^1$ и $K_{кр}^2$, отделяющие эти два множества, называют ***критическими точками***. Если фактически наблюдаемое (полученное по выборке) значение статистики критерия K попадает в критическую область, то гипотезу H_0 отвергают, в противном случае принимают.

В зависимости от вида конкурирующей гипотезы H_1 выбирают ***правостороннюю***, ***левостороннюю*** или ***двухстороннюю*** критическую область. При конкурирующей гипотезе $H_1 : \theta > \theta_0$ следует использовать правостороннюю критическую область ($K_{кр}^1 = -\infty$), в случае $H_1 : \theta < \theta_0$ – левостороннюю ($K_{кр}^2 = +\infty$), а при гипотезе $H_1 : \theta \neq \theta_0$ – двухстороннюю критическую область. Границы критических областей $K_{кр}^1$ и $K_{кр}^2$ при заданном уровне значимости α определяются соответственно из соотношений:

для правосторонней критической области

$$P(K > K_{кр}^2) = \alpha,$$

для левосторонней критической области

$$P(K < K_{кр}^1) = \alpha,$$

для двухсторонней критической области

$$P(K > K^2_{кр}) = P(K < K^1_{кр}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Нейман и Пирсон предложили следующий принцип построения критической области. *Критическую область следует выбирать так, чтобы вероятность попадания в нее статистического критерия* K *была минимальной и равной* α*, если верна нулевая гипотеза* H_0*, и максимальной в противоположном случае.* Другими словами, критическая область должна быть такой, чтобы при заданном уровне значимости α мощность критерия $1-\beta$ была максимальной. Задача построения такой области решается с помощью теоремы Неймана – Пирсона, излагаемой в более полных курсах математической статистики. Уровень значимости α обычно задают значениями 0,05 и 0,01.

Наиболее распространена правосторонняя критическая область, рассмотрим подробнее принцип ее построения. По выборочному распределению статистики K определяется критическое значение $K^2_{кр}$ – такое что, если гипотеза H_0 верна, то вероятность $P(K > K^2_{кр}) = \alpha$ мала, то есть событие $K > K^2_{кр}$ можно считать практически невозможным. Поэтому, если окажется $K > K^2_{кр}$, то гипотеза H_0 отвергается, в то время как обнаружение того, что $K < K^2_{кр}$, подтверждает справедливость H_0.

Предположим, что если верна гипотеза H_0, то статистика K имеет распределение с плотностью $p = p_1(K)$, а если верна гипотеза H_1, то $p = p_2(K)$. Тогда описанные выше построения критической области можно изобразить графически.

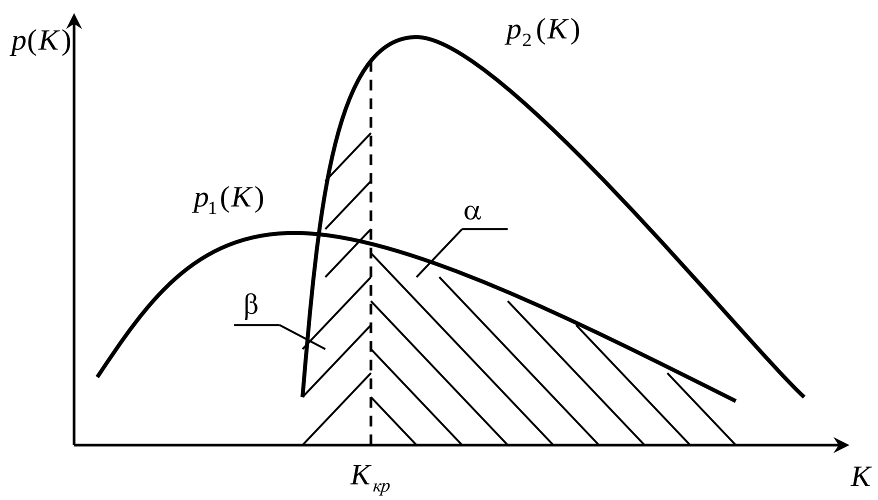

Рис. 1

На рис. 1 $K^1_{кр} = -\infty$ или $K^2_{кр} = K_{кр}$. Критической правосторонней областью является множество $\{K : K > K_{кр}\}$. Гипотеза H_0 принимается, если $K < K_{кр}$. Площади заштрихованных областей представляют собой вероятности ошибок 1-го и 2-го рода, α и β соответственно.

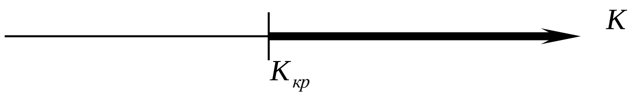

Рис. 2

На рис. 2 представлена правосторонняя критическая область, принцип построения которой описан выше.

Итак, процедуру проверки статистической гипотезы можно разбить на следующие основные шаги.

1. Сформулировать нулевую H_0 и конкурирующую H_1 гипотезы.
2. Задать уровень значимости α.
3. Выбрать статистику K для проверки гипотезы H_0.
4. Найти плотность распределения $p = p_1(K)$ статистики в предположении, что гипотеза H_0 верна.
5. Определить критическую область $\overline{K_Д}$. Для наиболее часто используемых распределений (Стьюдента, Фишера, χ^2) составлены таблицы критических точек, которые можно найти в учебниках по математической статистике.
6. По выборке вычислить выборочное значение K статистики критерия.
7. Принять решение: если $K \in \overline{K_Д}$, то H_0 отклоняется (то есть принимается H_1), если $K \in K_Д$, то H_0 принимается.

Принятое решение, разумеется, носит вероятностный характер. Поэтому обычно применяют более осторожные формулировки. Вместо того чтобы сказать «гипотеза H_0 отклоняется», говорят «данные эксперимента не подтверждают гипотезу H_0», «гипотеза не согласуется с экспериментом» и т.д.

<u>Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности.</u>

Критерий согласия Пирсона

Одной из главных задач математической статистики является установление истинного закона распределения случайной величины на основании экспериментальных данных. На практике о законе распределения можно судить, например, по виду полигона и гистограммы. Однако полной уверенности в сделанном предположении о законе распределения нет, поэтому вопрос может стоять лишь о проверке гипотезы о предполагаемом законе распределения. Критерии, устанавливающие закон распределения, называются критериями согласия. Имеется несколько критериев согласия: χ^2 Пирсона, Колмогорова, Смирнова и др. Ограничимся описанием применения критерия Пирсона к проверке гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Критерий Пирсона аналогично применяется и для других распределений, в этом состоит его достоинство.

Алгоритм применения критерия Пирсона заключается в следующем.

1. Из генеральной совокупности образовывается случайная выборка, и на ее основе делается предположение о нормальном законе распределения. Выдвигается гипотеза H_0: «генеральная совокупность распределена нормально».

2. Вычисляются выборочные числовые характеристики $\overline{x}$, σ_B.

3. Вычисляются теоретически частоты:

3.1. <u>для дискретного ряда</u>

$$n_i' = \frac{nh}{\sigma_B}\varphi(u_i),$$

где n – объем выборки, h – шаг (разность между двумя соседними вариантами),

$$u_i = \frac{x_i - \overline{x}}{\sigma_B}, \ \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}},$$

значения $\varphi(u)$ определяются о таблице приложения 1;

3.2. <u>для интервального ряда</u>

$$n_i' = nP_i,$$

где n – объем выборки, $P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ – теоретические вероятности попадания в интервалы $x_i - x_{i+1}$, $z_i = \frac{x_i - \overline{x}}{\sigma_B}$, $z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \overline{x}}{\sigma_B}$, $\Phi(z)$ – функция Лапласа, значения которой определяются по таблице приложения 2.

4. Находится наблюдаемое значение критерия Пирсона по формуле

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s}\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}.$$

5. По таблице критических точек распределения χ^2, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = s - 3$ (s – число групп для дискретно ряда или число интервалов для интервального ряда) находят критическую точку $\chi^2_{кр}(\alpha; k)$ правосторонней критической области.

6. Если $\chi^2 < \chi^2_{кр}$ – нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. Другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо. Если $\chi^2 > \chi^2_{кр}$ – гипотезу отвергают.

Замечание. Малочисленные варианты и интервалы (содержащие малочисленные частоты) $n_i < 5$ следует объединить, а соответствующие им частоты сложить. Если производилось объединение частот, то в формуле $k = s - 3$ следует в качестве s принять число групп или интервалов выборки, оставшихся после объединения частот.

Пример 1. Для интервального статистического ряда, полученного в результате наблюдения случайной величины, требуется:

1) вычислить числовые характеристики данного эмпирического распределения: выборочную среднюю и выборочную дисперсию;
2) вычислить теоретические частоты предполагаемого нормального распределения;
3) при заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, пользуясь критерием Пирсона.

Даны результаты наблюдения за распределением 60 валиков по диаметру:

Диаметр	13,94-14,04	14,04-14,14	14,14-14,24	14,24-14,34	14,34-14,44	14,44-14,54	14,54-14,64	14,64-14,74
Кол. валиков	1	1	4	10	15	13	10	6

<u>Решение</u>.

1). Найдем середины интервалов и примем их в качестве вариант для расчета числовых характеристик

x_i	13,99	14,09	14,19	14,29	14,39	14,49	14,59	14,69
n_i	1	1	4	10	15	13	10	6

$$n = \sum n_i = 60.$$

Выборочную среднюю определим по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i n_i = 14{,}4333$$

Определим $\overline{x^2}$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum x_i^2 n_i = 208{,}3456$$

Дисперсия $D_B = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 208{,}3456 - 14{,}4333 \cdot 14{,}4333 = 0{,}0255$. Среднее квадратическое отклонение $\sigma_B = \sqrt{D_B} = 0{,}1597$.

2). Найдем теоретические частоты. Для этого пронормируем данную случайную величину X и перейдем к величине Z, $Z = \dfrac{X - \overline{x}}{\sigma_B}$. Затем найдем теоретические вероятности, пользуясь формулой $P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$, $\Phi(z)$ – функция Лапласа. И, наконец, по формуле $n_i' = n \cdot P_i = 60 \cdot P_i$ определим теоретические частоты n_i'. Расчеты приведем в следующей таблице:

№	x_i	x_{i+1}	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	P_i	n_i'
1	13,94	14,04	-∞	-2,4627	-0,5	-0,4931	0,0069	0,414
2	14,04	14,14	-2,4627	-1,8365	-0,4931	-0,4669	0,0262	1,572
3	14,14	14,24	-1,8365	-1,210	-0,4669	-0,3869	0,0800	4,800
4	14,24	14,34	-1,2103	-0,5842	-0,3869	-0,2205	0,1664	9,984
5	14,34	14,44	-0,5842	0,0419	-0,2205	0,0167	0,2372	14,232
6	14,44	14,54	0,0419	0,6681	0,0167	0,2480	0,2313	13,878
7	14,54	14,64	0,6681	1,2943	0,2480	0,4022	0,1542	9,252
8	14,64	14,74	1,2943	+∞	0,4022	0,5	0,0978	5,868
$\sum$							1	60

3). Сравним эмпирические и теоретические частоты, используя критерий Пирсона. Вычислим наблюдаемое значение критерия Пирсона по формуле

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} .$$

Необходимым условием применения критерия Пирсона является наличие в каждом из интервалов не менее 5 наблюдений. Однако, учитывая, что первые три интервала содержат малочисленные частоты, объединим их, а соответствующие частоты и теоретические частоты сложим. Данные расчетов приведем в таблице.

№	x_i	x_{i+1}	n_i	n_i'	$\dfrac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$	$\dfrac{n_i^2}{n_i'}$
1	13,94	14,24	6	6,786	0,0910	5,3050
2	14,24	14,34	10	9,984	2,56E-05	10,0160
3	14,34	14,44	15	14,232	0,0414	15,8094
4	14,44	14,54	13	13,878	0,0556	12,1776
5	14,54	14,64	10	9,252	0,0605	10,8085
6	14,64	14,74	6	5,868	0,0030	6,1350
$\sum$			60	60	0,2515	60,2515

Значит, $\chi^2 = 0{,}2515$. Столбец $\frac{n_i^2}{n_i'}$ последней таблицы нужен для контроля, так как, если вычисления произведены правильно, то должно выполняться равенство $\sum_{i=1}^{s} \frac{n_i^2}{n_i'} = \chi^2$. *Контроль*: $\sum_{i=1}^{s} \frac{n_i^2}{n_i'} - n = 60{,}2515 - 60 = 0{,}2515 = \chi^2$ выполняется.

По таблице критических точек распределения χ^2 (приложение 6), по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k = s - 3 = 6 - 3 = 3$ (s – число интервалов) находим критическую точку правосторонней критической области $\chi^2_{кр}(0{,}05; 3) = 7{,}8$. Так как $\chi^2 < \chi^2_{кр}$, то гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности принимаем.

Пример 2. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности с эмпирическим распределением выборки объема $n = 200$:

x_i	6,68	6,70	6,72	6,74	6,76	6,78	6,80	6,82
n_i	5	17	24	54	52	23	18	7

<u>Решение</u>. Распределение заданно в виде дискретного статистического ряда. Во-первых, найдем выборочную среднюю $\bar{x} = 6{,}7507$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_B = 0{,}0316$.

Вычислим теоретические частоты по формуле

$$n_i' = \frac{nh}{\sigma_B}\varphi(u_i) = \frac{200 \cdot 0{,}02}{0{,}0316}\varphi(u_i) = 126{,}58\varphi(u_i),$$

для этого составим расчетную таблицу.

i	x_i	$u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_B}$	$\varphi(u_i)$	$n_i' = 126{,}58\varphi(u_i)$
1	6,68	-2,24	0,0325	4,12
2	6,70	-1,60	0,1109	14,04
3	6,72	-0,97	0,2492	31,54
4	6,74	-0,34	0,3765	47,66
5	6,76	0,29	0,3825	48,42
6	6,78	0,93	0,2589	32,78
7	6,80	1,56	0,1182	14,96
8	6,82	2,19	0,0363	4,60

Составим расчетную таблицу, из которой найдем наблюдаемое значение критерия Пирсона

i	n_i	n'_i	$\dfrac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$	n''_i
1	5	4,12	0,1880	4
2	17	14,04	0,6240	14
3	24	31,54	1,8025	32
4	54	47,66	0,8434	48
5	52	48,42	0,2647	49
6	23	32,78	2,9179	33
7	18	14,96	0,6178	15
8	7	4,60	1,2522	5
$\sum$	200		8,5105	200

Значит, $\chi^2 = 8{,}5105$. По таблице критических точек распределения χ^2 находим критическую точку правосторонней критической области $\chi^2_{кр}(0{,}05; 5) = 11{,}1$.

Так как $\chi^2 < \chi^2_{кр}$ – гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности принимаем. Другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо.

По смыслу частота есть целое число, поэтому иногда целесообразно округлить n'_i до целых, следя при этом за тем, чтобы сумма полученных таким образом теоретических частот была равна объему выборки. Получим частоты n''_i, сумма которых равна 200.

Замечание. Так как нормальное распределение является непрерывным, то, проверяя гипотезу о нормальном распределении на основе дискретного вариационного ряда данных, можно осуществить переход к интервальному вариационному ряду, считая варианты дискретного ряда серединами интервалов. Например, в примере 2 перейти к интервальному ряду

$x_i - x_{i+1}$	6,67-6,69	6,69-6,71	6,71-6,73	6,73-6,75	6,75-6,77	6,77-6,79	6,79-6,81	6,81-6,83
n_i	5	17	24	54	52	23	18	7

Далее осуществлять проверку гипотезы аналогично примеру 1.

Индивидуальные практические задания

Варианты 1 – 30. Используя данные задачи 1.1 –1.30 из УСРС - 1, при заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, пользуясь критерием Пирсона. Сделать вывод.

Литература

1. Теория вероятностей и математическая статистика: пособие / М.А. Маталыцкий, Т.В. Русилко. – 2-е изд., перераб. и доп. – Гродно: ГрГУ, 2009. – 219 с.