Гродзенскі дзяржаўны універсітэт імя Янкі Купалы
фізіка-тэхнічны факультэт
кафедра агульнай фізікі

МЕТАДЫ АЦЭНКІ ХІБНАСЦЕЙ У ЛАБАРАТОРНЫМ СТУДЭНЦКІМ ПРАКТЫКУМЕ ПА ФІЗІЦЫ

Гродна 2011

Укладальнік:

Валянцін Фёдаравіч Аскірка

Асноўная задача фізічнага практыкума складаецца ў эксперыментальным даследаванні фізічных заканамернасцей і набыцці навыкаў самастойнай даследчай працы.

Падчас лабараторных заняткаў студэнты больш глыбока вывучаюць фізічныя з’явы і законы, знаёмяцца пры гэтым са сродкамі вымярэнняў, а таксама набываюць навыкі ажыццяўляць вымярэнні фізічных велічынь і апрацоўваць вынікі вымярэнняў.

Пастаноўка доследаў заўсёды суправаджаецца вымярэннямі. *Вымярэнне* – параўнанне фізічнай велічыні з аднароднай велічынёй, прынятай за адзінку вымярэння. Значэнне фізічнай велічыні, знойдзенае шляхам вымярэння, называецца *вынікам вымярэння*. Вымярэнні падзяляюць на *прамыя і ўскосныя*. Прамыя вымярэнні ажыццяўляюцца пры дапамозе прыбораў, якія вымяраюць непасрэдна саму велічыню. Так, масу цела можна знайсці пры дапамозе вагаў, даўжыню – вымераць лінейкай, штангенцыркулем, час – секундамерам.

Пры ўскосных вымярэннях шукаемая велічыня знаходзіцца на аснове вынікаў прамых вымярэнняў велічынь, якія звязаны з шукаемай велічынёй вызначанай функцыянальнай залежнасцю.

Прыкладам ускосных вымярэнняў можа служыць знаходжанне скорасці раўнамернага руху па вымярэннях даўжыні пройдзенага шляху і прамежкаў часу.

Пры вымярэнні любой фізічнай велічыні немагчыма атрымаць яе праўдзівага (истинного, рус.) значэння. Вынік вымярэння дае нам толькі прыблізнае значэнне шукаемай велічыні. Такая сітуацыя ствараецца шматлікімі прычынамі: уласцівасцямі вымяраемага аб’екта, недакладнасцю вымяральных прыбораў, выпадковымі кантралюемымі зменамі ўмоваў вымярэння.

Абсалютнай хібнасцю вымярэння Δx называецца адхіленне выніку вымярэння x ад праўдзівага значэння вымяраемай велічыні x_0, г.зн.:

$$\Delta x = x - x_0 .$$

Каб можна было меркаваць, якая з фізічных велічынь вымяраецца больш дакладна, уводзіцца яшчэ адносная хібнасць, якая выражаецца адносінай абсалютнай хібнасці да праўдзівага значэння вымяраемай велічыні, г.зн.:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0}.$$

Адрозніваюць некалькі тыпаў хібнасцей: *сістэматычныя, выпадковыя, хібы*.

<u>*Сістэматычныя хібнасці.*</u> Гэтыя хібнасці захоўваюць сваё значэнне і знак ад доследа да доследа; яны не залежаць ад ліку вымярэнняў. Да сістэматычных хібнасцей адносяцца*: інструментальныя хібнасці*, выкліканыя недасканаласцю сродкаў вымярэння (напрыклад, рознасцю плеч рычажных вагаў, недакладнасцю градуіроўкі шкалы, недасканаласцю канструкцыі і г.д.); *хібнасці, якія ўзнікаюць у выніку няправільнага ўсталявання сродкаў вымярэння.; хібнасці, якія ўзнікаюць у выніку знешняга ўплыву* (электрычныя і магнітныя палі, атмасферны ціск, вільготнасць і г.д.); *хібнасці метада вымярэнняў або тэарэтычныя хібнасці* (напрыклад, хібнасці ў выніку таго, што не ўлічваецца выштурхоўваючая сіла пры ўзважванні целаў у паветры, супраціўленне паветра пры разглядзе руху цел у ім і г.д.); *суб'ектыўныя хібнасці*, абумоўленыя асаблівасцямі эксперыментатара і інш.

Сістэматычныя хібнасці, якія ўзнікаюць у выніку няправільнага ўсталявання сродкаў вымярэння або ў выніку знешніх фактараў, а таксама тэарэтычныя і суб'ектыўныя хібнасці адносна лёгка могуць быць усталяваны даследчыкам і зведзены да мінімума. Яны ліквідуюцца да пачатку вымярэнняў, у працэсе вымярэнняў або ўнясення адпаведных паправак у выніку вымярэнняў.

<u>*Выпадковыя хібнасці*</u> праяўляюцца ў тым, што пры паўтарэнні вымярэнняў аднаго і таго ж аб'екта, якія выконваюцца з дапамогай аднаго і таго ж прыбора, мы часта не атрымоўваем аднолькавых дадзеных. Гэта адбываецца таму, што на вымярэнні аказваюць уплыў шматлікія фактары, якія не паддаюцца кантролю і змяняюцца ад аднаго вымярэння да другога. Да ліку такіх фактараў адносяцца выпадковыя вібрацыі асобных частак прылады, розныя змяненні навакольнага асяроддзя (тэмпература, аптычныя, электрычныя уласцівасці, вільготнасць і г.д.), якія немагчыма ўлічыць. Хібнасці, якія ўзнікаюць у такіх выпадках, называюцца выпадковымі. Вы-

падковыя хібнасці заўсёды прысутнічаюць у доследзе. Пры адсутнасці сістэматычных хібнасцей яны з'яўляюцца прычынай раскіданасці паўторных вымярэнняў адносна праўдзівага значэння. Заканамернасці выпадковых хібнасцей вывучаны, і існуюць прыёмы для іх ацэнак. Яны могуць быць выяўлены шляхам шматразовых вымярэнняў.

Хібы (грубыя памылкі) – звычайна няправільныя адлікі па прыладзе, няправільны запіс адліку, паломка сродкаў вымярэнняў і г.д. У большасці выпадкаў хібы добра заўважныя, таму што адпаведныя ім адлікі рэзка адрозніваюцца ад іншых адлікаў. Хібы неабходна выяўляць і не ўлічваць пры апрацоўцы вынікаў вымярэнняў.

АСНОЎНЫЯ ЭЛЕМЕНТЫ ТЭОРЫІ ХІБНАСЦЕЙ

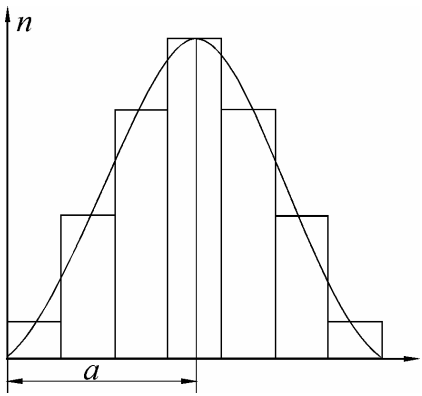
Тэорыя імавернасці вывучае заканамернасці выпадковых з'яваў, таму яна можа быць прыменена і да разліку выпадковых хібнасцей, паколькі дае магчымасць не толькі знайсці найбольш імавернае значэнне вымяраемай велічыні, але і ацаніць адхіленне атрыманага выніку ад праўдзівага значэння вымяраемай велічыні.
Няхай n разоў паўтарылі вымярэнні некаторай фізічнай велічыні x адным і тым жа метадам і тым жа сродкам вымярэнняў з аднолькавай стараннасцю без сістэматычнай хібнасці і атрымалі шэраг значэнняў $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Гэтыя значэнні адрозніваюцца адно ад аднаго ў выніку наяўнасці выпадковых хібнасцей.
Вынікі серыі назіранняў якой-небудзь фізічнай велічыні можна наглядна адлюстраваць у выглядзе дыяграмы, каторая б дэманстравала, як часта сустракаюцца тыя ці іншыя значэнні гэтай велічыні.
Для гэтага вынікі назіранняў змяшчаюць па парадку ўзрастання; ад найбольшага значэння аднімаюць найменшае значэнне: атрыманая рознасць дзеліцца на роўныя інтэрвалы і падлічваецца лік назіранняў, якія пападаюць у кожны з інтэрвалаў.
Няхай, напрыклад, найбольшае значэнне назіраемай велічыні – 11,5, а найменшае – 9,9, тады 11,5-9.9=1,6. Атрыманая рознасць дзеліцца на роўныя інтэрвалы па 0,2. Атрымоўваем 8 інтэрвалаў.

Падлік колькасці назіранняў у кожным інтэрвале прыведзены ў табліцы 1.

Табліца 1.

Межы інтэрвалаў	Лік назіранняў
9,9–10,1	**1**
10,1–10,3	**3**
10,3–10,5	**7**
10,5–10,7	**9**
10,7–10,9	**5**
10,9–11,1	**4**
11,1–11,3	**2**
11,3–11,5	**1**

Калі лік назіранняў павялічваецца, а шырыня інтэрвалу памяншаецца, то па атрыманых дадзеных можна пабудаваць графік. Атрыманая крывая з’яўляецца тыповай крывой размеркавання выпадковых велічынь (малюнак 1).



Мал.1. Тыповая крывая размеркавання выпадковых велічынь

Паняцце імавернасці. Выпадковая падзея – падзея, пра з’яўленне якой не можа быць зроблена вызначанага прадказання. Яно можа адбыцца, а можа і не адбыцца. Было, аднак, заўважана, што калі дослед паўтараць шмат разоў (некалькі соцень), то частата з’яўлення вызначанай падзеі імкнецца да пастаяннага значэння. *Частатой* называецца адносіна ліку доследаў, у якіх рэалізавалася дадзеная падзея, да агульнага ліку доследаў. Гэтая адносіна пры вялікай колькасці доследаў і было названа *імавернасцю праявы дадзенай падзеі*. Калі, напрыклад, было праведзена n доследаў і ў n_1 з іх з’явілася неабходная падзея, то імавернасць P_1 гэтай падзеі матэматычна вызначаецца выразам:

$$P_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n_1}{n}. \qquad (1)$$

У сапраўднасці немагчыма правесці бясконцую колькасць доследаў. Таму на практыцы карыстаюцца наступным выразам для імавернасці выпадковай падзеі:

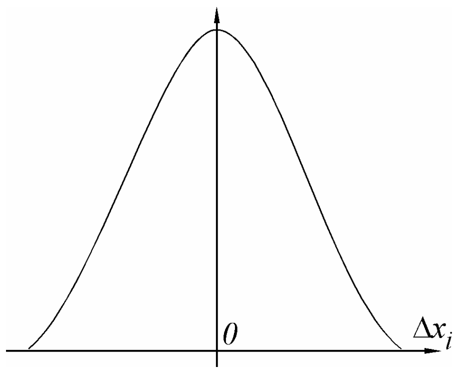
$$P_1 = \frac{n_1}{n}. \qquad (2)$$

Пры ўмове, што n вялікае, значэнне імавернасці, вызначанае па (2), ляжыць у межах ад 0 да 1. Калі падзея адбудзецца абавязкова, то імавернасць яго з’яўлення роўна 1, і яна называецца *пэўнай* (достоверной, рус.).

Разгледзім вынікі вымярэнняў (малюнак 1) з пункту гледжання імавернасці з’яўлення таго або іншага значэння. Адносіна плошчы аднаго з прамавугольнікаў да сумы плошчаў усіх прамавугольнікаў роўна колькасці вымярэнняў, велічыні якіх ляжаць у дадзеным інтэрвале, да поўнай колькасці вымярэнняў. Г.зн. гэтая адносіна, згодна з (2), дае нам імавернасць таго, што пры вымярэнні даўжыні, мы атрымоўваем значэнні, якія ляжаць у дадзеным інтэрвале. Таму натуральна за праўдзівае значэнне шукаемай велічыні прыняць велічыню a, якая адпавядае максімуму крывой. З малюнка 1 відаць, што па меры аддалення ў абодва бакі ад значэння a імавернасць з’яўлення іншых значэнняў памяншаецца. Чым большая розніца паміж значэннем a і значэннем, атрыманым пры вымярэнні, тым меншая імавернасць з’яўлення гэтага выніка.

Крывая на малюнку сіметрычна адносна максімума. З гэтага вынікае, што a роўна сярэдняму арыфметычнаму вымяраемых велічынь. Гэта можна паказаць.

Пазначым праз $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ вынікі асобных вымярэнняў і праз $\Delta x_i = a - x_i$ праўдзівую абсалютную хібнасць вымярэння. Сукупнасць значэнняў Δx_i таксама з'яўляецца наборам выпадковых велічынь і іх размеркаванне таксама мае той жа выгляд, што і размеркаванне для сукупнасці значэнняў x_i (малюнак 2).



Мал. 2. Крывая размеркавання велічынь Δx_i

Максімум крывой на малюнку 2 адпавядае значэнню $\Delta x_i = 0$. Вынікі асобных вымярэнняў можна прадставіць як:

$$x_1 = a - \Delta x_1;\ x_2 = a - \Delta x_2;\ \ldots;\ x_n = a - \Delta x_n. \qquad (3)$$

Абсалютныя хібнасці Δx_i могуць прымаць як адмоўныя, так і дадатныя значэнні.

Сумíруючы правыя і левыя часткі (3), атрымоўваем:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = na - \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i\ . \qquad (4)$$

Падзяліўшы абедзве часткі (4) на n, маем:

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i\ .$$

Па азначэнні сярэдняя арыфметычная велічыня вызначаецца як:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ ,$$

тады

$$a = \bar{x} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \ .$$

Г.зн. крывая на малюнку 2 сіметрычная адносна $\Delta x_i = 0$. Імавернасці з’яўлення абсалютных хібнасцей аднолькавай велічыні, але рознах знакаў, аднолькавыя. Таму, пры вялікай колькасці вымярэнняў (строга кажучы $n \to \infty$) атрымаем:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 0 \ \text{і} \ a = \bar{x} \ . \qquad (5)$$

Значэнне выпадковай велічыні, якое адпавядае максімуму размеркавання, называецца *найбольш імаверным*. Для выпадку размеркавання, прадстаўленага на малюнку 1, сярэдняе арыфметычнае і найбольш імавернае значэнні супадаюць. Такое размеркаванне называецца сіметрычным. У агульным выпадку такога супадзення не назіраецца.

Выразім $\bar{x}$ праз імавернасці з’яўлення розных значэнняў x. Няхай агульная колькасць інтэрвалаў, на якія разбіваюцца ўсе значэнні роўна k (у нашым выпадку $k = 8$). Шырыня ўсіх інтэрвалаў аднолькавая. Кожны інтэрвал характэрызуецца значэннем велічыні, якая адпавядае сярэдзіне інтэрвала, і лікам значэнняў велічынь, якія пападаюць у гэты інтэрвал.

Няхай для першага інтэрвала гэтыя лікі роўныя адпаведна x_1 і n_1, для другога – x_2 і n_2, і г.д. для кожнага x_k і n_k.

Тады па азначэнні сярэдняга арыфметычнага

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_k x_k}{n}, \qquad (6)$$

дзе $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ – агульная колькасць вымярэнняў.

Перапішам роўнасць (6) у выглядзе:

$$\bar{x} = \frac{n_1}{n} x_1 + \frac{n_2}{n} x_2 + ... + \frac{n_k}{n} x_k \ . \qquad (7)$$

Згодна азначэння (2) атрымаем:

$\frac{n_1}{n} = P_1$; $\frac{n_2}{n} = P_2$; …; $\frac{n_k}{n} = P_k$ імавернасці з'яўлення выніка ў адпаведным інтэрвале.

Таму выраз (7) можна запісаць як:

$$\overline{x} = \sum_{l=1}^{k} P_l x_l \ . \qquad (8)$$

Роўнасць (8) справядліва пры тых жа ўмовах, што і роўнасць (5), г.зн. пры вялікай колькасці вымярэнняў (строга $n \to \infty$).

ФУНКЦЫЯ ШЧЫЛЬНАСЦІ РАЗМЕРКАВАННЯ

Па формуле (2) вызначаецца імавернасць для дыскрэтных выпадковых велічынь. Для характарыстыкі неперарыўнай выпадковай велічыні ўводзіцца функцыя размеркавання. Выгляд крывой на малюнку 1 паказвае, што імавернасць з'яўлення значэнняў, якія адрозніваюцца ад праўдзівага ў той ці іншы бок тым меншая, чым большае гэтае адрозненне. Іншымі словамі, імавернасць з'яўлення таго ці іншага выніку залежыць ад яго значэння. Матэматычна гэта можна запісаць наступным чынам. Няхай маецца некаторая велічыня x, якую вымерылі з выпадковай хібнацю. Усяго зроблена n вымярэнняў. У інтэрвале значэнняў ад x да $x + dx$ (дзе dx – інтэрвал бясконца малой шырыні) пападае dn вымярэнняў. Відавочна, што dn тым большае, чым шырэйшы інтэрвал dx і чым большае n, г.зн. $dn \sim ndx$. Адносіна $\frac{dn}{n} = dP$ дае нам імавернасць таго, што лік значэнняў du ляжыць у інтэрвале dx каля значэння x.Паколькі dx – малое, то і імавернасць, якая яму адпавядае, – малая, таму пазначаем яе dP. Але гэтая імавернасць, як мы колькасна ўсталявалі, залежыць ад значэння x, г.зн. з'яўляецца нейкай функцыяй $f(x)$. Таму, $\frac{dn}{n} = f(x)dx$.

Функцыя $f(x)$ называецца *функцыяй шчыльнасці размеркавання*. Яе сэнс заключаецца ў тым, што здабытак $f(x)dx$ дае нам імавернасць знаходжання выпадковай велічыні ў інтэрвале ад x да $x + dx$ каля значэння x.

З вышэйсказанага вынікае, што імавернасць пападання вынікаў вымярэнняў у адзін з інтэрвалаў на малюнку 1 можна прыблізна прадставіць у выглядзе:

$$P_l = f(x_l)\Delta x , \qquad (9)$$

дзе Δx – шырыня l-ага інтэрвала, x_l – значэнне, якое адпавядае сярэдзіне гэтага інтэрвала. Тады выраз (8) неабходна запісаць так:

$$\overline{x} = \sum_{l=1}^{k} f(x_l) x_l \Delta x .$$

Пры $k \to \infty$, $\Delta x \to 0$ і сума пераўтвараецца ў інтэграл:

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx . \qquad (10)$$

Па формуле (10) вызначаецца сярэдняе значэнне выпадковай велічыні, калі вядомы выгляд функцыі шчыльнасці імавернасці. Для сіметрычнага размеркавання гэтае значэнне з'яўляецца найбольш імаверным.

На функцыю шчыльнасці імавернасці прынята накладваць так званую умову нарміроўкі. Сума ўсіх значэнняў імавернасці дае імавернасць таго, што некаторае значэнне будзе атрымана пры вымярэнні, з'яўляецца пэўнай падзеяй, якая адбудзецца абавязкова. Імавернасць з'яўлення пэўнай падзеі прынята ў тэорыі імавернасці прымаць за адзінку. Таму:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 . \qquad (11)$$

Роўнасць (11) і ёсць матэматычны запіс умовы нарміроўкі. Функцыя шчыльнасці імавернасці, якая падпарадкоўваецца ўмове (11), называецца *нармiраванай*.

СЯРЭДНЕКВАДРАТЫЧНАЯ ХІБНАСЦЬ. ДЫСПЕРСІЯ ВЫПАДКОВАЙ ВЕЛІЧЫНІ

Для характарыстыкі выпадковай велічыні істотна ведаць не толькі сярэдняе значэнне, якое адпавядае для сіметрычнага размеркавання максімуму крывой, але і тое, як шырока раскіданы вынікі асобных вымярэнняў адносна гэтага максімума. За меру гэтай раскіданасці зручна ўзяць сярэднеквадратычную хібнасць. Яна вызначаецца наступным чынам. Няхай a – праўдзівае значэнне выпадковай велічыні. Раней было паказана, што пры вельмі вялікай колькасці вымярэнняў $a = \bar{x}$. Абсалютная хібнасць i-ага вымярэння $l_i = a - x_i$ можа быць як дадатнай, так і адмоўнай. Сярэдняя абсалютная хібнасць роўна нулю пры вялікай колькасці вымярэнняў і таму не можа служыць мерай размеркавання вынікаў каля a. Велічыня $l_i^2 = (a - x_i)^2$ заўсёды дадатная.

Велічыня $\sqrt{(a - x_i)^2}$ называецца *квадратычнай хібнасцю i-ага вымярэння*. Сярэднюю квадратычную хібнасць усёй сукупнасці вымярэнняў пазначым праз $\sqrt{\bar{l}_i^2}$. Тады:

$$\bar{l}_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (a - x_i)^2 . \qquad (12)$$

Канчаткова

$$\sqrt{\bar{l}_i^2} = \sqrt{\frac{\sum (a - x_i)^2}{n}} .$$

Праводзячы тыя ж разважанні, што і пры вы,значэнні $\bar{x}$ праз імавернасць, атрымаем:

$$\bar{l}_i^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (a - x_i)^2 f(x) dx . \qquad (13)$$

Велічыню $\bar{l}_i^2$ часта называюць *дысперсіяй*.

НАРМАЛЬНАЕ РАЗМЕРКАВАННЕ, АБО РАЗМЕРКАВАННЕ ГАУСА

Размеркаванне вялікай колькасці вымярэнняў, прадстаўленае на малюнку 1, носіць агульны, хаця і не ўніверсальны, характар.Так, напрыклад, рассеянне пунктаў пападання снарадаў пры артылерыйскай стральбе, падпарадкоўваецца такому ж размеркаванню. Можна атрымаць матэматычны выраз для функцыі шчыльнасці гэтага рамеркавання. У аснове вываду ляжаць наступныя дапушчэнні, якія вынікаюць з доследа: выпадковыя хібнасці, якія ўзнікаюць пры вымярэнні, малыя ў параўнанні з вымяраемай велічынёй і незалежныя. Пры вялікай колькасці вымярэнняў выпадковыя хібнасці аднолькавай велічыні, але рознага знаку, сустракаюцца аднолькава часта. Імавернасць з’яўлення хібнасці змяншаецца пры павелічэнні велічыні апошняй.

Запішам без вываду формулу для нарміраванай функцыі шчыльнасці імавернасці:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(a-x)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (14)$$

Выгляд функцыі адлюстраваны на малюнку 3. Гэта крывая носіць назву *крывой Гауса*, або *крывой нармальнага размеркавання*. Крывая Гауса мае максімум пры $x=a$, сіметрычная адносна яго і мае два пункты перагібу: $П_1$ і $П_2$, якія знаходзяцца на адлегласці σ ад цэнтра крывой.

Велічыні a і σ называюцца параметрамі крывой Гауса. Сэнс a мы ўжо высветлілі. Гэта найбольш імавернае значэнне выпадковай велічыні, і пры вялікай колькасці вымярэнняў $a=\bar{x}$. Высветлім сэнс σ. Падлічым сярэднеквадратычную хібнасць нармальнага размеркавання па формуле (13):

$$\bar{l}_i^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(a-x)e^{-\frac{(a-x)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Увядзём новую пераменную $z=\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}$, тады:

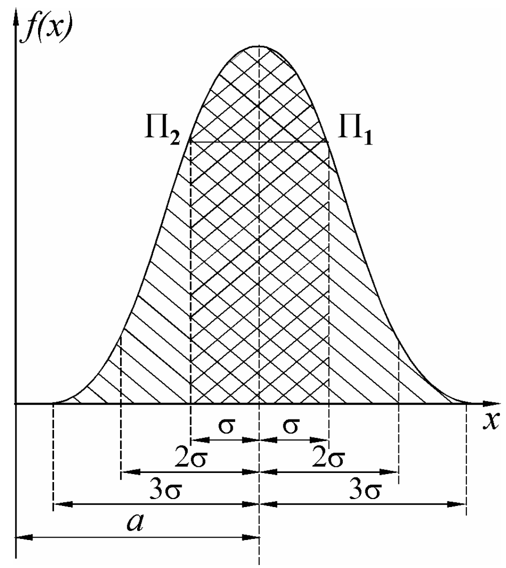
$$\bar{l}_i^2=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}z^2e^{-z^2}dz=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}z^2e^{-z^2}d\left(z^2\right)=$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left[-ze^{-z^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz\right]=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz.$$

З улікам таго, што $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz=\sqrt{\pi}$ – інтэграл Пуасона, то:

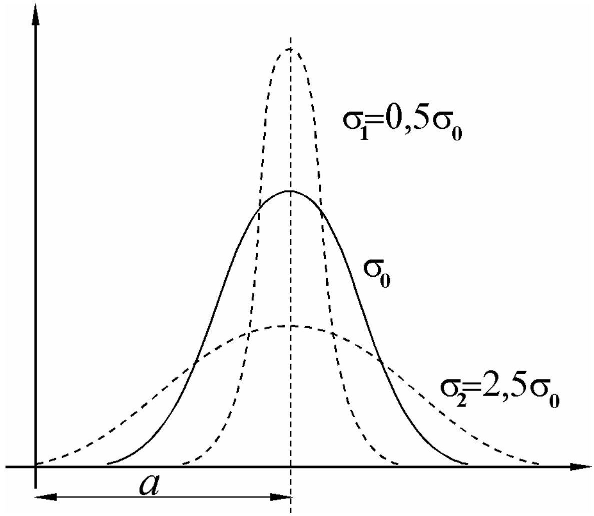
$$\bar{l}_i^2=\sigma^2. \qquad (15)$$

Гэта значыць, што σ^2 з’яўляецца *дысперсіяй нармальнага размеркавання*. Адносіна плошчы, заштрыхаванай на мал. 3 двайной штрыхоўкай, да плошчы, заключанай пад усёй крывой Гауса, дае нам імавернасць таго, што вынікі вымярэнняў пападуць у інтэрвал значэнняў ад $a-\sigma$ да $a+\sigma$. Аказалася, што гэтая адносіна роўная 0,68 (68%) усіх вымярэнняў, калі іх зроблена шмат, маюць абсалютныя хібнасці $\Delta x_i \leq \sigma$. Гэтую абставіну прынята фармуляваць наступным чынам: "З імавернасцю, не меншай за 68% выпадковая велічыня x ляжыць у інтэрвале значэнняў ад $a-\sigma$ да $a+\sigma$". Разлік паказвае, што ў інтэрвале ад $a-2\sigma$ да $a+2\sigma$ выпадковая велічыня знаходзіцца з імавернасцю 95%, а ў інтэрвале ад $a-3\sigma$ да $a+3\sigma$ з імавернасцю 99,9%.



Мал. 3. Крывая Гауса (крывая нармальнага размеркавання)

Значэнне σ залежыць ад дакладнасці вымярэнняў. На малюнку 4 паказаны тры крывыя Гауса з адным і тым жа цэнтрам a, але з рознымі σ. Пры памяншэнні σ, г.зн. пры павышэнні дакладнасці вымярэнняў, вынікі вымярэнняў больш шчыльна групіруюцца каля цэнтра, крывая паднімаецца вышэй у цэнтры, больш крута спадае да восі абсцыс пры аддаленні ад яго.



Мал. 4. Крывыя Гауса ў залежнасці ад параметра σ

ДАВЯРАЛЬНЫ ІНТЭРВАЛ І ДАВЯРАЛЬНАЯ ІМАВЕРНАСЦЬ

Прынята межы інтэрвала, у якіх заключаная шукаемая велічыня, называць *давяральнымі межамі*, а сам інтэрвал – *давяральным*, а імавернасць, якая яго характэрызуе, – *давяральнай імавернасцю*. Задавацца могуць любыя межы давяральнага інтэрвала. Вельмі зручна значэнне гэтага інтэрвала выражаць у долях σ, або кратных σ. Можна вызначыць імавернасць таго, што значэнні ляжаць у давяральным інтэрвале $a \pm \alpha\sigma$. Пазначым гэтую імавернасць праз P. Яна роўна плошчы пад крывой Гауса, паміж абсцысамі $a - \alpha\sigma$ і $a + \alpha\sigma$ (плошча пад усёй крывой Гауса роўна 1, бо $f(x)$– нарміраваная функцыя).

Матэматычна P можна вылічыць наступным чынам. Згодна выразу (9) $dP = f(x)dx$ – ёсць імавернасць таго, што значэнні ляжаць у інтэрвале dx. Тады

$$P = \int_{a-\alpha\sigma}^{a+\alpha\sigma} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma}\int_{a-\alpha\sigma}^{a+\alpha\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx\,. \qquad (16)$$

Значэнні гэтых інтэгралаў могуць быць вылічаны. У табліцы 2 прыведзены значэнні даяральнай імавернасці для некаторых α.

Табліца 2.

P	α
0,5	**0,70**
0,68	**1,00**
0,75	**1,15**
0,80	**1,30**
0,90	**1,70**
0,95	**2,00**
0,99	**2,60**
0,999	**3,30**

З табліцы бачна, што для $\alpha = 1$ $P = 68\%$, для $\alpha = 2$ $P = 95\%$, г.зн. сапраўды, у інтэрвале $a - \sigma$, $a + \sigma$ значэнні шукаемай велічыні знаходзяцца з імавернасцю 68%, а ў інтэрвале $a - 2\sigma$, $a + 2\sigma$ з імавернасцю 95%, пра што ўзгадвалася вышэй.

У студэнцкім практыкуме прынята задаваць значэнне даяральнай імавернасці 95%. Для яе па табліцы 2 знаходзіцца і вызначаецца даяральны інтэрвал $\pm\alpha\sigma$.

АЦЭНКА СЯРЭДНЕКВАДРАТЫЧНАЙ ХІБНАСЦІ Ў ВЫПАДКУ МАЛОЙ КОЛЬКАСЦІ ВЫМЯРЭННЯЎ

У рэальным доследзе немагчыма ажыццявіць вялікую колькасць вымярэнняў. Няхай мы правялі m серый па n вымярэнняў у кожнай. Лік m вялікі, а n мае канечнае, прымальнае для дадзенага доследа, значэнне. Запішам вынікі вымярэнняў у агульным выглядзе:

$x_1^{(1)};\ x_2^{(1)}; x_3^{(1)};\ldots x_n^{(1)}$ – першая серыя

$x_1^{(2)};\ x_2^{(2)}; x_3^{(2)};\ldots x_n^{(2)}$ – другая серыя

…………………………………………

$x_1^{(m)};\ x_2^{(m)}; x_3^{(m)};\ldots x_n^{(m)}$ – m-ая серыя

Лічым, што сукупнасць вымярэнняў апісваецца нармальнай функцыяй шчыльнасці размеркавання з параметрамі a і σ. Вызначым сярэдняе значэнне кожнай серыі. Атрымаем m значэнняў сярэдніх $\overline{x}^{(1)};\overline{x}^{(2)};\overline{x}^{(3)};\ldots\overline{x}^{(m)}$. Так як $n-$ малы лік, то гэтыя сярэднія значэнні ўжо не будуць роўныя a. Яны з'яўляюцца сукупнасцю выпадковых велічынь са сваім значэннем сярэднеквадратычнай хібнасці σ_m. Знойдзем сувязь паміж σ і σ_m. Запішам хібнасць сярэдняга k-ай серыі ў выглядзе:

$$E_k = \overline{x}^{(k)} - a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i\ . \qquad (17)$$

Узвядзем (17) у квадрат:

$$E_k^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j}\sum_{j} e_i e_j\ . \qquad (18)$$

Усярэднім (18) па ўсіх серыях. Згодна (15):
$\overline{E}_k^2 = \sigma_m^2$, $\overline{\sum e_i^2} = n\overline{e}_i^2$, па (12) $\sum\limits_i\sum\limits_j e_i e_j = 0$, так як хібнасці незалежныя. Тады:

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{n}\sigma^2, \text{ або } \sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (19)$$

г.зн. сярэднеквадратычная хібнасць сярэдняга з n вымярэнняў у $\sqrt{n}$ меншая за сярэднеквадратычную хібнасць асобнага вымярэння.

Велічыня σ залежыць толькі ад дакладнасці асобных вымярэнняў і не залежыць ад іх колькасці. Велічыню σ_m можна паменшыць, павялічваючы колькасць вымярэнняў. Паколькі σ_m змяншаецца ўсяго толькі на $\sqrt{n}$, паўтараць вялікую колькасць разоў вымярэнні адной і той жа велічыні не вельмі выгадна. Лепей паспрабаваць зменшыць σ_m, панізіўшы σ, г.зн. павысіць дакладнасць вымярэнняў.

Па формуле (19) немагчыма знайсці σ_m, таму што невядома σ. Гэтую цяжкасць можна абысці, калі аперыраваць з астачамі (остатками, рус.). Астача i-ага вымярэння k-ай серыі вызначаецца выразам $d_i = x_i - \overline{x}^{(k)}$. Гэтую велічыню можна заўсёды знайсці. Пазначым сярэднеквадратычнае значэнне n астачаў праз S:

$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}^{(k)}\right)^2$, але $x_i - \overline{x}^{(k)} = e_i - E_k$.

Тады:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(e_i - E_k)^2 = 2E_k \frac{1}{n}\sum e_i + E_k^2 = \frac{1}{n}\sum e_i^2 - E_k^2, \quad (20)$$

так як $\frac{1}{n}\sum e_i = E_k$ згодна (17).

Усё гэта адносілася да адной серыі з n вымярэнняў. Усярэднім па ўсіх серыях выраз (20). Атрымаем:

$$\overline{S}^2 = \sigma^2 - \sigma_m^2. \quad (21)$$

Выкарыстоўваючы формулу (19), з (21) маем $\sigma_m^2 = \frac{\overline{S}^2}{n-1}$.

Аднак велічыня $\overline{S}^2$ нам невядома, так як усярэдніванне праводзілася па вялікай колькасці серый. Прыблізна паложым $\overline{S}^2 \approx S^2$, тады $\sigma_m = \frac{S}{\sqrt{n-1}}$.

Канчаткова атрымаем:

$$\sigma_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n(n-1)}}, \quad (22)$$

дзе $\sigma_{\overline{x}}$ – *сярэднеквадратычная хібнасць* сярэдняга з n вымярэнняў выпадковай велічыні x.

Формула (22) атрымана прыблізна шляхам элементарных разважанняў. Метадамі матэматычнай статыстыкі можна даць дакладнае абаснаванне гэтай формуле.

Значэнне $\sigma_{\overline{x}}$ задае інтэрвал ад $\overline{x} - \sigma_{\overline{x}}$ да $\overline{x} + \sigma_{\overline{x}}$, у якім шукаемая велічыня знаходзіцца з імавернасцю 68%. Для любой іншай даяральнай імавернасці давяральны інтэрвал

$$\sigma_{\overline{x}} = \alpha\sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n(n-1)}},$$

дзе α – каэфіцыент, які вызначаецца з табліцы 2 для зададзенай імавернасці.

РАЗМЕРКАВАННЕ СЦЬЮДЗЕНТА

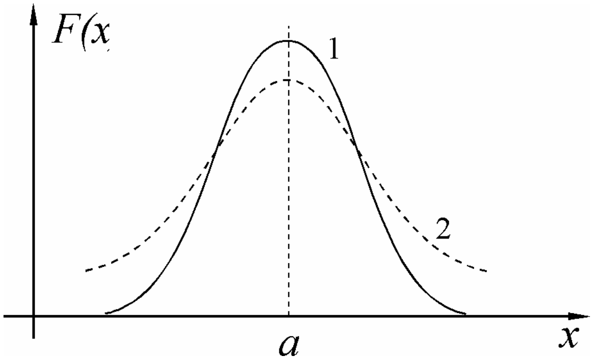
Пры малых значэннях n формула (22) з’яўляецца занадта прыбліжанай. У лепшым выпадку яна вызначае толькі парадак хібнасці. Таму пры знаходжанні межаў даверальнага інтэрвалу нельга карыстацца формулай (16), бо невядомае σ.

У 1908 годзе англійскі матэматык і хімік Госэт (Сцьюдзент) атрымаў формулу для функцыі шчыльнасці імавернасці, якая залежыць ад ліку вымярэнняў. Размеркаванне атрымана ў дарушчэнні, што сукупнасць значэнняў $x_i - \bar{x}$ падпарадкоўваецца нармальнаму размеркаванню.

Размеркаванне Сцьюдзента мае выгляд:

$$S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left[1 + \frac{(x-a)^2}{n}\right]^{-\frac{n+1}{2}},$$

дзе $\Gamma(n)$ – гама-функцыя, a – найбольш імавернае значэнне шукаемай велічыні (найлепшым набліжэннем для a з’яўляецца сярэдняе арыфметычнае). У размеркаванне Сцьюдзента σ не ўваходзіць. На малюнку 5 крывая 2 адлюстроўвае функцыю шчыльнасці размеркавання Сцьюдзента для $n = 3$, а крывая 1 – функцыю шчыльнасці нармальнага размеркавання. Для вялікіх значэнняў n (у ліміце для $n \to \infty$) $S_n(x)$ мала адрозніваецца ад функцыі шчыльнасці нармальнага размеркавання.



Мал. 5. Функцыя шчыльнасці нармальнага размеркавання (1) і размеркавання Сцьюдзента (2)

Для кожнай імавернасці P можна знайсці такое t_n, якое называецца каэфіцыентам Сцьюдзента, што выпадковая велічыня x, якая падпарадкоўваецца размеркаванню Сцьюдзента будзе ляжаць у межах ад $a - t_n \sigma_{\bar{x}}$ да $a + t_n \sigma_{\bar{x}}$. Гэтыя каэфіцыенты могуць быць злічаныя па формуле, аналагічнай формуле (16), а менавіта

$$P = \int_{a - t_n \sigma_{\bar{x}}}^{a + t_n \sigma_{\bar{x}}} S_n(x) dx .$$

Табліца 3.

n, ($\alpha = 0{,}95$)	$t_{n,\alpha}$
2	**12,7**
3	**4,3**
4	**3,2**
5	**2,8**
6	**2,6**
7	**2,5**
8	**2,4**
9	**2,3**
10	**2,3**
15	**2,1**
20	**2,1**

Параўнаем значэнні t_n са значэннем α для размеркавання Гауса пры $P = 0{,}95$. З табл. 1 $\alpha = 2$ і не залежыць ад колькасці вымярэнняў. З табл. 3 відаць, што значэнне t_n залежыць ад колькасці вымярэнняў. Так, калі зроблена толькі 2 вымярэнні ($n - 1 = 1$), то $t_n = 12{,}7$, г.зн. хібнасць у 6 разоў перавышае хібнасць, знойдзеную з размеркавання Гауса. Пры павелічэнні n t_n змяншаецца, але нават пры $n = 10$ $t_n > \alpha$. Так як у нашых умовах лік вымярэнняў не перавышае 10, то лепей карыстацца размеркаваннем Сцьюдзента, а не нармальным размеркаваннем. Тады давяральны інтэрвал вылічваецца па формуле:

$$\Delta x = t_n \sqrt{\frac{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n(n-1)}} \,. \qquad (23)$$

Неабходна звярнуць увагу на тое, што пры малых n t_n вялікі, таму пры наяўнасці выпадковых хібнасцей неабходна зрабіць не меней 8-10 вымярэнняў.

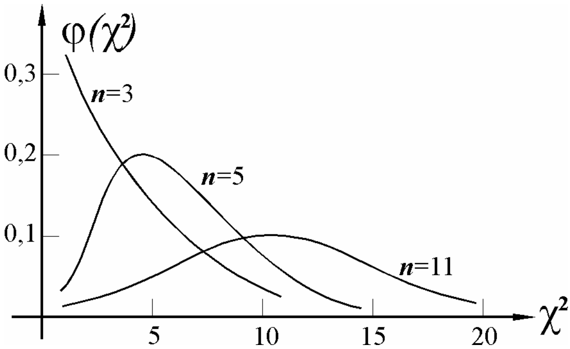
ДАВЯРАЛЬНЫ ІНТЭРВАЛ СЯРЭДНЕВКАДРАТЫЧНАЙ ХІБНАСЦІ

Пры малой колькасці вымярэнняў $\sigma_{\bar{x}}$ з'яўляецца вельмі прыблізнай ацэнкай σ_m. Велічыня $\sigma_{\bar{x}}$ разглядаецца як выпадковая і для σ_m, у гэтым выпадку можна знайсці давяральны інтэрвал, у якім яна знаходзіцца з зададзенай імавернасцю. Для гэтага ўводзіцца велічыня:

$$\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma_m^2} \sigma_{\bar{x}}^2 \,.$$

Вядомы закон размеркавання гэтай велічыні. Ён носіць назву χ^2 – *размеркавання (хі-квадрат)*. Графік гэтага размеркавання прадстаўлены на малюнку 6. Функцыя размеркавання χ^2 з'яўляецца асіметрычнай, што асабліва яскрава выражаецца пры малых n. Для вялікіх n гэтае размеркаванне пераходзіць у нармальнае. З папярэдняга выразу вынікае:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2}}\sigma_{\bar{x}} = \gamma\sigma_{\bar{x}} .$$



Мал. 6. χ^2–размеркаванне

Карыстаючыся χ^2–размеркаваннем, можна задаць акрэсленыя значэнні імавернасцей, пры якіх $\sigma_m > \gamma_1\sigma_{\bar{x}}$ або $\sigma_m > \gamma_2\sigma_{\bar{x}}$. Пазначым іх адпаведна P_1 і P_2, так як χ^2–размеркаванне асіметрычнае, то хібнасці роўнай велічыні, але супрацьлеглага знаку не роўнаімаверны. Гэта значыць, што калі $P_1 = P_2$, то $\gamma_1 \neq \gamma_2$, г.зн. давяральны інтэрвал, у якім утрымліваецца σ_m, не сіметрычны. Значэнні γ_1 і γ_2 знаходзяцца па адпаведнай табліцы, разлічанай з χ^2–размеркавання. У ёй дадзены значэнні γ_1 і γ_2 для зададзенай імавернасці P і ліку вымярэнняў n.

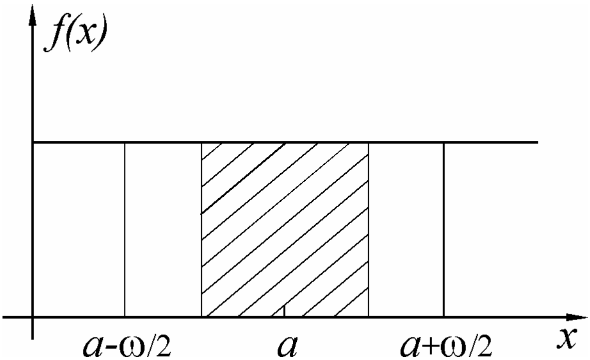
РАЎНАМЕРНАЕ РАЗМЕРКАВАННЕ

Калі счытваюць паказанні са шкалы вымяральных прыладаў, то ўзнікае хібнасць, звязаная з акругленнем ліка, якую можна разглядаць як выпадковую, хаця, згодна існуючай тэрміналогіі, яна з'яўляецца сістэматычнай. Вызначэнне адбываецца ў межах аднаго дзялення шкалы або паловы дзялення. Няхай цана дзялення прыбора роўна ω. Функцыя шчыльнасці выпадковых вымярэнняў у гэтым выпадку запішацца ў выглядзе:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega}, a-\dfrac{\omega}{2}\le x\le a+\dfrac{\omega}{2};\\ 0, x>a+\dfrac{\omega}{2}, x<a-\dfrac{\omega}{2}.\end{cases} \qquad (24)$$

Графік гэтай функцыі адлюстраваны на малюнку 7. Аналітычны запіс (24) выбіраецца такім чынам, каб $f(x)$ задавальняла умове нарміроўкі (11).

Сапраўды, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{a-\frac{\omega}{2}}^{a+\frac{\omega}{2}} \frac{1}{\omega}dx = 1$.



Мал. 7. Функцыя шчыльнасці выпадковых вымярэнняў

Размеркаванне, функцыя шчыльнасці якога вызначаецца выразам (24), *называецца раўнамерным*. Сярэднеквадратычную хібнасць для дадзенага размеркавання знойдзем па (13):

$$\sigma^2 = \int\limits_{a-\frac{\omega}{2}}^{a+\frac{\omega}{2}} \frac{1}{\omega}(a-x)^2 dx = \frac{\omega^2}{12},\ \sigma = \frac{\omega}{3{,}4}.$$

Ацэнім імавернасць таго, што шукаемая велічыня x ляжыць каля значэння a у інтэрвале ад $a-\beta\dfrac{\omega}{2}$ да $a+\beta\dfrac{\omega}{2}$, дзе $\beta \le 1$ і дадатнае.

Гэта імавернасць роўна плошчы прамавугольніка з бакамі $\frac{1}{\omega}$ і $\beta\omega$, г.зн. роўна заштрыхаванай плошчы (малюнак 7). Калі неабходна задаць даяральную імавернасць 95%, то з гэтай імавернасцю x ляжыць у інтэрвале ад $a - 0{,}95\frac{\omega}{2}$ да $a + 0{,}95\frac{\omega}{2}$. У гэтым выпадку можна гаварыць пра максімальную хібнасць. Яна не перавышае $\frac{\omega}{2}$. Для секундамера неабходна прыняць $\frac{\omega}{2} = 0{,}20$ с, для штангенцыркуля – $\frac{\omega}{2} = 0{,}10$ мм, для мікрометра $\frac{\omega}{2} = 0{,}010$ мм.

СПОСАБЫ РАЗЛІКУ ХІБНАСЦЕЙ ПРАМЫХ ВЫМЯРЭННЯЎ

У любой рабоце мы маем дачыненне з велічынямі, якія вымяраюцца непасрэдна, г.зн. значэнні гэтых велічынь адлічваюцца па шкале вымяральнай прылады. Такія *вымярэнні называць прамымі*.
Хібнасці вымярэнняў могуць быць разнастайнага кшталту: хібнасць прылады, хібнасць акруглення і іншыя сістэматычныя і выпадковыя хібнасці. Могуць быць выпадкі, калі адзін з гэтых тыпаў хібнасцей перавышае ўсе астатнія. У гэтым выпадку неабходна вызначыць толькі тую, якая дае галоўны ўнёсак у хібнасць вымярэнняў. Разгледзім, як улічваецца кожная хібнасць паасобку.

1. Сістэматычныя хібнасці.

Як пазбавіцца ад сістэматычных хібнасцей, звязаных з методыкай доследа (сіла трэння, кантактная рознасць патэнцыялаў і г.д.) у асноўным указваецца ў апісаннях работ. Ад сістэматычных хібнасцей, звязаных з выкарыстаннем прылад, неабходна пазбаўляцца самастойна. Так, неабходна правільна ўсталяваць прыладу, праверыць палажэнне нулявога адліку. Калі нуль прыбора збіты, то неабходна гэта ўсталяваць або ўносіць адпаведную папраўку ў вымярэнні.

Калі адлічваем паказанні са шкалы прыладаў, то ўзнікае сістэматычная хібнасць, абумоўленая хібнасцю прылады і хібнасцю акруглення. Мы вымушаныя акругляць да цэлага самага дробнага дзялення шкалы або яго паловы. У выпадку акруглення лічым, што сістэматычная хібнасць мае раўнамернае размеркаванне. Разгледзім прыклад ацэнкі хібнасці акруглення. Вымярэнне штангенцыркулем вышыні металічнага цыліндра дало наступныя вынікі:

h, см
2,71
2,71
2,71
2,71
2,71

У гэтым выпадку функцыя размеркавання мае выгляд (24). Для штангенцыркуля $\frac{\omega}{2} = 0{,}10$ мм; $\beta = 0{,}95$ і шукаемае значэнне h ляжыць у межах $h = \left(2{,}71 \pm 0{,}01\right)$см.

Хібнасць прылады ўказваецца ў пашпарце, які дадаецца да прылады, або на шкале прылады маецца умоўны знак, які характэрызуе яго дакладнасць.

Звычайна, калі ўказваецца хібнасць прылады δ, то пад гэтай велічынёй разумеюць палову інтэрвала, унутры якога можа быць заключаная вымяраемая велічыня з дакладнасцю 0,999. Але, як правіла, невядомы выгляд функцыі размеркавання. Можна прыняць, што гэта функцыя падпарадкоўваецца нармальнаму размеркаванню. У гэтым ёсць вядомае дапушчэнне, але іншага выйсця няма, таму што аперацыя ўсталявання віду функцыі размеркавання хібнасці прылады патрабуе шмат часу. Тады $\sigma_{пр} = \delta/3$ (25), таму што ў выпадку нармальнага размеркавання менавіта 3δ складае палову інтэрвала, які адпавядае давяральнай імавернасці 0,999.

Разам з хібнасцю, якая ўказваецца ў пашпарце, пры зняцці паказанняў са шкалы электравымяральных прылад узнікае хібнасць акруглення, якая мае раўнамерную функцыю размеркавання (24). Пры ацэнцы агульнай хібнасці ў гэтым выпадку неабходна карыстацца выразам:

$$\Delta = \sqrt{\Delta_{акр}^2 + \alpha^2 \sigma_{пр}^2}, \qquad (26)$$

дзе $\Delta_{акр} = \beta \dfrac{\omega}{2}$ – хібнасць акруглення ($\beta = 0{,}95$), $\sigma_{пр}$ –вызначаецца па формуле (25), $\alpha = 2$.

Прыклады:

Сіла тока вымяраецца амперметрам. Яго шкала мае дыяпазоны 0,25; 0,50; 1,0 А. Клас дакладнасці 0,50, шкала разбіта на 100 дзяленняў праз 1. Возьмем дыяпазон 0,50 А. Ацэнім максімальную хібнасць акруглення, улічваючы, што можам здымаць паказанні з дакладнасцю да $1/2$ дзялення шкалы:

$\Delta_{акр} = 0{,}0025\,\text{А}$ (паложым $\beta = 1$).

Па класу дакладнасці $\delta = \dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{100} = 0{,}0025\,\text{А}$.

Бычым, што $\sigma_{пр}$ у гэтым выпадку складае $1/3$ ад хібнасці акруглення. Поўную хібнасць разлічваем па (26):

$$\Delta = \sqrt{\left(25 \cdot 10^{-4}\right)^2 + \frac{4}{9}\left(25 \cdot 10^{-4}\right)^2} = 0{,}0030\ \text{А}.$$

У гэтым выпадку ўлік хібнасці прылады прывёў да нязначнага павелічэння агульнай хібнасці. Для дыяпазона 1 А маем

$$\Delta_{акр} = \frac{1}{2 \cdot 100} = 0{,}005\,\text{А},$$

$$\delta = \frac{0{,}5 \cdot 1}{100} = 0{,}005\,\text{А},\ \Delta = \sqrt{\left(5 \cdot 10^{-3}\right)^2 + \frac{4}{9}\left(5 \cdot 10^{-3}\right)^2} = 0{,}0060\,\text{А}.$$

З дадзенага прыкладу бачна, што ацэньваючы хібнасць электравымяральных прыладаў толькі па класу дакладнасці мы заніжаем рэальную хібнасць. Аднак, ёсць і такія выпадкі, калі адна з хібнасцей значна пераўзыходзіць другую.

Напружанне вымяраецца вольтметрам. Ён разлічаны на 250 В, шкала мае 100 дзяленняў праз 1, клас дакладнасці 0,2.

$$\Delta_{акр} = \frac{250}{2 \cdot 100} = 1{,}25\,\text{В};\ \delta = \frac{0{,}2 \cdot 250}{100} = 0{,}50\,\text{В}.$$

Гэта значыць, што $\Delta_{акр} > \delta$ і за хібнасць вымярэння неабходна ўзяць 1,25 В, а не 0,5 В. Тады:

$$\Delta = \sqrt{(1{,}25)^2 + \frac{4}{9}(0{,}5)^2} = 1{,}30 \text{ В},$$

што можна атрымаць акругленнем 1,25 В. Гэта значыць, калі адна з хібнасцей у 3 разы меншая за другую, то яе можна адкінуць. У гэтым выпадку поўная хібнасць прылады роўна хібнасці акруглення.

На якасных вымяральных прыладах цана дзялення шкалы ўзгоднена з класам дакладнасці. У гэтым выпадку за агульную хібнасць можна ўзяць хібнасць, вызначаную з класу дакладнасці.

Сістэматычныя хібнасці апісанага вышэй тыпу не могуць быць выключаныя, але ацэнку іх велічыні мы заўсёды можна зрабіць.

Сістэматычныя хібнасці, звязаныя з уласцівасцямі вымяральнага аб'екта, могуць быць ацэненыя па формулах для падліку выпадковай хібнасці. Напрыклад, вымярэнні дыяметра дроту мікраметрам з дакладнасцю 0,010 мм у 10 месцах далі наступныя вынікі:

h, мм
1,57
1,54
1,51
1,50
1,58
1,52
1,50
1,54
1,54
1,56

Раскіданасць паміж асобнымі значэннямі болей дакладнасці вымярэння, таму, дрот неаднародны па сячэнню. Калі вымярэнні паказваюць, што велічыня дыяметра адвольна змяняецца па даўжыні дроту, то можна лічыць, што дыяметр з'яўляецца выпадковай велічынёй, якая мае размеркаванне Сцьюдзента або нармальнае. У гэтым выпадку гавораць, што *сістэматычная хібнасць пераведзе-*

на ў выпадковую. У разліковую формулу падстаўляюць сярэдняе значэнне дыяметра. Хібнасць у вызначэнні дыяметра падлічваецца па формуле (23).

Выпадковыя хібнасці няцяжка вылічыць, калі вядома функцыя размеркавання. У большасці выпадкаў яе выгляд невядомы. Існуюць прыёмы, якія дазваляюць ацаніць, наколькі добра атрыманы набор вымярэнняў задавальняе нармальнаму размеркаванню. У студэнцкім практыкуме гэтыя ацэнкі праводзіць немэтазгодна. Дамовімся лічыць, што выпадковыя хібнасці доследа падпарадкоўваюцца нармальнаму закону размеркавання (даверальны інтэрвал разлічваецца з прымяненнем каэфіцыентаў Сцьюдзента).

ЛІК ЗНАКАЎ ПРЫ РАЗЛІКАХ

Пры малой колькасці вымярэнняў x і $\sigma_{\bar{x}}$ самі з'яўляюцца выпадковымі велічынямі. Падлік даверальнага інтэрвала для σ паказвае, што пры 10 вымярэннях $\sigma_{\bar{x}}$ вызначаецца хібнасць у 30%. Таму, неабходна для $\sigma_{\bar{x}}$ прыводзіць адну знакавую лічбу, калі яна большая за 3, і дзве, калі першая з іх меншая за 4. Напрыклад, калі $\sigma_{\bar{x}} = 0{,}523$, то прыводзім адну лічбу $\sigma_{\bar{x}} = 0{,}5$, калі $\sigma_{\bar{x}} = 0{,}124$, то неабходна пакідаць дзве знакавыя лічбы $\sigma_{\bar{x}} = 0{,}12$.

АДНОСНАЯ ХІБНАСЦЬ

Для ацэнкі дакладнасці вымярэнняў уводзіцца паняцце адноснай хібнасці ε, якая роўна адносіне абсалютнай хібнасці да значэння выніка вымярэння, г.зн. да $\bar{x}$:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\bar{x}}.$$

ХІБНАСЦІ ЎСКОСНЫХ ВЫМЯРЭННЯЎ

У большасці выпадкаў прадстаўляе цікавасць велічыня, якая не вымяраецца непасрэдна ў доследзе, але якую можна выразіць як функцыю непасрэдна вымяраемых велічынь. У гэтым выпадку гавораць пра ўскосныя вымярэнні. Спосабы разліку хібнасці ўскосных вымярэнняў, выкладзеныя ніжэй, маюць толькі арыентацыйны характар. У рамках студэнцкага практыкуму дастаткова лічыць, што вымяраемая велічыня мае прамавугольнае размеркаванне або размеркаванне Сцьюдзента шчыльнасці імавернасці, а любая функцыя вымяраемых велічынь мае размеркаванне Сцьюдзента. У гэтым выпадку давяральную імавернасць функцыі можна лічыць супадаючай з давяральнай імавернасцю вымяраемых велічынь.

Разгледзім спачатку выпадак адной пераменнай. Няхай шукаемая велічыня $z = f(x)$, x вымяраецца непасрэдна. Тады, можна знайсці $\bar{x}$ і Δx. Няхай $x = a$ – праўдзівае значэнне x. Тады, $z = f(a)$ – праўдзівае значэнне z. Раскладзём $f(x)$ у рад Тэйлара каля a. Пры раскладанні абмяжуемся толькі лінейным членам:

$$f(x) = f(a) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a} (x-a) + \ldots$$

або

$$f(x) - f(a) = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a} (x-a) + \ldots .$$

Усярэднім гэтую роўнасць па ўсіх x:

$$\overline{[f(x) - f(a)]} = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a} \overline{(x-a)} + \ldots ,$$

узвядзём у квадрат:

$$\overline{[f(x) - f(a)]^2} = \left(\frac{df}{dx}\right)^2_{x=a} \overline{(x-a)^2} + \ldots .$$

Згодна (12) і (15):

$$\overline{[f(x) - f(a)]^2} = \sigma_z^2 ; \; \overline{(x-a)^2} = \sigma_x^2 .$$

Тады:

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{df}{dx}\right)^2_{x=a} \sigma_x^2 .$$

Праўдзівае значэнне x невядома. У якасці найлепшага прыбліжэння бярэм $a = \bar{x}$, σ_x замяняем на Δx. Атрымоўваем:

$$\Delta z=\left(\frac{df}{dx}\right)_{\bar{x}}\Delta x\,. \qquad (27)$$

Δx падлічваем па (23). Тады $z=f(\bar{x})\pm\Delta z$ з той жа давяральнай імавернасцю, з якой было падлічана Δx. Адносная хібнасць $\varepsilon=\dfrac{\Delta z}{z}$.

Разгледзім выпадак дзвюх пераменных: $z=f(x,y)$. Праўдзівыя значэнні $x=a$, $y=b$. Робім аналагічна выпадку адной пераменнай:

$$f(x,y)=f(a,b)+\left(\frac{df}{dx}\right)_a(x-a)+\left(\frac{df}{dy}\right)_b(y-b)+\ldots$$

або

$$f(x,y)-f(a,b)=\left(\frac{df}{dx}\right)_a(x-a)+\left(\frac{df}{dy}\right)_b(y-b)+\ldots,$$

$$\overline{\left[f(x,y)-f(a,b)\right]^2}=\left(\frac{df}{dx}\right)_a^2\overline{(x-a)^2}+\left(\frac{df}{dy}\right)_b^2\overline{(y-b)^2}+$$

$$+2\left(\frac{df}{dx}\right)_a\left(\frac{df}{dy}\right)_b\overline{(x-a)(y-b)}+\ldots.$$

Апошні член роўны нулю, таму што хібнасці x і y незалежныя. Маем, палажыўшы $\bar{x}=a$, $\bar{y}=b$:

$$\sigma_z^2=\left(\frac{df}{dx}\right)_{\bar{x}}^2\sigma_{\bar{x}}^2+\left(\frac{df}{dy}\right)_{\bar{y}}^2\sigma_{\bar{y}}^2. \qquad (28)$$

Замяняем $\sigma_{\bar{x}}$ на Δx, $\sigma_{\bar{y}}$ на Δy.

Значэнні Δx і Δy разлічваем па (23) для давяральнай імавернасці 95%. Тады:

$$\Delta z=\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)_{\bar{x}}^2(\Delta x)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)_{\bar{y}}^2(\Delta y)^2}\,. \qquad (29)$$

Выраз (29) можна абагульніць на выпадак многіх пераменных. Няхай $z = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$. Велічыні $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ вымяраюцца непасрэдна. Знаходзім сярэдняе значэнне $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, ..., \bar{x}_n$, тады $z = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, ..., \bar{x}_n) \pm \Delta z$, дзе

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{df}{dx_1}\right)^2_{\bar{x}_1} (\Delta x_1)^2 + \left(\frac{df}{dx_2}\right)^2_{\bar{x}_2} (\Delta x_2)^2 + ... + \left(\frac{df}{dx_n}\right)^2_{\bar{x}_n} (\Delta x_n)^2} . \quad (30)$$

РАЗГЛЕДЗІМ НЕКАЛЬКІ ПРЫВАТНЫХ ВЫПАДКАЎ

1) $z = a + b$, дзе a і b непасрэдна (прама) вымяряемыя велічыні, кожная са сваім размеркаваннем. Па (30) $\Delta z = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2}$.

2) $z = a \cdot b$, $(\Delta z)^2 = b^2 (\Delta a)^2 + a^2 (\Delta b)^2$,

$$\varepsilon = \frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2} . \quad (31)$$

3) $z = a^n$, дзе a – вымяраемая велічыня, n – цэлы лік

$$(\Delta z)^2 = n\left(a^{n-1}\right)^2 (\Delta a)^2, \ \varepsilon = \frac{\Delta z}{z} = n\frac{\Delta a}{a} .$$

ЗНАХОДЖАННЕ ПАРАМЕТРАЎ ЭМПІРЫЧНАЙ ЗАЛЕЖНАСЦІ МЕТАДАМ НАЙМЕНШЫХ КВАДРАТАЎ

Дагэтуль мы разглядвалі вымярэнне той ці іншай велічыні, якая знаходзіцца пры правядзенні ўсёй серыі доследаў у нязменным стане. Аднак, частыя выпадкі, калі сама вымяраемая велічыня за час вымярэнняў змяняецца ў выніку непастаянства другой велічыні, звязанай з ёй. Напрыклад, пры павелічэнні тэмпературы павялічваецца супраціўленне металічных праваднікоў і г.д. І ў такіх выпадках будзе назірацца статыстычная раскіданасць, якая прыводзіць да выпадковых хібнасцей. Але гэтая раскіданасць будзе ўжо праходзіць не адноснага сярэдняга значэння вымяраемай велічыні, а адносна пераменнага значэння.

Разгледзім выпадак , калі дзве вымяраемыя велічыні x і y звязаны лінейнай залежнасцю:

$$y = a + bx. \tag{32}$$

Да выгляду (32) можна прывесці шляхам замены пераменных залежнасці, якія часта сустракаюцца ў фізіцы.

Задачу са знаходжаннем каэфіцыентаў a і b можна рашыць графічна, адзначаючы пункты x_i і y_i на мілімітровай паперы і праводзячы праз іх на вока найлепшую простую. Графічны спосаб рашэння, аднак, не заўсёды забяспечвае належную дакладнасць. Аналітычнае рашэнне задачы праводзіцца з дапамогай метада найменшых квадратаў.

Уявім, што раскіданасць пунктаў y_i адносна простаў падпарадкоўваецца закону нармальнага размеркавання, і велічыні x_i і y_i для кожнага пункта вымераны аднолькавую колькасць разоў. Тады тэорыя імавернасці паказвае, што найлепшым прыбліжэннем будзе такая простая, для якой сума квадратаў адлегласцей па вертыкалі ад пунктаў да простай будзе мінімальнай. Гэты метад называецца *метадам найменшых квадратаў*.

Складзём суму квадратаў адхіленняў пунктаў x_i і y_i ад закона (32).

$\varphi = \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - a - bx_i\right)^2$, дзе m – колькасць пунктаў на графіку або адпаведных пар x_i, y_i.

Значэнні a і b павінны быць такімі, каб φ было мінімальным. Значыць,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{m}\left(y_i - a - bx_i\right) = 0; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{m} x_i\left(y_i - a - bx_i\right) = 0.$$

Сумеснае рашэнне гэтых ураўненняў дае:

$$a = \frac{\sum y_i \sum\left(x_i\right)^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{m\sum\left(x_i\right)^2 - \left(\sum x_i\right)^2}; \quad b = \frac{m\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{m\sum\left(x_i\right)^2 - \left(\sum x_i\right)^2}.$$

Апошнія выразы прымаюць больш просты выгляд, калі ўвесці пазначэнні:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i,$$

тады

$$b = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})};\ a = \bar{y} - b\bar{x}\ . \qquad (33)$$

У тэорыі імавернасці паказваецца, што давяральны інтэрвал для a і b падлічваецца па наступных выразах:

$$\Delta b = t_{m-2}\sqrt{\frac{1}{m-2}\left[\frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{\sum(x_i - \bar{x})} - b^2\right]};$$

$$\Delta a = \Delta b\sqrt{(\bar{x})^2 + \frac{1}{m}\sum(x_i - \bar{x})^2}\ , \qquad (34)$$

дзе t_{m-2} – каэфіцыент Сцьюдзента, вызначаемы для ліку ступеняў свабоды $m-2$.

Калі маецца залежнасць выгляду $y = kx$, то прымяненне метаду найменшых квадратаў дае $\varphi = \sum_{i=1}^{m}(y_i - kx_i)^2$, тады

$$\frac{\partial\varphi}{\partial k} = -2\sum_{i=1}^{m} x_i(y_i - kx_i) = 0;\ k = \frac{\sum x_i y_i}{\sum(x_i)^2}. \qquad (35)$$

$$\Delta k = t_{m-1}\sqrt{\frac{1}{m-1}\frac{\sum(x_i)^2\sum(y_i)^2 - (\sum x_i y_i)^2}{\sum(x_i^2)^2}}\ . \qquad (36)$$

Выразы (33) і (35) даюць аналітычны спосаб правядзення найлепшай простай праз зададзеныя доследныя пункты.

Заключэнне

Пры апрацоўцы вынікаў вымярэнняў прапануецца наступны парадак аперацый і дзеянняў:

Для прамых вымярэнняў

1. Вынікі кожнага (!) вымярэння запісваюцца ў табліцу.
2. Разлічваецца сярэдняе значэнне з n вымярэнняў $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
3. Знаходзяцца хібнасці асобных вымярэнняў $\Delta x_i = \bar{x} - x_i$.
4. Разлічваюцца квадраты хібнасцей асобных вымярэнняў $(\Delta x_i)^2$.

5. Вызначаецца хібнасць вымярэнняў $\Delta x = t_n \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = t_n \sigma_{\bar{x}}$,

   t_n – каэфіцыент Сцьюдзента, які знаходзіцца па табліцы для $P = 95\%$ і адпаведнай колькасці вымярэнняў.
6. Калі велічыня хібнасці вымярэнняў аказваецца параўнальнай з велічынёй хібнасці прылады, то хібнасць неабходна разлічваць $\Delta x = \sqrt{t_n^2 \sigma_{\bar{x}}^2 + \Delta_{пр}^2}$, дзе $\Delta_{пр}$ – хібнасць прылады.
7. Канчатковы вынік запісваецца ў выглядзе $x = \bar{x} \pm \Delta x$.
8. Ацэньваецца адносная хібнасць $\varepsilon = \frac{\Delta x}{\bar{x}}$.

Для ўскосных вымярэнняў
1. Для кожнай серыі вымяраемых велічынь, якія ўваходзяць у азначэнне шукаемай велічыні, праводзіцца апрацоўка, як апісана вышэй. Пры гэтым для ўсіх вымяраемых велічынь задаецца аднолькавае значэнне давяральнай імавернасці.
2. Знаходзіцца выраз для абсалютнай хібнасці па формуле (30) у адпаведнасці з канкрэтным выглядам функцыянальнай залежнасці.
3. Канчатковы вынік запісваецца ў выглядзе $z = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \pm \Delta z$.
4. Вызначаецца адносная хібнасць ускосных вымярэнняў $\varepsilon = \frac{\Delta z}{z}$.

ПАБУДОВА ГРАФІКАЎ

Пры апрацоўцы атрыманага доследнага матэрыялу для таго, каб атрымаць візуальнае ўяўленне пра залежнасць адной фізічнай велічыні ад другой, часта будуюць графікі. Графікамі карыстаюцца таксама для хуткага знаходжання адной велічыні (функцыі) па дадзенаму значэнню другой велічыні (аргумента). Дакладнасць, з якой можна знаходзіць значэнні па графіках, абмяжоўваецца дакладнасцю пабудовы графіка і складае звычайна 0,5% вымяраемай велічыні. Акрамя гэтага, часам карыстаюцца графічнымі метадамі вылічэнняў, якія, хаця і не даюць вялікай дакладнасці, але з’яўляюцца нагляднымі і простымі.

Для пабудовы графікаў часцей за ўсё выкарыстоўваюць прамавугольную (дэкартаву) сістэму каардынат, у якой палажэнне пункта на плоскасці вызначаецца дзвюма каардынатамі x і y. Часам, калі ў даследуемай задачы маецца які-небудзь выдзелены пункт (цэнтр сіметрыі), вынікі вымярэнняў зручна адлюстроўваць у палярнай сістэме каардынат, у якой палажэнне пункта вызначаецца радыусам-вектарам ρ, праведзеным да гэтага пункта з пачатку каардынат O (полюса), і вуглом φ, які складае радыус-вектар з некаторымі абраным напрамкам.

Значэнне функцыі (залежнай велічыні) адкладваецца па вертыкальнай восі, значэнні аргумента – па гарызантальнай. Перад пабудовай графіка неабходна, сыходзячы з межаў, у якія заключаны значэнні функцыі і аргумента, абраць разумныя маштабы па восі абсцыс і восі ардынат. Гэтыя маштабы абіраюцца адвольна, незалежна адзін ад аднаго, але так, каб графік не быў вельмі малым або расцягнутым па адной з восей. Часам інтэрвал, у якім заключаны значэнні функцыі і аргумента, ляжыць далёка ад нуля. У гэтым выпадку мэтазгодна пачынаць дзяленні на адпаведнай восі не з нуля, а з некаторага значэння толькі трохі меншага, чым найменшае значэнне, якое неабходна адкласці на гэтай восі.

Маштабныя дзяленні наносяць на восі, каля іх пішуць адпаведныя лікі. Стрэлкамі паказваюцца напрамкі, у якіх узрастаюць адкладваемыя велічыні. Ля канцоў восей пішуць пазначэнні велічынь з указаннем адзінак вымярэння. Далей на графік вострым алоўкам наносяць адпаведныя пункты. Для лепшай візуалізацыі пункты дадаткова абводзяць кружкамі.

Крывую на графіку неабходна праводзіць не проста злучаючы пункты адзін з адным, а выбіраючы сярод пунктаў так званы пераважны напрамак. Гэта крывая павінна быць па магчымасці гладкай і праходзіць такім чынам, каб прыкладна аднолькавая колькасць пунктаў знаходзілася па розныя бакі ад крывой.

Пры правядзенні крывой высвятляецца пэўная раскіданасць пунктаў, абумоўленая наяўнасцю хібнасцей вымярэнняў. Чым меншыя хібнасці вымярэнняў, тым лепей пункты кладуцца на крывую. Пры гэтым асобныя хібы і відавочна памылковыя вымярэнні лёгка ўбачыць, таму што адпаведныя ім пункты будуць знаходзіцца далёка ад крывой.