Лабораторная работа № 5
Измерение параметров реактивных элементов цепей переменного тока методом трех вольтметров

Цель работы: изучить метод векторных диаграмм для расчета цепей синусоидального переменного тока и освоить экспериментальные методы определения параметров пассивных элементов цепей переменного тока.

Цепь с активным сопротивлением

Если цепь переменного тока содержит только резистор R, к которому приложено синусоидальное напряжение u (рис. 1(а)):

$$u = U_0 \sin wt, \tag{1}$$

то сила тока в цепи будет определяться по закону Ома для однородного участка цепи:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_0 \sin \omega t}{R} = I_0 \sin \omega t, \tag{2}$$

где $I_0 = \dfrac{U_0}{R}$ - амплитуда силы тока.

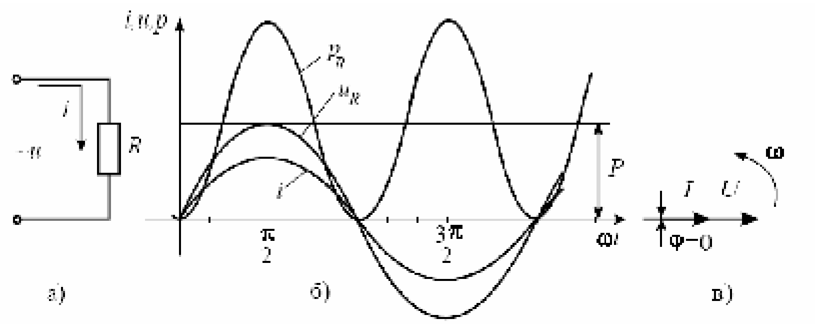

Рис. 1. Схема, временная и векторная диаграммы цепи с активным сопротивлением

Из выражений (1) и (2) следует, что в цепи с активным сопротивлением сила тока и напряжение совпадают по фазе. Обе эти величины можно изобразить на временной (рис. 1(б)) и векторной (рис. 1(в)) диаграммах.

Рассмотрим энергетические процессы в цепи с активным элементом.

Скорость преобразования электрической энергии в другие виды энергии характеризует мгновенную мощность p:

$$p = i \cdot u = I_0 U_0 \sin^2 wt = \frac{1}{2}\left(I_0 U_0 - I_0 U_0 \cos 2wt\right), \qquad (3)$$

Кроме мгновенного значения мощности p, различают еще среднюю мощность за период, которую называют активной мощностью и обозначают буквой P:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T i \cdot u \cdot dt = \frac{1}{2} I_0 U_0 = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{U_0}{\sqrt{2}} = I \cdot U\ , \qquad (4)$$

где $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$, $U = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$ - действующие значения силы синусоидального переменного тока и напряжения соответственно.

Активная мощность характеризует работу, совершаемую в электрической цепи за период, т.е. определяет электрическую энергию, необратимо преобразовавшуюся в другие виды энергии. Единицей измерения активной мощности является ватт (Вт).

График изменения мгновенной мощности для цепи с активным сопротивлением показан на рис. 1(б). В любой момент времени направления тока и напряжения совпадают, следовательно, мгновенная мощность положительна и колеблется с угловой частотой $2w$ в пределах от 0 до $I_0 U_0$, т.е. активное сопротивление потребляет электрическую энергию от источника и необратимо преобразует ее в другие виды энергии.

Цепь с индуктивностью

Если цепь переменного тока содержит только катушку с индуктивностью L, к которой приложено синусоидальное напряжение u (рис. 2(а)):

$$u = U_0 \sin wt\ , \qquad (5)$$

то изменяющаяся сила тока создает в катушке ЭДС самоиндукции:

$$E_C = -L\frac{di}{dt} \tag{6}$$

Поэтому данный участок цепи следует считать неоднородным, и закон Ома для него имеет вид

$$i = \frac{u + E_c}{R}. \tag{7}$$

При условии $R \to 0$ имеем $u = -E_c$ или $U_0 \sin wt = L\frac{di}{dt}$. Интегрируя данное уравнение, получим:

$$i = \frac{U_0}{wL}\sin\left(wt - \frac{p}{2}\right). \tag{9}$$

Обозначим $X_L = wL$ и назовем реактивным сопротивлением индуктивности (индуктивным сопротивлением), тогда

$$i = I_0 \sin\left(wt - \frac{p}{2}\right), \tag{10}$$

где $I_0 = \frac{U_0}{X_L}$.

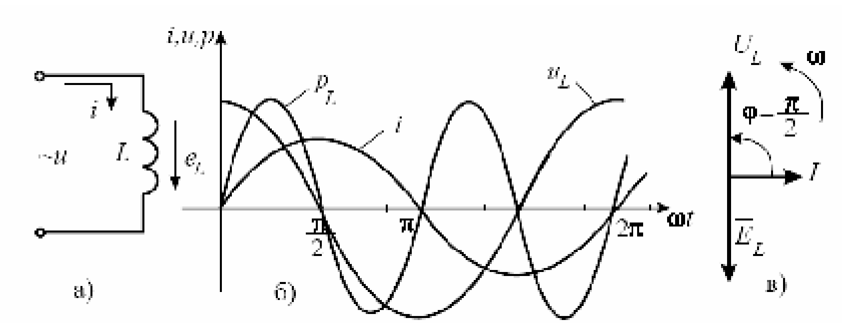

Рис. 2. Схема временная и векторная диаграммы цепи с идеальным индуктивным элементом

Таким образом, в цепи с индуктивностью возникает индуктивное сопротивление $X_L = wL$, а сила тока отстает от напряжения на угол $\frac{p}{2}$. Временная и векторная диаграммы изображены на рис. 2(б) и 2(в).

Перейдем к анализу энергетических процессов в цепи с индуктивным элементом.

Мгновенная мощность индуктивного элемента

$$p = i \cdot u = I_0 \cdot U_0 \cdot \sin wt \cdot \sin\left(wt + \frac{p}{2}\right) = I_0 \cdot U_0 \cdot \sin wt \cdot \cos wt = \\ = \frac{1}{2} I_0 U_0 \sin 2wt, \quad (11)$$

изменяется по закону синуса с удвоенной частотой.

Активная мощность P, характеризующая необратимые преобразования энергии и определяемая средним значением мгновенной мощности за период, для индуктивного элемента равна нулю:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T i \cdot u \cdot dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} I_0 U_0 \sin 2wtdt = 0. \quad (12)$$

Таким образом, в цепи с идеальным индуктивным элементом работа не совершается, а происходит только периодический обмен энергией между источником электрической энергии и магнитным полем индуктивного элемента.

График мгновенной мощности на индуктивном элементе показан на рис. 2(б).

В первую четверть периода направления напряжения и тока совпадают и $p > 0$, т.е. индуктивный элемент потребляет электрическую энергию от источника. Во вторую четверть периода направления напряжения и тока противоположны и $p < 0$, т.е. индуктивный элемент является источником и высвобождает энергию, запасенную в магнитном поле.

Цепь с емкостью

Если цепь переменного тока содержит конденсатор с емкостью C, к которому приложено синусоидальное напряжение u (рис. 3(а)):

$$u = U_0 \sin wt, \quad (14)$$

то заряд конденсатора будет периодически изменяться, и мгновенное значение силы тока в этой цепи

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C \cdot u)}{dt} = wCU_0 \cos wt = wCU_0 \sin\left(wt + \frac{p}{2}\right). \quad (15)$$

Обозначим $X_C = \frac{1}{wC}$ и назовем реактивным сопротивлением емкости (емкостным сопротивлением), тогда

$$i = I_0 \sin\left(wt + \frac{p}{2}\right), \quad (16)$$

где $I_0 = \frac{U_0}{X_C}$.

Амплитудные значения силы тока и напряжения связаны соотношением $I_0 = wCU_0$.

Из (15) следует, что ток в цепи с емкостью опережает приложенное напряжение на угол $\frac{p}{2}$. Временная и векторная диаграммы изображены на рис. 3(б) и 3(в).

Деля соотношение (16) на $\sqrt{2}$, получим закон Ома для цепи с емкостью $I = wCU$ или $U = I\frac{1}{wC} = I \cdot X_C$, (17)

здесь $X_C = \frac{1}{wC}$ (17а) имеет размерность сопротивления и называется емкостным сопротивлением.

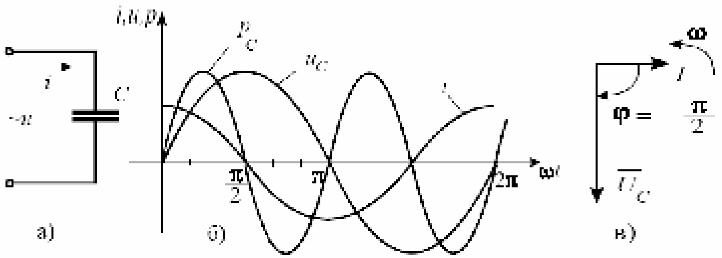

Рис. 3. Схема, временная и векторная диаграммы цепи с идеальным емкостным элементом

Перейдем к анализу энергетических процессов в цепи с емкостным элементом. Мгновенная мощность емкостного элемента

$$p = ui = \frac{1}{2}U_0 \cdot I_0 \cdot \sin wt \cdot \sin\left(wt + \frac{p}{2}\right) = UI \sin 2wt, \quad (18)$$

изменяется по закону синуса с удвоенной частотой.

Активная мощность, характеризующая необратимые процессы преобразования энергии и определяемая средним значением мгновенной мощности за период, для емкостного элемента равна нулю.

$$P_{cp} = P = \frac{1}{T}\int_0^T i \cdot u \cdot dt = \frac{1}{T}\int_0^T IU \sin 2wtdt = 0. \quad (19)$$

Таким образом, в цепи с идеальным емкостным элементом не совершается работа, а происходит только периодический обмен энергией между источником и электрическим полем. Интенсивность этого обмена принято характеризовать наибольшим значением скорости поступления энергии в электрическом поле, которое называют реактивной мощностью и обозначают Q_C

$$Q_C = U_C I = X_C I^2 \quad (20)$$

Реактивная мощность емкостного элемента, так же как и реактивная мощность индуктивного элемента, измеряется Вольт-Ампер реактивный, сокращенно ВАр.

График мгновенной мощности приведен на рис. 3(б). В первую четверть периода направления напряжения и тока совпадают и $p > 0$, т.е. емкостной элемент потребляет энергию от источника, которая запасается в электрическом поле. Во вторую четверть периода направления напряжения и тока противоположны, $p < 0$, т.е. емкостной элемент является источником и отдает запасенную в электрическом поле энергию.

Цепь с активно-индуктивной нагрузкой

Практически любая катушка обладает не только индуктивностью L, но и активным сопротивлением R (рис.4(а)).

По второму закону Кирхгофа для мгновенных значений приложенное напряжение к зажимам цепи уравновешивается падением напряжения на активном сопротивлении и падением напряжения на индуктивности:

$$u = u_R + u_L \,. \tag{21}$$

Выразив напряжение u_R и u_L через ток

$$i = I_m \sin wt \tag{22}$$

и сопротивления участков цепи R и X_L, получим:

$$I_m R \sin wt + I_m \sin\left(wt + \frac{p}{2}\right) = U_m \sin(wt + j\,). \tag{23}$$

Здесь

$$U_m = \sqrt{(I_m R)^2 + (I_m X_L)^2} = I_m \sqrt{R^2 + X_L^2} \,, \tag{24}$$

$$tgj = \frac{I_m X_L}{I_m R} = \frac{X_L}{R} \,. \tag{25}$$

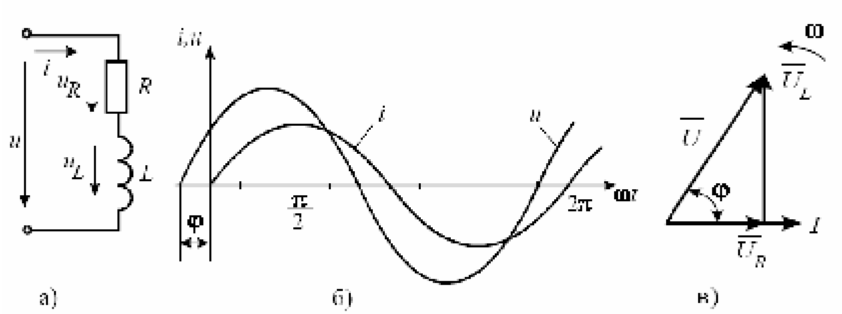

Рис. 4. Схема, временная и векторная диаграммы цепи с активным сопротивлением и индуктивностью

Таким образом, напряжение на входе цепи с активным сопротивлением и индуктивностью опережает ток на угол j. Временная и векторная диаграмма изображены на рис. 4(б) и 4(в).

Закон Ома для рассматриваемой цепи на основании (24)

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (wL)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{U}{Z} \,, \tag{26}$$

где $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ - полное сопротивление цепи.

Треугольник сопротивлений, подобный треугольнику напряжений, построен на рис. 5(а). Как видно из этого треугольника

$$\cos j = \frac{R}{Z}, \ \sin j = \frac{X_L}{Z}. \qquad (27)$$

Для анализа энергетических процессов в цепи R, L мгновенную мощность удобно рассматривать в виде суммы мгновенных значений активной $p_R = iu_R$ и реактивной (индуктивной) $p_L = iu_L$ мощностей $p = p_R + p_L$. Графики p_R и p_L изображены на рис. 5(б).

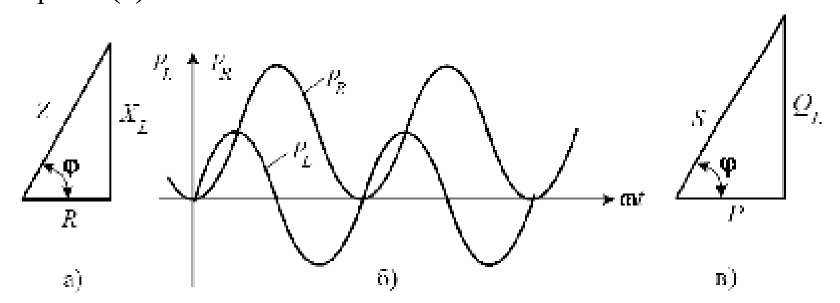

Рис. 5. Временная диаграмма мгновенных значений активной p_R и индуктивной p_L мощностей. Треугольники сопротивлений и мощностей

Из графика p_R видно, что активная мощность непрерывно поступает от источника и выделяется в активном сопротивлении в виде тепла. Мгновенная мощность p_L непрерывно циркулирует между источником и катушкой.

Умножив стороны треугольника сопротивлений на ток, получим треугольник мощностей (рис. 5(в)).

Стороны треугольника мощностей представляют:

$P = U_R I = I^2 R$ - активная мощность цепи, Вт;

$Q = U_L I = I^2 X_L$ - реактивная мощность цепи, ВАр;

$S = UI = I^2 Z$ - полная мощность цепи, ВА;

$\cos j = \dfrac{P}{S}$ - коэффициент мощности цепи.

Параметры реальной катушки (r_K, L) можно определить экспериментально, если последовательно с ней включить дополнительное сопротивление R (рис. 6(а)).

Измерив ток в цепи, а также напряжения U, U_R, U_K, можно построить в масштабе векторную диаграмму в соответствии с рис. 6(б) (т.е. построить треугольник по трем известным сторонам).

Тогда $r_K = \dfrac{U_{K.a}}{I}$, $X_K = \dfrac{U_K}{I}$, $L = \dfrac{X_K}{w} = \dfrac{X_K}{2pf}$ (28)

Данный метод определения параметров реальной катушки носит название опыта трех вольтметров.

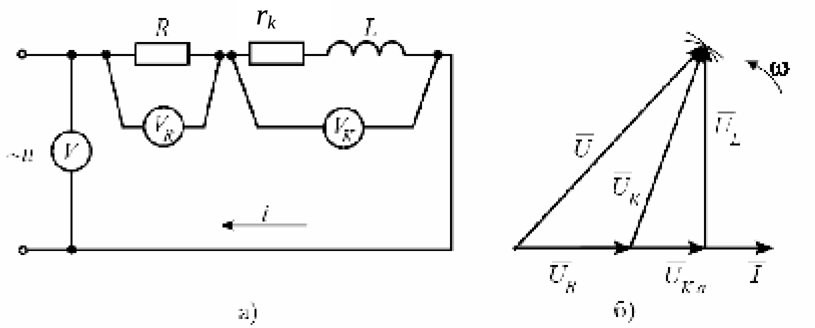

Рис. 6. Электрическая схема и векторная диаграмма цепи с резистором и реальной катушкой индуктивности

Эти параметры также находятся из очевидных уравнений для цепи рис. 6(а)

$$Z = \sqrt{(R + r_K)^2 + X_L^2} = \frac{U}{I}, \tag{29}$$

$$Z_K = \sqrt{r_K^2 + X_L^2} = \frac{U_K}{I}, \tag{30}$$

$$R = \frac{U_R}{I}. \tag{31}$$

Если измерить ток и напряжение на катушке при двух известных частотах f_1 и f_2 получим систему двух уравнений с двумя неизвестными параметрами R_K и L:

$$Z_{f_1} = \frac{U_{K_{f_1}}}{I_{K_{f_1}}} = \sqrt{r_K^2 + \left(2pf_1L\right)^2}\ , \qquad (32)$$

$$Z_{f_2} = \frac{U_{K_{f_2}}}{I_{K_{f_2}}} = \sqrt{r_K^2 + \left(2pf_2L\right)^2}\ , \qquad (33)$$

где $U_{K_{f_1}}$, I_{f_1} - напряжение и ток катушки при частоте f_1;

$U_{K_{f_2}}$, I_{f_2} - напряжение и ток катушки при частоте f_2.

Полагаем, что r_K от частоты не зависит. Второй метод носит название опыта двух частот.

Цепь с активно-емкостной нагрузкой

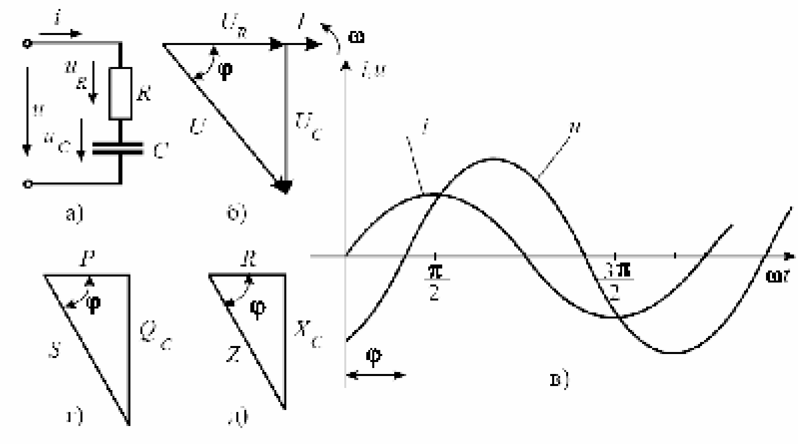

Рис. 7. Схема, временные диаграммы и треугольники напряжений, сопротивлений и мощностей цепи с активным и емкостным элементами

В этом случае уравнение напряжения цепи (рис. 7(а)) имеет вид:

$$u = u_R + u_C . \tag{34}$$

Напряжение на активном сопротивлении

$$u_R = RI_m \sin wt , \tag{35}$$

совпадает по фазе с током.

Напряжение на емкости

$$u_C = \frac{1}{wC} I_m \sin\left(wt - \frac{p}{2} \right), \tag{36}$$

отстает по фазе на угол $\frac{p}{2}$.

Таким образом, напряжение, приложенное к цепи, будет равно

$$u = RI_m \sin wt + \frac{1}{wC} I_m \sin\left(wt - \frac{p}{2} \right), \tag{37}$$

На рис. 7(б) изображена векторная диаграмма цепи R, C. Вектор напряжения $\dot{U}_R$ совпадает с вектором тока, вектор $\dot{U}_C$ отстает от вектора тока на угол $90°$. Из диаграммы следует, что вектор напряжения, приложенного к цепи, равен геометрической сумме векторов $\dot{U}_R$ и $\dot{U}_C$:

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_C , \tag{38}$$

а его величина

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} . \tag{39}$$

Выразив U_R и U_C через ток и сопротивления, получим

$$U = \sqrt{(IR)^2 + (IX_C)^2} , \tag{40}$$

откуда

$$U = I\sqrt{R^2 + X_C^2} = IZ . \tag{41}$$

Последнее выражение представляет собой закон Ома цепи R и C:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{U}{Z}, \qquad (42)$$

где $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ - полное сопротивление, Ом.

Из векторной диаграммы следует, что напряжение цепи R и C отстает по фазе от тока на угол j и его мгновенное значение

$$u = U_m \sin(wt - j). \qquad (43)$$

Временные диаграммы u и i изображены на рис. 7(в). Разделив стороны треугольника напряжений (рис. 7(б)) на ток, получим треугольник сопротивлений (рис. 7(д)), из которого можно определить косинус угла сдвига фаз между током и напряжением:

$$\cos j = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}. \qquad (44)$$

Энергетические процессы в цепи с активным и емкостным элементами можно рассматривать как совокупность процессов, происходящих отдельно в цепи с R и с C. Из сети непрерывно поступает активная мощность, которая выделяется в активном сопротивлении R в виде тепла. Реактивная мощность, обусловленная электрическим полем емкости C, непрерывно циркулирует между источником энергии и цепью. Ее среднее значение за период равно нулю. Умножив стороны треугольника напряжений (рис. 7(б)) на ток, получим треугольник мощностей (рис. 7(г)). Стороны треугольника мощностей представляют:

$P = U_R I = I^2 R$ - активную мощность цепи, Вт;

$Q_C = U_C I = I^2 X_C$ - реактивную (емкостную) мощность цепи, ВАр;

$S = UI = I^2 Z$ - полную мощность цепи, ВА;

$\cos j = \frac{P}{S}$ - коэффициент мощности цепи.

Упражнение 1
Измерение и вычисление параметров катушки и конденсатора методом трех вольтметров

1. Собрать электрическую цепь, рис. 8

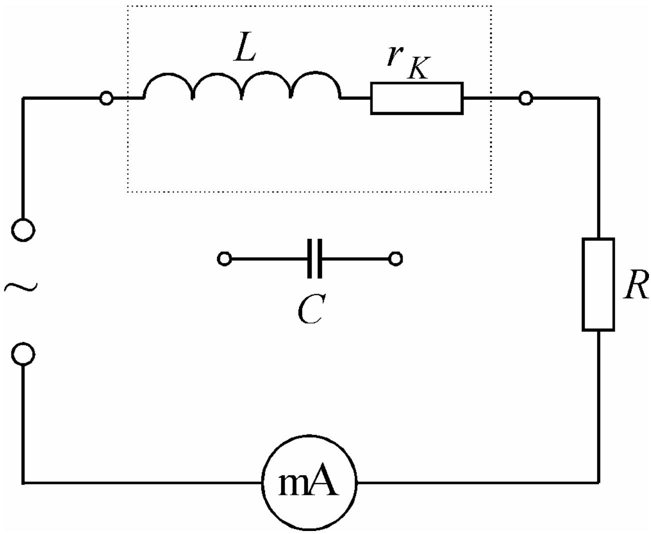

Рис. 8

.

2. После проверки схемы преподавателем включить питание цепи и измерить ток I на активном элементе, напряжения на входе цепи U и на катушке индуктивности U_K. Измерения следует производить на катушках с сердечником и без сердечника с числом витков 1200, 2400 и 3600 витков не менее трех раз.

Данные измерений занести в таблицу 1.

При измерениях необходимо иметь в виду следующее:

а) не следует держать включенную цепь дольше, чем это необходимо для произведения отсчетов, так как в противном случае катушка нагреется и сопротивление ее значительно изменится.

б) переключения катушки делать при отключении цепи от сети.

Таблица 1

	Измерено					Вычислено				
	№	U, В	U_R, В	U_K, В	I, А	R, Ом	X_K, Ом	r_K, Ом	L, Гн	j
катушка 1 (1200 витков)	1									
	2									
	3									
катушка 2 (2400 витков)	1									
	2									
	3									
катушка 3 (3600 витков)	1									
	2									
	3									
катушка 1 с сердечником	1									
	2									
	3									
катушка 2 с сердечником	1									
	2									
	3									
катушка 3 с сердечником	1									
	2									
	3									

3. Заменить в электрической цепи схемы (рис. 8) катушку индуктивности на конденсатор и провести измерения тока I, напряже-

ния на входе U, конденсаторе U_C и на резисторе U_R. Данные измерения занести в таблицу 2.

Таблица 2

	Измерено					Вычислено		
	№	U, В	U_R,В	U_C,В	I,А	R,Ом	X_C, Ом	С, мкФ
Конденсатор 1	1							
	2							
	3							
Конденсатор 2	1							
	2							
	3							

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОПЫТА

1. Используя опытные данные построить векторные диаграммы напряжений, треугольники сопротивлений и мощностей для исследуемой цепи.
2. Рассчитать параметры катушки индуктивности и конденсатора по методу трех вольтметров, используя векторные диаграммы и формулы (17), (17а), (28), (30), (31).
3. Сравнить результаты и сделать выводы.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Объяснить графически построение векторных диаграмм по результатам измерений.
2. Как определить параметры катушки методом трех вольтметров?
3. Как определить параметры последовательной цепи R, C методом двух частот?
4. Запишите закон Ома для цепи R, L и для цепи R, C для действующих значений и в комплексной форме.

5. Что понимают под действующим значением тока?
6. Укажите свойства активного сопротивления в цепи синусоидального тока.
7. Укажите свойства индуктивного сопротивления в цепи синусоидального тока.
8. Укажите свойства ёмкостного сопротивления в цепи синусоидального тока.
9. Дайте определение векторной и топографической диаграмм.
10. Что понимают под треугольником сопротивлений.
11. Какую мощность измеряет ваттметр в цепи синусоидального тока?

Литература

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Калашников С.Г. Электричество. М. Физматлит, 2004. – 276 с.
2. Тамм И. Е. Основы теории электричества.- М. : Наука , 1989.- 504с.
3. А.Н. Матвеев. Электричество и магнетизм. Учеб. пособие для студ. вузов.- М. : ОНИКС 21 век: Мир и Образование , 2005.- 463с
4. Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Электричество. : учеб. пособие для студ. физических спец. вузов- 4-е изд., стереотип.- М. : Физматлит: МФТИ , 2002.- 656с.
5. И.Е. Иродов. Электромагнетизм. Основные законы. М., ЛБЗ, 2001.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И.В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. учеб. пособие для втузов- М. : Астрель : АСТ , 2003.- 336с
2. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике, вып. 5,6. Электричество и магнетизм. М., Мир, 1966.