SNE 13 (QC)

0. Historia

(0) R. P. Feynman[1)], There's plenty of room at the bottom – An invitation to enter a new field of physics, *Engineering and Science Magazine* **23** (1960).

⋮

(1) P. Benioff, The computer as a physical system: A microscopic quantum mechanical Hamiltonian model of computers as represented by Turing machines, *Journal of Statistical Physics* **22** (1980), 563–591.
(2) **Quantum automaton, quantum-mechanical computation**
Yu. I. Manin, Introduction to the book *Vychislimoe i nevychislimoe* (*Computable and Uncomputable*) (in Russian), pp. 13–15, Sovetskoye Radio (Soviet Radio), Moscow, 1980, 128 pp.; an English translation in *Mathematics as Metaphor – Selected Essays of Yuri I. Manin*, AMS, Providence, RI, 2007.
(3) **Feynman**
(3a) R. Feynman, Simulating physics with computers, *Internat. J. Theoret. Phys.* **21** (1982), 467–488. [The keynote speech of *the First Conference on the Physics of Computation* (1981) organized by IBM and MIT. Feynman: 'Nature is quantum, goddamn it! So if we want to simulate it, we need a quantum computer.']
(3b) R. Feynman, Quantum mechanical computers, *Found. Phys.* **16** (1986), 507–531; originally in *Optics News* (February 1985), 11–20.
(4) **Quantum Turing Machine (QTM)**
D. Deutsch, Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer, *Proc. of the Roy. Soc. London Ser A* **400** (July 1985), 96–117.

⋮

(5) **Algorytm Shora**
(5a) P. W. Shor[2)], Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring, *Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, IEEE Comput. Soc. Press (1994), 124–134.
(5b) P. W. Shor, Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer, *SIAM J. Computing* **26** (1995), 1484–1509.

⋮

(6) D-Wave Systems, 1999, nadprzewodnictwo, superconductivity
Geordie Rose, Founder, CTO, former CEO; Eric Ladizinsky, Co-Founder, Chief Scientist (CS)
(6a) T. Kadowaki and H. Nishimori, Quantum annealing in the transverse Ising model, *Phys. Rev. E* **58** (1998), 5355–5363.
(6b) E. Farhi1, J. Goldstone1, S. Gutmann, J. Lapan, A. Lundgren, D. Preda, A Quantum Adiabatic Evolution Algorithm Applied to Random Instances of an NP-Complete Problem, *Science* **292** (2001), 472–475.

⋮

(7) Quantum AI Lab, Google, 2013

⋮

(8) IBM, 5 qubits (2016), (free) cloud programming tool kit QISKit (2016), Jerry Chow at T. J. Watson Research Center in New York;

---

1) Nagroda Nobla w dziedzinie fizyki 1965
2) Nagroda Nevanlinna 1998

50 qubits (2017), nadprzewodnictwo, superconductivity;
Dario Gil, COO of IBM Research and VP (AI & Quantum Computing, IBM Q)
(9) Google, 72 qubits (2018), Bristlecone, nadprzewodnictwo, superconductivity?
J. M. Martinis et al. (77 authors!), Quantum supremacy using a programmable superconducting processor, *Nature* **574** (2019), 505–510.
(10) Intel, 49 qubits
(11) Startups: Rigetti Computing (19 qubits), IonQ, Quantum Circuits, Nu Quantum, Cirq (Google AI Quantum Team), QC Ware (Quantum optimization algorithms)

Zob.: W. Knight, Hello quantum world, *MIT Technology Review* (Feb 2018).

1. Kubit (Qubit)

kubit, qubit

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{(baza ortonormalna przestrzeni Hilberta nad } \mathbb{C}\text{)}$$

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

($\{|0\rangle, |1\rangle\}$ jest bazą ortonormalną, tj. $\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1, \langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0$.)

• Interpretacja kopenhaska
Po pomiarze $|\psi\rangle$ obserwujemy stan $|0\rangle$ z prawdopodobieństwem $|\alpha|^2$ a $|1\rangle$ z prawdopodobieństwem $|\beta|^2$.
Przed pomierzem $|\psi\rangle$ jest w stanie koherentnym.
Pomiar = dekoherencja

Einstein "Bóg nie gra w kości." (Pismo Einsteina do Maxa Borna)
Kot Schrödingera

• Wieloświatowa interpretacja mechaniki kwantowej (Hugh Everett 1957, Bryce DeWitt w 1960tych i 1970tych latach)

splątanie (*ang.* entanglement)

Przykład.

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle \otimes |1\rangle + \beta|1\rangle \otimes |0\rangle$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

(Uważmy, że $|0\rangle \otimes |1\rangle \neq |1\rangle \otimes |0\rangle$.)

Paradoks EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) 1935 – eksperyment myślowe

$$|\psi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Mechnika kwantowa	Algebra liniowa
superpozycja	kombinacja liniowa, $\alpha\|0\rangle + \beta\|1\rangle$
4 kubity	iloczyn tensorowy, $\|0\rangle \otimes \|0\rangle, \|1\rangle \otimes \|0\rangle, \|0\rangle \otimes \|1\rangle, \|1\rangle \otimes \|1\rangle$
splątanie (entanglement)	$\alpha\|0\rangle \otimes \|1\rangle + \beta\|1\rangle \otimes \|0\rangle$

Transformacja (macierz)

$$|\psi\rangle \mapsto A|\psi\rangle$$

Przykład.

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1)$$

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{NOT} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{NOT}|\psi\rangle = \mathrm{NOT}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha\mathrm{NOT}|0\rangle + \beta\mathrm{NOT}|1\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$$

$$\langle\psi|\mathrm{NOT}^\dagger\mathrm{NOT}|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1 \quad \text{(unitarność macierzy NOT = conservation of probability)}$$

Iloczyn (produkt) tensorowy wektorów

Przykład.

$$V = V_2(\mathbb{C}) = \{\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \ \mid\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}\} \quad (\{|0\rangle, |1\rangle\} \text{ baza ortonormalna})$$

$$V \otimes V = \{\alpha|0\rangle \otimes |0\rangle + \beta|1\rangle \otimes |0\rangle + \gamma|0\rangle \otimes |1\rangle + \delta|1\rangle \otimes |1\rangle \ \mid\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}\}$$
$$(\{|0\rangle \otimes |0\rangle, |1\rangle \otimes |0\rangle, |0\rangle \otimes |1\rangle, |1\rangle \otimes |1\rangle\} \text{ baza ortonormalna})$$

Reguły

$$\alpha(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle) = (\alpha|\psi\rangle) \otimes |\varphi\rangle = |\psi\rangle \otimes (\alpha|\varphi\rangle) \qquad \text{(mnożenie skalarne)}$$
$$(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle) \otimes |\phi\rangle = |\psi\rangle \otimes (|\varphi\rangle \otimes |\phi\rangle) \qquad \text{(łączność)}$$
$$|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle \neq |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle \qquad \text{(nieprzemienność)}$$
$$(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) \otimes |\varphi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\varphi\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |\varphi\rangle \qquad \text{(rozdzielność)}$$
$$|\psi\rangle \otimes (|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\varphi_1\rangle + |\psi\rangle \otimes |\varphi_2\rangle \qquad \text{(rozdzielność)}$$
$$(\alpha + \beta)(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle) = \alpha(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle) + \beta(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle) \qquad \text{(rozdzielność)}$$

Zadanie. $(\alpha|\psi\rangle + \beta|\varphi\rangle) \otimes (\gamma|\psi\rangle + \delta|\varphi\rangle)$

Iloczyn (produkt) tensorowy macierz

$$|\psi\rangle \mapsto A|\psi\rangle, \quad |\varphi\rangle \mapsto B|\varphi\rangle$$

$$|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle \mapsto (A \otimes B)(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle) := (A|\psi\rangle) \otimes (B|\varphi\rangle)$$

2. Dyskretna Transformacja Fouriera DFT_q (QFT_q)

$$|x\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{— } (x+1)\text{-ty rząd} \qquad (0 \le x \le q-1)$$

$$V_q(\mathbb{C}) = \left\{ \sum_{x=0}^{q-1} \alpha_x |x\rangle \;\middle|\; \alpha_x \in \mathbb{C} \quad (0 \le x \le q-1) \right\}$$

$$(\{|x\rangle\}_{x=0}^{q-1} \quad \text{baza ortonormalna } V_q(\mathbb{C}))$$

Zdefiniujemy dyskretną transformację Fouriera

$$\mathrm{DFT}_q \colon V_q(\mathbb{C}) \to V_q(\mathbb{C})$$

wzorem

$$\mathrm{DFT}_q |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{c=0}^{q-1} e^{i2\pi \frac{xc}{q}} |c\rangle \qquad (0 \le x \le q-1).$$

($e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ wzór Eulera, $i = \sqrt{-1}$)
Uwaga. Por. z ciągłą trnsformacją Fouriera.

$$f(x) \mapsto \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi x} f(x) dx$$

Zadanie.
(i) Obliczyć transformatę Fouriera $\mathrm{DFT}_4|x\rangle$ $(0 \le x \le 3)$.
(ii) Wyrazić DFT_q jako macierz w $M_{n\times n}(\mathbb{C})$.
(iii) Niech $\{|x\rangle\}_{x=0}^{q-1}$ będzie bazą ortonormalną $V_q(\mathbb{C})$, tj. $\langle x|y\rangle = \delta_{xy}$. Podać $\mathrm{DFT}_q^\dagger|x\rangle$ i $\langle x|\mathrm{DFT}_q^\dagger$. $\mathrm{DFT}_q^\dagger$ jest operatorem sprzężonym do DFT_q. Zob. Dodatek A.
(iv) Pokazać, że $\mathrm{DFT}_q \colon V_q(\mathbb{C}) \to V_q(\mathbb{C})$ jest unitarna. Wskazóki: Pokazać, że $\mathrm{DFT}_q^\dagger \mathrm{DFT}_q|x\rangle = |x\rangle$. Albo obliczyć $\langle x|\mathrm{DFT}_q^\dagger \mathrm{DFT}_q|y\rangle$. Albo bezpośrednio obliczyć $\mathrm{DFT}_q^\dagger \mathrm{DFT}_q$ w macierzy.

3. Algorytm faktoryzacji N (Discrete Log problem=DL)

1. Wybrać losowo $0 < a < N$.
2.

$$\begin{aligned} \gcd(N,a) > 1 &\;\Rightarrow\; \text{Print } \gcd(N,a). \text{ Stop.} \\ \gcd(N,a) = 1 &\;\Rightarrow\; \text{Go to 3.} \end{aligned}$$

3. Rozwiązać DL (Discrete Log problem): $a^r \equiv 1 \mod N$.
4.

$$\begin{aligned} 2 \mid r &\;\Rightarrow\; \text{Go to 5.} \\ 2 \nmid r &\;\Rightarrow\; \text{Go to 1.} \end{aligned}$$

5. Obliczyć $\gcd(N, a^{\frac{r}{2}} \pm 1)$.
6.

$$\begin{aligned} \gcd(N, a^{\frac{r}{2}}+1) > 1 \text{ or } \gcd(N, a^{\frac{r}{2}}-1) > 1 &\;\Rightarrow\; \text{Print jeden z } \gcd(N, a^{\frac{r}{2}} \pm 1), \text{ który jest } > 1. \text{ Stop.} \\ \gcd(N, a^{\frac{r}{2}}+1) = 1 \text{ and } \gcd(N, a^{\frac{r}{2}}-1) = 1 &\;\Rightarrow\; \text{Go to 1.} \end{aligned}$$

Przykład. $N = 12, a = 5$
$\gcd(12, 5) = 1$, DL: $5^2 \equiv 1 \bmod 12$ (czyli $r = 2$)
$\gcd(12, 5^{\frac{2}{2}} \pm 1) = \gcd(12, 4), \gcd(12, 6) = 4, 6$

x	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$5^x \mod 12$	1	5	1	5	1	5	$\cdots$

4. Algorytm Shora

Shor podał algorytm, który rozwiązuje DL w czasie wielomianowym na "komputerze kwantowym". (złożoność: INTEGER FACTORIZATION $\in$ NP, $\notin$ P?, $\notin$ NP-complete?; PRIMES $\in$ P, Agrawal–Kayal–Saxena primality test)

Algorytm Shora

1. Wybrać q ($N^2 < q < 2N^2$) i a ($0 < a < N$).
2. Startować z
$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{x=0}^{q-1} |x\rangle \otimes |a^x \bmod N\rangle.$$
3. Stosować $\mathrm{DFT}_q \otimes I$ do $|\psi_1\rangle$.
$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= \mathrm{DFT}_q \otimes I |\psi_1\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{x=0}^{q-1} \mathrm{DFT}_q |x\rangle \otimes |a^x \bmod N\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{x=0}^{q-1} \left(\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{c=0}^{q-1} e^{i2\pi \frac{xc}{q}} |c\rangle \right) \otimes |a^x \bmod N\rangle \\ &= \sum_{c,\ a^x \bmod N} \alpha_{c,\ a^x \bmod N}\ |c\rangle \otimes |a^x \bmod N\rangle \end{aligned}$$
4. Po pomiarze obserwujemy $|c\rangle \otimes |a^x \bmod N\rangle$ z największym prawdopodowieństwem $|\alpha_{c,\ a^x \bmod N}|^2$.
5. Znaleźć $\frac{d}{r}$ takie, że $\gcd(d, r) = 1$, $0 < r < N$ oraz $\frac{d}{r} \approx \frac{c}{q}$.
6.
$$\begin{aligned} 2 \mid r &\Rightarrow \text{Go to 7.} \\ 2 \nmid r &\Rightarrow \text{Go to 1.} \end{aligned}$$
7. $\gcd(N, a^{\frac{r}{2}} \pm 1)$ są kandydatami dzielników N. Jeśli nie, to Go to 1.

Przykład. $N = 12, a = 5, q = 4$ (DL: $5^r \equiv 1 \bmod 12$)
$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{x=0}^{3} |x\rangle \otimes |5^x \bmod 12\rangle$$
$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= \mathrm{DFT}_4 \otimes I |\psi_1\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{x=0}^{3} \mathrm{DFT}_4 |x\rangle \otimes |5^x \bmod 12\rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{4}}\sum_{x=0}^{3}\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\sum_{c=0}^{3}e^{i2\pi\frac{xc}{4}}|c\rangle\right)\otimes|5^x \bmod 12\rangle \\
&= \frac{1}{4}\Big\{\Big(|0\rangle+|1\rangle+|2\rangle+|3\rangle\Big)\otimes|1\rangle \\
&\quad+\Big(|0\rangle+e^{i\frac{\pi}{2}}|1\rangle+e^{i\frac{\pi}{2}2}|2\rangle+e^{i\frac{\pi}{2}3}|3\rangle\Big)\otimes|5\rangle \\
&\quad+\Big(|0\rangle+e^{i\frac{\pi}{2}2}|1\rangle+e^{i\frac{\pi}{2}4}|2\rangle+e^{i\frac{\pi}{2}6}|3\rangle\Big)\otimes|1\rangle \\
&\quad+\Big(|0\rangle+e^{i\frac{\pi}{2}3}|1\rangle+e^{i\frac{\pi}{2}6}|2\rangle+e^{i\frac{\pi}{2}9}|3\rangle\Big)\otimes|5\rangle\Big\} \\
&= \frac{1}{4}\Big\{\Big(|0\rangle+|1\rangle+|2\rangle+|3\rangle\Big)\otimes|1\rangle \\
&\quad+\Big(|0\rangle+i|1\rangle-|2\rangle-i|3\rangle\Big)\otimes|5\rangle \\
&\quad+\Big(|0\rangle-|1\rangle+|2\rangle-i|3\rangle\Big)\otimes|1\rangle \\
&\quad+\Big(|0\rangle-i|1\rangle-|2\rangle+i|3\rangle\Big)\otimes|5\rangle\Big\} \\
&= \frac{1}{2}|0\rangle\otimes|1\rangle+\frac{1}{2}|0\rangle\otimes|5\rangle+\frac{1}{2}|2\rangle\otimes|1\rangle+\frac{1}{2}|2\rangle\otimes|5\rangle
\end{aligned}
$$

Obserwujemy $|2\rangle\otimes|1\rangle$ lub $|2\rangle\otimes|5\rangle$ z prawdopodowieństwem $|\frac{1}{2}|^2=\frac{1}{4}$. Zatem otrzymujemy $c=2$ z prawdopodowieństwem $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.
$\frac{d}{r}\approx\frac{c}{q}=\frac{2}{4}\Rightarrow r=2$ $(d=1)$ spełnia warunek 5 algorytmu Shora.
$\gcd(12,5^{\frac{2}{2}}\pm 1)=\gcd(12,4),\gcd(12,6)=4,6$

Isaac Chuang, MIT, 2001
Eksperyment implementacji algorytmu Shora używa bramek kwantowych (the standard circuit model of quantum computing).
$N=15, a=7, q=8$
$|x\rangle\otimes|f(x)\rangle,\ f(x)=7^x \bmod 15$

$\underbrace{\bigcirc-\bigcirc-\bigcirc}_{|x\rangle}=\underbrace{\bigcirc-\bigcirc-\bigcirc-\bigcirc}_{|f(x)\rangle}$

nuclear magnetic resonance $\rightsquigarrow\ \uparrow-\downarrow-\uparrow=\downarrow-\uparrow-\uparrow-\downarrow$

F–F–F=F–F–C–C, F:fluor, C:węgiel

CN (Controlled NOT, Zob. Zadanie w Dodatek A.):
nuclear magnetic resonance $\rightsquigarrow |\uparrow\rangle\otimes|\downarrow\rangle\mapsto|\uparrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle$, ...
Transformacja Hadamarda (obrót spinu): nuclear magnetic resonance $\rightsquigarrow |\uparrow\rangle\mapsto|\nwarrow\rangle$, ...
$\mathrm{DFT}_q=\prod_{i,j}\mathrm{CN}^i\,\mathrm{Hadamard}^j$

When I [W. Knight] asked him what the world might be like when my two-year-old son grows up, Chuang, who learned to use computers by playing with microchips, responded with a grin. “Maybe your kid will have a kit for building a quantum computer,” he said. (cytat z W. Knight, Hello quantum world, *MIT Technology Review*, Feb 2018)

5. Adiabatic quantum computer, quantum annealing (kwantowe wyżarzanie)

Komputer firmy D-Wave Systems działa w podstawie kwantowego wyżarzania proponowanego przez Nishimori et al. (1998) i Farhi et al. (2001).
Hamiltonian H_0, H_1 (Ising model)

$$H_0 = -\sum_{i,j} J_{i,j}\sigma_i^z\sigma_j^z - h\sum_i \sigma_i^z \longrightarrow \text{minimum}$$

$$H_1 = \sum_i \sigma_i^x$$

Równanie Schrödingera $i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$ (stałe Plancka $\hbar = 1$)
$H(t) = H_0 + \Gamma(t)H_1, H(0) \approx \Gamma(0)H_1, \Gamma(t) \to 0, H(t) \to H_0, t = T \gg 0$ (Nishimori et al.)
$H(t) = \frac{t}{T}H_0 + (1 - \frac{t}{T})H_1, 0 \le t \le T$ (Farhi et al.)

$$\begin{array}{rccccccccccc}
\rightsquigarrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & & \uparrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\rightsquigarrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\text{transverse field} \rightsquigarrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \downarrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow \\
\rightsquigarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow \\
\rightsquigarrow & \downarrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \uparrow
\end{array}$$

$$H(0) = H_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow H(T) = H_0$$

Uwaga. Można pokazać, że adiabatyczne komputery są równoważne do standardowych komputerów kwantowych (the standard circuit model of quantum computing), które używają z bramek kwantowych. Innymi słowi można korzystać adiabatycznych komputerów dla wszechstronnych celów, a nie tylko dla optymalizacji jak TSP.

- S. Lloyd et al., Adiabatic Quantum Computation is Equivalent to Standard Quantum Computation, arXiv:quant-ph/0405098v2 (2005)
- J. D. Biamonte and P. J. Love, Realizable Hamiltonians for universal adiabatic quantum computers, arXiv:0704.1287v2 [quant-ph] (2008).
- T. Albash and D. A. Lidar, Adiabatic quantum computation, *Rev. Mod. Phys.* **90** (2018).

Dodatek A. Algebra liniowa dla komputerów kwantowych

(Notacja P. A. M. Diraca[3)], Dirac's "bra-ket" notation)

ket $|\psi\rangle$

$$V_q(\mathbb{C}) = \left\{ |\psi\rangle = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_q \end{bmatrix} \;\middle|\; z_i \in \mathbb{C} \;\; (1 \le i \le q) \right\} \quad \text{(przestrzeń Hilberta nad } \mathbb{C}\text{)}$$

bra $\langle\varphi|$
Dla $|\varphi\rangle = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_q \end{bmatrix} \in V_q(\mathbb{C})$ zdefiniujemy $\langle\varphi| \in V_q(\mathbb{C})^*$ następująco.

$$\langle\varphi| = [\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_q]$$

3) Nagroda Nobla w dziedzinie fizyki 1933

iloczyn skalarny (bra-(c)ket! na-wias!) $\langle\varphi|\psi\rangle$

$$\langle\varphi|\psi\rangle = [\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_q] \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_q \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{q} \bar{w}_i z_i$$

Uwaga. Por. z notacją w literaturze matematycznej
Dla $\vec{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_q \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_q \end{bmatrix} \in V_q(\mathbb{C})$,

$$\langle \vec{w}, \vec{z} \rangle = \vec{z}^{\,*}\vec{w} = [\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_q] \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_q \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{q} w_i \bar{z}_i.$$

Uważmy, że $\langle\varphi|\psi\rangle = \overline{\langle \vec{w}, \vec{z} \rangle} = \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle$!

macierz (operator) unitarna $U\colon V_q(\mathbb{C}) \to V_q(\mathbb{C})$

Dla

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{i,j=1}^{q}$$

piszemy zwaną macierz sprzężąną

$$U^\dagger = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{q1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1q} & \cdots & \bar{a}_{qq} \end{bmatrix} = [\bar{a}_{ji}]_{i,j=1}^{q} \quad \text{(transpozycja + sprzężenie zespolone).}$$

Mówimy, że U jest unitarna jeżeli $U^\dagger U = I$ ($\Rightarrow UU^\dagger = I$).
Przypomnimy definicje $U|\psi\rangle$ i $\langle\varphi|U^\dagger$:

$$U|\psi\rangle = U \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{q} a_{1j} z_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{q} a_{ij} z_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{q} a_{nj} z_j \end{bmatrix},$$

$$\langle\varphi|U^\dagger = [\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_q]U^\dagger = \left[\sum_{i=1}^{q} \bar{w}_i \bar{a}_{1i}, \cdots, \sum_{i=1}^{q} \bar{w}_i \bar{a}_{ji}, \cdots, \sum_{i=1}^{q} \bar{w}_i \bar{a}_{ni} \right].$$

Uważmy, że jeżeli U jest unitarna, to $\langle\varphi|U^\dagger U|\psi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle$ (conservation of probability).
Uwaga. W literaturze matematycznej piszemy U^* zamiast $U^\dagger$. Uważmy, że $\langle\varphi|U^\dagger U|\psi\rangle = \vec{w}^{\,*}U^*U\vec{z} = \overline{\langle U\vec{w}, U\vec{z} \rangle} = \langle U\vec{z}, U\vec{w} \rangle = \overline{\langle \vec{w}, U^*U\vec{z} \rangle} = \langle \vec{z}, U^*U\vec{w} \rangle$!

Iloczyn tensorowy

Jeśli

$$\left\{ |x\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{— } (x+1)\text{-ty rząd} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad (0 \leq x \leq q-1) \right\}$$

jest bazą $V_q(\mathbb{C})$, to

$$\{|x\rangle \otimes |y\rangle \,|\, 0 \leq x, y \leq q-1\}$$

będzie bazą przestrzeń tensorowej $V_q(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} V_q(\mathbb{C}) = V_q(\mathbb{C}) \otimes V_q(\mathbb{C})$. Więc $\dim_{\mathbb{C}} V_q(\mathbb{C}) \otimes V_q(\mathbb{C}) = q^2$.

Uwaga. W literaturze o komputerach kwantowych czasem piszą $|x\rangle|y\rangle$ (trochę dziwne!) albo $|xy\rangle$ zamiast $|x\rangle \otimes |y\rangle$.

Reguły

$$\alpha(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle) = (\alpha|\psi\rangle) \otimes |\varphi\rangle = |\psi\rangle \otimes (\alpha|\varphi\rangle) \qquad \text{(mnożenie skalarne)}$$

$$(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle) \otimes |\phi\rangle = |\psi\rangle \otimes (|\varphi\rangle \otimes |\phi\rangle) \qquad \text{(łączność)}$$

$$|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle \neq |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle \qquad \text{(nieprzemienność)}$$

$$(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) \otimes |\varphi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\varphi\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |\varphi\rangle \qquad \text{(rozdzielność)}$$

$$|\psi\rangle \otimes (|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\varphi_1\rangle + |\psi\rangle \otimes |\varphi_2\rangle \qquad \text{(rozdzielność)}$$

$$(\alpha + \beta)(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle) = \alpha(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle) + \beta(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle) \qquad \text{(rozdzielność)}$$

iloczyn skalarny dla iloczynów tensorowych

Czasem piszemy $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = |\psi_1 \otimes \psi_2\rangle$ i $\langle\varphi_1| \otimes \langle\varphi_2| = \langle\varphi_1 \otimes \varphi_2|$. Iloczyn skalarny iloczynów tensorowych zdefiniujemy następującym wzorem.

$$\langle\varphi_1 \otimes \varphi_2|\psi_1 \otimes \psi_2\rangle = \langle\varphi_1|\psi_1\rangle\langle\varphi_2|\psi_2\rangle$$

Zadanie. Pokazać, że jeśli $\{|x\rangle \,|\, 0 \leq x \leq q-1\}$ jest bazą **ortogonalną** $V_q(\mathbb{C})$, to $\{|x\rangle \otimes |y\rangle \,|\, 0 \leq x, y \leq q-1\}$ będzie bazą **ortogonalną** $V_q(\mathbb{C}) \otimes V_q(\mathbb{C})$.

iloczyn skalarny macierz (operatorów)

Dla $A\colon V_q(\mathbb{C}) \to V_q(\mathbb{C})$ i $B\colon V_q(\mathbb{C}) \to V_q(\mathbb{C})$ zdefiniujemy $A \otimes B\colon V_q(\mathbb{C}) \otimes V_q(\mathbb{C}) \to V_q(\mathbb{C}) \otimes V_q(\mathbb{C})$ następująco.

$$(A \otimes B)(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle) = (A|\psi\rangle) \otimes (B|\varphi\rangle)$$

Zadanie.
(i) $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$
(ii) $(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger$
(iii) Jeśli A i B są unitarne, to $A \otimes B$ też jest unitarna.

Zadanie. Negacja Sterowana, Controlled NOT (CN)

Przeznaczmy

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Definiujemy CN: $V_4(\mathbb{C}) \to V_4(\mathbb{C})$ z wzorów

$$\mathrm{CN}|0\rangle \otimes |0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle, \quad \mathrm{CN}|0\rangle \otimes |1\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle,$$

$$\mathrm{CN}|1\rangle \otimes |0\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle, \quad \mathrm{CN}|1\rangle \otimes |1\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle.$$

(i) Znaleźć macierz CN $\in M_{4\times 4}(\mathbb{C})$.
(ii) Pokazać, że CN jest unitarny.

Dodatek B. Równanie Schrödingera

Mechanika kwantowa dla informatyków

0) Wzór Eulera $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, $i = \sqrt{-1}$, $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

1) Klasyczna fala $u(x,t) = e^{i(kx-\omega t)} = \cos(kx - \omega t) + i\sin(kx - \omega t)$ gdzie $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ liczba falowa, λ długość fali, $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda}$ częstość fali, $v = \frac{\omega}{k}$ prędkość fali.

2) $u(x,t)$ spełnia klasyczne równanie falowe $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ponieważ $v = \frac{\omega}{k}$. Jeśli $v = c$ (prędkość światła), to równanie staje się równaniem Maxwella.

3) Dla światła mamy $pc = E = \hbar\omega$ (kwantowe wyjaśnienie zjawiska fotoelektrycznego, Einstein 1905). Ponieważ $\frac{\omega}{c} = k$, mamy $p = \hbar k$. Zatem dla fali materii (fali de Broglie'a) z prędkością v mamy $E = \hbar\omega$ i $E = \frac{1}{2m}p^2 = \frac{1}{2m}\hbar^2 k^2$ (de Broglie 1924).

4) Wówczas $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{i(kx-\omega t)}$ spełnia równanie $i\hbar\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi(t)\rangle$ gdzie $\hat{H} := -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ (równanie Schrodingera!) ponieważ $\hbar\omega = E = \frac{1}{2m}p^2 = \frac{1}{2m}\hbar^2 k^2$. Więc przepis dla kwantowania będzie: $E \mapsto \hat{E} := -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ i $p \mapsto \hat{p} := -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$.

5) Piszemy rozwiązanie $|\psi(t)\rangle$ jako $|\psi(t)\rangle = e^{-t\frac{i}{\hbar}\hat{H}}|\psi(0)\rangle$. Wówczas operator $e^{-t\frac{i}{\hbar}\hat{H}}\colon |\psi(0)\rangle \mapsto e^{-t\frac{i}{\hbar}\hat{H}}|\psi(0)\rangle$ jest unitarny.

Ćw. 3-2a. (Klasyczne równanie falowe, Równanie Schrödingera 1925-26, Nagroda Nobla 1933)
(1) Dla $z = a + bi$ zdefiniujemy $e^{zt} = e^{at}e^{i(bt)} = e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt))$. Pokazać $\frac{de^{zt}}{dt} = ze^{zt}$.
(2) Sprawdzić, że $f(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$ spełnia klasyczne równanie falowe $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Por. Ćw. 3-1 (14a).
(3) Fale de Broglie'a (1924, Nagroda Nobla 1929) ciąstki z masą m spełnia relacje: $E = \hbar\omega$, $p = \hbar k$, $E = \frac{p^2}{2m}$. Z tych wyprowadzić równanie Schrödingera dla fali de Broglie'a $\psi(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$.
(`https://yoichiuetake.wixsite.com/uetake`)

Rozwiązanie Ćw. 3-2a.
(1)

$$\frac{de^{zt}}{dt} = \frac{de^{at}e^{i(bt)}}{dt} = \frac{de^{at}}{dt} \cdot e^{i(bt)} + e^{at} \cdot \frac{de^{i(bt)}}{dt} \quad \text{(Reguła Leibniza)}$$

$$\frac{de^{i(bt)}}{dt} = \frac{d\{\cos(bt) + i\sin(bt)\}}{dt} = -b\sin(bt) + ib\cos(bt) = ib\{\cos(bt) + i\sin(bt)\} = ibe^{i(bt)}$$

$$\frac{de^{zt}}{dt} = \frac{de^{at}}{dt} \cdot e^{i(bt)} + e^{at} \cdot \frac{de^{i(bt)}}{dt} = ae^{at} \cdot e^{i(bt)} + e^{at} \cdot (ibe^{i(bt)}) = (a + ib)e^{at}e^{i(bt)} = ze^{zt}$$

(2) $f(x,t) = e^{i(kx-\omega t)} = e^{ikx}e^{-i\omega t}$
[**Uwaga.** Zachodzi $e^{i(b+c)} = e^{ib}e^{ic}$ dla $b, c \in \mathbb{R}$. Zob. Zadania (letni semestr), Ćw. 6.3 (1)]

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -i\omega e^{ikx}e^{-i\omega t}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 e^{ikx}e^{-i\omega t}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = ike^{ikx}e^{-i\omega t}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -k^2 e^{ikx}e^{-i\omega t}$$

(3) $\psi(x,t) = e^{i(kx-\omega t)} = e^{ikx}e^{-i\omega t}$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = i\hbar(-i\omega e^{ikx}e^{-i\omega t}) = \hbar\omega e^{ikx}e^{-i\omega t} = E\psi(x,t)$$

(Czyli $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ “wyciąga"E z ψ.)

$$-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi = -i\hbar(ike^{ikx}e^{-i\omega t}) = \hbar ke^{ikx}e^{-i\omega t} = p\psi(x,t)$$

(Czyli $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ “wyciąga"p z ψ.)

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi\right) = -\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \hbar^2k^2e^{ikx}e^{-i\omega t} = p^2\psi$$

(Jeszcze raz wyciągaliśmy p przez $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$.)

W sumie mamy
$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = E\psi \quad \text{oraz} \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{p^2}{2m}\psi.$$
Ponieważ $E = \frac{p^2}{2m}$, mamy
$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},$$
co jest właśnie równaniem Schrödingera. Jeśli zdefiniujemy Hamiltonian $\hat{H}$ wzorem
$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$
to można pisać
$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi.$$
Można podsumować kwantowanie (przejście z mechaniki klasycznej do mechaniki kwantowej) następująco.

Przepis dla kwantowania

$$E \mapsto \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad p \mapsto \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

Komentarze.
(1) Przepis dla kwantowania w ogólniejszej sytuacji.

$$p_x \mapsto \hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \mapsto \hat{p}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \mapsto \hat{p}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z},$$
$$x \mapsto \hat{x} = x\cdot, \quad y \mapsto \hat{y} = y\cdot, \quad z \mapsto \hat{z} = z\cdot$$

Na przykład $\hat{x}$ działa na funkcję falową ψ jako mnożenie: $\hat{x}\psi = x\cdot\psi$. Jeśli $H = H(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$ jest klasycznym Hamiltonianem, to $\hat{H} = H(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$.
Przykład.

$$H = H(x, p_x) = \frac{p_x^2}{2m} + V(x) \mapsto \hat{H} = H(\hat{x}, \hat{p}_x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\cdot$$

($V(x)$: potencjał)
(2) Zasada nieoznaczoności Heisenberga wynika z tego, że $\hat{x}\hat{p}_x \neq \hat{p}_x\hat{x}$.

$$\hat{x}\hat{p}_x\psi = -i\hbar x\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$(\hat{p}_x\hat{x})\psi = \hat{p}_x(\hat{x}\psi) = \hat{p}_x(x\psi) = -i\hbar\frac{\partial x\psi}{\partial x} = -i\hbar(\psi + x\frac{\partial\psi}{\partial x}) \quad \text{(Reguła Leibniza)}$$

(3) Wartość własna.
W przypadku Ćw. 3-2a (3), mamy dla $\psi_0 = \psi_0(x) = e^{ikx}$

$$\hat{H}\psi_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} = \frac{p^2}{2m}\psi_0.$$

Więc $\hat{H}$ ma wartość własną $\frac{p^2}{2m}$ i wektor własny ψ_0 towarzyszony do tej wartości.

• Interpretacja kopenhaska (Max Born 1926, Nagroda Nobla w dziedzinie fizyki 1954)
Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w danym punkcie jest równa kwadratowi modułu funkcji falowej w tym punkcie.

W przypadku trójwymiarowym: Po pomiarze znajduje się ciąstka w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ z prawdopodobieństwem $\iiint_\Omega |\psi(x, y, z, t)|^2 dxdydz$

W przypadku jednowymiarowym: Po pomiarze znajduje się ciąstka w przedziale $[a, b]$ z prawdopodobieństwem $\int_a^b |\psi(x, t)|^2 dx$.

Przykład.
$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}e^{i(kx-\omega t)}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ liczba falowa, λ długość fali
$|\psi(x, t)|^2 = |\frac{1}{\sqrt{\lambda}}e^{i(kx-\omega t)}|^2 = \frac{1}{\lambda}$
$\int_0^\lambda |\psi(x, t)|^2 dx = \int_0^\lambda \frac{1}{\lambda}dx = 1$ (ciąstaka zawsze znajduje się w przedziale $[0, 1]$.)
$\int_a^b |\psi(x, t)|^2 dx = \int_a^b \frac{1}{\lambda}dx = \frac{b-a}{\lambda}$

• Zasada nieoznaczoności Heisenberga (1927, Nagroda Nobla z dziedziny fizyki 1932)
$\Delta x\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$
Δx nieokreśloność pomiaru położenia, Δp nieokreśloność pomiaru pędu

Przykład.
$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}e^{i(kx-\omega t)}$
$\Delta x = \infty, \Delta p = 0$

Dodatek C. Kwantowa teleportacja, kryptografia kwantowa

Anton Zeilinger, Jian-Wei Pan

Zadanie. Niech $|\phi_1\rangle = \alpha|\uparrow_1\rangle + \beta|\downarrow_1\rangle$, $|\Psi_{23}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow_2\rangle \otimes |\downarrow_3\rangle - |\downarrow_2\rangle \otimes |\uparrow_3\rangle\}$.
Niech $|\Psi_{12}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow_1\rangle \otimes |\downarrow_2\rangle - |\downarrow_1\rangle \otimes |\uparrow_2\rangle\}$, $|\Psi_{12}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow_1\rangle \otimes |\downarrow_2\rangle + |\downarrow_1\rangle \otimes |\uparrow_2\rangle\}$,
$|\Phi_{12}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow_1\rangle \otimes |\uparrow_2\rangle - |\downarrow_1\rangle \otimes |\downarrow_2\rangle\}$, $|\Phi_{12}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow_1\rangle \otimes |\uparrow_2\rangle + |\downarrow_1\rangle \otimes |\downarrow_2\rangle\}$.
(i) Korzystając z rozdzielności, opuścić nawias wyrazu $|\phi_1\rangle \otimes |\Psi_{23}\rangle$.
(ii) Korzystając z rozdzielności, opuścić nawias wyrazu $A := |\Psi_{12}^-\rangle \otimes \{-\alpha|\uparrow_3\rangle - \beta|\downarrow_3\rangle\}$.
(iii) Uprościć $\frac{1}{2}[|\Psi_{12}^-\rangle \otimes \{-\alpha|\uparrow_3\rangle - \beta|\downarrow_3\rangle\} + |\Psi_{12}^+\rangle \otimes \{-\alpha|\uparrow_3\rangle + \beta|\downarrow_3\rangle\}$
$+ |\Phi_{12}^-\rangle \otimes \{\alpha|\downarrow_3\rangle + \beta|\uparrow_3\rangle\} + |\Phi_{12}^+\rangle \otimes \{\alpha|\downarrow_3\rangle - \beta|\uparrow_3\rangle\}] =: \frac{1}{2}[A + B + C + D]$.

Dodatek D. Świadomość, consciousness

• Roger Penrose[4)], kwantowa teoria mózgu

Zdaniem Penrose'a, do wyjaśnienia zjawiska świadomości konieczne jest odwołanie się do zjawisk występujących na poziomie kwantowym w mózgu.

Książki Penrose'a na temat kwantowej teorii mózgu przełożone na język polski
[1] *Nowy Umysł Cesarza*, 1995.
[2] *Makrośiwat, Mikroświat i Ludzki Umysł*, 1997.
[3] *Cienie Umysłu*, 2000.

• David Chalmers
Easy problem of consciousness
Hard problem of consciousness, qualia
(i) D. Chalmers, Facing up to the problem of consciousness, *J. Conscious. Stud.* **2** (1995), 200–219.
(ii) D. Chalmers, How can we construct a science of consciousness? *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **1303** (2013), 25–35.

• Czy AI (np. Pepper, SoftBank) będzie (mógł) mieć świadomość?

• C. Koch, What is consciousness? *Nature* **557** (May 2018).

• J. McCarthy[5)], Making Robots Conscious of their Mental States, in *Machine Intelligence* **15** (S. Muggleton, ed.), Oxford University Press, 1996 (The web version substantially improved in 1999 July: http://www-formal.stanford.edu/jmc/consciousness.html).

4) Nagroda Nobla w dziedzinie fizyki 2020
5) Nagroda Turinga 1971