SNE 11 (Hopfield)

6. Sieci Hopfielda (Model pamięci)

Sieć Hopfielda składa się z n neuronów. Każdy neuron jest połączony do wszystkich innych neuronów (nawet do siebie). Niech

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

będzie oznaczał stan całego układu: $x_i = 0$ lub 1 ($i = 1, 2, \ldots, n$). Każdy neuron "i" bierze wartość $x_i = 0$ lub 1. Więc w sumie istnieje 2^n możliwych stanów.

x_i nazywa się sygnałem zewnętrznym.

Sieć Hopfielda działa na dyskretnych krokach $t = 0, 1, 2, \ldots$. Niech

$$x(t) = (x_i(t))_{i=1}^n = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

$$x(t+1) = (x_i(t+1))_{i=1}^n = (x_1(t+1), \ldots, x_n(t+1))$$

będą stanami sieci Hopfielda w kroku t i $t+1$ odpowiednie.

Każdy neuron "i" przyjmuje sygnał x_j od neuronu "j" i sumuje z wagą w_{ij} i odejmuje wartość progową θ_i:

$$u_i = \left\{ \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j \right\} - \theta_i.$$

u_i nazywa się sygnałem wewnętrznym.

Jak uruchamiamy sieć Hopfielda, dostajemy ciąg stanów.

$$x(0) \to x(1) \to x(2) \to \cdots \to x(t) \to x(t+1) \to \cdots$$

Stan $x(0)$ (warunek początkowy) jest generowany losowo. Stan $x(t+1)$ zależy tylko od poprzedniego stanu $x(t)$.

Algorytm sieci Hopfielda

$t = 0$, $i = 1, \ldots, n$

$$x_i(0) = \begin{cases} 0 & \text{z prawdopodowieństwem } \frac{1}{2} \\ 1 & \text{z prawdopodowieństwem } \frac{1}{2} \end{cases}$$

$t = 0, 1, 2, \ldots, \quad i = 1, \ldots, n$

$$u_i(t) = \left\{ \sum_{j=1}^{25} w_{ij} x_j(t) \right\} - \theta_i$$

$$x_i(t+1) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } u_i(t) < 0 \\ x_i(t) & \text{gdy } u_i(t) = 0 \\ 1 & \text{gdy } u_i(t) > 0 \end{cases}$$

Funkcja energii (kryterium)

$$E(t) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_i(t) x_j(t) + \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i(t)$$

Definicja. (Warunek "asymmetryczność") W każdym kroku $t \geq 0$, najwyżej w jednym neuronie zmienia się sygnał:

$$\forall t \geq 0 \ \exists k \ \ (\forall i \neq k \ \ x_i(t+1) = x_i(t)).$$

Twierdzenie. *Załóżmy, że $w_{ij} = w_{ji}$, $w_{ii} = 0$ dla wszystkich i, j. Wówczas jeśli warunek "asymmetryczność" zachodzi, to $E(t)$ jest nie-rosnące, tj. $E(t+1) \leq E(t)$ $(t \geq 0)$.*

Przykład energii E.
$\square = 0.0$, $\blacksquare = 1.0$

$$z = (z_i)_{i=1}^{25} = (z_1, \ldots, z_{25}) = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c} \hline & & & & \\ \hline & \blacksquare & \blacksquare & & \\ \hline & & \blacksquare & & \\ \hline & & \blacksquare & & \\ \hline & & \blacksquare & & \\ \hline \end{array}\right| \in \mathbb{R}^{25}$$

$1 \leq i, j \leq 25$

$$c_{ij} = \begin{cases} (z_i - \frac{1}{2})(z_j - \frac{1}{2}) & \text{gdy } i \neq j \\ 0 & \text{gdy } i = j \end{cases}$$

$$w_{ij} = 2c_{ij}, \qquad \theta_i = \sum_{j=1}^{25} c_{ij}$$

$$E' = -\sum_{i,j} c_{ij}(x_i - \frac{1}{2})(x_j - \frac{1}{2})$$

$$\begin{aligned} E' &= -\sum_{i,j} c_{ij}(x_i - \frac{1}{2})(x_j - \frac{1}{2}) \\ &= -\sum_{i,j}\{c_{ij}x_ix_j - \frac{c_{ij}}{2}(x_i + x_j)\} \underbrace{-\sum_{i,j}\frac{c_{ij}}{4}}_{\text{const.}} \\ &= -\sum_{i,j}\{c_{ij}x_ix_j - c_{ij}x_i\} + \text{const.} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i,j} 2c_{ij}x_ix_j + \sum_{i,j} c_{ij}x_i + \text{const.} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i,j} \underbrace{(2c_{ij})}_{w_{ij}} x_ix_j + \sum_i \underbrace{(\sum_j c_{ij})}_{\theta_i} x_i + \text{const.} \end{aligned}$$

Niech

$$w_{ij} = 2c_{ij}, \quad \theta_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \quad (n = 25).$$

Wówczas otrzymujemy

$$E' = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i + \text{const.}$$

Więc

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n}\theta_i x_i \to \min. \quad \Leftrightarrow \quad E' \to \min.$$

Uważmy, że

$$\operatorname*{argmin}_{x} E' = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c} \hline & & & & \\ \hline & \blacksquare & \blacksquare & & \\ \hline & & \blacksquare & & \\ \hline & & \blacksquare & & \\ \hline & & \blacksquare & & \\ \hline \end{array}\right| \quad \text{oraz} \quad \left|\begin{array}{c|c|c|c|c} \hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \blacksquare & & & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \blacksquare & \blacksquare & & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \blacksquare & \blacksquare & & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \blacksquare & \blacksquare & & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array}\right|.$$

Zastosowanie sieci Hopfielda w problemie komiwojażera (TSP)
(TSP=Traveling Salesperson Problem)

d_{ab} =odległość między miastami a i b ($d_{ba} = d_{ab}$)
miasta $= 1, 2, \ldots, N$
$i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_N \to i_1$ podróż komowojażera

Problem Komiwojażera (TSP)

$$d_{i_1 i_2} + d_{i_2 i_3} + \cdots + d_{i_{N-1} i_N} + d_{i_N i_1} \to \min$$

$$x_{ai} = \begin{cases} 1 & \text{gdy miasto } a \text{ znajduje się na } i\text{-tej pozycji na trasie} \\ 0 & \text{gdy w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Przykład
$N = 5$
$2 \to 3 \to 1 \to 5 \to 4$

$$(x_{ai}) = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c} \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}\right|$$

Warunki TSP
(1) Każde miasto powinno pojawić się na trasie. $\Leftrightarrow I_1 = 0$

$$I_1 = \sum_{a}\sum_{i \neq j} x_{ai}x_{aj} \geq 0$$

(2) Dwa różne nie mogą wystąpić na tej samej pozycji na trasie $\Leftrightarrow I_2 = 0$

$$I_2 = \sum_{i}\sum_{a \neq b} x_{ai}x_{bi} \geq 0$$

(3) Komiwojażer musi odwiedzić wszystkie miasta. $\Leftrightarrow I_3 = 0$

$$I_3 = \{(\sum_{a}\sum_{i} x_{ai}) - N\}^2 \geq 0$$

Niech

$$I_4 = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \sum_i d_{ab} x_{ai} (x_{bi-1} + x_{bi+1}),$$

gdzie $x_{aN+1} = x_{a1}$, $x_{a0} = x_{aN}$. Uważmy, że wówczas

$$\text{TSP} \quad \Leftrightarrow \quad I_4 \to \min \text{ przy warunkach } I_1 = I_2 = I_3 = 0.$$

Ustalmy stałe $A, B, C, D > 0$ i rozważmy następujące zadanie.

$$(*) \qquad E = \tfrac{A}{2} I_1 + \tfrac{B}{2} I_2 + \tfrac{C}{2} I_3 + \tfrac{D}{2} I_4 \to \min.$$

Uważmy, że TSP $\Rightarrow (*)$.

Zdefiniujemy $w_{ai,bj}, \theta_{ai}$ następująco.

$$w_{ai,bj} = -A\delta_{ab}(1 - \delta_{ij}) - B\delta_{ij}(1 - \delta_{ab}) - C - Dd_{ab}(\delta_{ji+1} + \delta_{ji-1})$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i = j \quad (1 \leq i, j \leq N) \\ 0 & \text{gdy } i \neq j \quad (1 \leq i, j \leq N) \end{cases}$$

$$\delta_{jN+1} = \delta_{j1} \ \ (1 \leq j \leq N)$$

$$\delta_{j0} = \delta_{jN} \ \ (1 \leq j \leq N)$$

$$\theta_{ai} = -cN$$

Wówczas mamy

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{ai} \sum_{bj} w_{ai,bj} x_{ai} x_{bj} + \sum_{ai} \theta_{ai} x_{ai} + \frac{C}{2} N^2.$$

Algorytm sieci Hopfielda dla TSP

$t = 0$

$$x_{ai}(0) = \begin{cases} 0 & \text{z prawdopodowieństwem } \frac{1}{2} \\ 1 & \text{z prawdopodowieństwem } \frac{1}{2} \end{cases}$$

$t = 0, 1, 2, \ldots$

$$u_{ai}(t) = \left\{ \sum_{bj} w_{ai,bj} x_{bj}(t) \right\} - \theta_{ai}$$

$$x_{ai}(t+1) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } u_{ai}(t) < 0 \\ x_{ai}(t) & \text{gdy } u_{ai}(t) = 0 \\ 1 & \text{gdy } u_{ai}(t) > 0 \end{cases}$$

$$(x_{ai}(0)) \longrightarrow (x_{ai}(1)) \longrightarrow (x_{ai}(2)) \longrightarrow \cdots$$