Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου 3, Εργασία 2022-2023

Αλεξανδρίδης Φώτιος, ΑΕΜ: 9953, email: faalexandr@ece.auth.gr

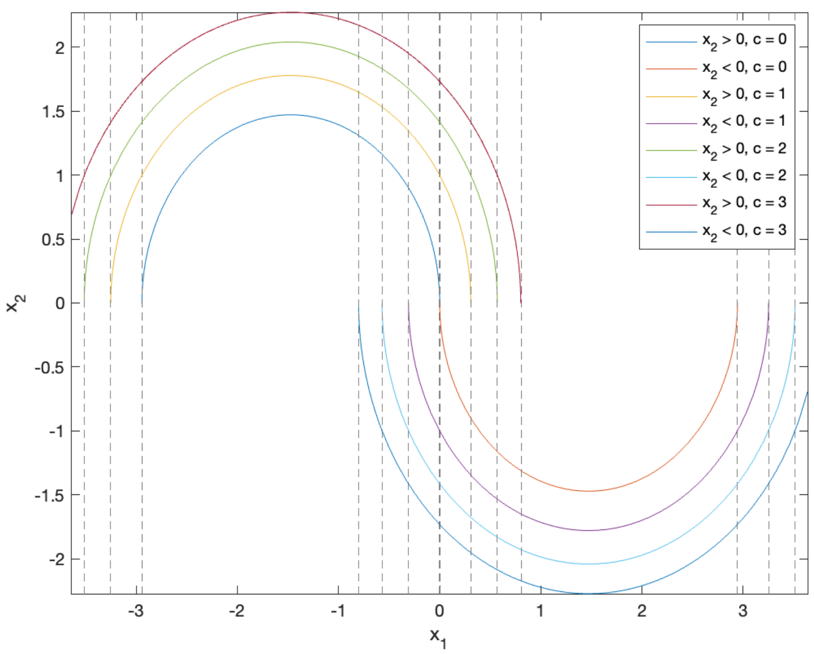
Μέρος Α

Ερώτηση i

Για τον υπολογισμό του ω, θέτουμε $\mu = 0$. Η εξίσωση γίνεται $m\ddot{x} + \kappa x = 0$. Είτε επιλύοντας την εξίσωση με οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες (η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης είναι ανεξάρτητη των αρχικών συνθηκών), είτε από τις γνώσεις μας στην φυσική (έχουμε έναν απλό αρμονικό ταλαντωτή), βρίσκουμε πως η φυσική γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης είναι $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$. Έπειτα, έχουμε τις μεταβλητές κατάστασης $x_1 = x, x_2 = \frac{\dot{x}}{\omega}$ και με βάση την εξίσωση του συστήματος διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- $\dot{x} > 0$. Τότε, το σύστημα μας γίνεται $\ddot{x} + \frac{\kappa}{m}x + \mu g = 0$. Από αυτή, και με βάση την σχέση $\dot{x_1} = \omega x_2$, για το σύστημα μας καταλήγουμε στις εξισώσεις $\dot{x_1} = \omega x_2$ και $\dot{x_2} = \frac{1}{\omega} * (-\frac{\kappa}{m}x - \mu g)$. Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε $\frac{\dot{x_1}}{\dot{x_2}} = -\frac{\omega^2 x_2}{\frac{\kappa}{m}x_1 + \mu g}$. Κάνοντας τις πράξεις, ολοκληρώνοντας κατά μέλη, έχουμε την εξίσωση $x_1^2 + \frac{2\mu m g}{\kappa}x_1 + x_2^2 = c$, όπου c η σταθερά ολοκλήρωσης που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Η εξίσωση αυτή, δεδομένης της συνθήκης σε ένα φασικό πορτραίτο $x = x_1, y = x_2$ αντιστοιχεί σε μια οικογένεια ημικυκλίων, στα θετικά του άξονα x_2, με κέντρο το σημείο $(-\frac{\mu m g}{\kappa},0)$ και ακτίνα $R = \sqrt{(\frac{\mu m g}{\kappa})^2 + c}$
- $\dot{x} < 0$. Όμοια με πάνω, καταλήγουμε στην εξίσωση $x_1^2 - \frac{2\mu m g}{\kappa}x_1 + x_2^2 = c$, όπου c η σταθερά ολοκλήρωσης που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Η εξίσωση αυτή, δεδομένης της συνθήκης σε ένα φασικό πορτραίτο $x = x_1, y = x_2$ αντιστοιχεί σε μια οικογένεια ημικυκλίων, στα αρνητικά του άξονα x_2, με κέντρο το σημείο $(\frac{\mu m g}{\kappa},0)$ και ακτίνα $R = \sqrt{(\frac{\mu m g}{\kappa})^2 + c}$

Τα συνολικά διαγράμματα φαίνονται παρακάτω για διάφορες τιμές της σταθεράς ολοκλήρωσης:



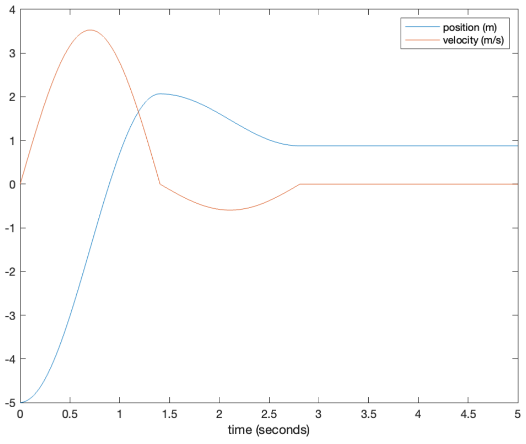
Ερώτηση ii

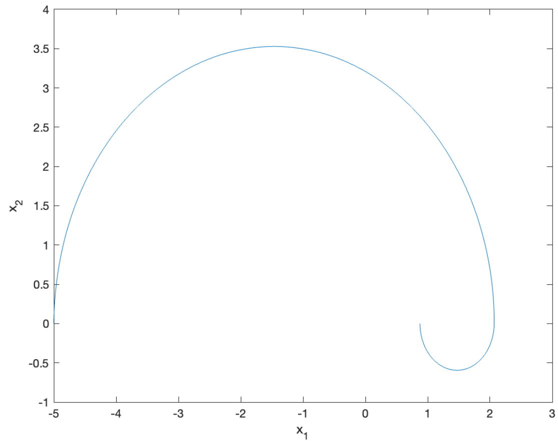
Για να σχολιάσουμε την συμπεριφορά του συστήματος για $\dot{x} = 0$, θα βρούμε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος. Πράγματι, βρίσκουμε πως όλα τα σημεία ισορροπίας έχουν $x_2 = 0$, άρα είναι της μορφής $\mathbf{x_e} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$. Για να βρούμε τι συμβαίνει με το x_1, καθώς η $sign(x)$ δεν ορίζεται για $x = 0$, θεωρούμε την υποψήφια συνάρτηση τύπου Lyapunov $V(x) = \frac{1}{2}(x_1 - c)^2 + \frac{1}{2}x_2^2$. Η συνάρτηση αυτή είναι θετικά ορισμένη, και μη ακτινικά φραγμένη. Για την παράγωγό της ισχύει μετά από πράξεις: $\dot{V}(x) = x_2(-\sqrt{\frac{\kappa}{m}}c - \mu g\sqrt{\frac{m}{\kappa}}sign(x_2))$. Η συνάρτηση αυτή δεν είναι αρνητικά ορισμένη, καθώς έχει μηδενική τιμή για κάθε τιμή του x_1 όταν $x_2 = 0$. Επίσης, μπορούμε να δείξουμε ότι είναι αρνητικά ήμιορισμένη μόνο όταν $|c| < \frac{\mu m g}{\kappa}$ (παίρνοντας περιπτώσεις για $\dot{x} > 0$, άρα και $\dot{x_2} > 0$ και για αρνητικό αντίστοιχα). Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε θεώρημα Lasalle για να αποδείξουμε ότι το σύνολο των σημείων $\mathbf{x_e} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$, με $|c| < \frac{\mu m g}{\kappa}$ είναι γενικά ασυμπτωτικά ευσταθή.
Σημείωση: το θεώρημα Lasalle αναφέρεται σε σημείο ισορροπίας στην αρχή των αξόνων. Εδώ, μπορούμε πολύ εύκολα να κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $x_1' = x_1 - c$ και να καταλήξουμε στο ίδιο πρόβλημα. Οι πράξεις παραλείπονται για λόγους συντομίας.

Ερώτηση iii

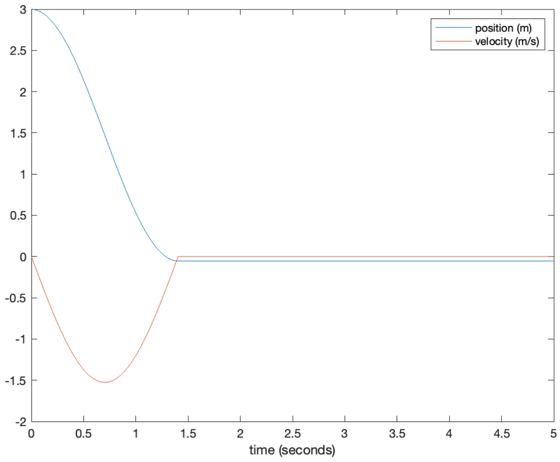
Τα σχετικά διαγράμματα σε κάθε σενάριο προσομοίωσης φαίνονται παρακάτω:

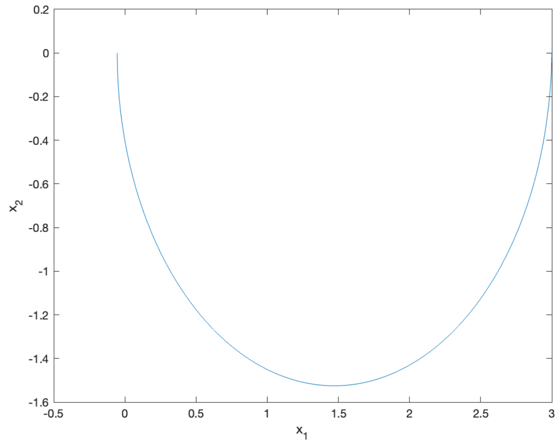
Προσομοίωση 1



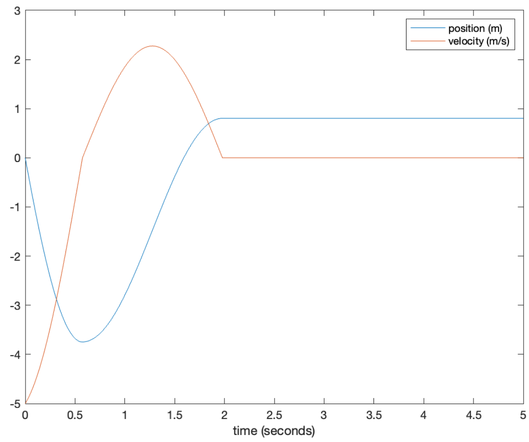


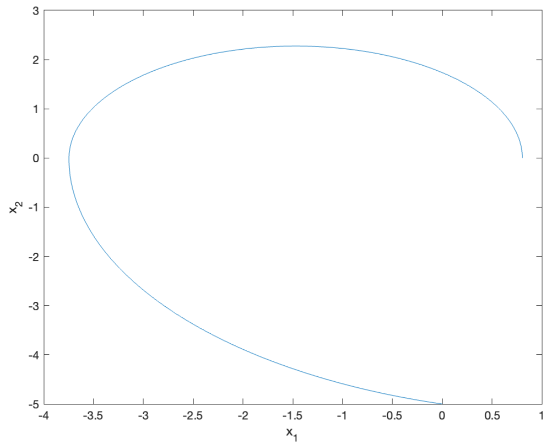
Προσομοίωση 2



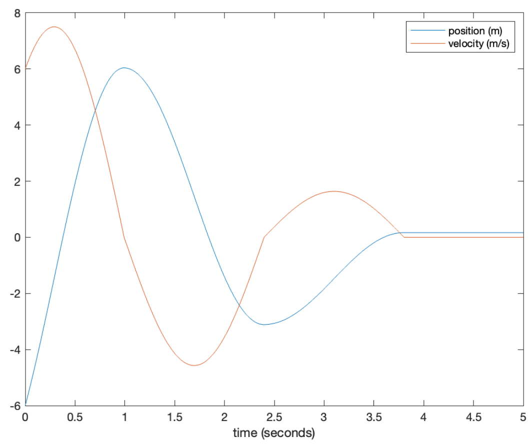


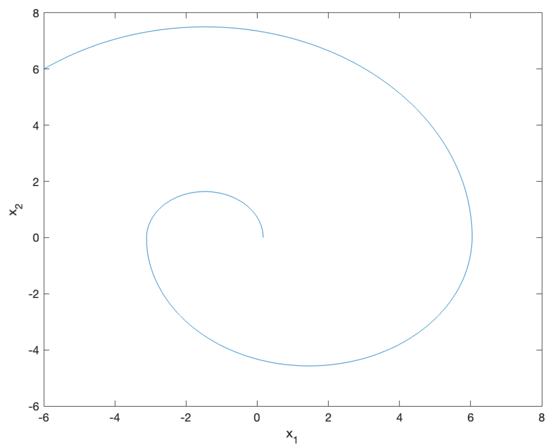
Προσομοίωση 3



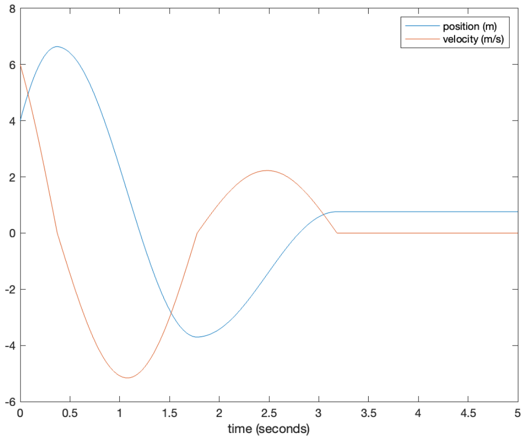


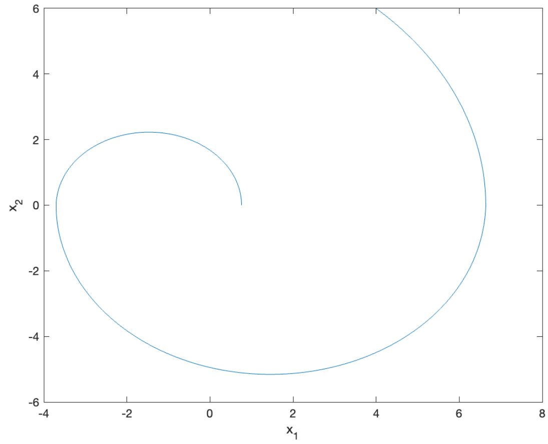
Προσομοίωση 4





Προσομοίωση 5





Για τον χρόνο μέχρι την ακινητοποίηση:

Αρχικά θα υπολογίσουμε τον χρόνο μετά από τον οποίο το πλάτος της ταλάντωσης έχει μικρύνει αρκετά ώστε να μπορέσει το σώμα να σταματήσει μόλις μηδενιστεί η ταχύτητα του. Στην απόσβεση Coulomb που έχουμε μπορούμε να αποδείξουμε πως το πλάτος στην διάρκεια μιας περιόδου μειώνεται κατά $\frac{4\mu m g}{\kappa}$ (source: https://eclass.upatras.gr/modules/document/file.php/CIV1527/02_FreeVib_Coulomb.pdf), και πως η συχνότητα ταλάντωσης δεν μεταβάλλεται (δες βιβλιογραφία). Έτσι, θέλουμε και με βάση το προηγούμενο ερώτημα : $A \leq \frac{\mu m g}{\kappa}$, όπου A το πλάτος μετά από N ταλαντώσεις. Αν υπολογίσουμε πως το αρχικό πλάτος είναι A_0 για το οποίο από την αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας στιγμιαία ισχύει: $\frac{1}{2}\kappa A_0^2 = \frac{1}{2}m v_0^2 + \frac{1}{2}\kappa x_0^2$, όπου x_0, v_0 αρχική θέση και ταχύτητα αντίστοιχα, και πως είναι $A = A_0 - N\frac{4\mu m g}{\kappa}$, καταλήγουμε ότι: $N \geq \frac{\kappa A_0 - \mu m g}{4\mu m g}$.

Έπειτα πρέπει να βρούμε όλα τα σημεία συναρτήσει του αριθμού των περιόδων για τα οποία η ταχύτητα μηδενίζεται. Για αυτά ισχύει $N_i = \frac{N}{2} + \phi$, όπου N ο αριθμός των ταλαντώσεων και ϕ ο χρόνος που απαιτείται για τον πρώτο μηδενισμό της ταχύτητας, που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες (επιπρόσθετα, σε μια περίοδο η ταχύτητα μηδενίζεται δύο φορές). Για τον υπολογισμό του ϕ ισχύει: $\phi \in [0,1)$ (έχουμε κατά το μέγιστο μια περίοδο μέχρι να μηδενιστεί για πρώτη φορά η ταχύτητα), και:

$$\phi = \frac{1}{4} - \frac{\theta}{2\pi}, \theta \in [0,\frac{\pi}{2}], \phi = \frac{3}{4} - \frac{\theta}{2\pi}, \theta \in (\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}], \phi = \frac{1}{4} - (\frac{1}{8} + 1 - \frac{\theta}{2\pi}), \theta \in (\frac{3\pi}{2},2\pi],$$

, με $\theta = tan^{-1}(\frac{\omega x_0}{v_0})$. Η απόδειξη του πρώτου τύπου πηγάζει από τον τριγωνομετρικό κύκλο, ενώ του δεύτερου διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις του απλού αρμονικού ταλαντωτή και παραλείπεται για λόγους συντομίας.

Για να βρούμε τον τελικό αριθμό N των περιόδων μέχρι να ακινητοποιηθεί το σώμα, βρίσκουμε το πρώτο N_i για το οποίο ισχύει η παραπάνω ανισότητα, και το πολλαπλασιάζουμε με τον χρόνο περιόδου $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Επομένως ισχύει $t_e = TN*$.

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές τιμές των προσωμοιώσεων, βγάζουμε αποτελέσματα πολύ κοντά σε αυτά των προσωμοιώσεων για τον χρόνο ακινητοποίησης.

Μέρος Β

Ερώτηση i

Σενάριο 1

Αναδιατάσσοντας την εξίσωση μας, παίρνουμε ότι $\ddot{x} = -\mu g sign(\dot{x}) - \frac{f(x)}{m} + \frac{u}{m}$, και θέτουμε $g(x) = -\mu g sign(\dot{x}) - \frac{f(x)}{m}$. Ορίζουμε το σφάλμα παρακολούθησης ως $e = x - x_d$, για το οποίο ισχύει $\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_d$. Ορίζουμε την επιφάνεια ολίσθησης ως $s \triangleq \dot{e} + \lambda e = 0$, όπου αν ορίσουμε $x_1 = x, x_2 = \frac{\dot{x}}{\omega}$, βλέπουμε πως έχουμε σημείο ισορροπίας την αρχή των αξόνων. Παίρνουμε $\dot{s} = 0$ και θέτουμε $u \leftarrow \hat{u}_{eq}$, και λαμβάνουμε τον ισοδύναμο νόμο ελέγχου $\hat{u}_{eq} = \hat{m}(\ddot{x}_d - \lambda\dot{e} - \hat{g}(x))$. Έτσι, ο νόμος ελέγχου γίνεται $u = \hat{u}_{eq} - \hat{m}\rho(x)sgn(s) = \hat{m}\ddot{x}_d - \hat{m}\lambda\dot{e} + \mu\hat{m}gsign(\dot{x}) + \frac{\hat{m}}{m}\hat{f}(x) - \hat{m}\rho(x)sgn(s)$. Για την εύρεση της $\rho(x)$, αντικαθιστούμε στην εξίσωση του συστήματος το u και μετά από πράξεις καταλήγουμε: $m\dot{s} = (\hat{m} - m)(\ddot{x}_d - \lambda\dot{e} + \mu g sign(\dot{x})) + (\frac{\hat{m}}{m}\hat{f} - f) - \hat{m}\rho(x)sgn(s)$.

Επιζητώντας $m\dot{s}s \leq -cg_0|s|$, μια συνάρτηση που ικανοποιεί την συνθήκη είναι η $\rho(x) = \frac{1}{\hat{m}}(|\hat{m} - m||\ddot{x}_d - \lambda\dot{e} + \mu g sign(\dot{x}| + |\frac{\hat{m}}{m}\hat{f} - f| + c), c > 0$, και έτσι η επιφάνεια ολίσθησης συγκλίνει στο 0.

Επομένως, έχουμε:

$$u = \hat{m}(\ddot{x}_d - \lambda\dot{e} + \mu g sign(\dot{x})) + \frac{\hat{m}}{m}\hat{f} - (|\hat{m} - m||\ddot{x}_d - \lambda\dot{e} + \mu g sign(\dot{x})| + |\frac{\hat{m}}{m}\hat{f} - f| + c)sign(s)$$

Στο πρώτο σενάριο, όπου η f είναι γνωστή, μπορούμε να λάβουμε ως εκτιμητή της f την μέση τιμή της. Η f μπορεί να ξαναγραφτεί στην μορφή $f(x) = Ax + \alpha A x^3, A = \kappa + \Delta\kappa(1 - e^{-\beta t})$, κι έτσι μπορούμε να βρούμε ότι η μέγιστη τιμή της είναι $max|f(x)| = Amax|x||\alpha_{max}x^2 + 1|$ και η ελάχιστη της είναι $min|f(x)| = Amin|x||\alpha_{min}x^2 + 1|$. Άρα έχουμε

$$\hat{f} = \frac{max|f(x)| + min|f(x)|}{2} = \frac{(11 - 10e^{-0.05t})(x^2 + 1) + (4.25 - 4e^{-0.02t})(\frac{1}{2}x^2 + 1)}{2},$$

όπου τις τιμές για τα μέγιστα/ελάχιστα A τις βρίσκουμε εύκολα από τον ορισμό του A και τις τιμές του πίνακα. Αντίστοιχα για εκτιμητή της μάζας μπορούμε πάλι να πάρουμε την μέση τιμή.

Σενάριο 2

Στο δεύτερο σενάριο αλλάζει ο εκτιμητής της f, επειδή αλλάζουν τα $max|f| = 22|x|^3$ και $min|f| = 0$. Άρα, βγαίνει $\hat{f} = 11|x|^3$

Ερώτηση ii

Ορίζω μεταβλητές κατάστασης

$$x_1 = x - x_d, x_2 = \dot{x} - \dot{x}_d, \rightarrow \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = \frac{1}{m}(u - a(x)), a(x) = -\mu m g sign(x_2 + \dot{x}_d - f - m\ddot{x}_d)$$

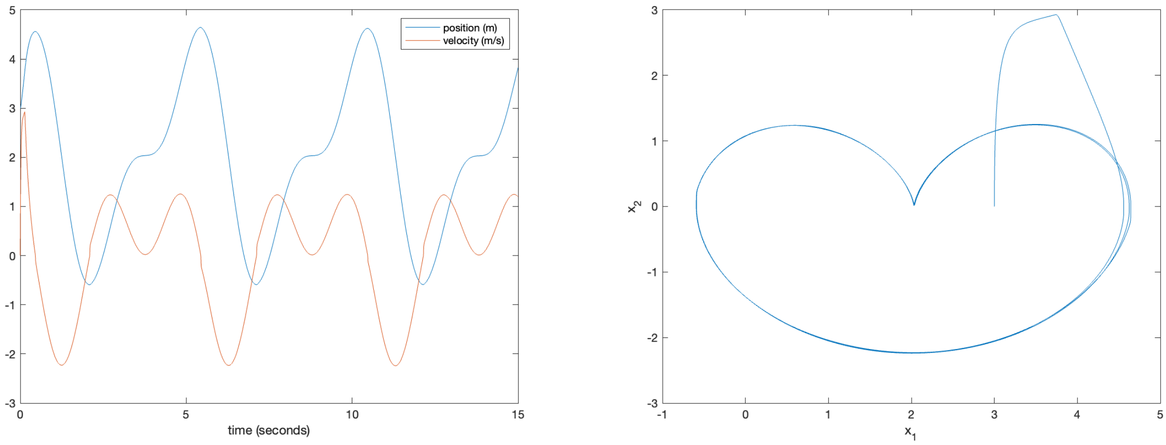
Έτσι, οδηγούμε το σύστημα μας στην μορφή $\dot{x} = Ax + b\beta(x)(u - a(x))$, με $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta(x) = \frac{1}{m}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, και κάνω έλεγχο γραμμικοποίησης με ανάδραση:

$u = \hat{a}(x) + \hat{\beta}^{-1}(x)(-F^T x + \delta v)$. Μετά από πράξεις οδηγούμαστε στην εξίσωση $\dot{x} = (A - bF^T)x + b(\frac{\beta}{\hat{\beta}} - 1)(-F^T x + \delta v) + b\beta(\hat{a} - a) + b\delta v$. Θέλουμε να πετύχουμε ευστάθεια Lyapunov, οπότε παίρνουμε την υποψήφια συνάρτηση Luapunov $V(x) = x^T P x$, με P να είναι ο θετικά ορισμένος, συμμετρικός πίνακας που ικανοποιεί την $A^T P + PA = -Q$, όπου Q θετικά ορισμένος και συμμετρικός πίνακας. Εδώ, επιλέγουμε $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $Q = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και με βάση τον A βρίσκουμε τον F ($A \leftarrow A - bF^T$). Βρίσκουμε $P = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$, που πληρεί τις προϋποθέσεις. Θέτοντας $\delta v = -\rho(x) sign(x^T P b)$, από την θεωρία γνωρίζουμε πως το σύστημά μας είναι γ.α.ε. στο 0. Επιλύοντας τους τύπους της θεωρίας, βρίσκουμε ότι $\rho(x) = \frac{\epsilon |F^T x| + |\beta| |\hat{a} - a|}{1 - \epsilon}$, με $\epsilon = |\frac{\beta}{\hat{\beta}} - 1|$. Οι εκτιμητές της f για κάθε σενάριο έχουν βρεθεί από πριν.

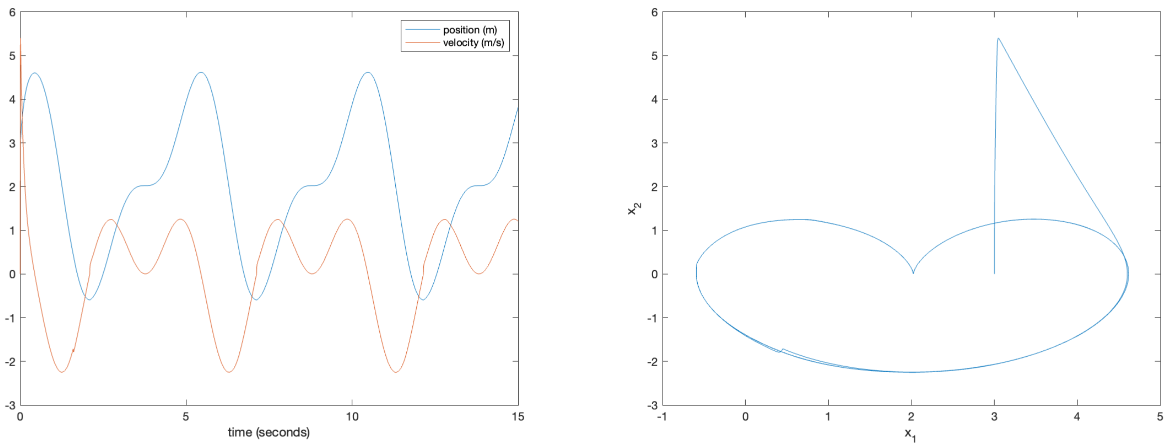
Ερώτηση iii

Τα σχετικά γραφήματα παραθέτονται παρακάτω:

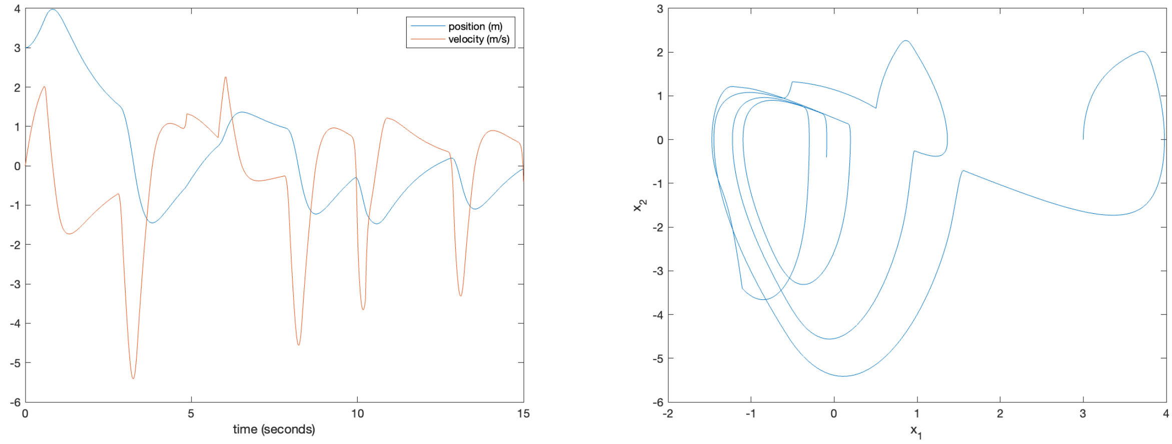
Sliding Controller, Known f ($c = 20, \lambda = 10$)



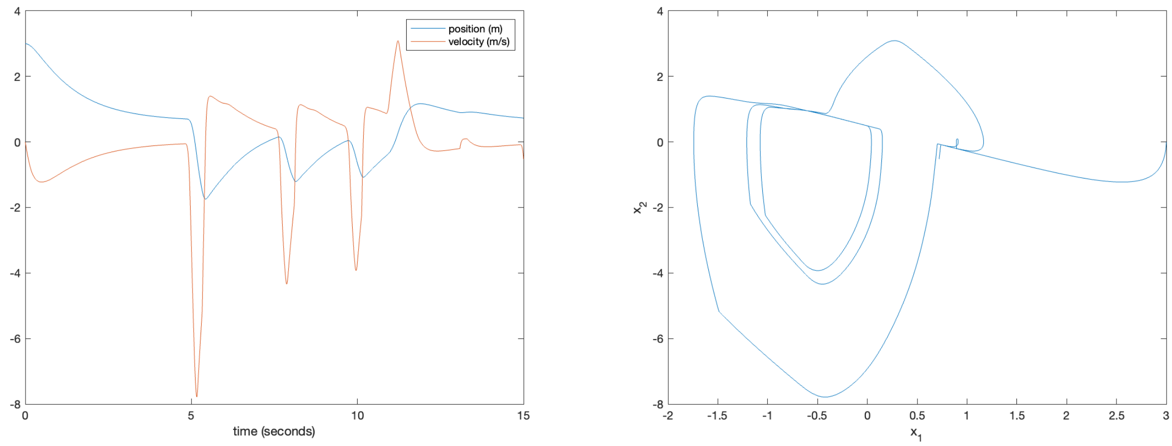
Sliding Controller, unknown f ($c = 20, \lambda = 10$)



Lyapunov Controller, known $f\,(F = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix})$



Lyapunov Controller, unknown $f\,(F = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix})$



Παρατηρούμε ότι:
για τον ελεγκτή ολίσθησης, έχουμε επιλέξει αρκετά μεγάλες τιμές και το σύστημα συγκλίνει στον οριακό κύκλο αρκετά γρήγορα (παρόλα αυτά ενδέχεται να έχουμε μεγαλύτερη απόκλιση καθώς επιτρέπουμε μεγαλύτερες τιμές στο σφάλμα συγκλίσεως με μεγάλο c)

για τον ελεγκτή Lyapunov φαινομενικά δεν παίρνουμε καλά αποτελέσματα. Αυτό γίνεται λόγω της μικρής επιλογής των παραμέτρων σύγκλισης, που επιβεβαιώνουν πως το μοντέλο με τον ελεγκτή αυτό δύναται να συγκλίνει, αλλά όχι στον χρόνο που προσωμοιώνουμε εμείς.

Με τις συγκεκριμένες παραμέτρους θα επιλέγαμε τον ελεγκτή ολίσθησης με γνωστή την μορφή της f, καθώς κι εκεί δεν παρατηρούμε μεγάλο spike στην αρχική τιμή της ταχύτητας, και συγκλίνει ταχύτερα (επομένως αν το σφάλμα μας ικανοποιεί μπορούμε να τον χρησιμοποιήσουμε)