



Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Ηλεκτρονικής και Υπολογιστών

Εργασία 2 στην προσωμοίωση και μοντελοποίηση δυναμικών συστημάτων

Εργασία του
Φώτη Αλεξανδρίδη, ΑΕΜ: 9953
faalexandr@ece.auth.gr

13 Απριλίου 2023

Περιεχόμενα

1 Θέμα 1	2
1.1 Θεωρητική ανάλυση	2
1.2 Ερώτημα α'	3
1.3 Ερώτημα β'	6
1.4 Παρατηρήσεις	8
2 Θέμα 2	9
2.1 Θεωρητική ανάλυση	9
2.2 Παράλληλη δομή	11
2.3 Μικτή δομή	13
2.4 Παρατηρήσεις	16
2.5 Άυξηση του πλάτους θορύβου	16
2.6 Μεταβολή της συχνότητας θορύβου	24
3 Θέμα 3	34
3.1 Θεωρητική ανάλυση	34
3.2 Αποτελέσματα προσομοίωσης	36
Bibliography	42

Κεφάλαιο 1

Θέμα 1

1.1 Θεωρητική ανάλυση

Το σύστημα που μας δίνεται είναι το ακόλουθο:

$$\dot{x} = -ax + bu \quad (1.1)$$

$$x(0) = 0 \quad (1.2)$$

Θεωρώ τον όρο λx , $\lambda > 0$ και τον προσθέτω και στα δύο μέλη της 1.1. Έχουμε:

$$\dot{x} + \lambda x = (\lambda - a)x + bu \quad (1.3)$$

Εφαρμόζοντας Μ/Σ Laplace στα μέλη της 1.3 έχουμε:

$$sx + \lambda x = (\lambda - a)x + bu \Leftrightarrow x = \frac{\lambda - a}{s + \lambda}x + \frac{b}{s + \lambda}u \quad (1.4)$$

ή

$$x = \partial^{*T} \phi \quad (1.5)$$

με

$$\partial^* = \begin{bmatrix} \lambda - a & b \end{bmatrix}^T \quad (1.6)$$

$$\phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+\lambda}x & \frac{1}{s+\lambda}u \end{bmatrix}^T \quad (1.7)$$

ακολουθώντας την θεωρία, ορίζουμε το σύστημα αναγνώρισης:

$$\hat{x} = \hat{\partial}^T \phi \quad (1.8)$$

και το σφάλμα :

$$e = x - \hat{x} = (\partial^{*T} - \hat{\partial}^T)\phi \quad (1.9)$$

Επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε την :

$$K(\hat{\partial}) = \frac{e^2}{2} = \frac{(x - \hat{\partial}^T \phi)^2}{2} \quad (1.10)$$

Ισχύει :

$$\nabla K(\hat{\partial}) = -(x - \hat{\partial}^T \phi)\phi = -e\phi \quad (1.11)$$

Και σύμφωνα με την μέθοδο κλίσης :

$$\dot{\hat{\partial}} = -\gamma \nabla K(\hat{\partial}) = \gamma e\phi \quad (1.12)$$

Αναλύοντας την 1.12, και εφαρμόζοντας αντίστοιχο Μ/Σ Laplace στην 1.7, λαμβάνουμε το ακόλουθο σύστημα 5 εξισώσεων (σε συνδυασμό και με την 1.1):

$$\dot{x} = -ax + bu \quad (1.13)$$

$$\dot{\hat{\partial}}_1 = \gamma e\phi_1 \quad (1.14)$$

$$\dot{\hat{\partial}}_2 = \gamma e\phi_2 \quad (1.15)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{s + \bar{\eta}} x \Leftrightarrow s\phi_1 + \bar{\eta}\phi_1 = x \stackrel{L^{-1}}{\Leftrightarrow} \dot{\phi}_1 + \bar{\eta}\phi_1 = x \Leftrightarrow \dot{\phi}_1 = -\bar{\eta}\phi_1 + x \quad (1.16)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{s + \bar{\eta}} u \Leftrightarrow s\phi_2 + \bar{\eta}\phi_2 = u \stackrel{L^{-1}}{\Leftrightarrow} \dot{\phi}_2 + \bar{\eta}\phi_2 = u \Leftrightarrow \dot{\phi}_2 = -\bar{\eta}\phi_2 + u \quad (1.17)$$

Με μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων 1.13 - 1.17 χρησιμοποιούμε την ode45 του MATLAB. Με βάση την εκφώνηση, για τις προσομοιώσεις χρησιμοποιούμε ότι $a = 3$, $b = 0.5$.

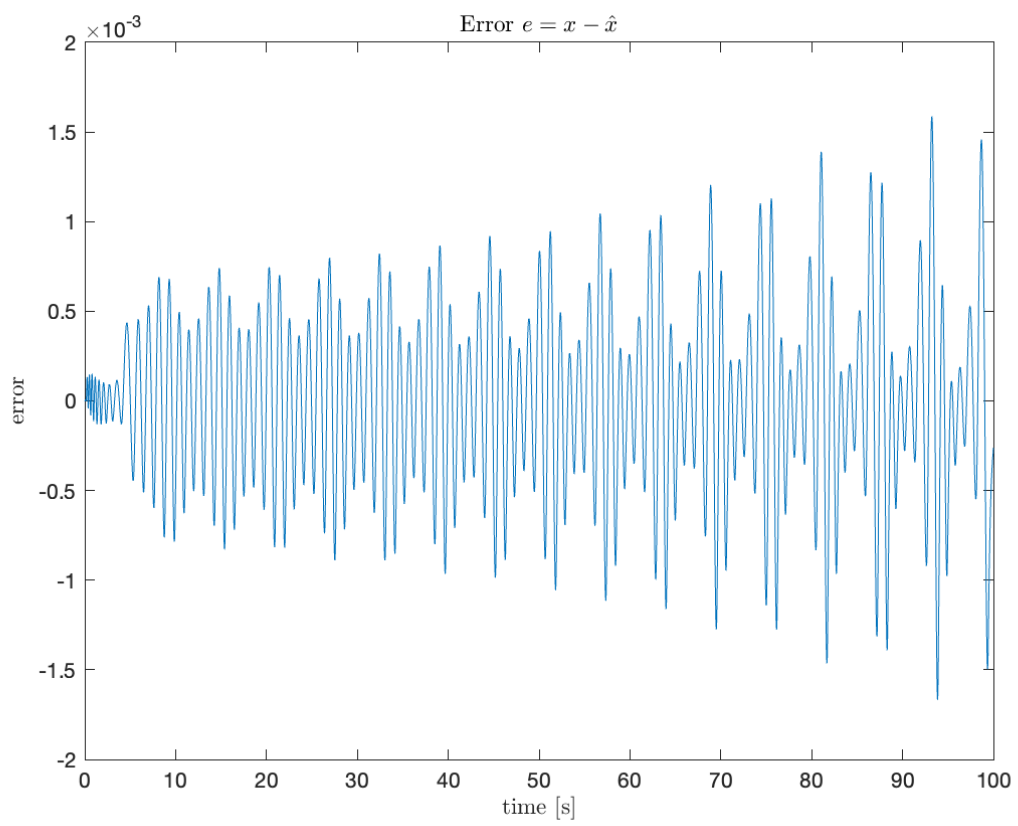
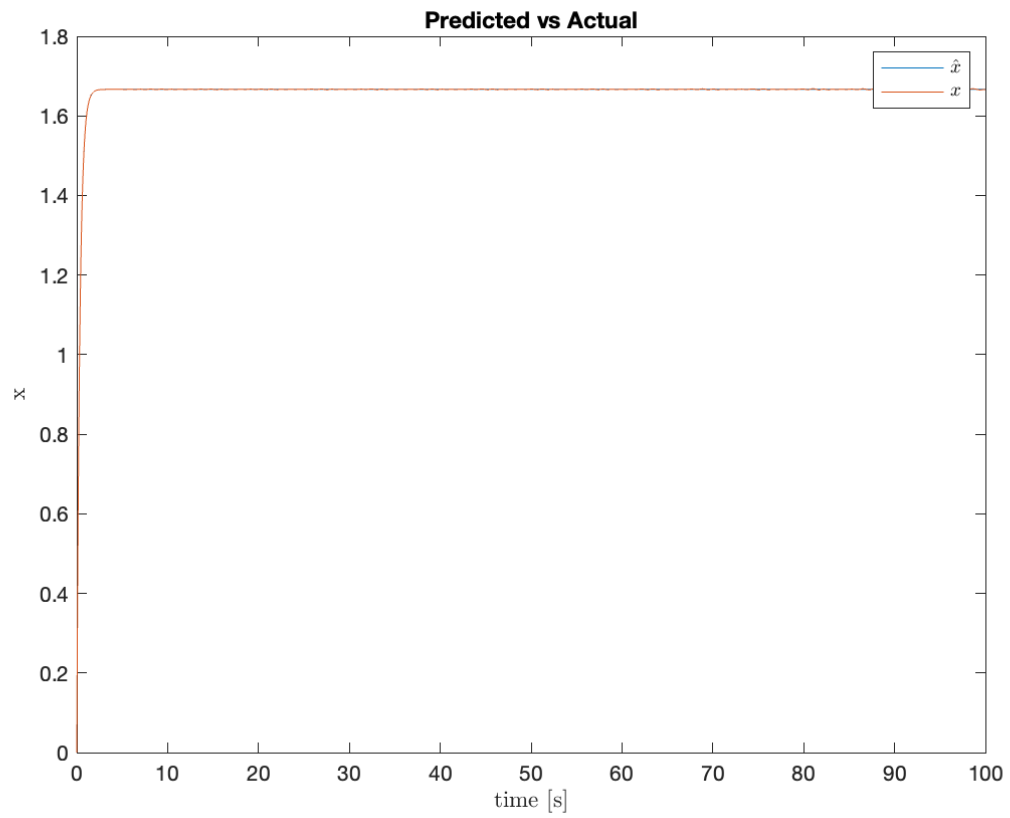
1.2 Ερώτημα α΄

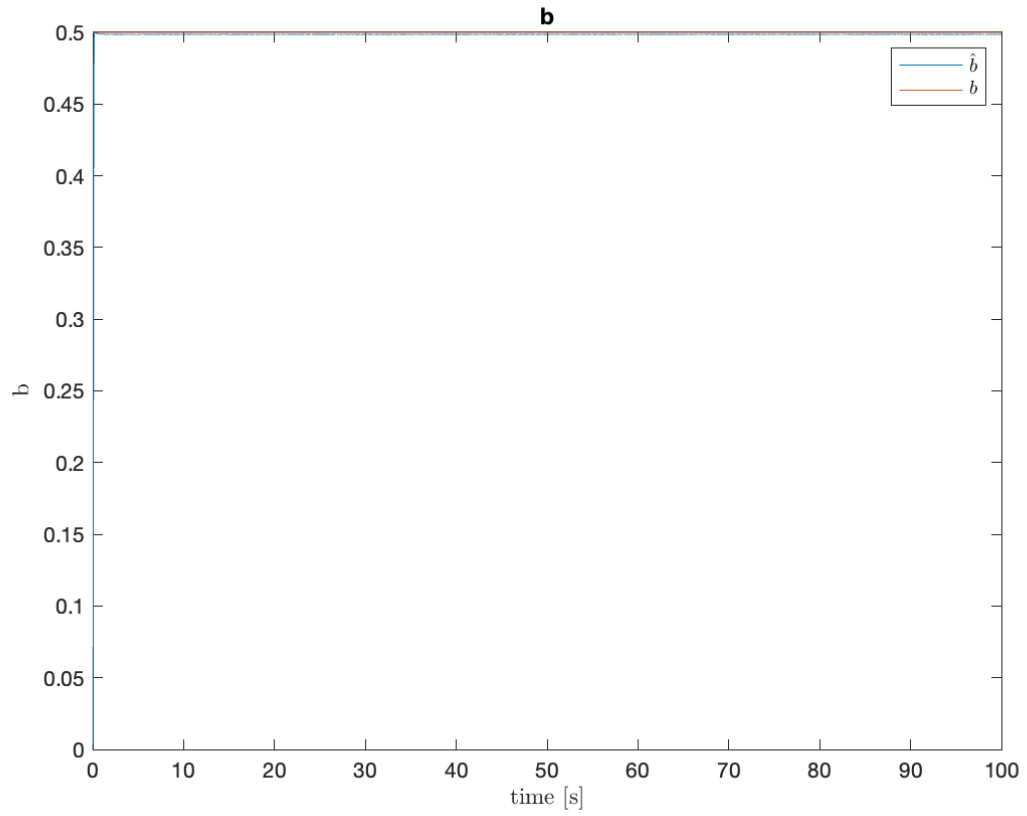
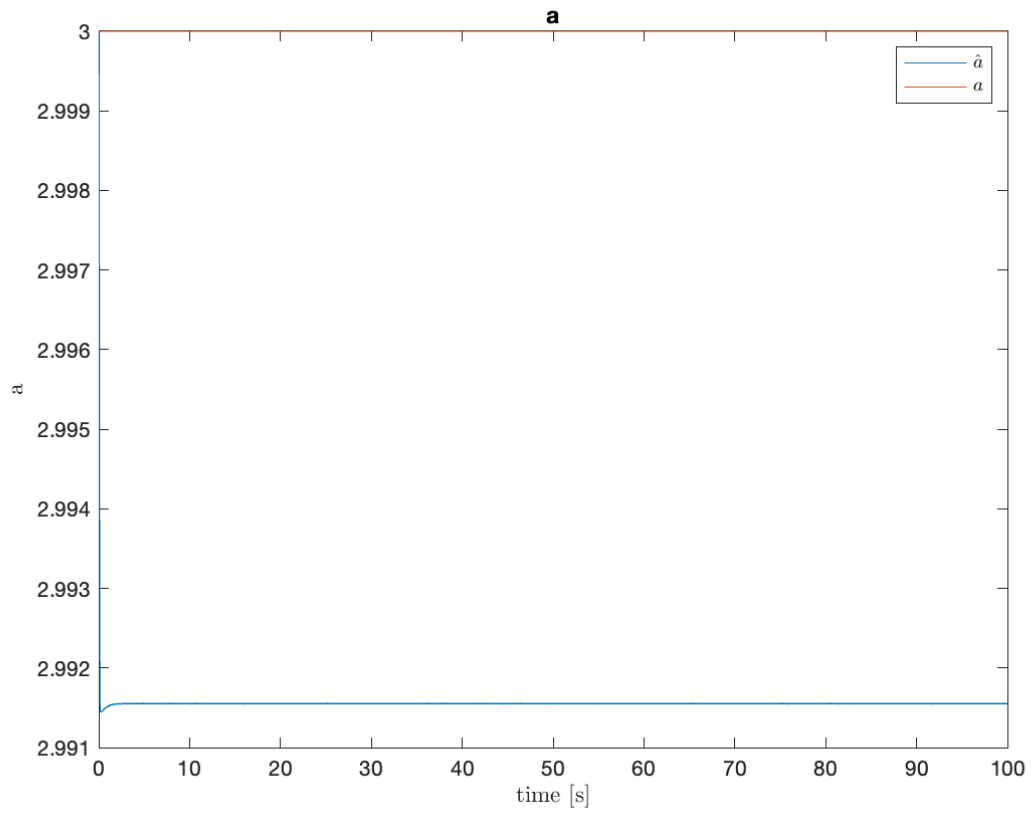
Στο α΄ ερώτημα ισχύει ότι :

$$u(t) = 10 \quad (1.18)$$

Για τις προσομοιώσεις, μετά από δοκιμή, βρέθηκε ότι ικανοποιητικές τιμές για τα $\bar{\eta}$, γ με βάση τόσο την ταχύτητα σύγκλισης αλλά και την ακρίβεια των αποτελεσμάτων είναι οι $\bar{\eta} = 3$, $\gamma = 70$

Προσομοιώνοντας τόσο το πραγματικό σύστημα, όσο και το σύστημα των 5 εξισώσεων, με την βοήθεια του κώδικα στα αρχεία `ua.m`, `real_system.m`, `simulated_system.m` και το πρώτο μισό του αρχείου `main.m` έχουμε τα ακόλουθα διαγράμματα :





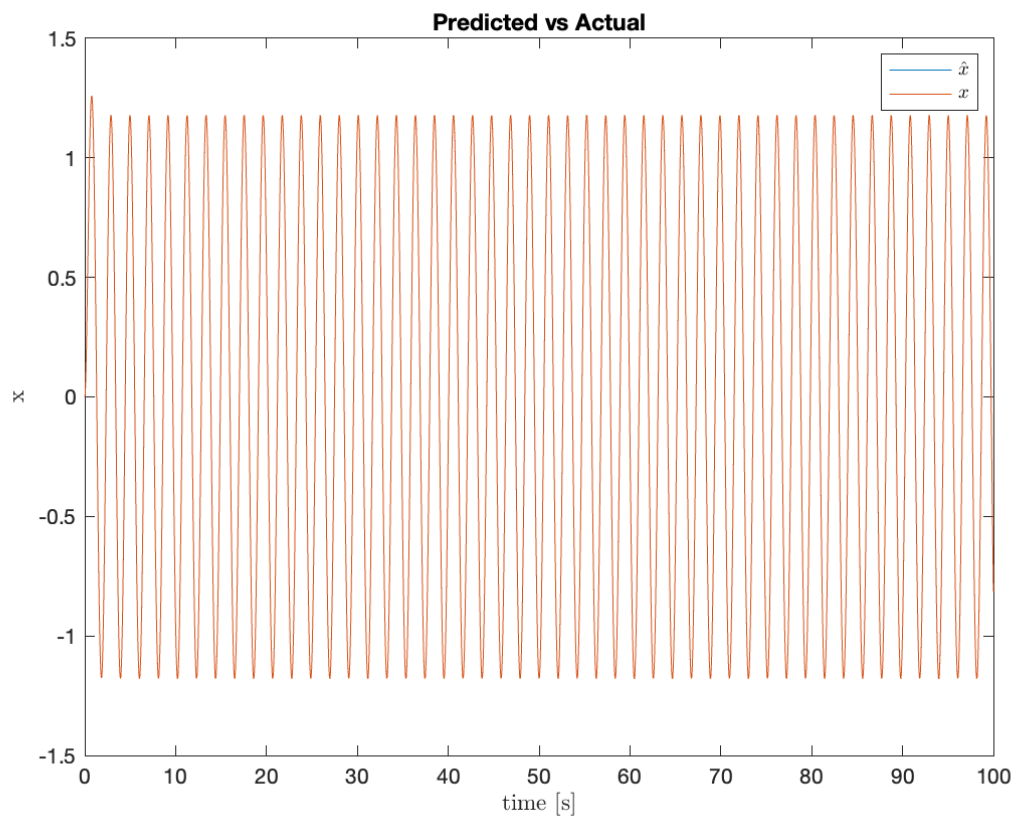
1.3 Ερώτημα β΄

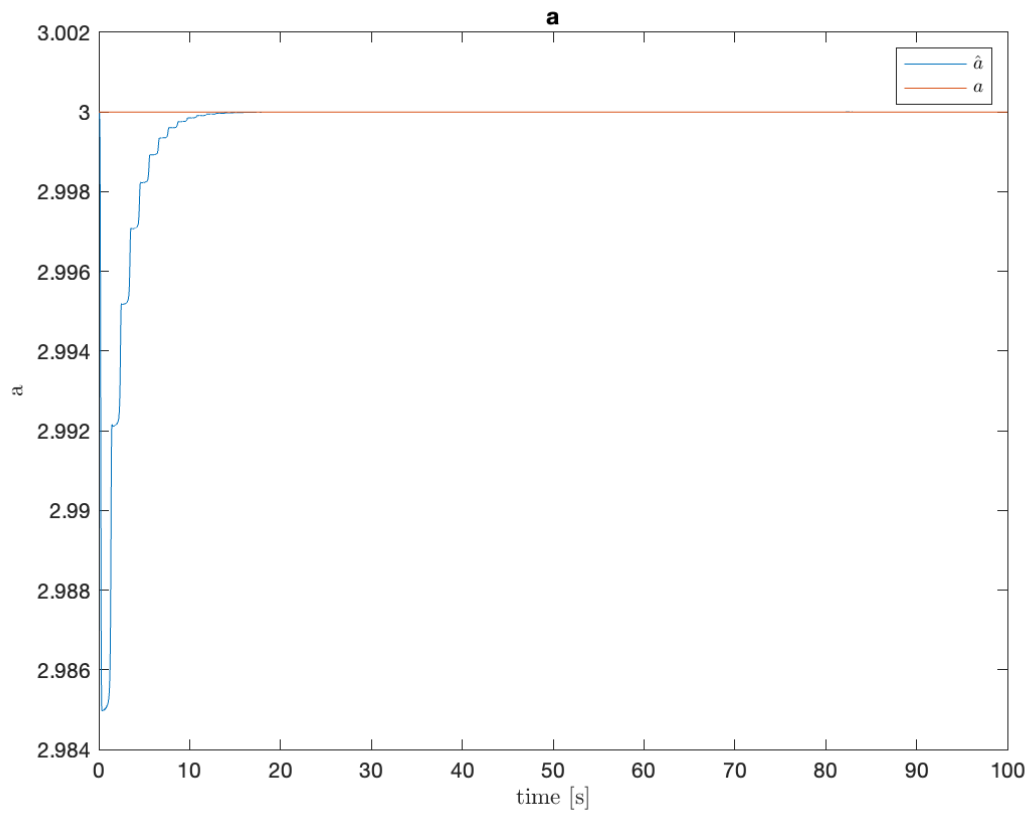
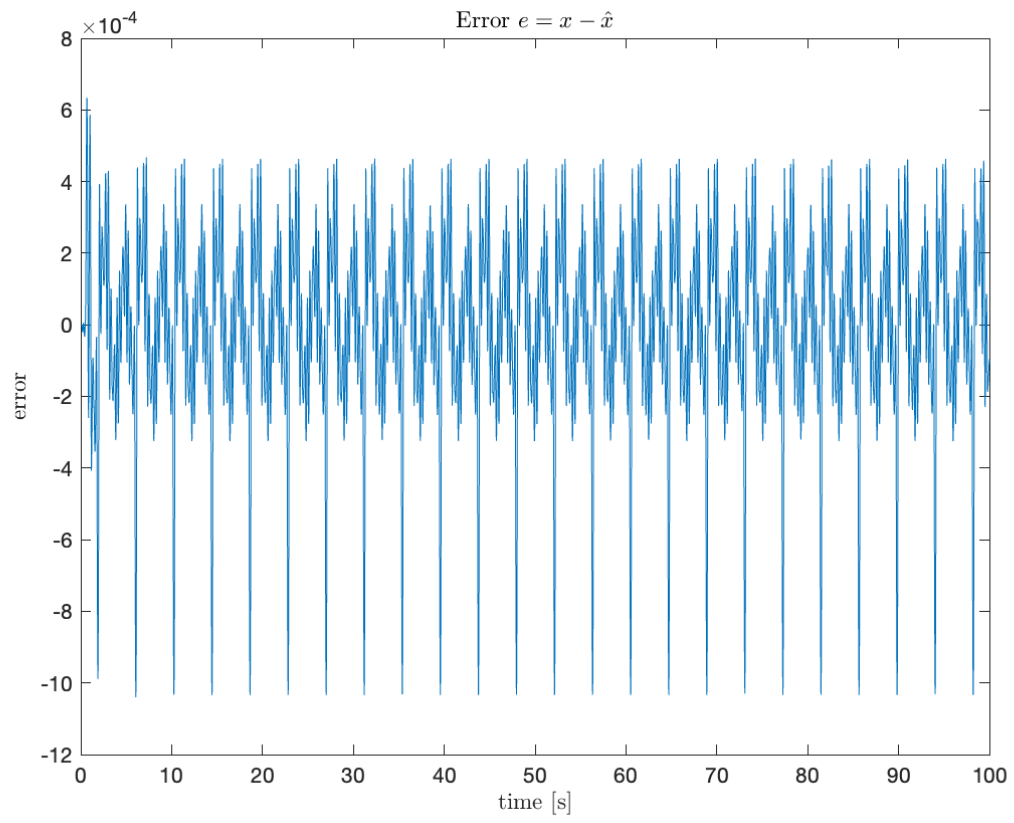
Στο β΄ ερώτημα ισχύει ότι:

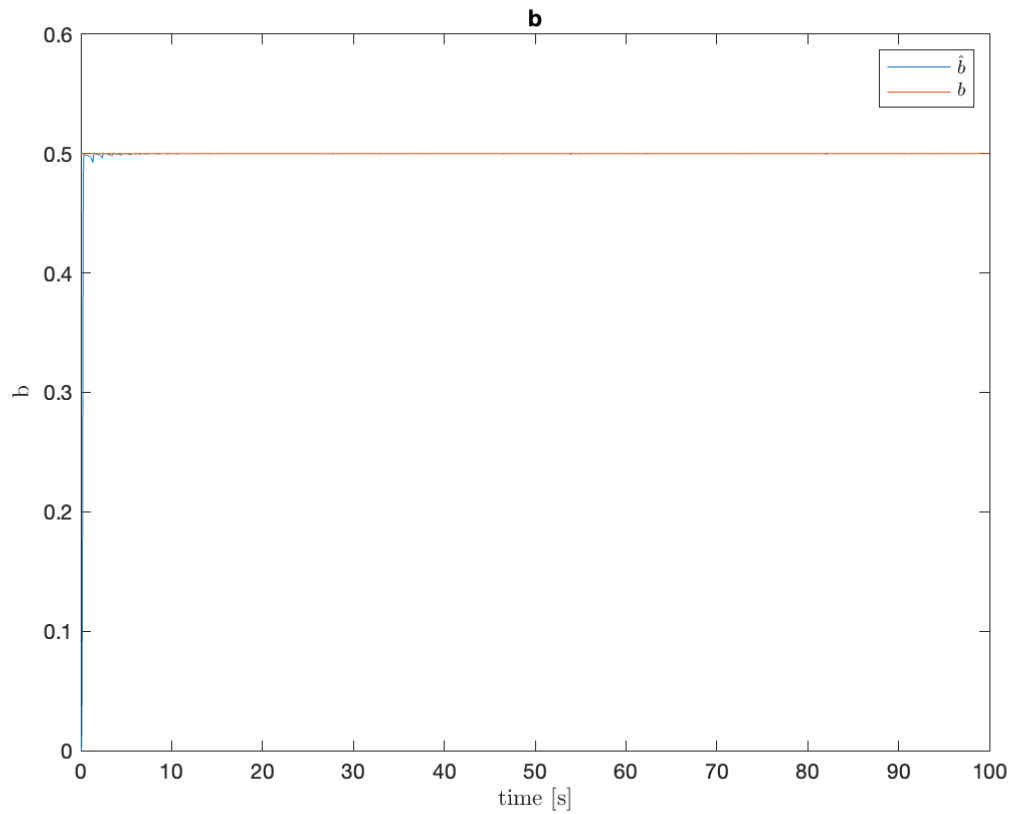
$$u(t) = 10\sin(3t) \quad (1.19)$$

Για τις προσομοιώσεις, μετά από δοκιμή, βρέθηκε ότι ικανοποιητικές τιμές για τα β, γ με βάση τόσο την ταχύτητα σύγκλισης αλλά και την ακρίβεια των αποτελεσμάτων είναι οι $\beta = 3, \gamma = 70$

Προσομοιώνοντας τόσο το πραγματικό σύστημα, όσο και το σύστημα των 5 εξισώσεων, με την βοήθεια του κώδικα στα αρχεία `ua.m`, `real_system.m`, `simulated_system.m` και το δεύτερο μισό του αρχείου `main.m` έχουμε τα ακόλουθα διαγράμματα:







1.4 Παρατηρήσεις

Παρατηρούμε πως και στα δύο σενάρια βρίσκουμε αρκετά ικανοποιητικές τιμές για τα \hat{a} , \hat{b} , που μας δίνουν πολύ χαμηλό σφάλμα. Παρατηρούμε πως στο σενάριο α' υπάρχει μη μηδενικό σταθερό σφάλμα στην εκτίμηση του \hat{a} το οποίο μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε με κατάλληλη επιλογή των β , γ , αλλά όχι να μηδενίσουμε.

Κεφάλαιο 2

Θέμα 2

2.1 Θεωρητική ανάλυση

Το σύστημά μας βρίσκεται στην ίδια μορφή με αυτή της θεωρίας των σημειώσεων [1] και έτσι ακολουθούμε την ίδια συλλογιστική πορεία.

Ακολουθώντας πάλι τις πράξεις και τις παραδοχές που έγιναν στο Θέμα 1, καταλήγουμε σε αυτή την μορφή των εξισώσεων:

$$x = \partial^{*T} \phi \quad (2.1)$$

$$\partial^* = \begin{bmatrix} \hat{a} - a & b \end{bmatrix}^T \quad (2.2)$$

$$\phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+\hat{a}}x & \frac{1}{s+\hat{a}}u \end{bmatrix}^T \quad (2.3)$$

Στην παράλληλη μορφή το σύστημα αναγνώρισης ορίζεται ως εξής:

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{a}_1 \hat{x} + \hat{b}_2 u, \quad \hat{x}(0) = 0 \quad (2.4)$$

ενώ στην μικτή:

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{a}_1 \hat{x} + \hat{b}_2 u - \hat{a}(x - \hat{x}), \quad \hat{x}(0) = 0 \quad (2.5)$$

Το σφάλμα ορίζεται ως εξής:

$$e = x - \hat{x} \quad (2.6)$$

Παραγωγίζουμε την 2.6. Στην παράλληλη δομή ισχύει:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= -ax + bu + \hat{a}\hat{x} - \hat{b}u \\ &= -ax + \hat{a}\hat{x} - (\hat{b} - b)u \\ &= -ax + \hat{a}\hat{x} - (\hat{b} - b)u + a\hat{x} - a\hat{x} \\ &= -ae + \tilde{a}\hat{x} - \tilde{b}u \end{aligned} \quad (2.7)$$

με:

$$\tilde{a} = \hat{a} - a \quad (2.8)$$

$$\tilde{b} = \hat{b} - b \quad (2.9)$$

Αντίστοιχα στην μικτή δομή ισχύει:

$$\dot{e} = -\rho e + \tilde{a}x - \tilde{b}u \quad (2.10)$$

Εφόσον φέραμε τις εξισώσεις μας σε αυτή την μορφή, εκμεταλλευόμενοι τα συμπεράσματα 4.1.2 και 4.1.3 [1] και δεδομένου ότι η είσοδός μας είναι φραγμένη (ένα ημιτονοειδές σήμα είναι εξ' ορισμού φραγμένο) μπορούμε να καταλήξουμε ότι στην παράλληλη δομή ισχύει:

$$\dot{\hat{a}} = -e\hat{x} \quad (2.11)$$

$$\dot{\hat{b}} = eu \quad (2.12)$$

ενώ στην μικτή:

$$\dot{\hat{a}} = -ex \quad (2.13)$$

$$\dot{\hat{b}} = eu \quad (2.14)$$

Επομένως κατά την προσομοίωση σε κάθε περίπτωση έχουμε να λύσουμε το σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων που ακολουθούν. Στην παράλληλη δομή:

$$\dot{x} = -ax + bu \quad (2.15)$$

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{a}\hat{x} + \hat{b}u \quad (2.16)$$

$$\dot{\hat{a}} = -e\hat{x} \quad (2.17)$$

$$\dot{\hat{b}} = eu \quad (2.18)$$

και στην μικτή:

$$\dot{x} = -ax + bu \quad (2.19)$$

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{a}\hat{x} + \hat{b}u \quad (2.20)$$

$$\dot{\hat{a}} = -ex \quad (2.21)$$

$$\dot{\hat{b}} = eu \quad (2.22)$$

Για τον θόρυβο ισχύει στα παραπάνω συστήματα:

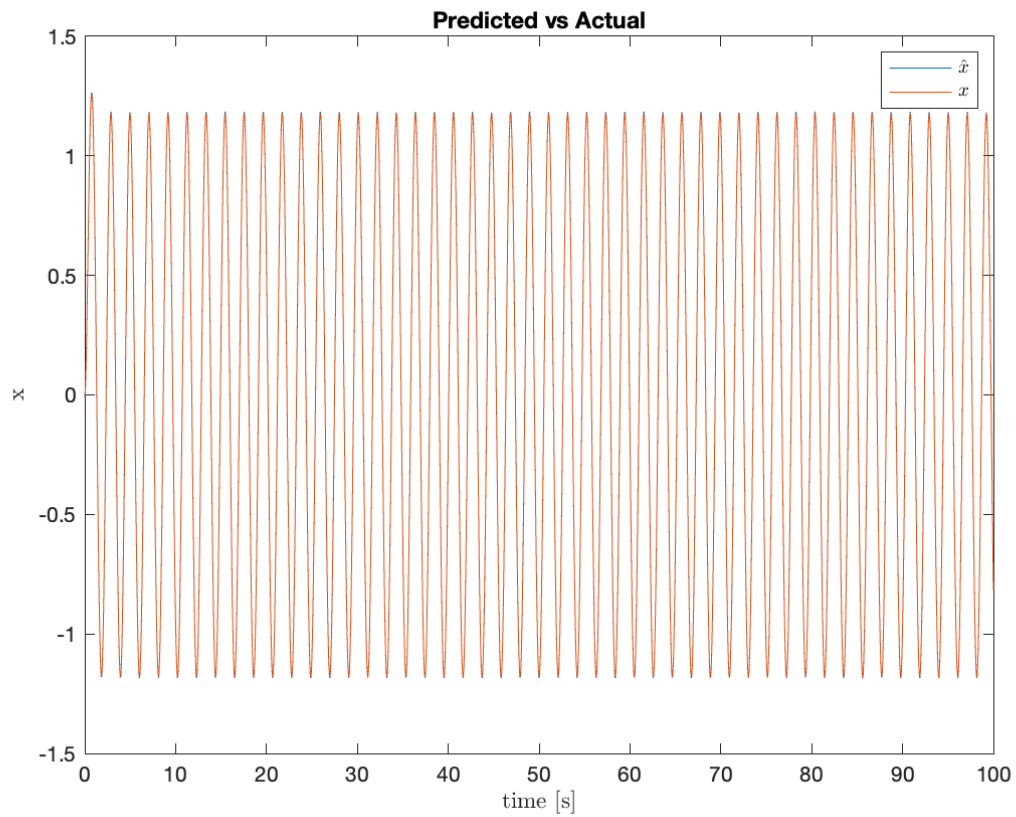
$$\dot{x} = x + n(t) \quad (2.23)$$

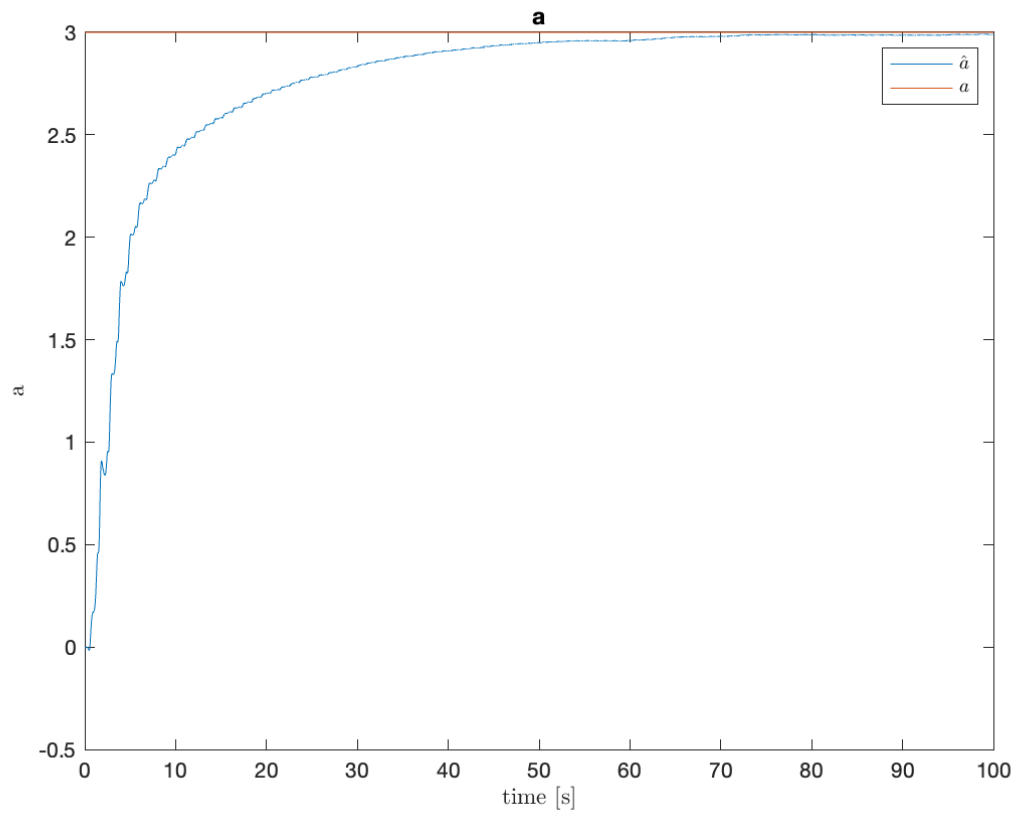
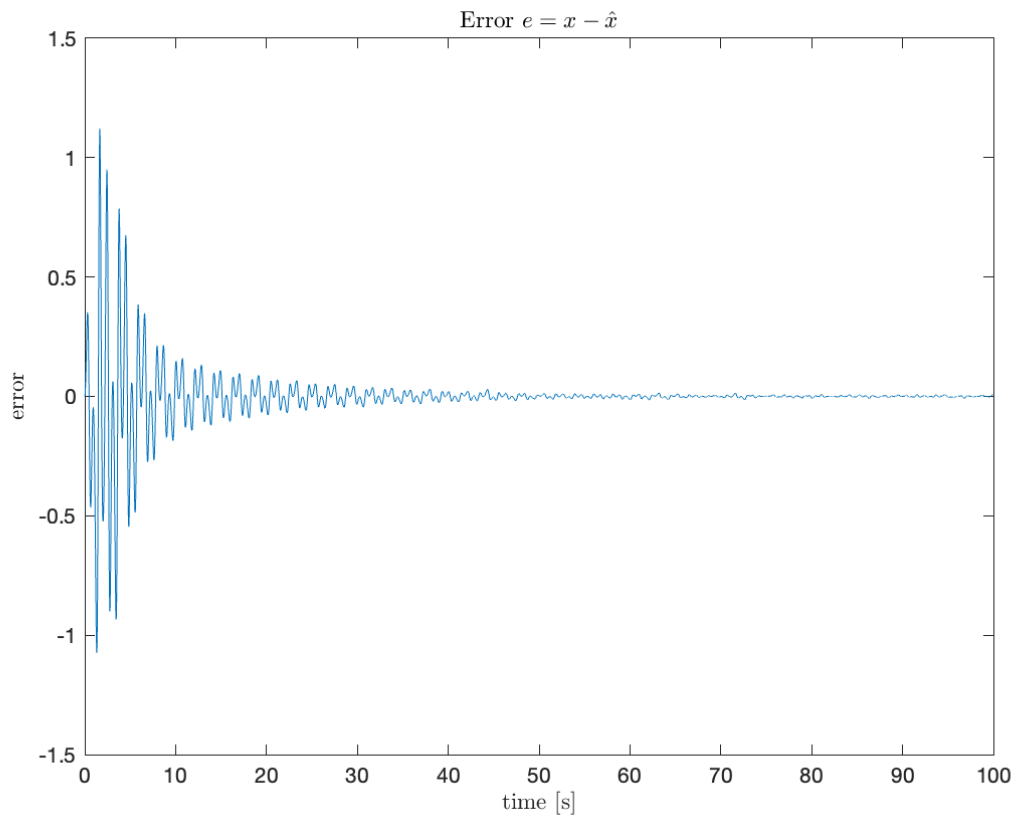
$$n = n_0 \sin(2\pi f t) \quad (2.24)$$

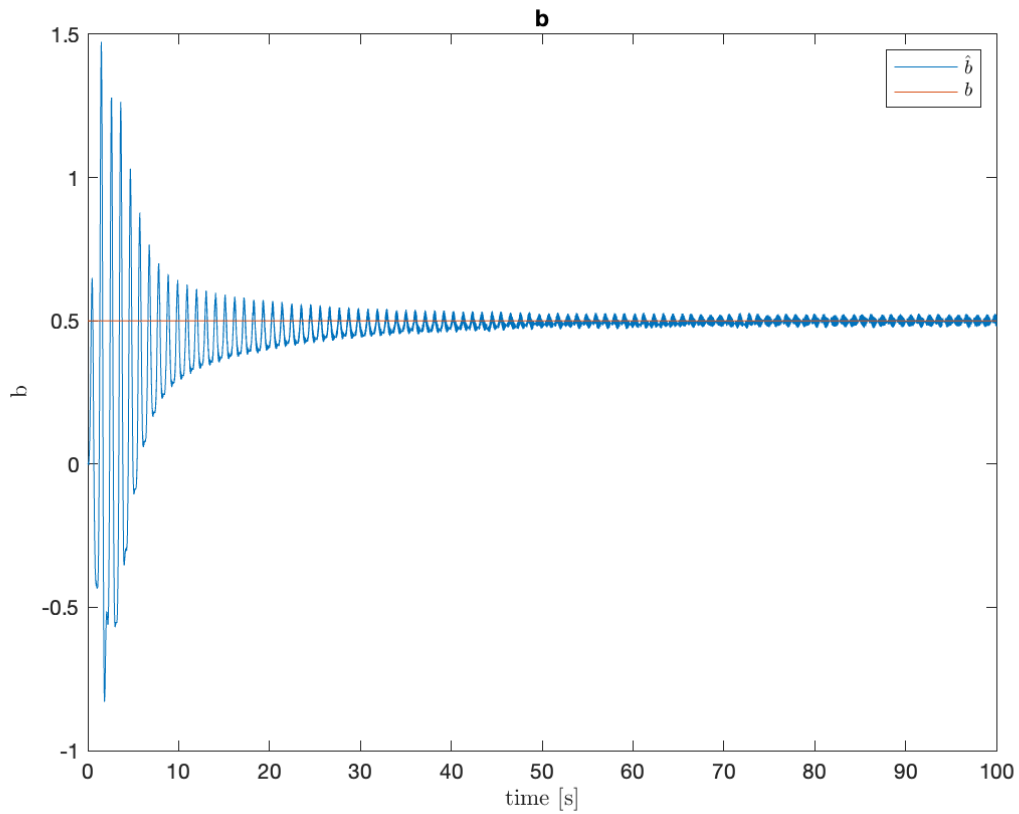
όπου για τα ερωτήματα αρχικά δίνεται $n_0 = 0.5, f = 40$.

2.2 Παράλληλη δομή

Για την παράλληλη δομή χρησιμοποιείται κώδικας που βρίσκεται στα αρχεία `u.m`, `real_system.m`, `simulated_system_parallel.m` και `main.m`. Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω:

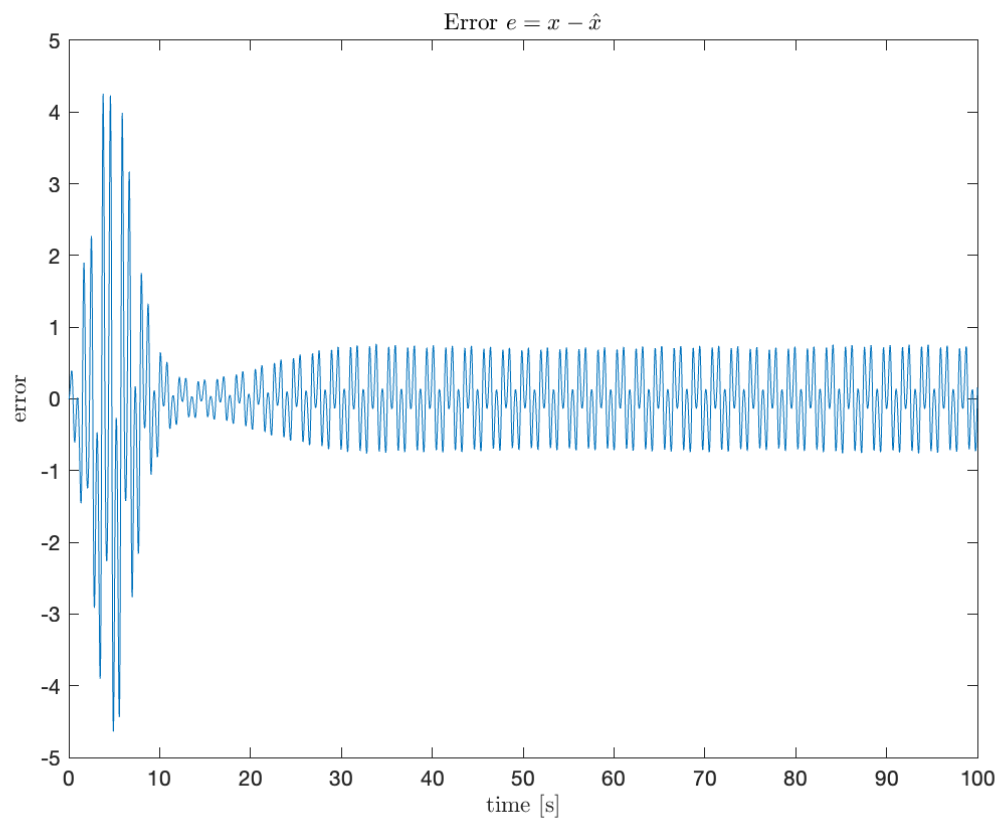
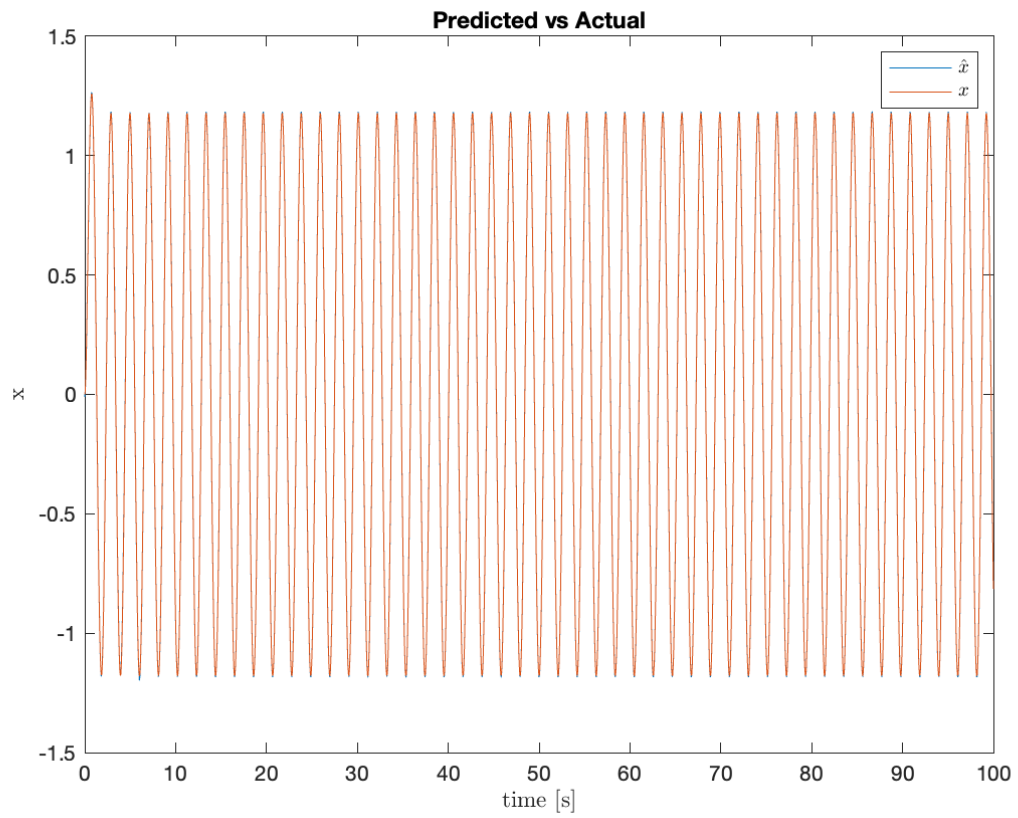


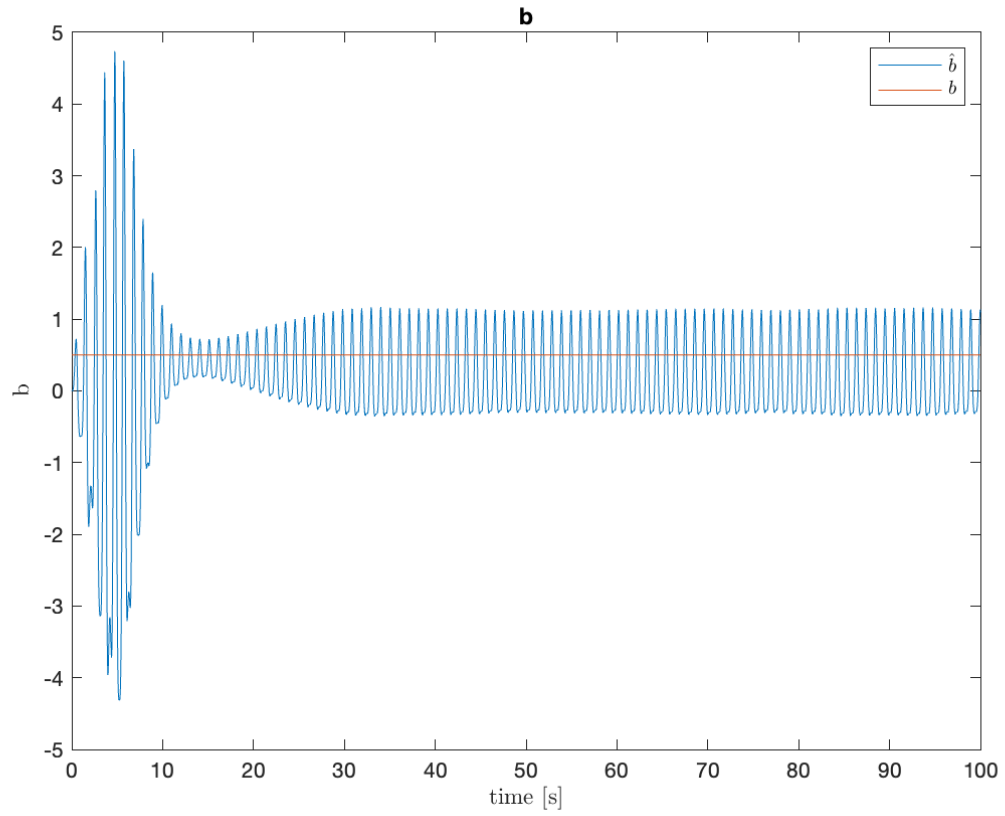
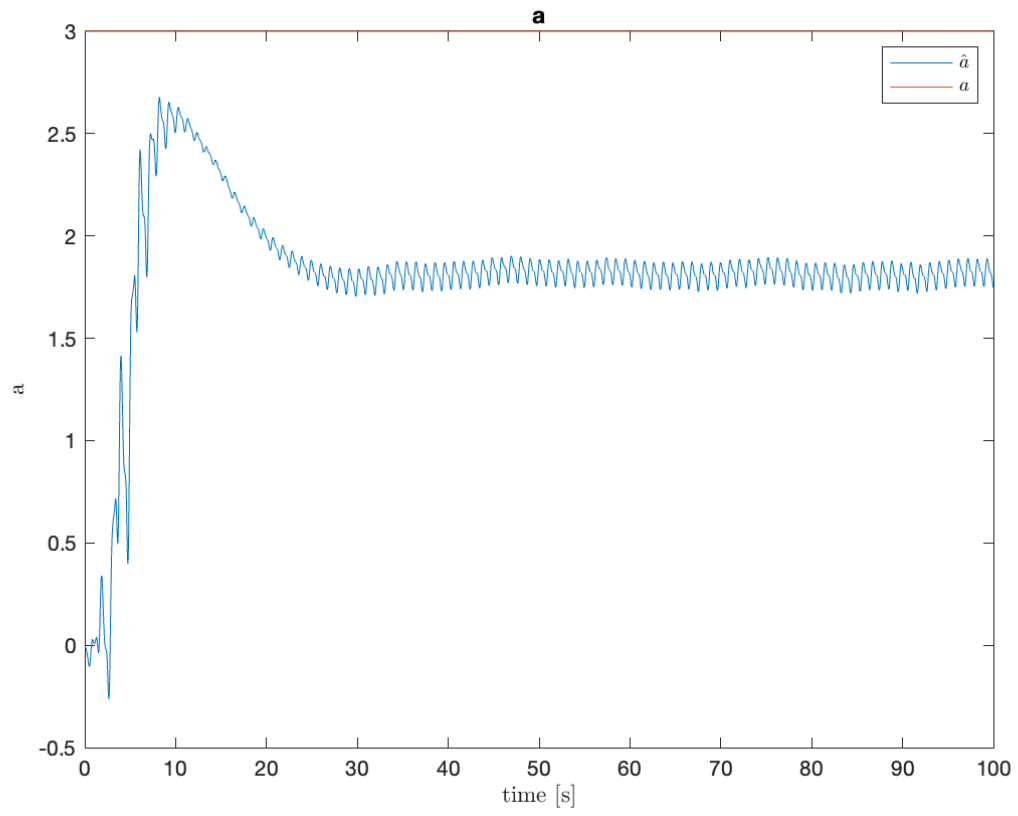




2.3 Μικτή δομή

Για την μικτή δομή χρησιμοποιείται κώδικας που βρίσκεται στα αρχεία `u.m`, `real_system.m`, `simulated_system_mixed.m` και `main.m`. Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω:





2.4 Παρατηρήσεις

Παρατηρούμε ότι η μικτή δομή δίνει χειρότερα αποτελέσματα παρουσίας θορύβου, τόσο στο σφάλμα παρακολούθησης e όσο και στις τιμές των \hat{a} , \hat{b} . Αυτό επιβεβαιώνει την θεωρία που δίνεται. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει:

$$\dot{\hat{a}} = -e\hat{x} = -(x - \hat{x})\hat{x} = \hat{x}^2 - x\hat{x} \quad \text{παράλληλη δομή} \quad (2.25)$$

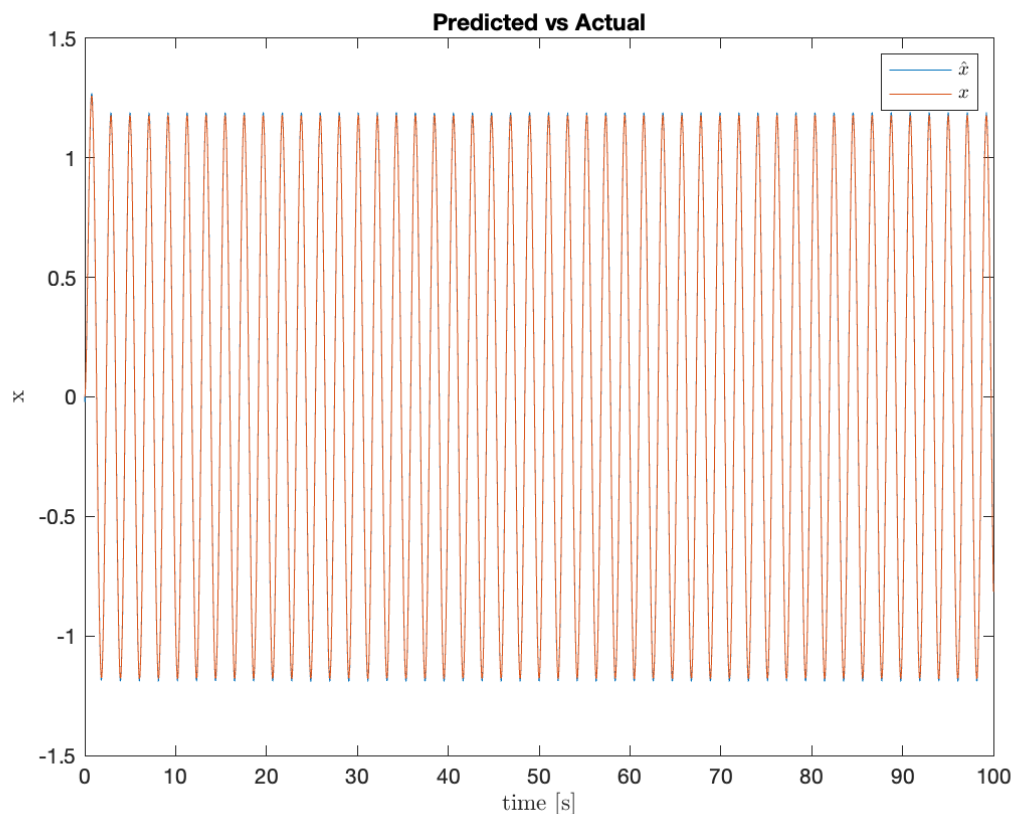
$$\dot{\hat{a}} = -ex = -(x - \hat{x})x = x^2 - x\hat{x} \quad \text{μικτή δομή} \quad (2.26)$$

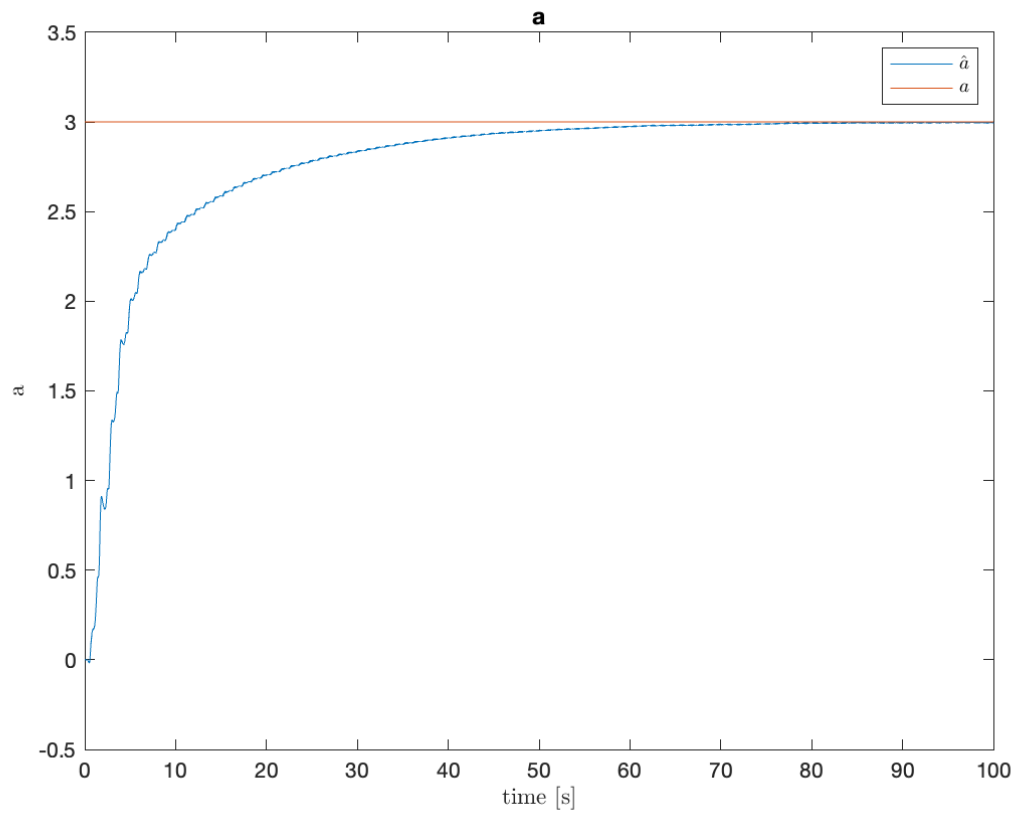
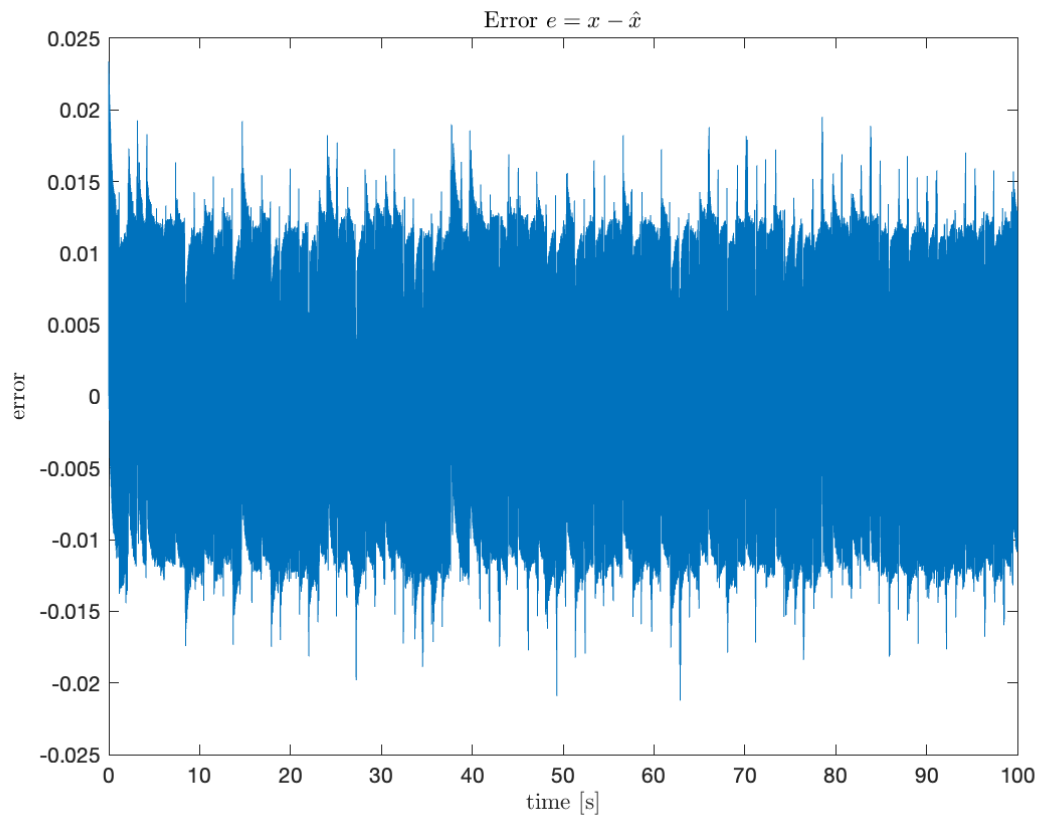
$$(2.27)$$

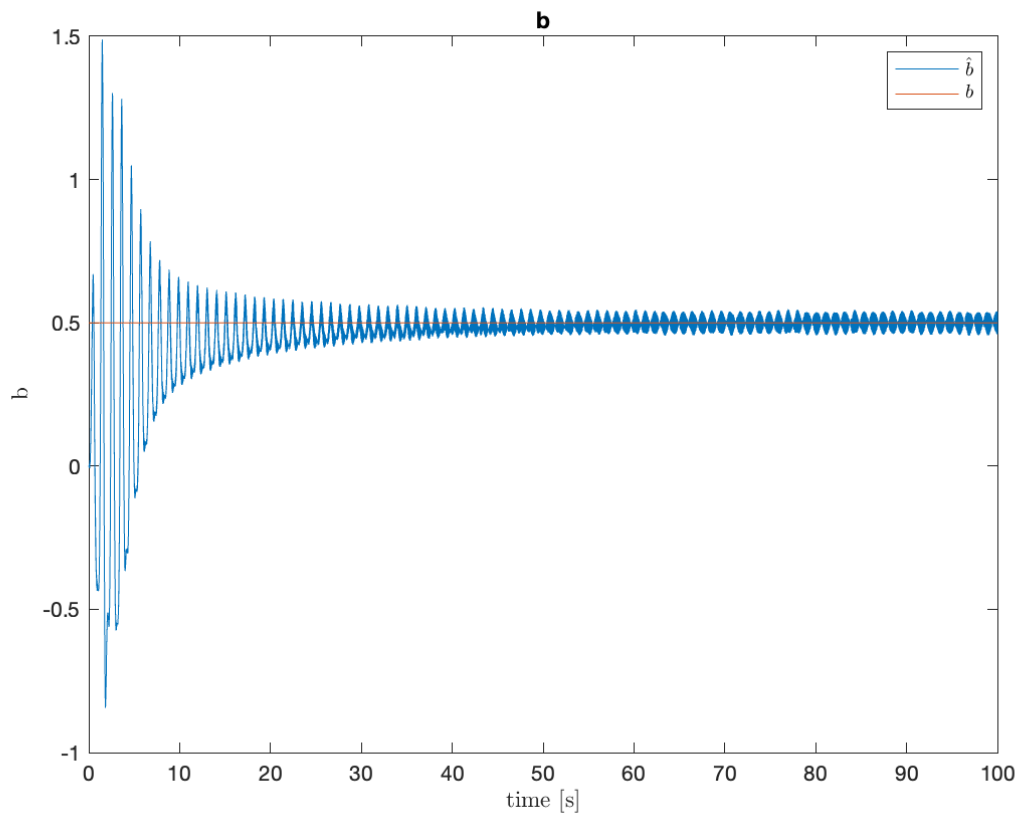
Όπου, αν θυμηθούμε τις εξισώσεις 2.23, 2.24, βλέπουμε ότι στην μικτή δομή ενεργεί το τετράγωνο του θορύβου, ενώ στην παράλληλη ο απλός όρος του θορύβου. Αρα, στην μικτή δομή θα έχουμε μεγαλύτερη απόκλιση.

2.5 Άυξηση του πλάτους θορύβου

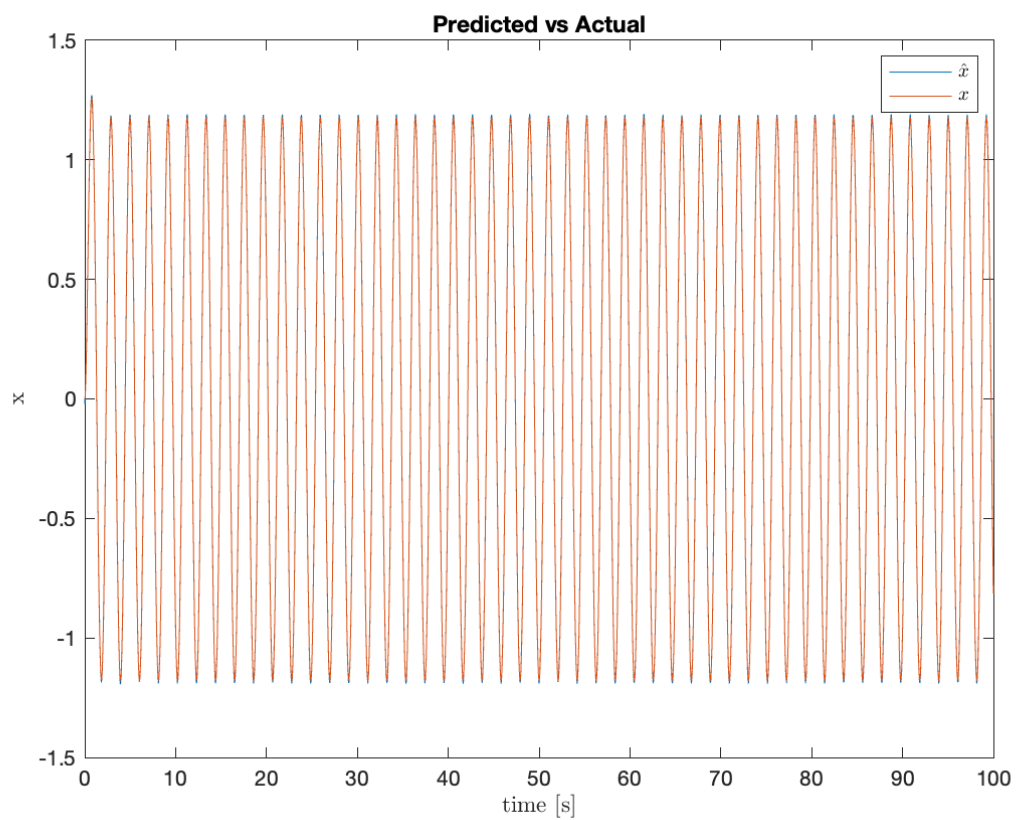
Σύμφωνα με την εκφώνηση, επαναλαμβάνουμε τις προσομοιώσεις μας με μεγαλύτερες τιμές για το n_0 . Συγκεκριμένα, για $n_0 = 1$ στην παράλληλη δομή:

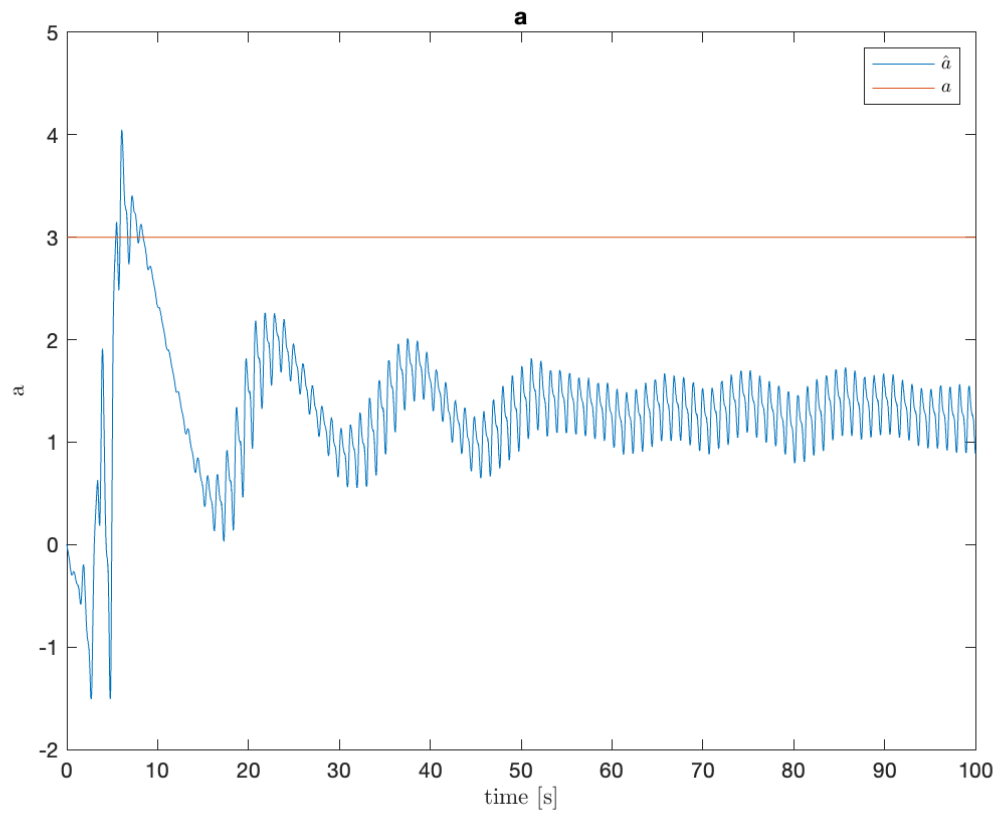
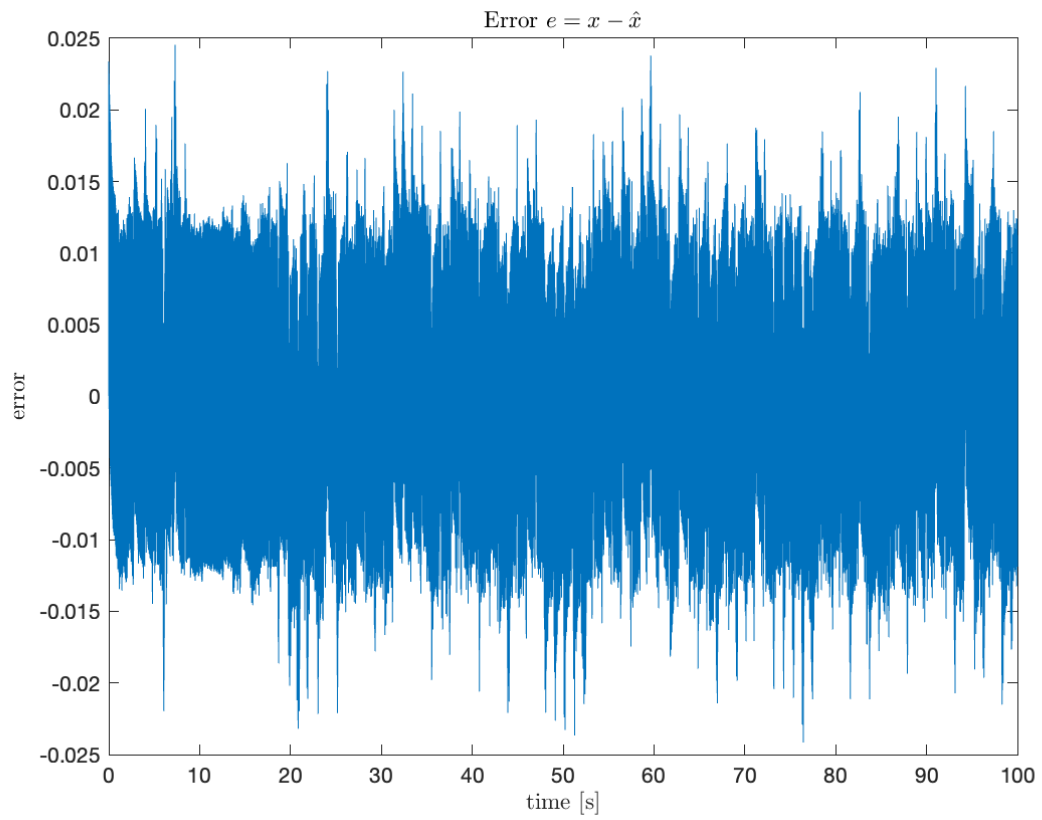


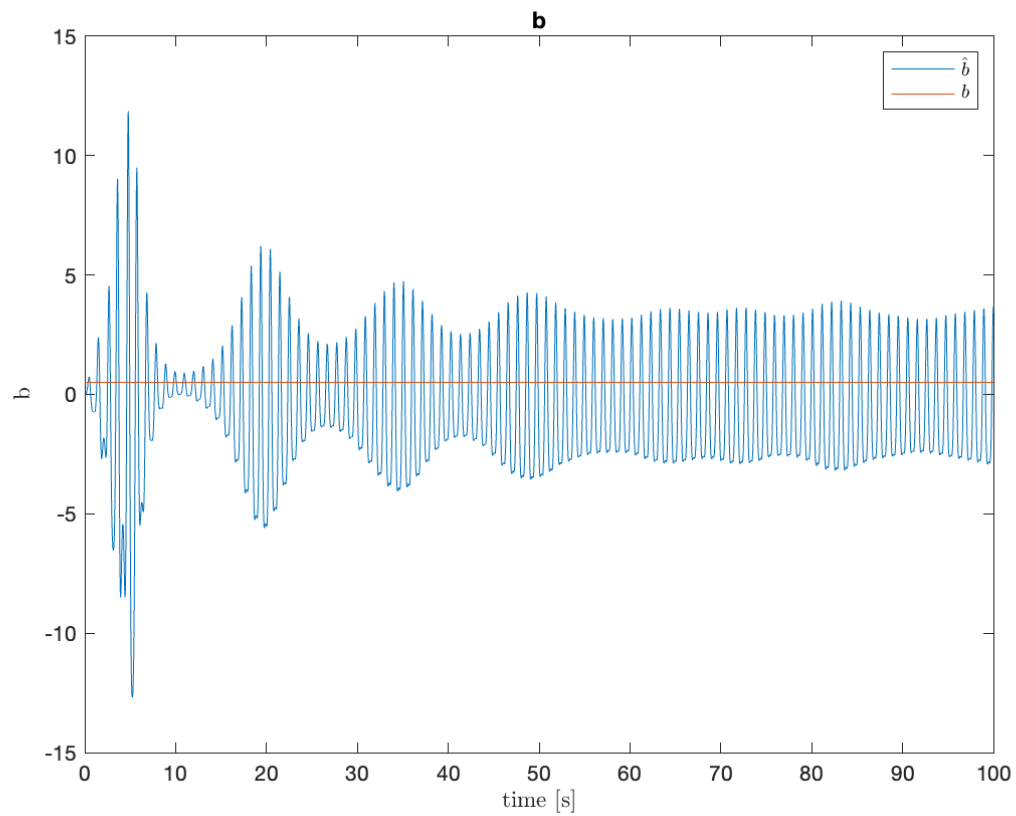




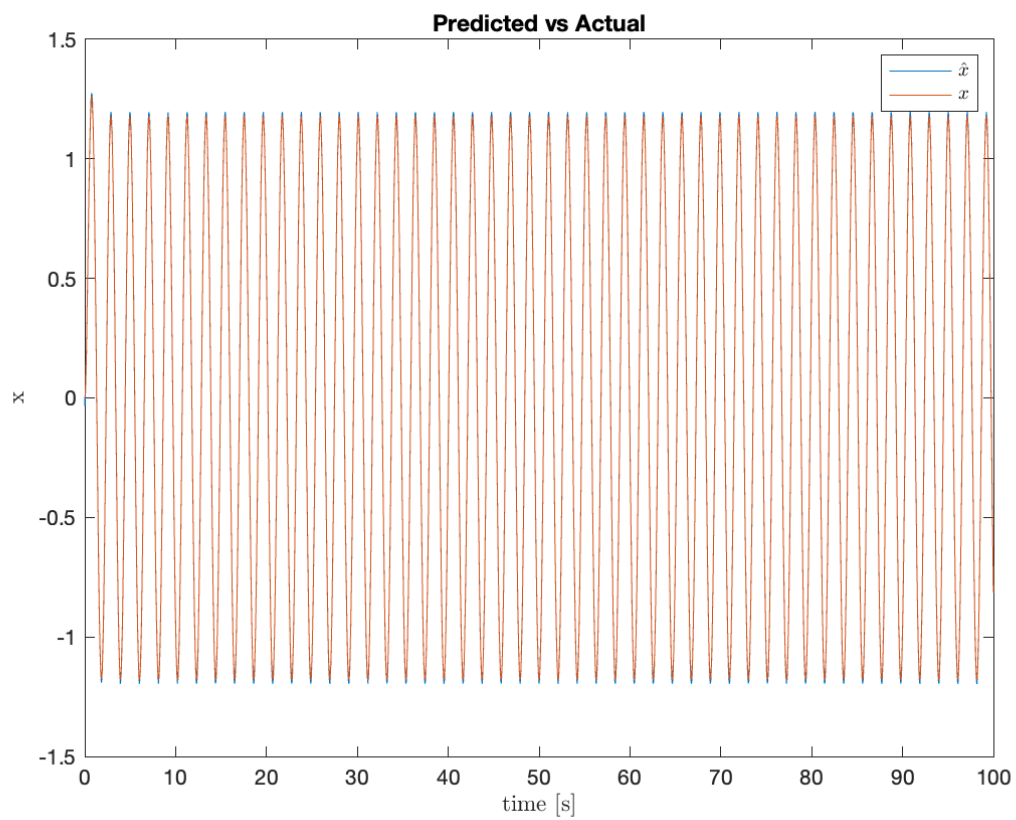
ενώ στην μικτή δομή :

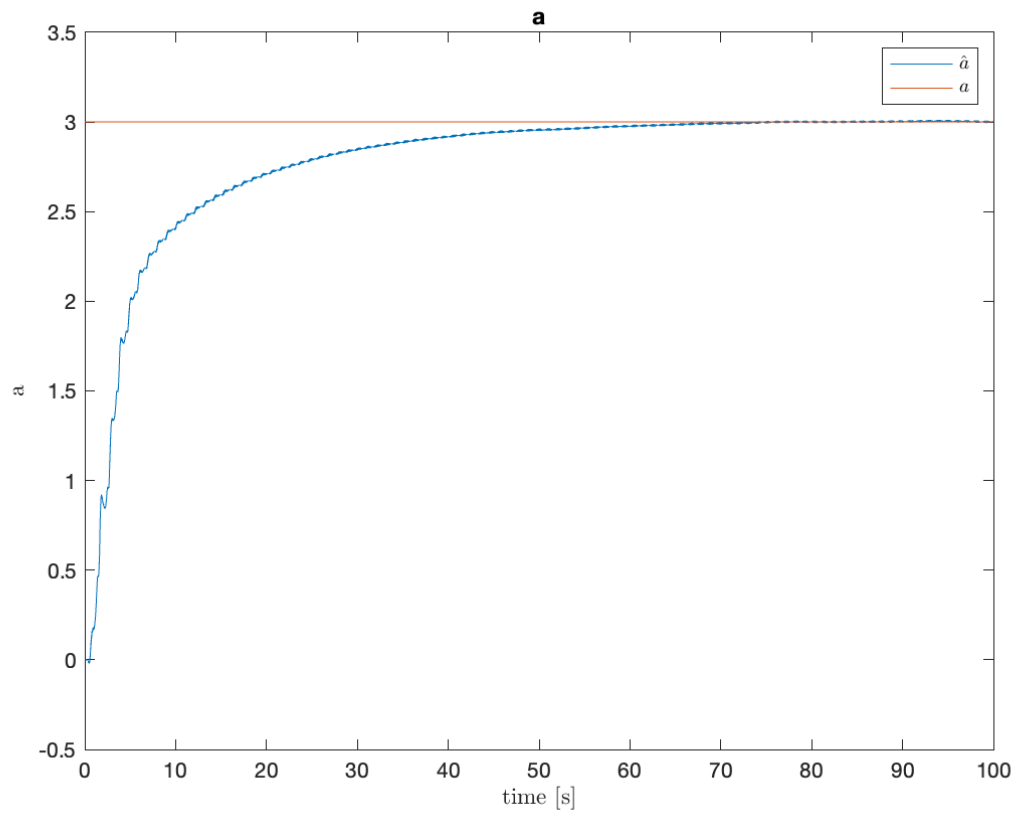
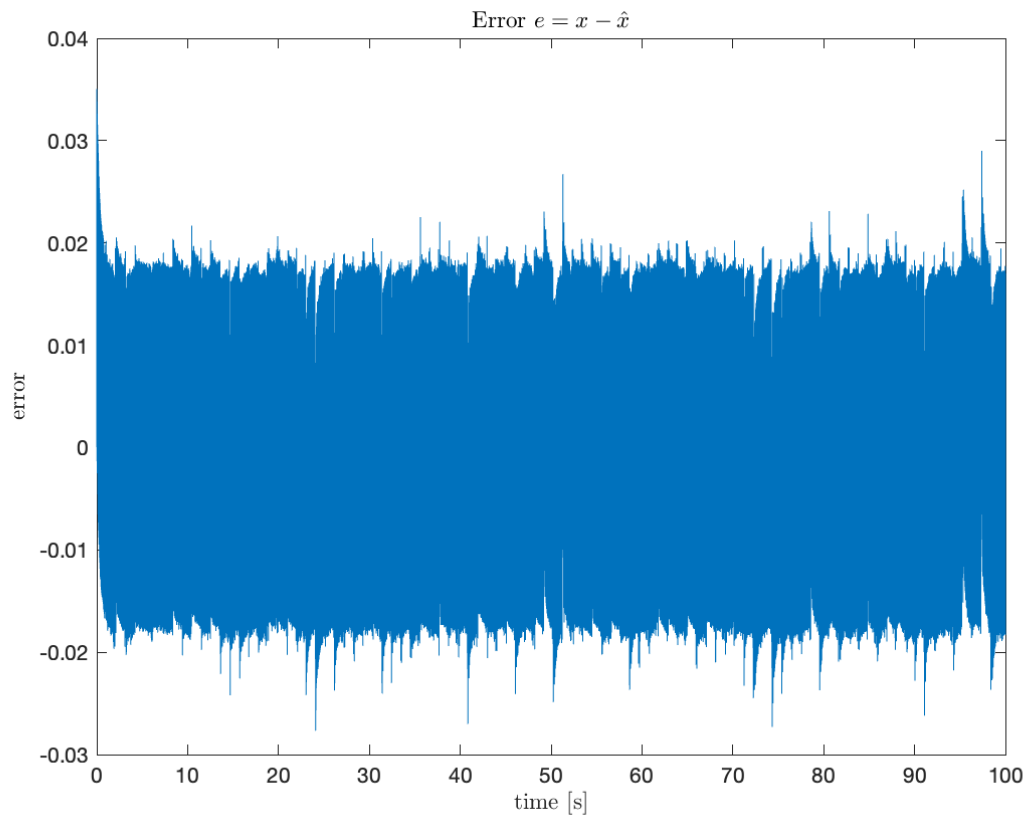


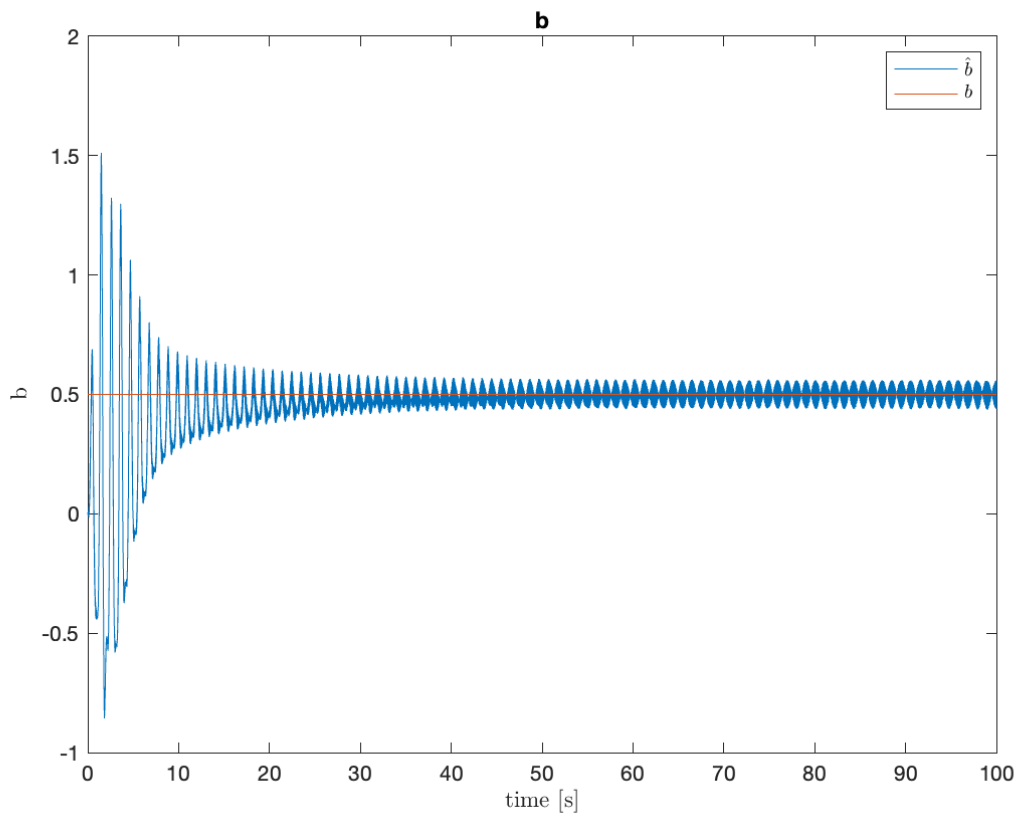




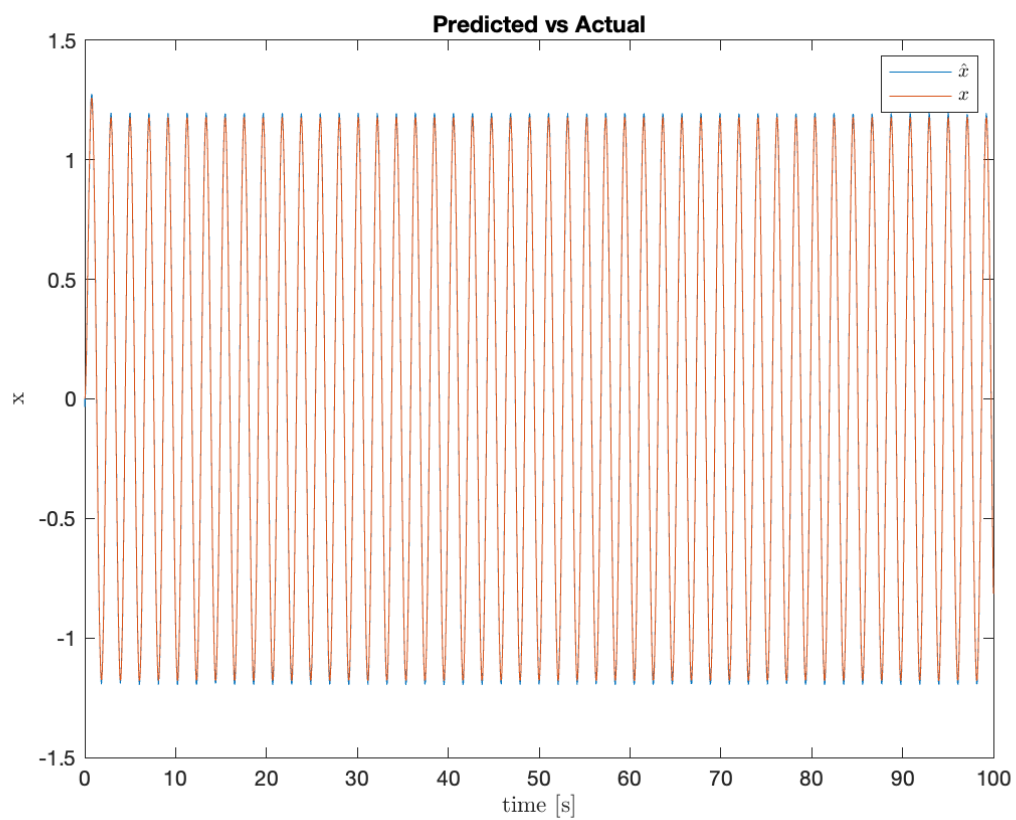
Αντίστοιχα, για $n_0 = 1.5$ στην παράλληλη δομή:

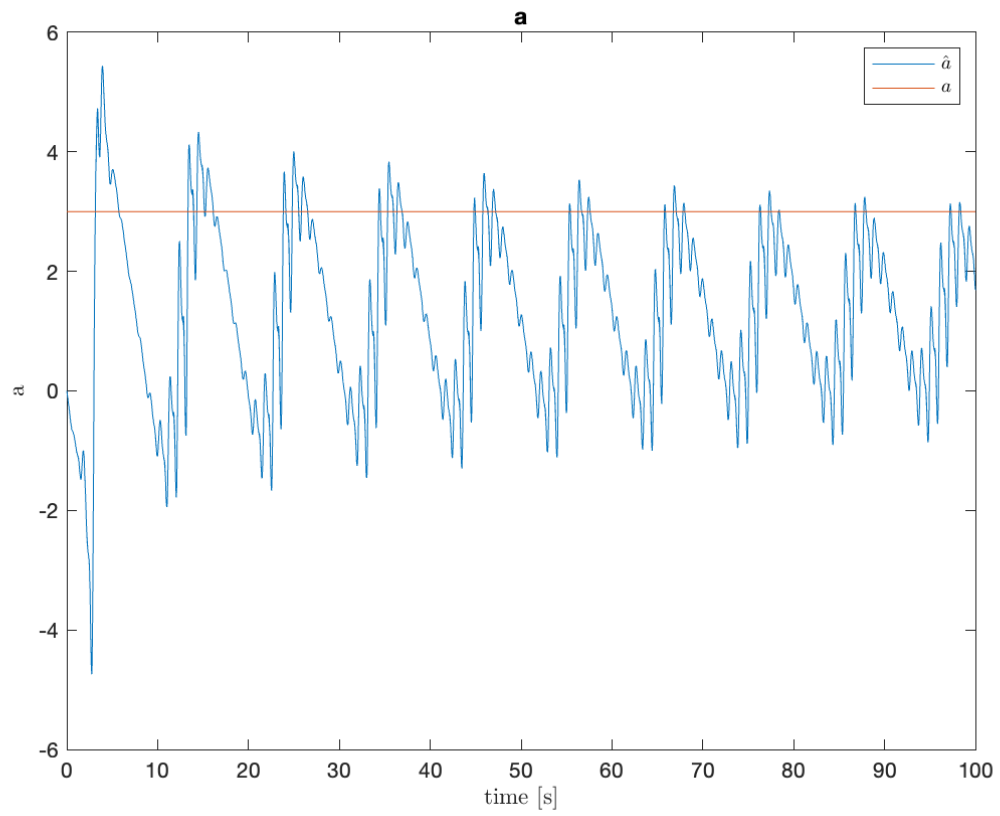
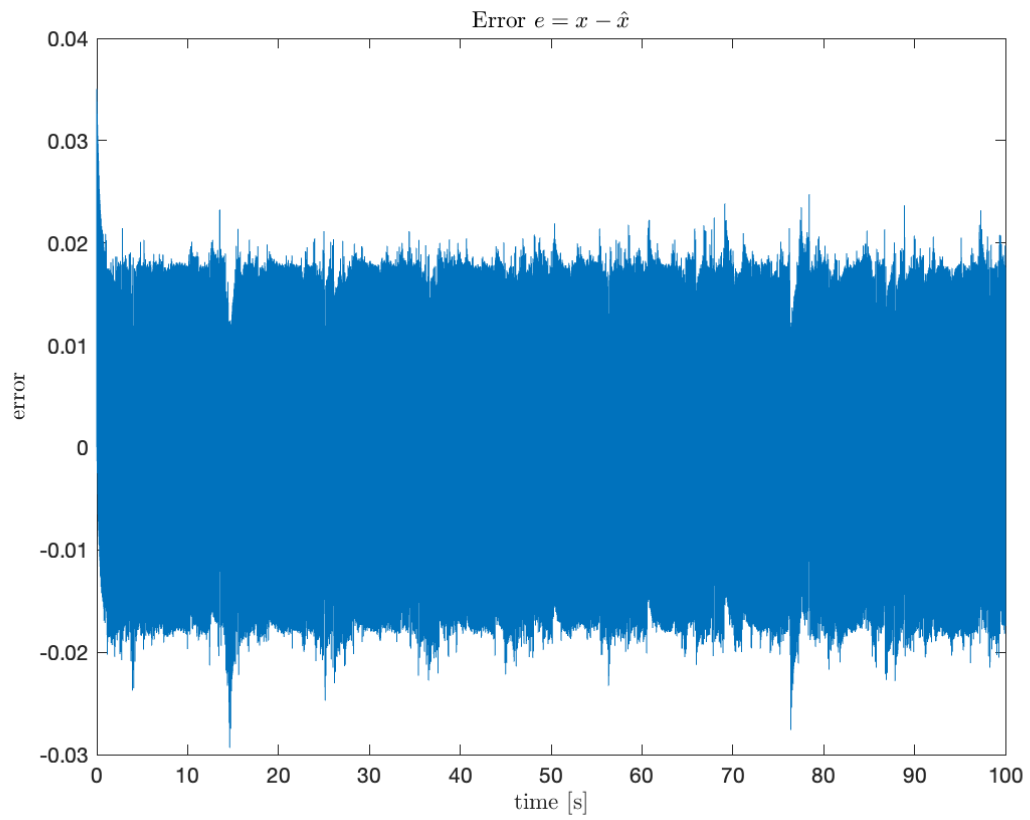


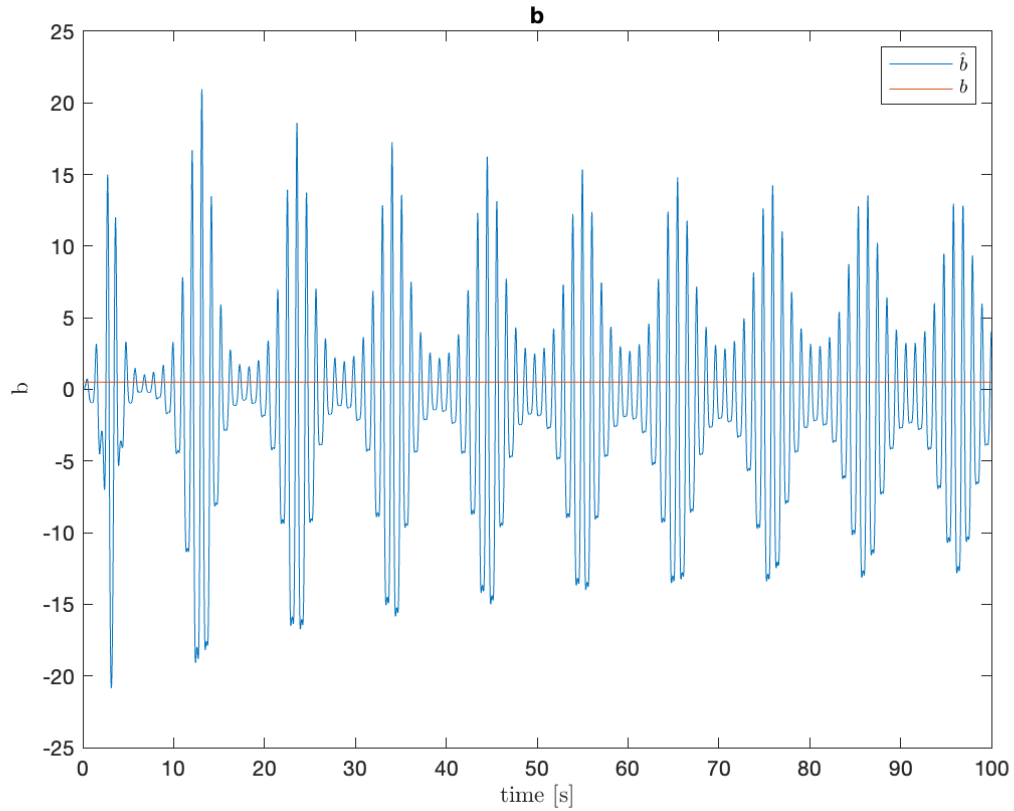




και στην μικτή δομή:



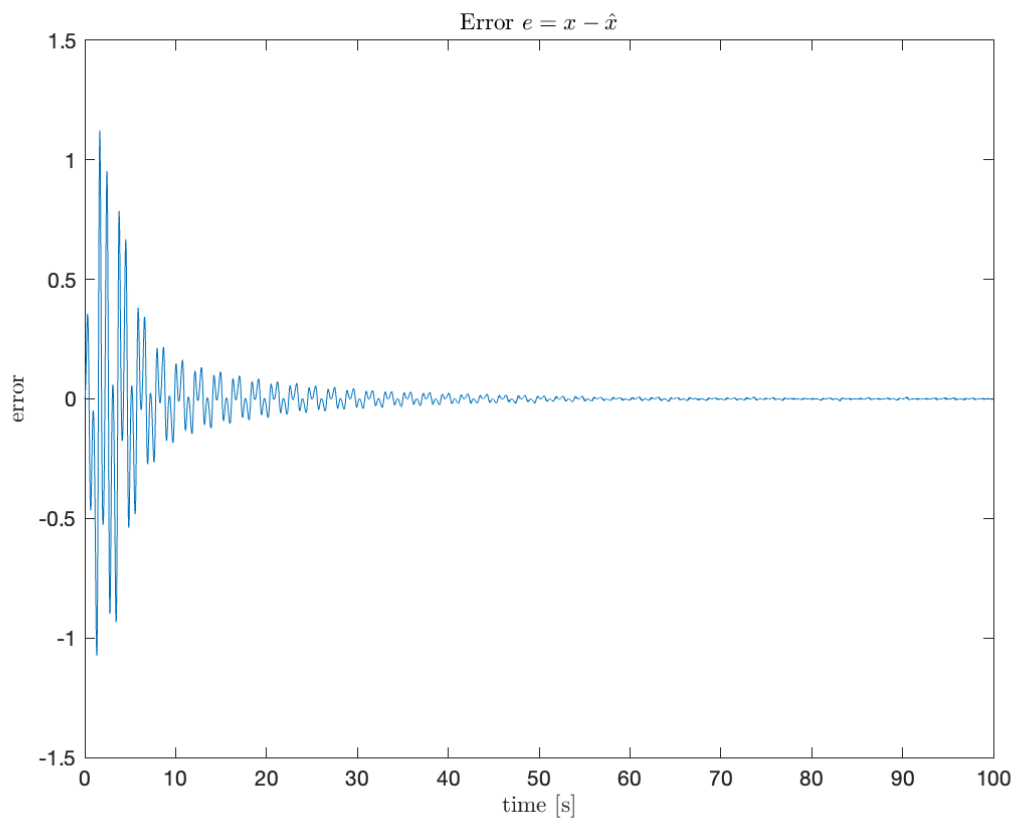
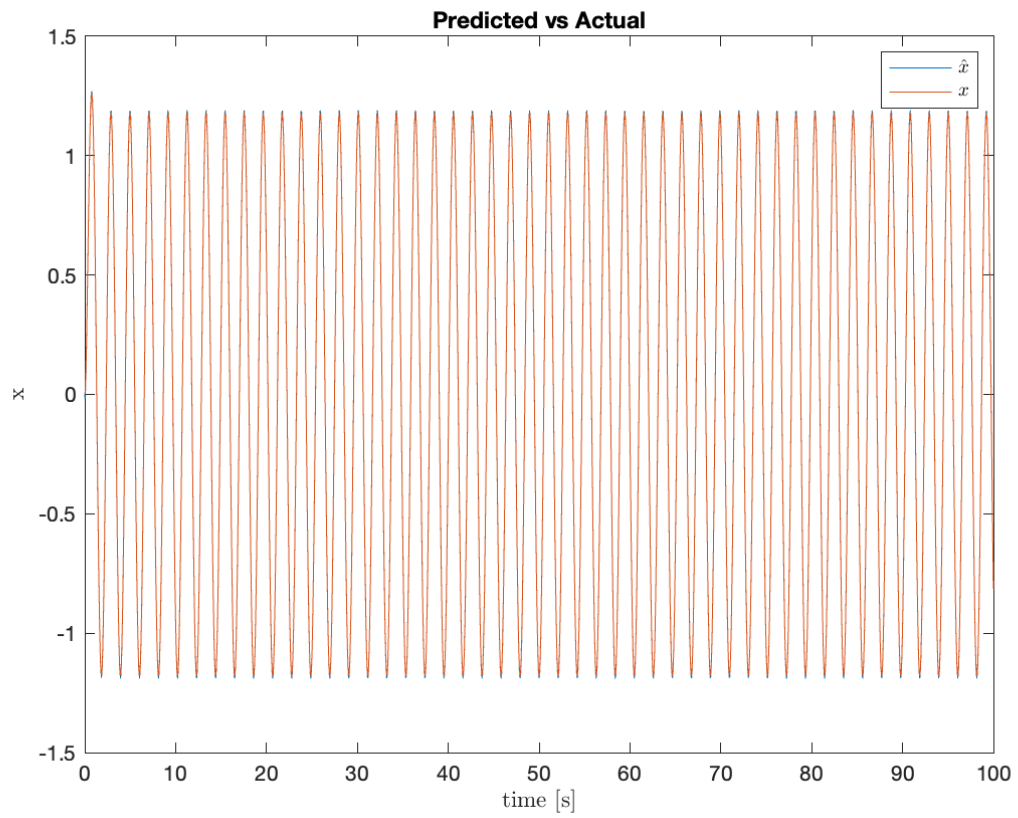


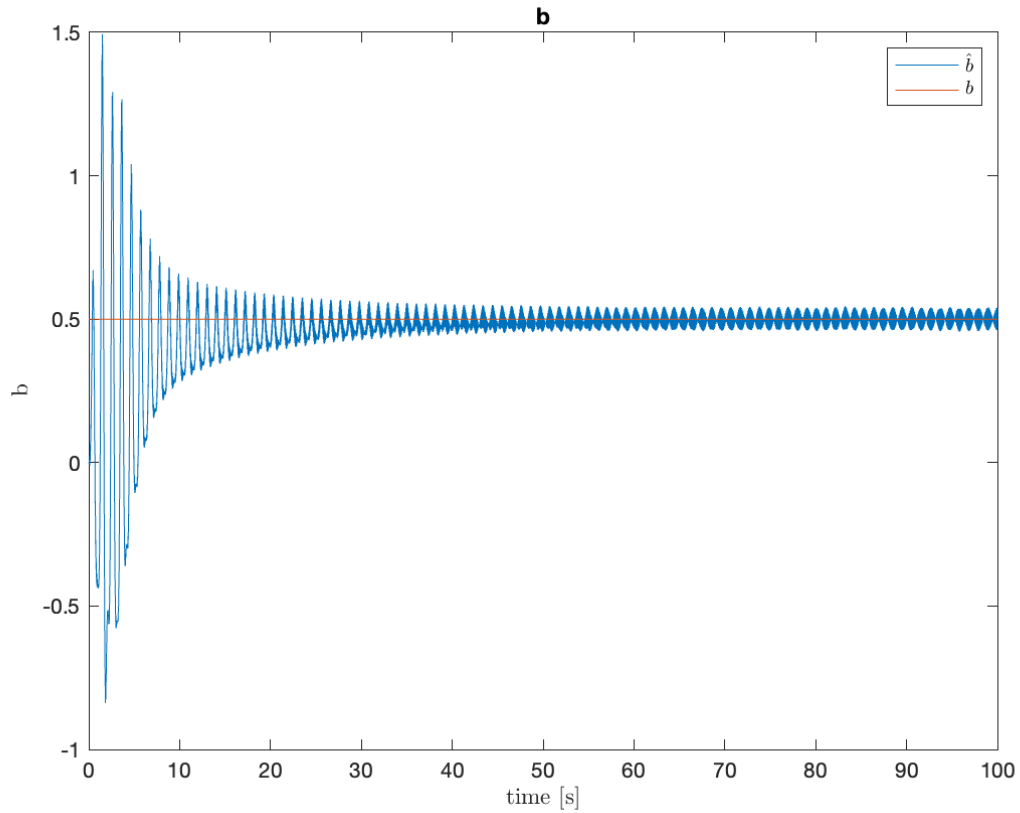
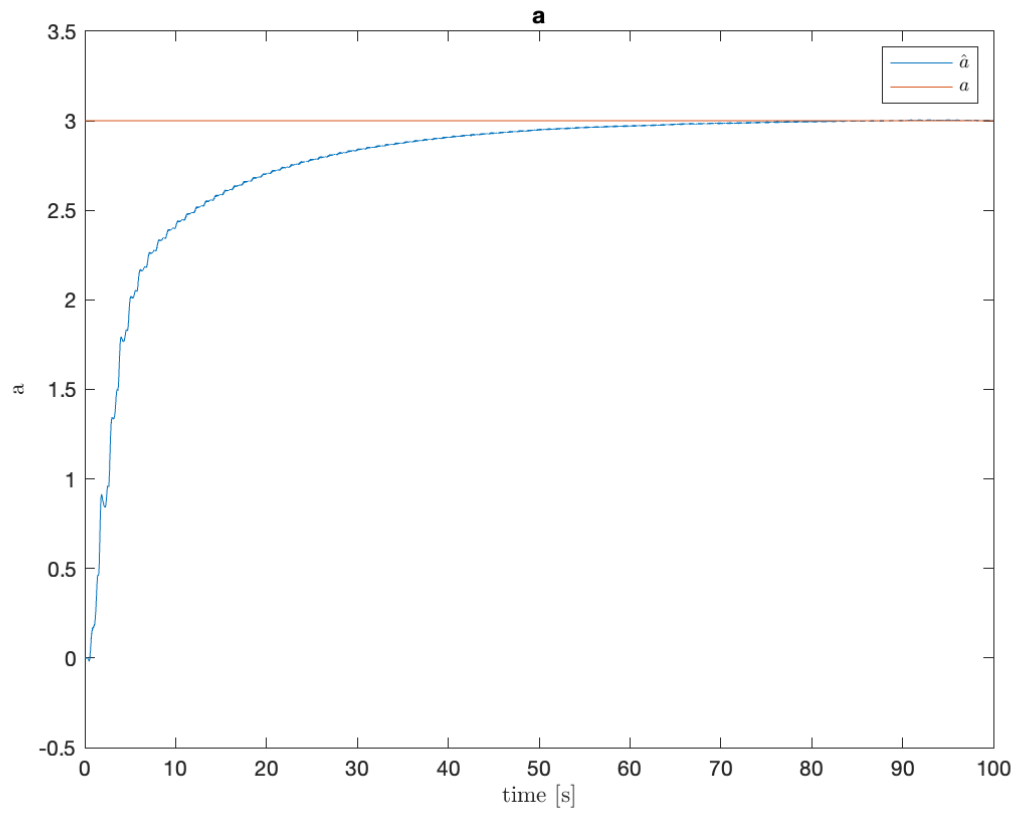


Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει το πλάτος του θορύβου αυξάνεται τόσο το σφάλμα όσο και το σφάλμα εκτιμήσεων των παραμέτρων, κάτι που είναι λογικό. Επίσης, στην παράλληλη δομή, που δίνει πιο ορθά αποτελέσματα από την μικτή, το σύστημα αργεί να συγκλίνει περισσότερο σε τιμές για τα \hat{a} , \hat{b} . Μάλιστα, για $n_0 \geq 2$ η ode45 δεν μπορεί να επιλύσει το πλέον πολύ άκαμπτο σύστημα.

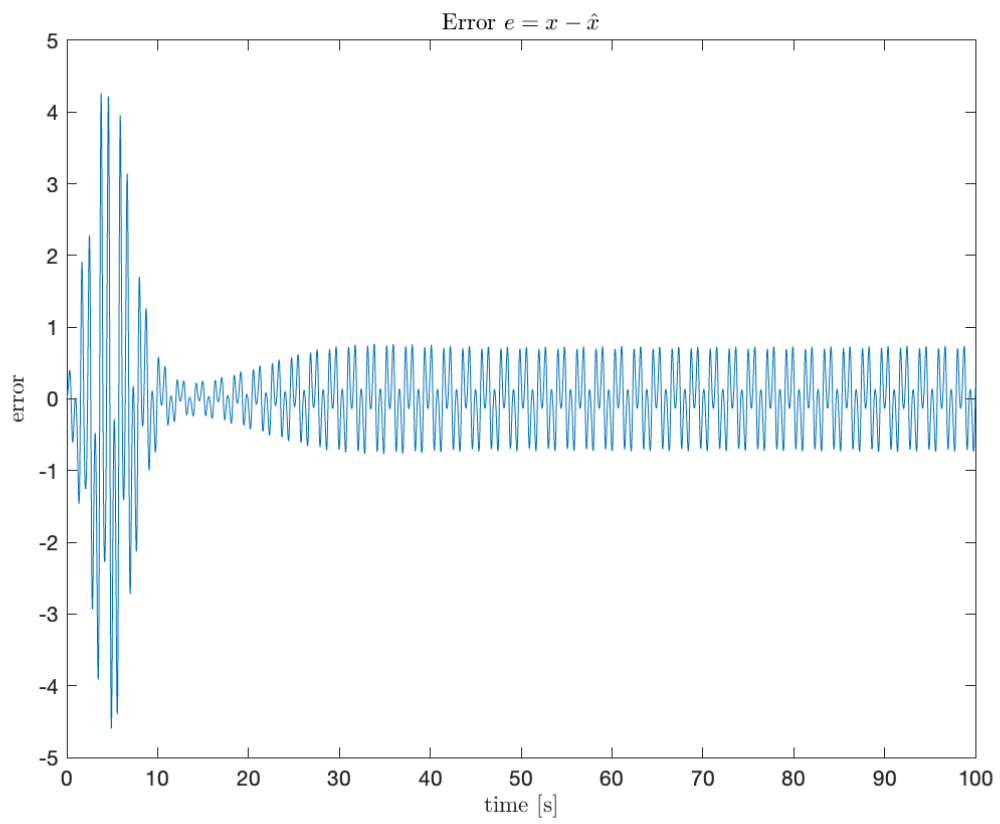
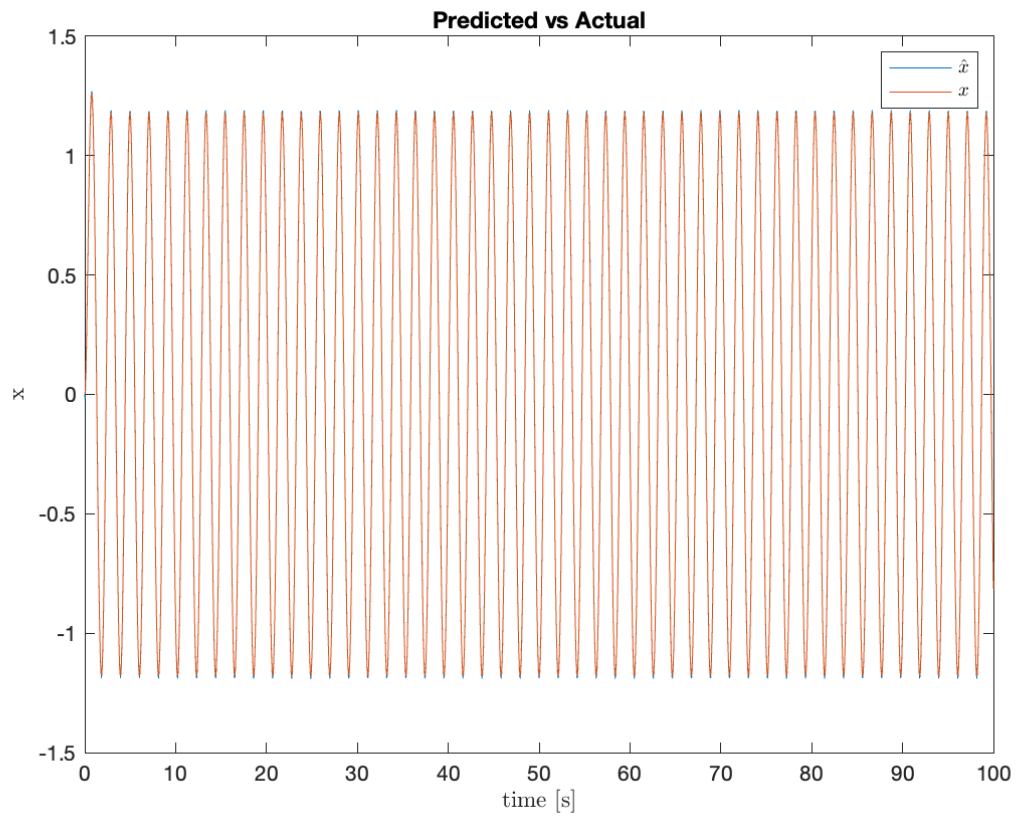
2.6 Μεταβολή της συχνότητας θορύβου

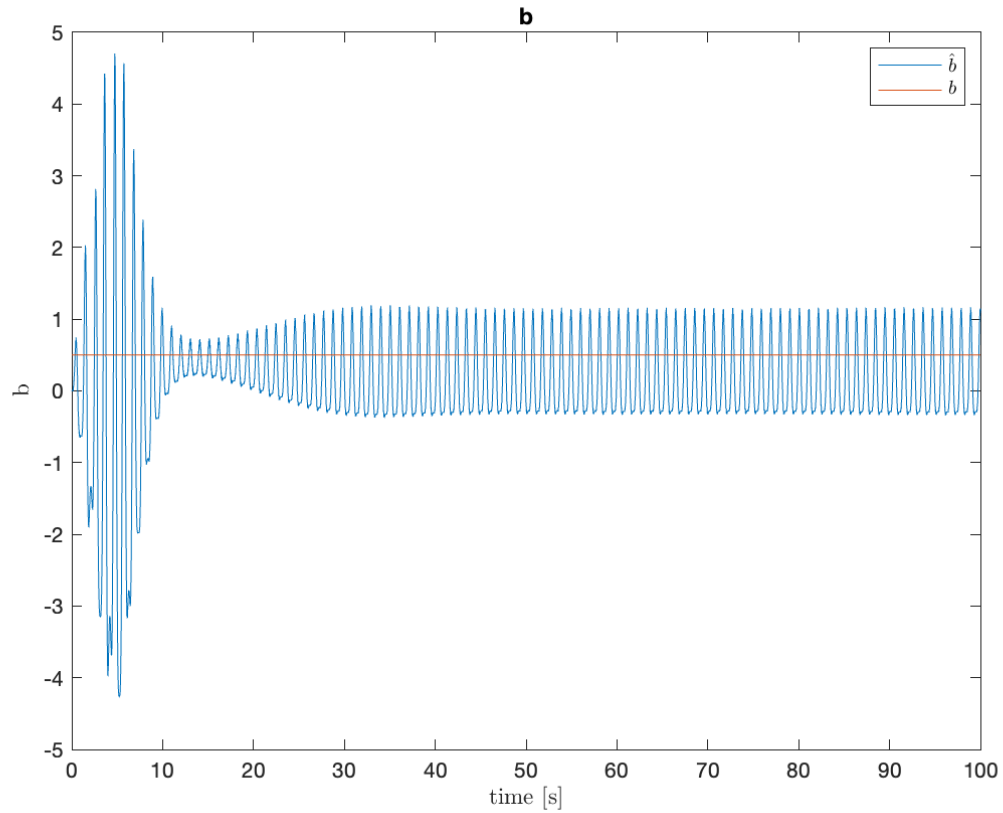
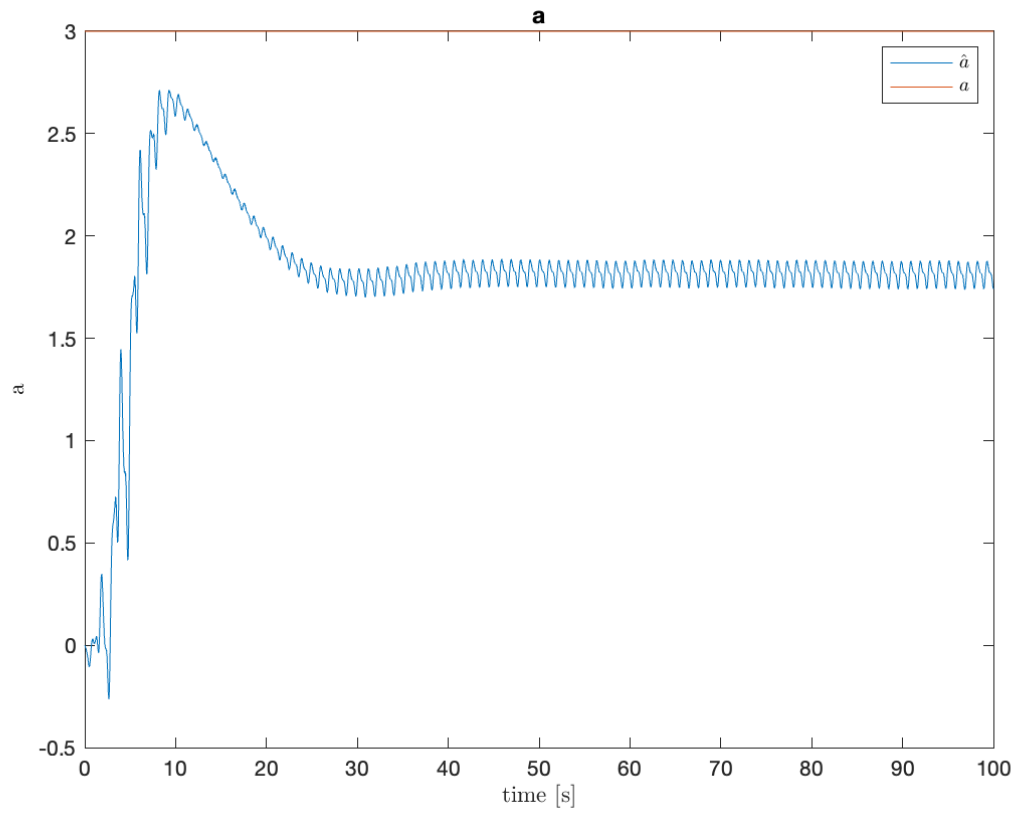
Σύμφωνα με την εκφώνηση, επαναλαμβάνουμε τις προσομοιώσεις μας με διαφορετικές τιμές για το f . Συγκεκριμένα, για $f = 20$ στην παράλληλη δομή:



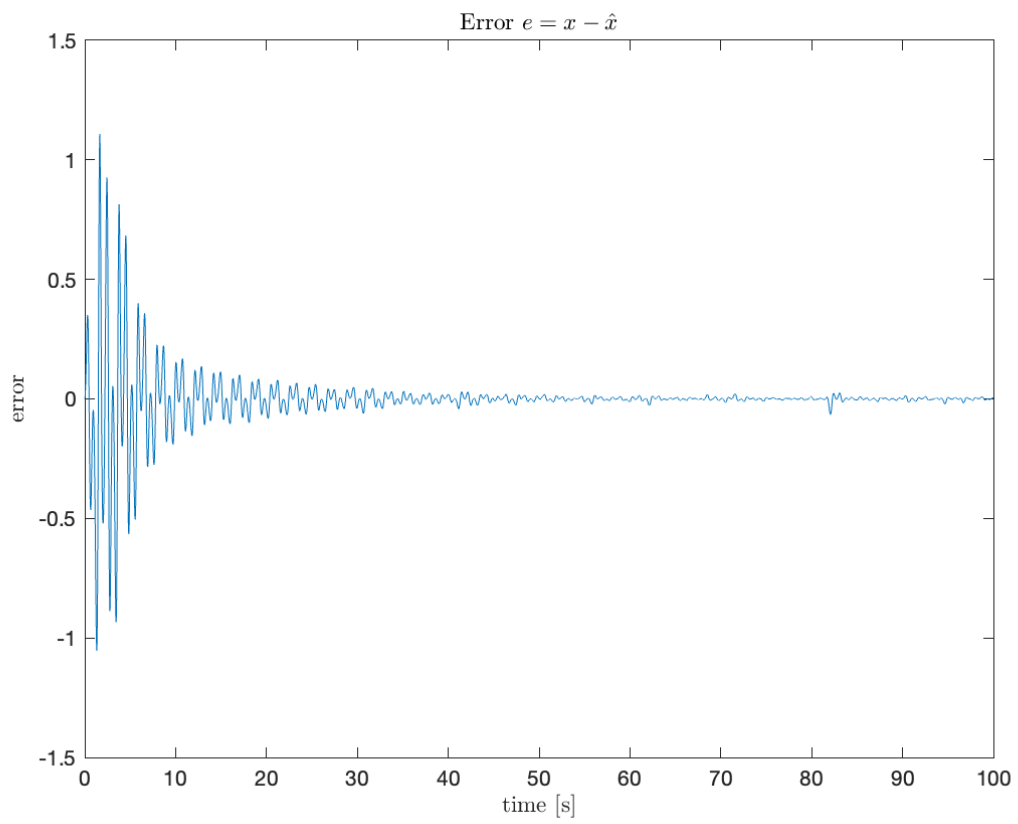
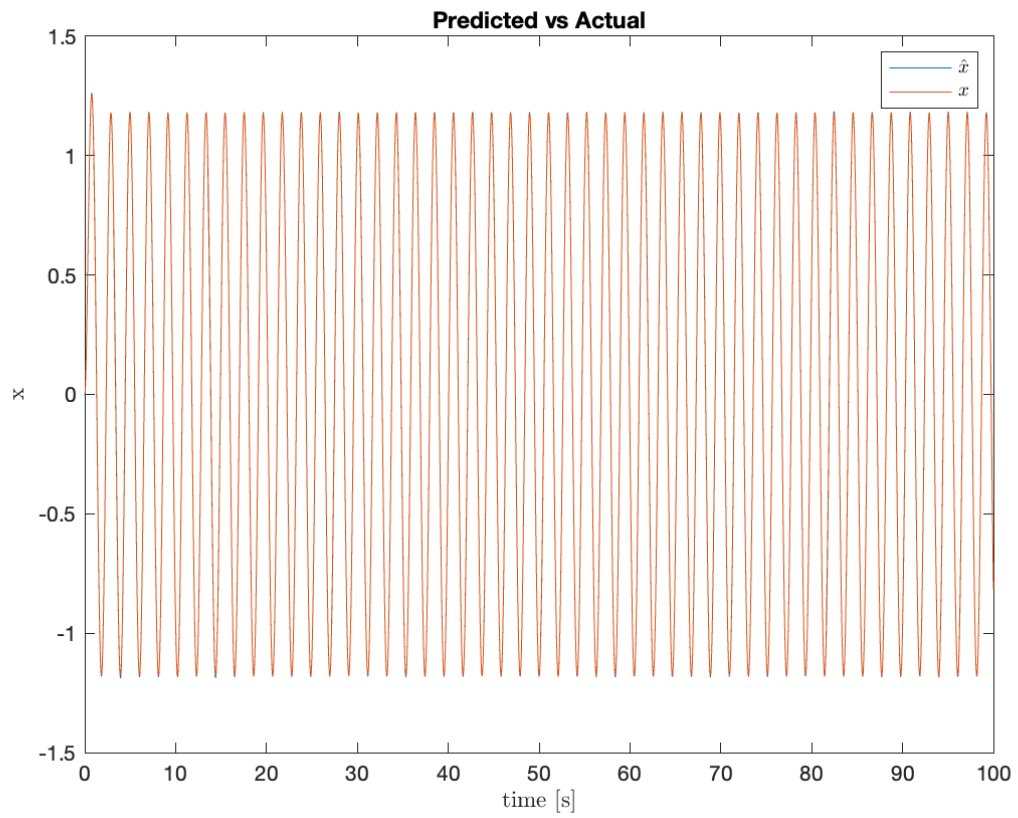


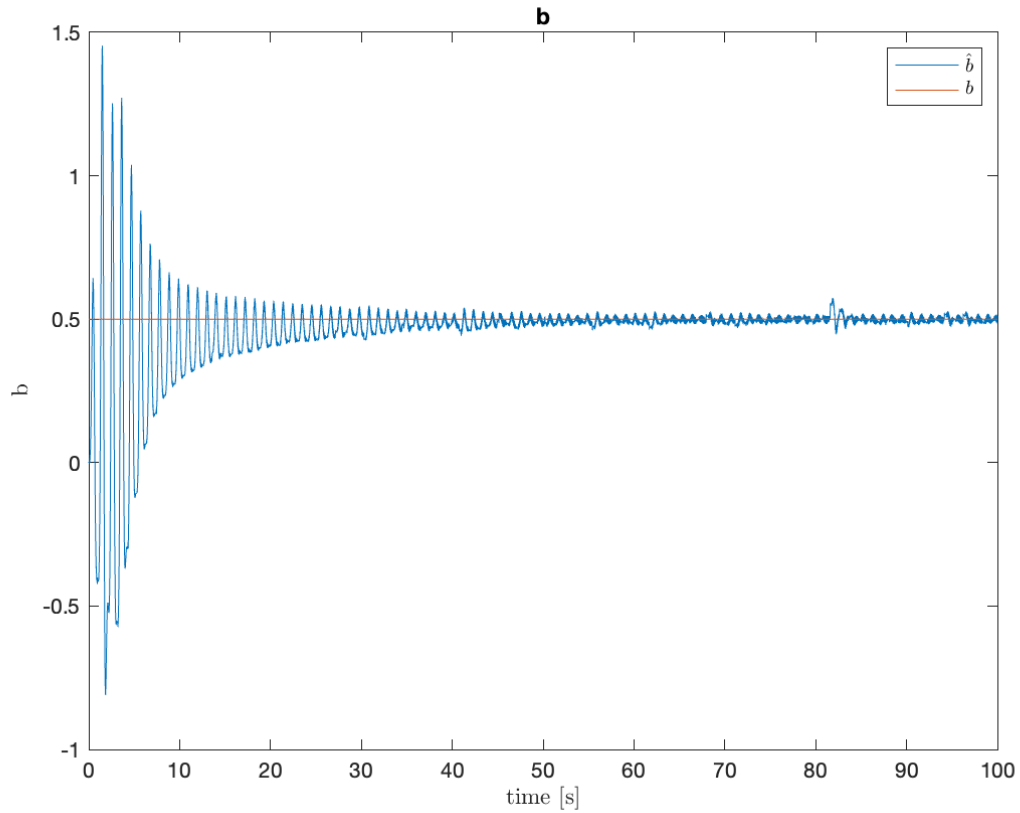
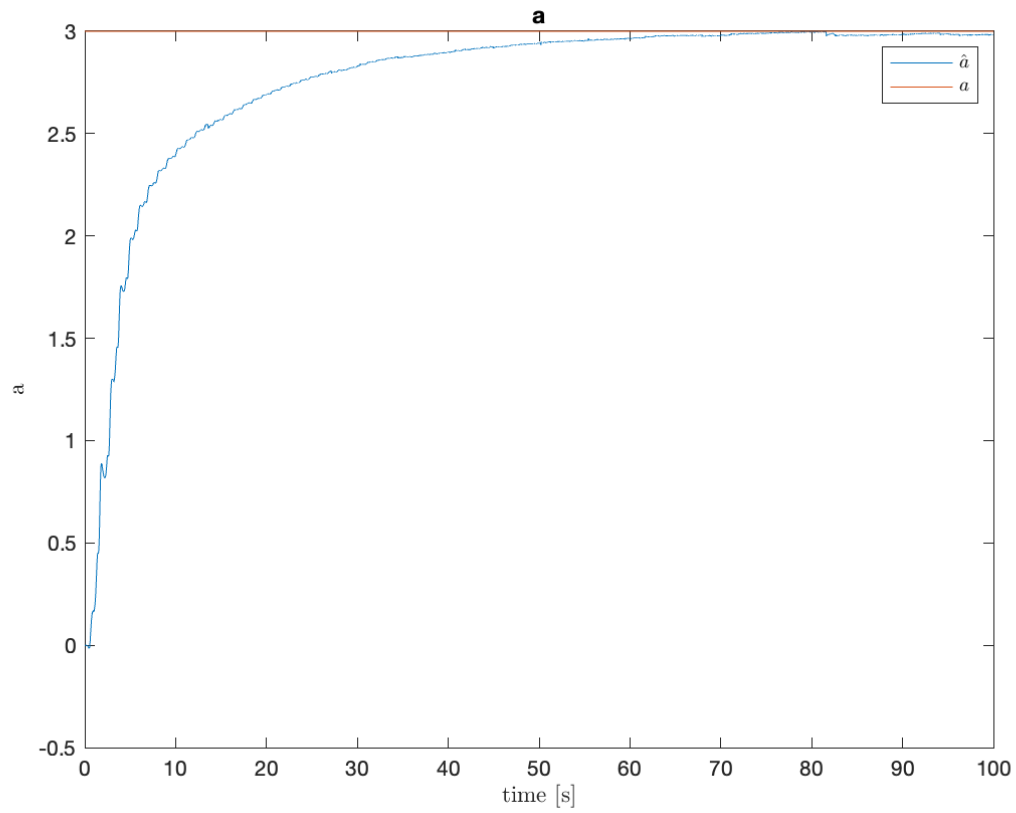
ενώ στην μικτή δομή:



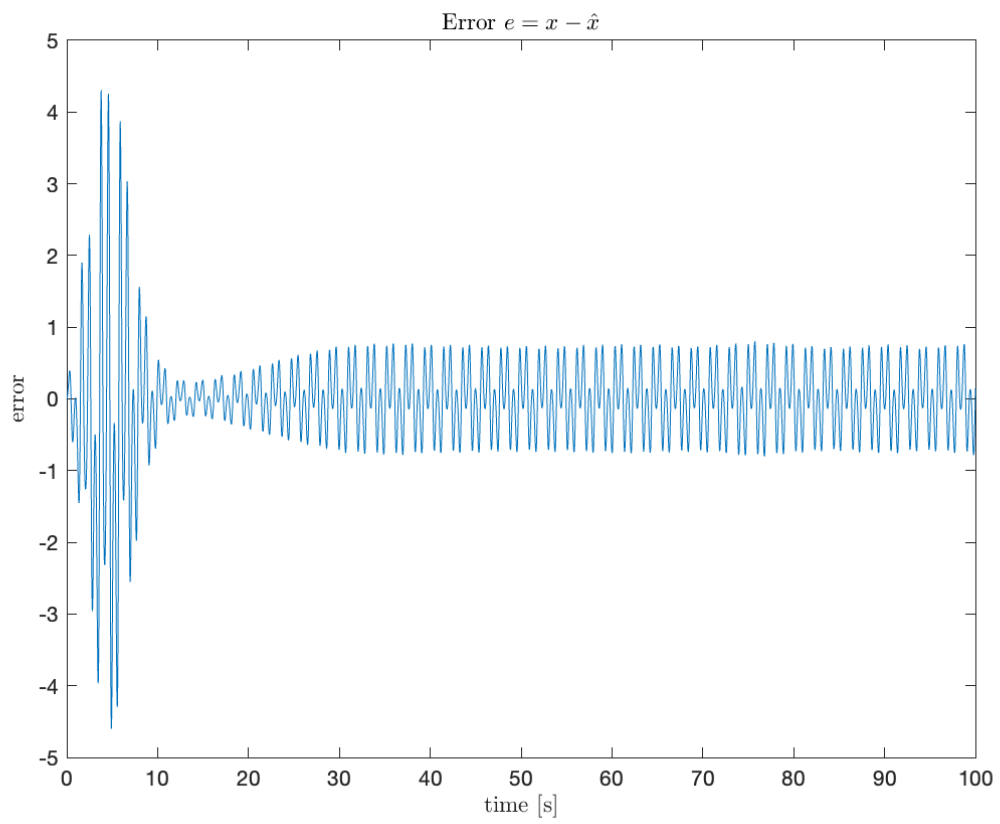
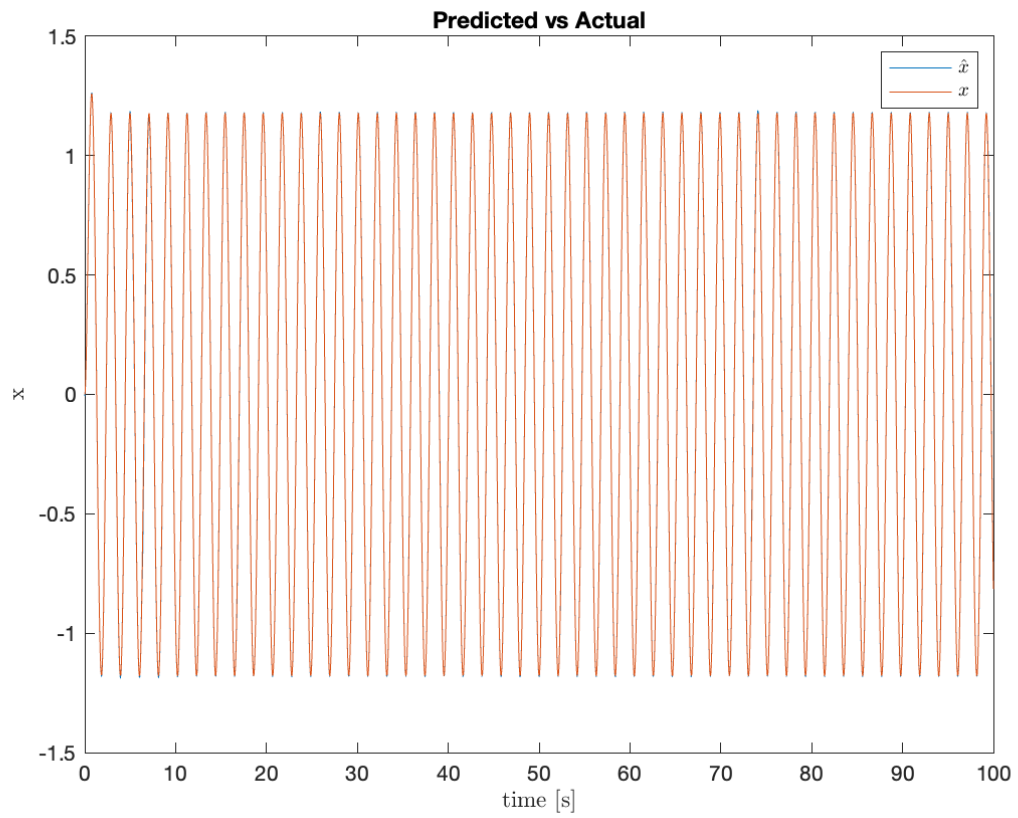


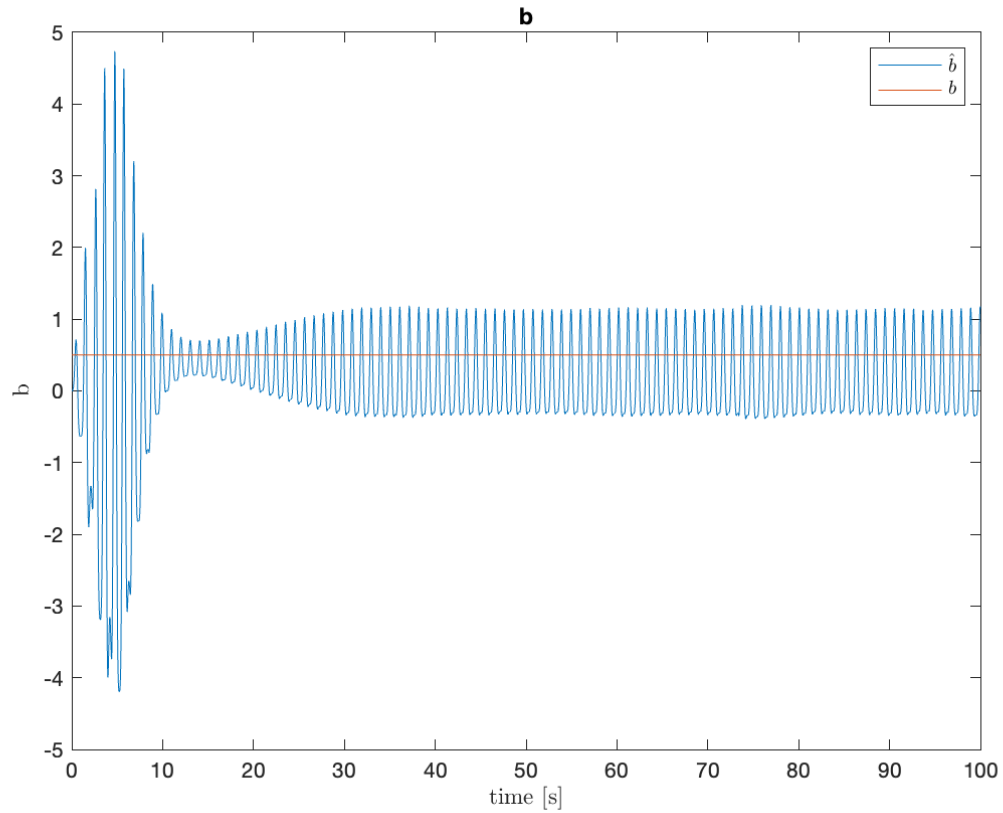
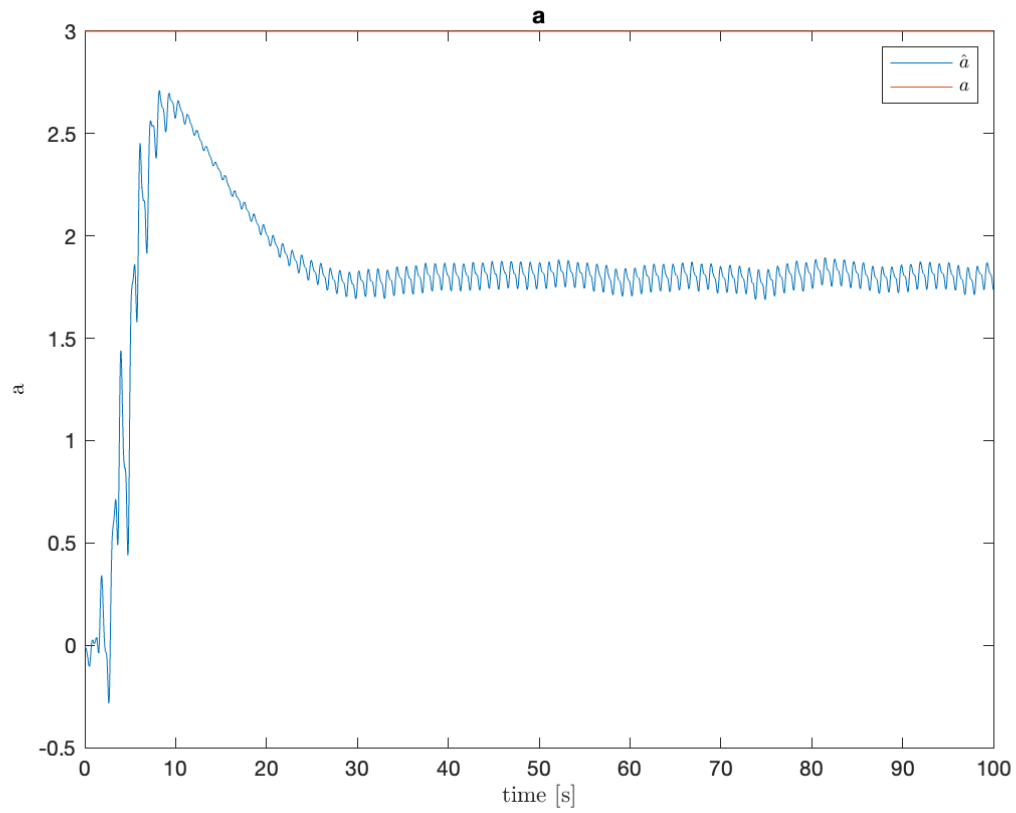
Αντίστοιχα, για $f = 60$ στην παράλληλη δομή:





και στην μικτή δομή:





Παρατηρούμε ότι όταν αυξάνουμε την συχνότητα του θορύβου, αυξάνεται αντίστοιχα

και η συχνότητα ταλαντώσεων των τιμών για τα \hat{a} , \hat{b} ενώ όταν μειώνεται, το σύστημα παρουσιάζει μεγαλύτερη σταθερότητα όσον αφορά τις τιμές αυτές, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι επηρεάζεται η ακρίβειά τους. Επίσης για μεγαλύτερη συχνότητα παρατηρούμε και μεγαλύτερες αποκλίσεις στο σφάλμα e .

Κεφάλαιο 3

Θέμα 3

3.1 Θεωρητική ανάλυση

Το σύστημα που μας δίνεται είναι το εξής:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(t) = 3.5\sin(7.2t) + 2\sin(11.7t) \quad (3.1)$$

με:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 & 3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Εφόσον μας ζητείται εκτιμητής πραγματικού χρόνου μικτής δομής με την μέθοδο σχεδίασης Lyapunov, το σύστημα αναγνώρισης ορίζεται ως εξής:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u + \hat{\Gamma}(x - \hat{x}) \quad (3.4)$$

με μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Ορίζουμε το σφάλμα αναγνώρισης ως εξής:

$$e = x - \hat{x} \quad (3.5)$$

Παραγωγίζοντας την 3.5, και με την χρήση των 3.1, 3.4, ισχύει:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Ax + Bu - \hat{A}\hat{x} - \hat{B}u - \hat{\Gamma}e \\ &= -\hat{\Gamma}e - \tilde{A}x - \tilde{B}u \end{aligned} \quad (3.6)$$

όπου οι πράξεις έχουν γίνει στην θεωρία κατ' αντιστοιχία και με τις πράξεις του θέματος 2, και έχουμε ορίσει:

$$\tilde{A} = \hat{A} - A \quad (3.7)$$

$$\tilde{B} = \hat{B} - B \quad (3.8)$$

Εφόσον ξέρουμε ότι στο σύστημά μας η είσοδος είναι φραγμένη (άθροισμα ημιτονοειδών σημάτων) και ότι ο A είναι αρνητικά ορισμένος, ξέρουμε πως το σύστημα είναι ευσταθές και πως θα έχουμε εκθετική σύγκλιση (απόδειξη Lyapunov από την θεωρία). Γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$\dot{\hat{A}} = ex^T \quad (3.9)$$

$$\dot{\hat{B}} = eu \quad (3.10)$$

Για να το αποδείξουμε, θεωρούμε την υποψήφια (θα αποδείξουμε πως είναι) συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}e^T e + \frac{1}{2}\text{tr}(\tilde{A}^T \tilde{A}) + \frac{1}{2}\text{tr}(\tilde{B}^T \tilde{B}) \quad (3.11)$$

όπως ακριβώς ορίζεται και στην θεωρία. Προφανώς ισχύει: $V \geq 0$, με $V = 0$ μόνο για $e = 0, \tilde{A} = 0, \tilde{B} = 0$.

Για την παράγωγο της συνάρτησης ισχύει(χρησιμοποιούμε τις δοσμένες από την θεωρία ιδιότητες του ίχνους ενός πίνακα):

$$\dot{V} = -\lambda e^T e + \text{tr}(\tilde{A}\dot{\hat{A}} + \tilde{B}\dot{\hat{B}} - \tilde{A}xe^T - \tilde{B}ue^T) \quad (3.12)$$

Αντικαθιστώντας στην 3.12 τις 3.9, 3.10, έχουμε:

$$\dot{V} = -\lambda e^T e \quad (3.13)$$

και άρα ισχύει $\dot{V} \leq 0$ (υπενθυμίζουμε ότι $\lambda > 0$). Σύμφωνα και με την θεωρία, ακολουθώντας τα παραδείγματα πρώτης τάξης αποδεικνύεται ότι έχουμε εκθετική σύγκλιση των \tilde{A}, \tilde{B} στα A, B αντίστοιχα.

Επομένως, αν αναλύσουμε το συνολικό σύστημα εξισώσεων που καλούμαστε να προσομοιώσουμε, είναι το εξής:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u \quad (3.14)$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u \quad (3.15)$$

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{a}_{11}\hat{x}_1 + \hat{a}_{12}\hat{x}_2 + \hat{b}_1u + \hat{\lambda}e_1 \quad (3.16)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \hat{a}_{21}\hat{x}_1 + \hat{a}_{22}\hat{x}_2 + \hat{b}_2u + \hat{\lambda}e_2 \quad (3.17)$$

$$\dot{\hat{a}}_{11} = e_1x_1 \quad (3.18)$$

$$\dot{\hat{a}}_{12} = e_1x_2 \quad (3.19)$$

$$\dot{\hat{a}}_{21} = e_2x_1 \quad (3.20)$$

$$\dot{\hat{a}}_{22} = e_2x_2 \quad (3.21)$$

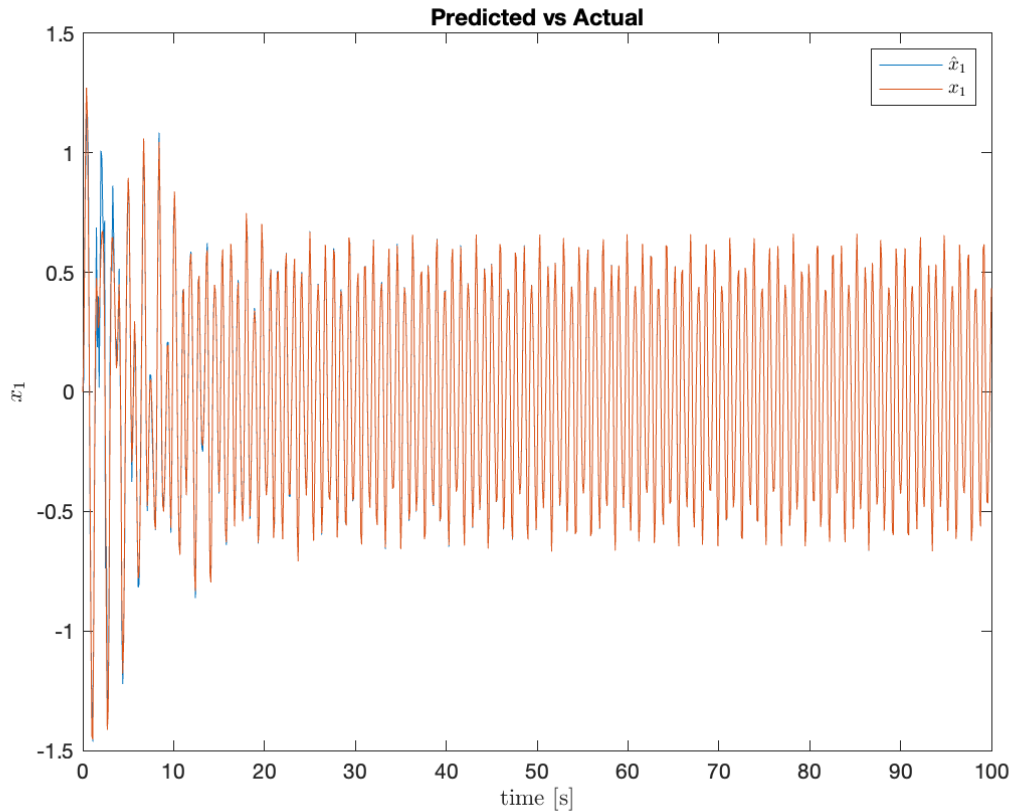
$$\dot{\hat{b}}_1 = e_1u \quad (3.22)$$

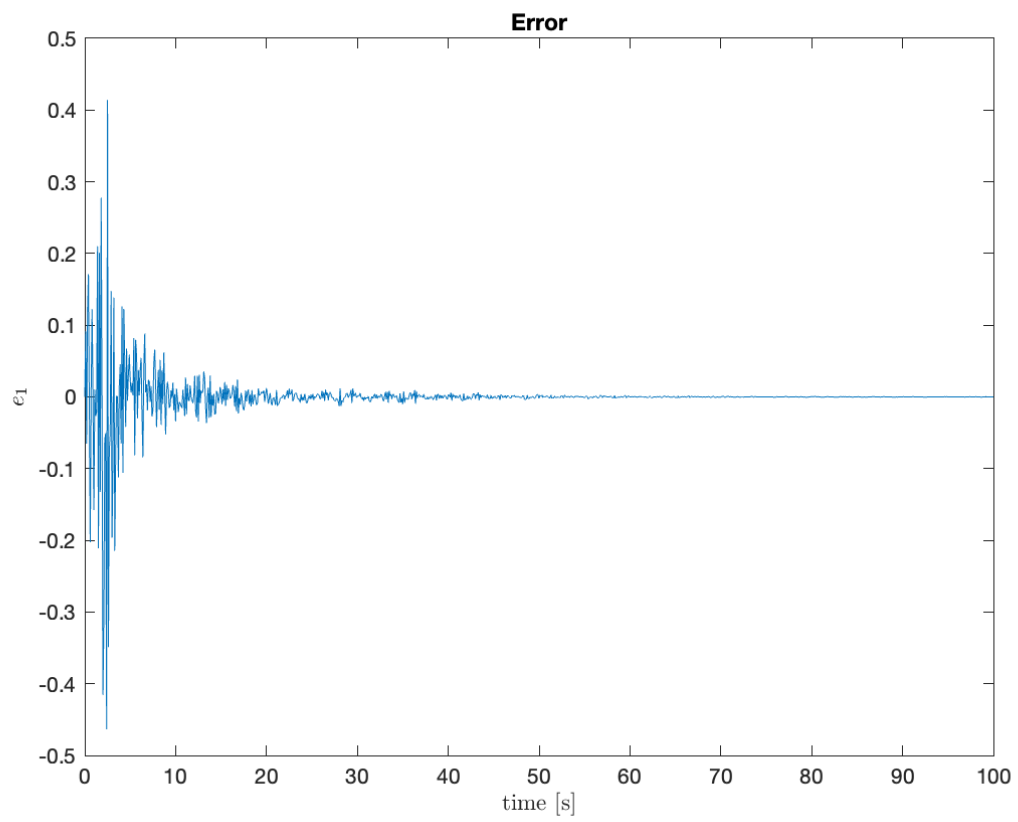
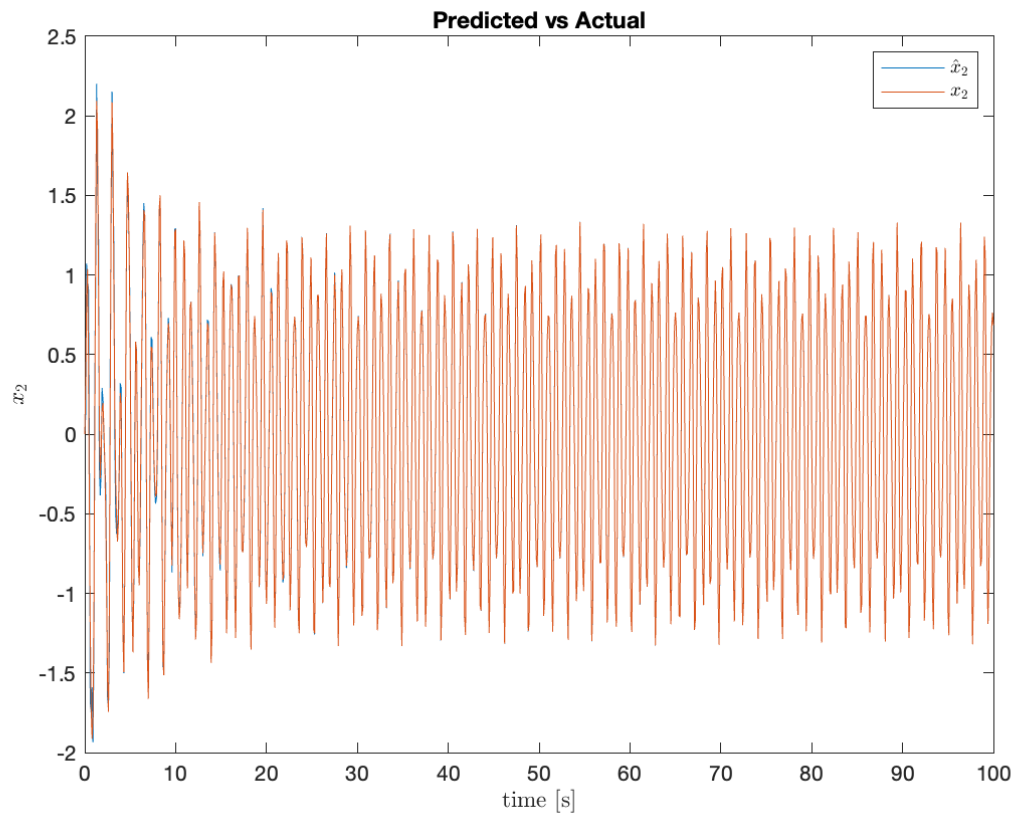
$$\dot{\hat{b}}_2 = e_2u \quad (3.23)$$

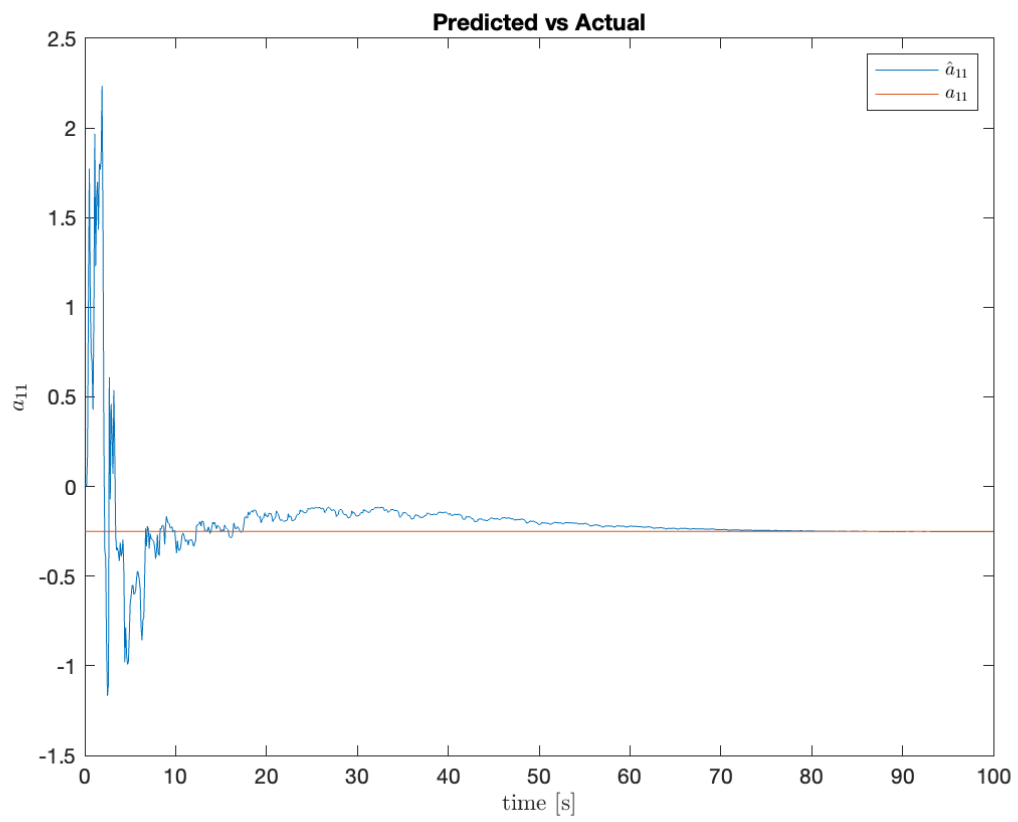
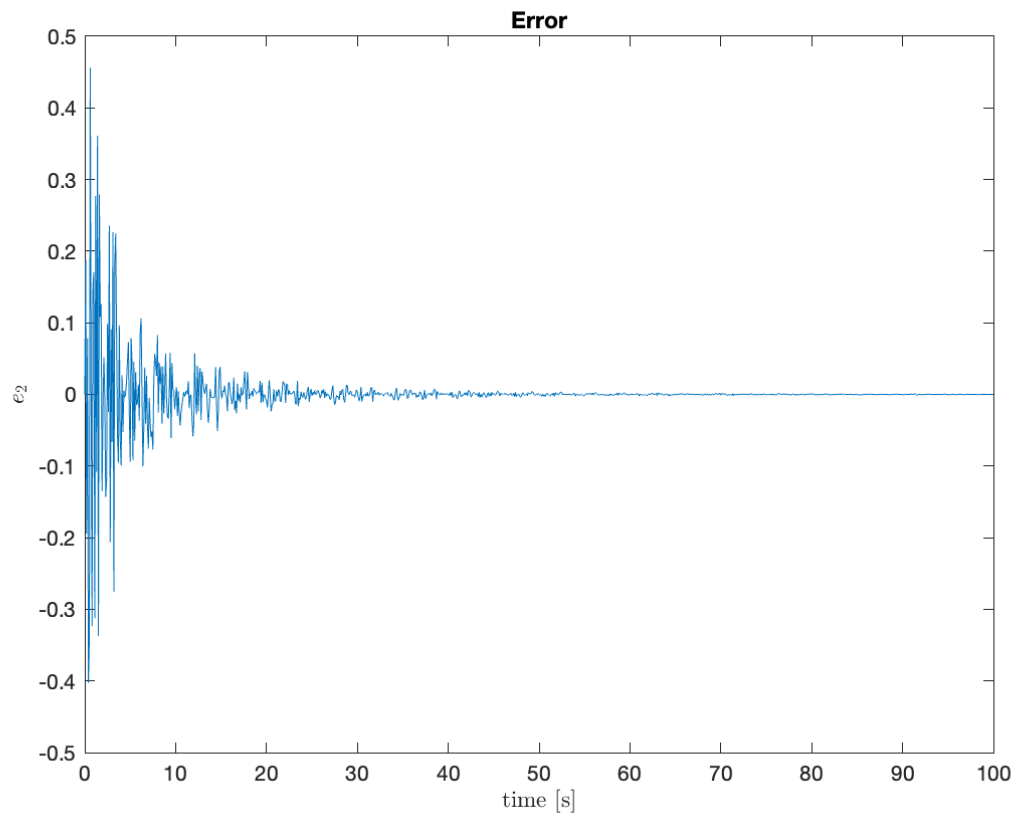
$$(3.24)$$

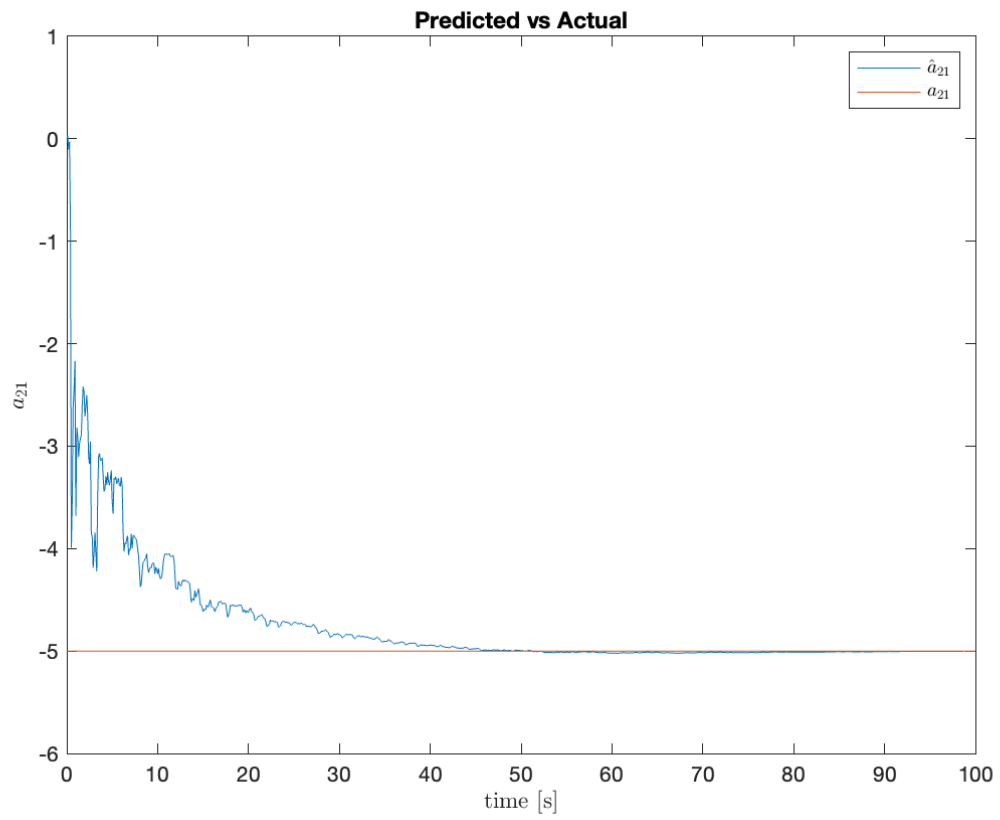
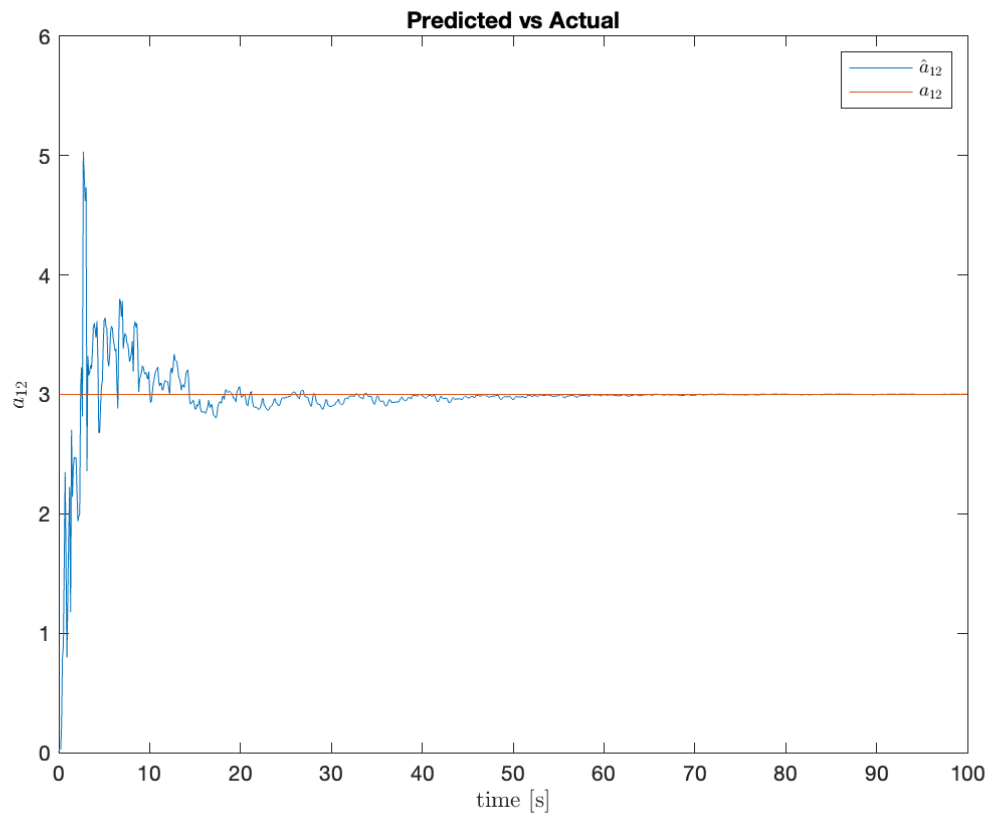
3.2 Αποτελέσματα προσομοίωσης

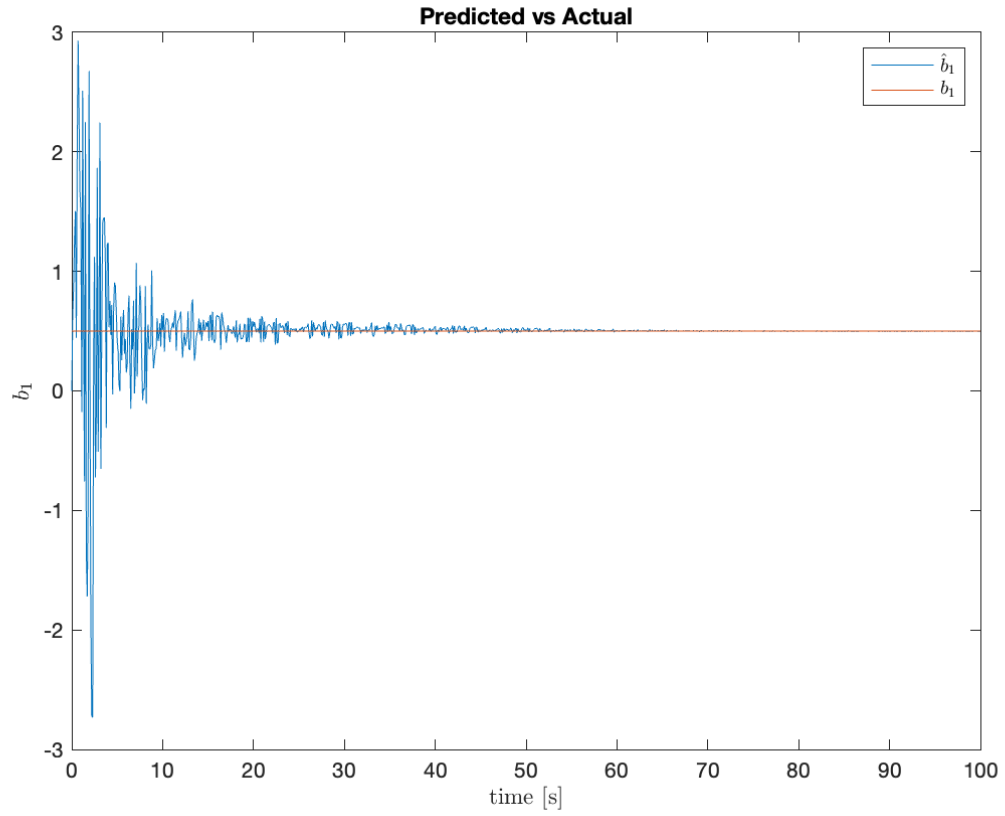
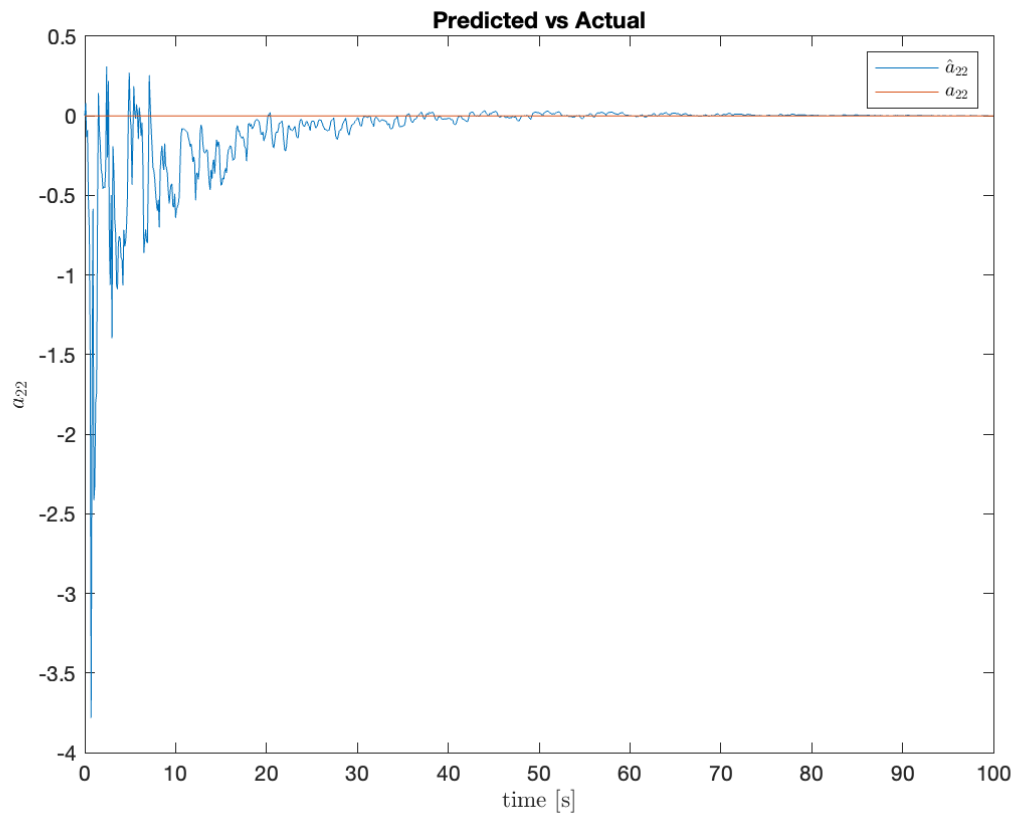
Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης, για $\hat{\lambda} = 1, \gamma = 50$ φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα. Οι τιμές των παραμέτρων βρέθηκαν μετά από πολλές δοκιμές με κριτήριο την ελαχιστοποίηση του σφάλματος του συστήματος. Για την προσομοίωση χρησιμοποιούνται τα αρχεία κώδικα MATLAB `u.m`, `real_system.m`, `simulated_system.m` και `main.m`.

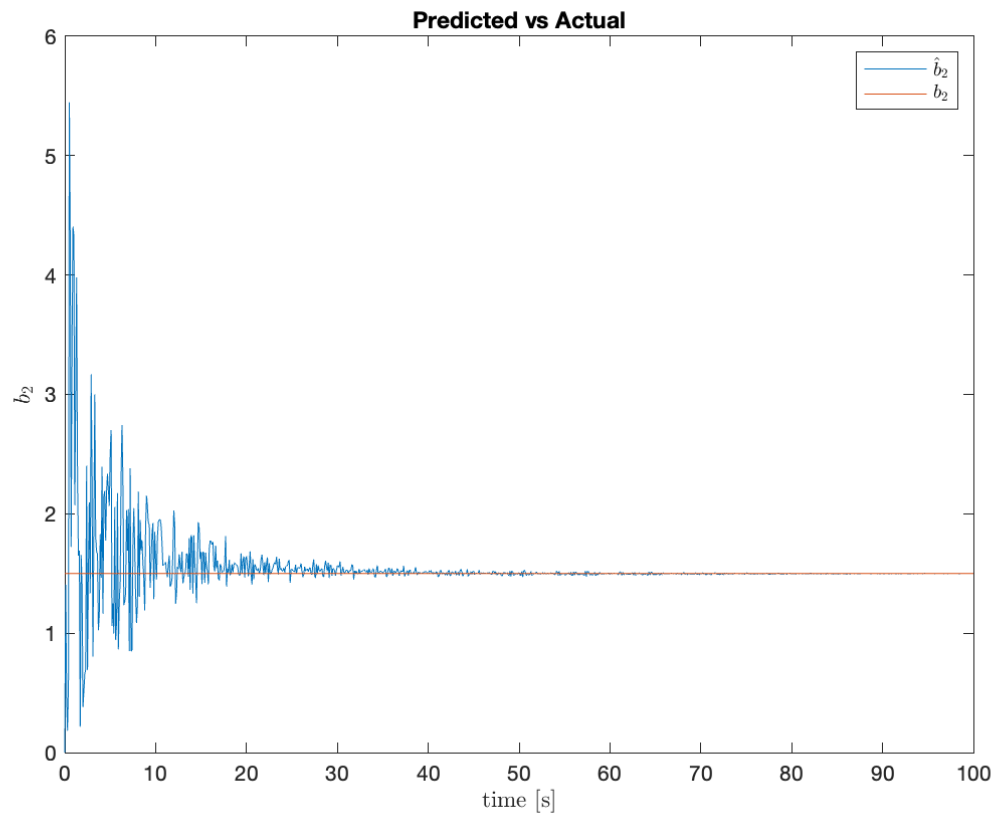












Bibliography

- [1] G. A. Rovithakis, *MODELLING AND SIMULATION OF SYSTEMS*, 2004.