



Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Ηλεκτρονικής και Υπολογιστών

Εργασία 1 στην προσωμοίωση και μοντελοποίηση δυναμικών συστημάτων

Εργασία του
Φώτη Αλεξανδρίδη, ΑΕΜ: 9953
faalexandr@ece.auth.gr

31 Μαρτίου 2023

Περιεχόμενα

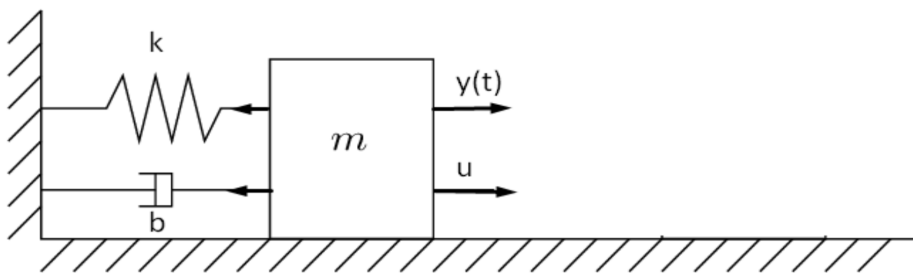
1 Θέμα 1	2
1.1 Θεωρητική ανάλυση	2
1.2 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων	4
1.3 Προσομοίωση	5
2 Θέμα 2	7
2.1 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων	9
2.2 Εκτίμηση παραμέτρων με σφάλματα	17
Bibliography	23

Κεφάλαιο 1

Θέμα 1

1.1 Θεωρητική ανάλυση

Το σύστημα όπως μας δίνεται είναι το ακόλουθο :



Από την δυναμική του συστήματος ισχύει :

$$\Sigma F = m\ddot{y} \Leftrightarrow \quad (1.1)$$

$$m\ddot{y} = -b\dot{y} - ky + u \Leftrightarrow \quad (1.2)$$

$$\ddot{y} = -\frac{b}{m}\dot{y} - \frac{k}{m}y + \frac{1}{m}u \quad (1.3)$$

Ορίζοντας:

$$\partial^* = \left[\frac{b}{m} \quad \frac{k}{m} \quad \frac{1}{m} \right]^T \quad (1.4)$$

$$\Delta = \left[-\dot{y} \quad -y \quad u \right]^T \quad (1.5)$$

Η 1.3 γίνεται :

$$\ddot{y} = \partial^{*T} \Delta \quad (1.6)$$

Σύμφωνα με τους περιορισμούς της άσκησης, η 1.6 είναι αδύνατο να κατασκευαστεί, καθώς δεν μπορούμε να έχουμε μετρήσεις παραγώγων. Προς αποφυγή της ύπαρξης

των παραγώγων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ευσταθές φίλτρο 2ης τάξης $\frac{1}{\Lambda(s)}$, με $\Lambda(s) = s^2 + \hat{\eta}_1 s + \hat{\eta}_2$ (όπου ευσταθές αποδεικνύεται ότι τα $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2$ ομόσημα του συντελεστή του s^2 , δηλαδή θετικά).

Περνώντας και τα δύο μέλη της 1.6 από το φίλτρο, μετατρέπεται στην:

$$z = \partial^{*T} \zeta \quad (1.7)$$

με:

$$z = \frac{1}{\Lambda(s)} \ddot{y} = \frac{s^2}{\Lambda(s)} y \quad (1.8)$$

$$\zeta = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta_1(s)}{\Lambda(s)} y & \frac{1}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{s}{\Lambda(s)} y & \frac{1}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{s}{\Lambda(s)} y & -\frac{1}{\Lambda(s)} y & \frac{1}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Θεωρώντας:

$$\hat{\eta} = \begin{bmatrix} \hat{\eta}_1 & \hat{\eta}_2 \end{bmatrix}^T \Rightarrow \Lambda(s) = s^2 + \hat{\eta}^T \Delta_1(s) \quad (1.10)$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} z &= \frac{s^2}{\Lambda(s)} y = \frac{\Lambda(s) - \hat{\eta}^T \Delta_1(s)}{\Lambda(s)} y = y - \frac{\hat{\eta}^T \Delta_1(s)}{\Lambda(s)} y \Leftrightarrow \\ y &= z + \frac{\hat{\eta}^T \Delta_1(s)}{\Lambda(s)} y \end{aligned} \quad (1.11)$$

Σύμφωνα με την θεωρία ισχύει:

$$\zeta = \partial_1^{*T} \zeta_1 + \partial_2^{*T} \zeta_2 \quad (1.12)$$

με:

$$\partial_1^* = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} & \frac{k}{m} \end{bmatrix}^T \quad (1.13)$$

$$\partial_2^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \end{bmatrix}^T \quad (1.14)$$

$$\zeta_1 = -\frac{\Delta_1(s)}{\Lambda(s)} y \quad (1.15)$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{\Lambda(s)} u \quad (1.16)$$

Οπότε τελικά ισχύει:

$$y = \partial_1^{*T} \zeta_1 + \partial_2^{*T} \zeta_2 + (-\hat{\eta}^T \zeta_1) \Leftrightarrow y = \partial_{\hat{\eta}}^T \zeta \quad (1.17)$$

με:

$$\partial_{\hat{\theta}} = \begin{bmatrix} (\partial_1^{*T} - \hat{\theta}^T) & \partial_2^{*T} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} - \hat{\theta}_1 & \frac{k}{m} - \hat{\theta}_2 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}^T \quad (1.18)$$

όπου και έχουμε καταλήξει στην τελική παραμετροποίηση.

Βλέπουμε ότι ενώ αρχικά οι παράμετροι που περιγράφουν το σύστημα μας πλήρως είναι 3 (που συμφωνεί με το $n + m + 1, (n = 2, m = 0)$), φτάσαμε σε μια μορφή που απαιτούνται 5 παράμετροι μαζί με τις τιμές του φίλτρου, που συμφωνεί με βάση την θεωρία με τον τύπο $2n + m + 1, (n = 2, m = 0)$. Οι παράμετροι του φίλτρου πρέπει να οριστούν ως μικρές τιμές, διότι το σύστημά μας ως μηχανικό σύστημα έχει χαμηλή συχνότητα ταλάντωσης και πρέπει οι πόλοι του φίλτρου να βρίσκονται κοντά στον φανταστικό άξονα. Στην ενότητα της προσομοίωσης αναφέρεται η διαδικασία με την οποία επιλέγονται οι τιμές.

1.2 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Για δοσμένα $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ (η άσκηση μας λέει να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους m, b, k) σχεδιάζουμε τον αλγόριθμο ελαχίστων τετραγώνων για την εύρεση των m, b, k .

Αρχικά παίρνουμε τον σφάλμα και την νόρμα του, που από την θεωρία [1] ορίζονται ως εξής:

$$e = y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - \partial_{\hat{\theta}}^T \zeta(t) \quad (1.19)$$

$$l(e) = \frac{1}{2} e^2 \quad (1.20)$$

Το κριτήριο ελαχιστοποίησης είναι το εξής (σύμφωνα και με την θεωρία):

$$\begin{aligned} V_n(\partial_{\hat{\theta}}) &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N l(e) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{(y(t) - \partial_{\hat{\theta}}^T \zeta(t))^2}{2} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{y^2(t)}{2} + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{\partial_{\hat{\theta}}^T \zeta(t) \zeta^T(t) \partial_{\hat{\theta}}}{2} - \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \partial_{\hat{\theta}}^T \zeta(t) y(t) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Για ελαχιστοποίηση θα πρέπει:

$$\left. \frac{\partial V_N(\partial_{\hat{\theta}})}{\partial \partial_{\hat{\theta}}} \right|_{\partial_{\hat{\theta}} = \partial_0} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N N \zeta(t) \zeta^T(t) \right) \partial_0 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N N \zeta(t) y(t) \Leftrightarrow A \partial_0 = B \quad (1.22)$$

με:

$$A = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N N \zeta(t) \zeta^T(t) \quad (1.23)$$

$$B = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N N \zeta(t) y(t) \quad (1.24)$$

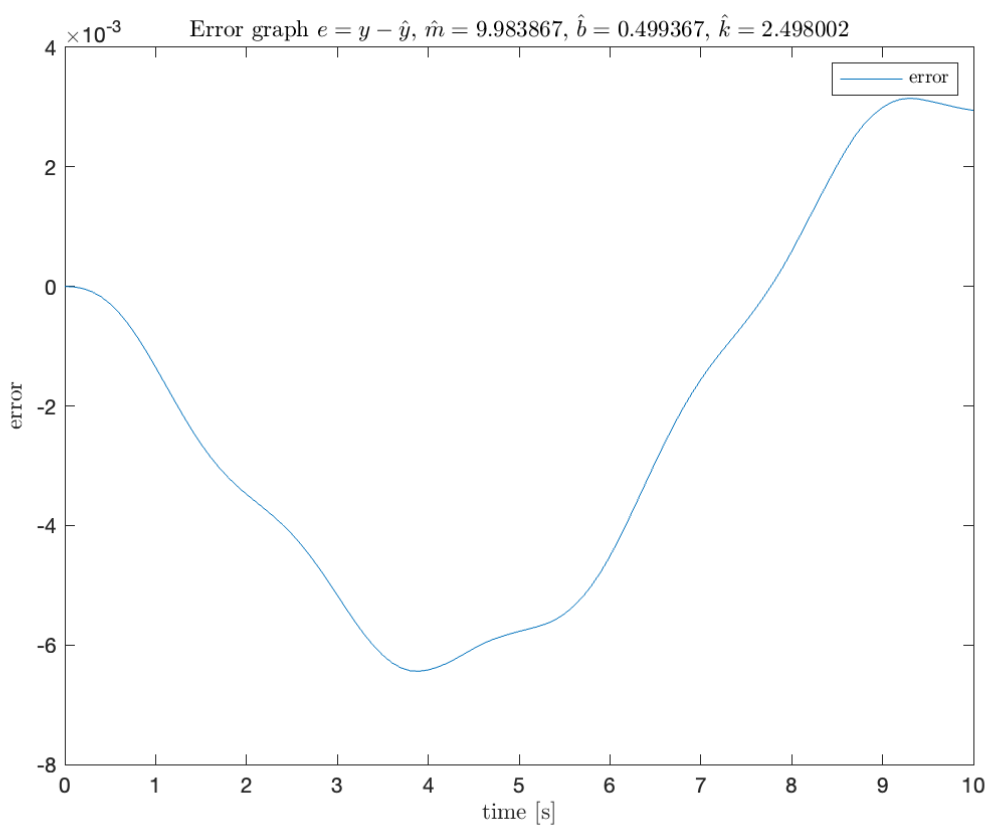
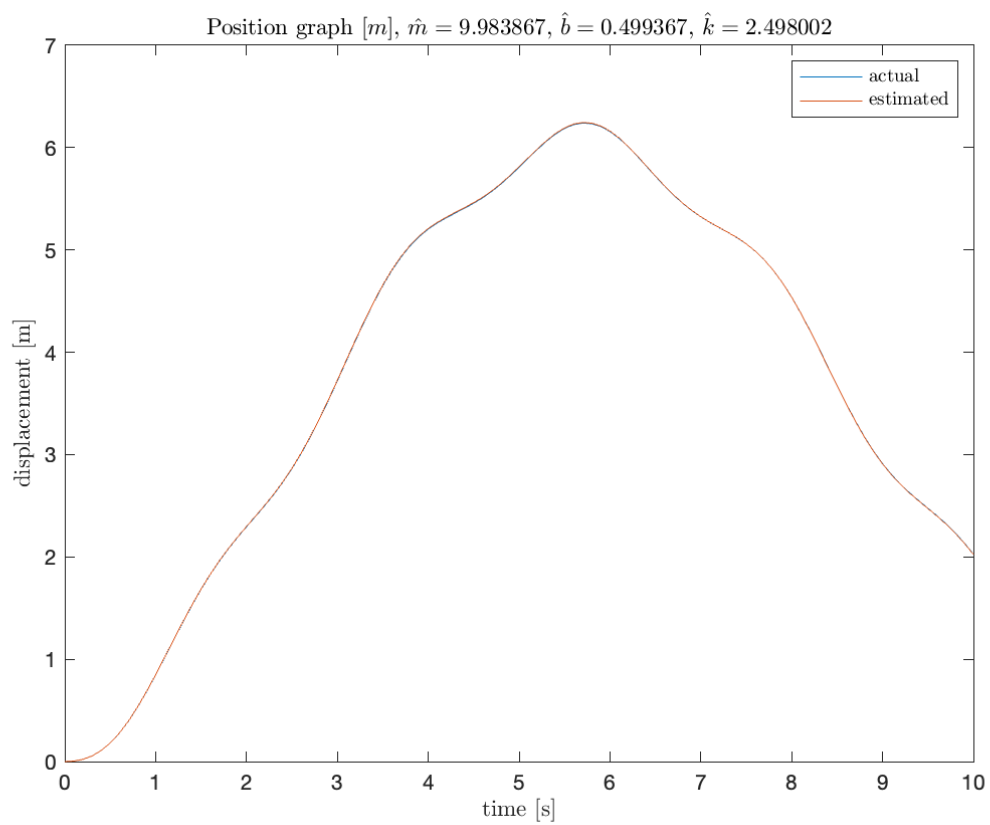
οπότε επιλύοντας το γραμμικό σύστημα βρίσκουμε τις τιμές του βέλτιστου διανύσματος $\theta_{\hat{\eta}} = \theta_0$ κι από εκεί με βάση τον ορισμό του (σχέση 1.18) και τις παραμέτρους $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2$ που έχουμε επιλέξει, βρίσκουμε τις ζητούμενες παραμέτρους m, b, k .

1.3 Προσομοίωση

Για την υλοποίηση της προσομοίωσης χρησιμοποιούνται 4 αρχεία πηγαίου κώδικα MATLAB που βρίσκονται στον φάκελο `code/part_1`. Στο αρχείο `u.m` υλοποιείται η συνάρτηση που επιστρέφει την εξωτερική δύναμη u . Στο αρχείο `spring_system.m` υλοποιείται η συνάρτηση που δέχεται τις 3 παραμέτρους του συστήματος και μοντελοποιεί το σύστημα ώστε να προσομοιωθεί με την βοήθεια μιας συνάρτησης `ode`. Στο αρχείο `least_squares_estimate.m` είναι γραμμένη η συνάρτηση η οποία, παίρνοντας ως είσοδο τις παραμέτρους $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2$ υλοποιεί τον αλγόριθμο ελαχίστων τετραγώνων και επιστρέφει τις παραμέτρους m, b, k . Τέλος, το script `main.m` συνδυάζει όλα τα παραπάνω αρχεία ορίζοντας παραμέτρους φίλτρου, εκτιμώντας τις παραμέτρους του συστήματος με βάση αυτές, προσομοιώνοντας τόσο το πραγματικό σύστημα όσο και το σύστημα με τις εκτιμημένες παραμέτρους, και παράγοντας διαγράμματα θέσης και σφάλματος μεταξύ των δύο προσομοιώσεων.

Για την προσομοίωση των συστημάτων χρησιμοποιείται η `ode45`. Οι εκτιμήσεις ξεκίνησαν με τυχαίες τιμές παραμέτρων φίλτρου $\hat{\eta}_1 = 1, \hat{\eta}_2 = 1$, οι οποίες έδωσαν αρκετά ικανοποιητικές τιμές για τις εκτιμώμενες παραμέτρους ($\hat{m} = 9.983867, \hat{b} = 0.499367, \hat{k} = 2.498002$) και αρκετά χαμηλό σφάλμα (η μέγιστη τιμή του που παρατηρήθηκε κατά τις προσομοιώσεις ήταν περίπου $-6 * 10^{-3}$). Μέσω διαδικασίας `trial and error` μπορούν ενδεχομένως να βρεθούν καλύτερες παράμετροι, παρόλαυτά για τους σκοπούς της εργασίας κρίθηκε ότι οι εκτιμώμενες τιμές είναι ικανοποιητικά κοντά στις πραγματικές και πως το σφάλμα είναι αρκετά χαμηλό.

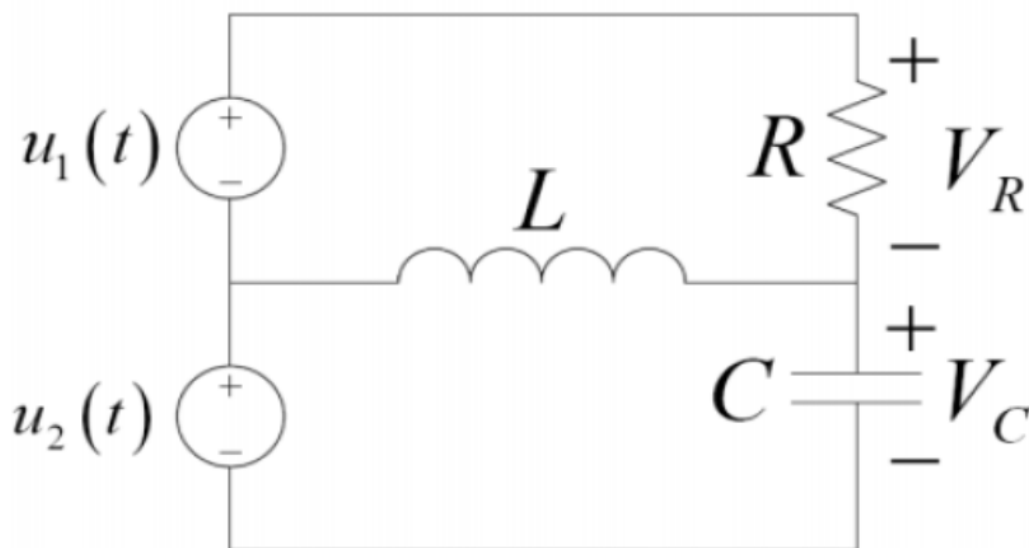
Τα διαγράμματα φαίνονται παρακάτω:



Κεφάλαιο 2

Θέμα 2

Στην άσκηση αυτή μας ζητείται να εκτιμήσουμε με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων τον πίνακα μεταφοράς του ακόλουθου κυκλώματος:



και δίνεται:

$$u_1(t) = 2\sin(4t) \quad [V] \quad (2.1)$$

$$u_2(t) = 4 \quad [V] \quad (2.2)$$

Εφαρμόζοντας τον 2ο Νόμο Κιρςηκοφφ στους δύο βρόγχους του κυκλώματος (άνω και κάτω αντίστοιχα), προκύπτουν οι ακόλουθες δύο εξισώσεις:

$$u_1(t) = V_R + V_L \quad (2.3)$$

$$u_2(t) = V_C - V_L \quad (2.4)$$

Θεωρούμε ότι οι βρόγχοι διαρρέονται από ρεύματα i_1 και i_2 αντίστοιχα (άνω και κάτω) με ωρολογιακή φορά, και έστω i_L το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο (από δεξιά προς τα αριστερά). Ισχύει:

$$i_L = i_1 - i_2 \quad (2.5)$$

$$V_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (2.6)$$

$$i_2(t) = C \frac{dV_C}{dt} \quad (2.7)$$

$$i_1(t) = \frac{V_R}{R} \quad (2.8)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις 2.5, 2.6, 2.7, 2.8 με την σχέση 2.3 έχουμε:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= L \left(\frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt} \right) + V_R \Leftrightarrow \\ u_1(t) &= \frac{L}{R} \frac{dV_R}{dt} - LC \frac{d^2 V_C}{dt^2} + V_R \end{aligned} \quad (2.9)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις 2.3 και 2.4 προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$u_1(t) + u_2(t) = V_R + V_C \quad (2.10)$$

$$\frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} = \frac{dV_R}{dt} + \frac{dV_C}{dt} \quad (2.11)$$

Από τις 2.9, 2.10 προκύπτει η:

$$\frac{L}{R} \frac{dV_R}{dt} - LC \frac{d^2 V_C}{dt^2} + V_R = V_R + V_C \Leftrightarrow \frac{L}{R} \frac{dV_R}{dt} + u_2(t) = V_C + LC \frac{d^2 V_C}{dt^2} \quad (2.12)$$

Αναδιατάσσοντας την 2.11 προκύπτουν οι:

$$\frac{dV_R}{dt} = \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} - \frac{dV_C}{dt} \quad (2.13)$$

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} - \frac{dV_R}{dt} \Leftrightarrow \frac{d^2 V_C}{dt^2} = \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{d^2 u_2}{dt^2} - \frac{d^2 V_R}{dt^2} \quad (2.14)$$

Συνδυάζοντας τις 2.12, 2.13:

$$\begin{aligned} \frac{L}{R} \left(\frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} - \frac{dV_C}{dt} \right) + u_2(t) &= V_C + LC \frac{d^2 V_C}{dt^2} \Leftrightarrow \\ \frac{d^2 V_C}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC} V_C &= \frac{1}{RC} \frac{du_1}{dt} + \frac{1}{RC} \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{RC} u_2(t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Συνδυάζοντας τις 2.10, 2.12, 2.14:

$$\begin{aligned} \frac{L}{R} \frac{dV_R}{dt} + u_2(t) &= u_1(t) + u_2(t) - V_R + LC \left(\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{d^2 u_2}{dt^2} - \frac{d^2 V_R}{dt^2} \right) \Leftrightarrow \\ \frac{L}{R} \frac{dV_R}{dt} &= u_1(t) - V_R + LC \frac{d^2 u_1}{dt^2} + LC \frac{d^2 u_2}{dt^2} - LC \frac{d^2 V_R}{dt^2} \Leftrightarrow \\ \frac{d^2 V_R}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dV_R}{dt} + \frac{1}{LC} V_R &= \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_1(t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες, και εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στις σχέσεις 2.15, 2.16 παίρνουμε:

$$V_C(s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}) = \frac{1}{RC}su_1 + \frac{1}{RC}su_2 + \frac{1}{LC}u_2 \quad (2.17)$$

$$V_R(s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}) = s^2u_1 + \frac{1}{LC}u_1 + s^2u_2 \quad (2.18)$$

Με βάση τις 2.17, 2.18 ο πίνακας μεταφοράς του κυκλώματος είναι ο ακόλουθος:

$$\begin{bmatrix} V_C \\ V_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{1}{RC}s}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} & \frac{\frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} \\ \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} & \frac{s^2}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Επομένως, αρκεί να εκτιμήσουμε τις δύο παραμέτρους $\frac{1}{RC}$ και $\frac{1}{LC}$ για την εύρεση του πίνακα.

2.1 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Μετασχηματίζουμε τις 2.15, 2.16:

$$\frac{d^2 V_C}{dt^2} = -\frac{1}{RC} \frac{dV_C}{dt} - \frac{1}{LC} V_C + \frac{1}{RC} \frac{du_1}{dt} + \frac{1}{RC} \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{LC} u_2(t) \quad (2.20)$$

$$\frac{d^2 V_R}{dt^2} = -\frac{1}{RC} \frac{dV_R}{dt} - \frac{1}{LC} V_R + \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_1(t) \quad (2.21)$$

Ορίζουμε:

$$\partial_C = \left[\frac{1}{RC} \quad \frac{1}{LC} \quad \frac{1}{RC} \quad \frac{1}{RC} \quad 0 \quad \frac{1}{LC} \right]^T \quad (2.22)$$

$$\Delta_C = \left[-\frac{dV_C}{dt} \quad -V_C \quad \frac{du_1}{dt} \quad \frac{du_2}{dt} \quad u_1(t) \quad u_2(t) \right]^T \quad (2.23)$$

$$\partial_R = \left[\frac{1}{RC} \quad \frac{1}{LC} \quad 1 \quad 0 \quad \frac{1}{LC} \quad 1 \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (2.24)$$

$$\Delta_R = \left[-\frac{dV_R}{dt} \quad -V_R \quad \frac{d^2 u_1}{dt^2} \quad \frac{d^2 u_1}{dt^2} \quad u_1(t) \quad \frac{d^2 u_2}{dt^2} \quad \frac{d^2 u_2}{dt^2} \quad u_2(t) \right]^T \quad (2.25)$$

Άρα οι 2.20, 2.21 είναι της μορφής:

$$\frac{d^2 V_C}{dt^2} = \partial_C^T \Delta_C \quad (2.26)$$

$$\frac{d^2 V_R}{dt^2} = \partial_R^T \Delta_R \quad (2.27)$$

Έχουμε ήδη κάνει την διαδικασία εύρεσης παραμέτρων σε εξισώσεις αυτής της μορφής στο 1ο μέρος της εργασίας Ορίζοντας πάλι ένα φίλτρο $\Lambda(s) = s^2 + \beta_1 s + \beta_2$, αυτή την φορά με μεγάλες τιμές (θέλουμε μεγάλους πόλους γιατί από ανάλυση των διαγραμμάτων των μετρήσεων V_C , V_R βλέπουμε ότι έχουμε ένα υψίσυχνο σύστημα), και οι σχέσεις 2.26 και 2.27 μεταχηματίζονται στις:

$$V_C = \partial_{\beta,C}^T \zeta_C \quad (2.28)$$

$$V_R = \partial_{\beta,R}^T \zeta_R \quad (2.29)$$

με:

$$\partial_{\beta,C} = \left[\frac{1}{RC} - \beta_1 \quad \frac{1}{LC} - \beta_2 \quad \frac{1}{RC} \quad \frac{1}{RC} \quad 0 \quad \frac{1}{LC} \right]^T \quad (2.30)$$

$$\zeta_C = \left[-\frac{s}{\Lambda(s)} V_C \quad -\frac{1}{\Lambda(s)} V_C \quad \frac{s}{\Lambda(s)} u_1 \quad \frac{s}{\Lambda(s)} u_2 \quad \frac{1}{\Lambda(s)} u_1 \quad \frac{1}{\Lambda(s)} u_2 \right]^T \quad (2.31)$$

$$\partial_{\beta,R} = \left[\frac{1}{RC} - \beta_1 \quad \frac{1}{LC} - \beta_2 \quad 1 \quad 0 \quad \frac{1}{LC} \quad 1 \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (2.32)$$

$$\zeta_R = \left[-\frac{s}{\Lambda(s)} V_R \quad -\frac{1}{\Lambda(s)} V_R \quad \frac{s^2}{\Lambda(s)} u_1 \quad \frac{s^2}{\Lambda(s)} u_2 \quad \frac{s}{\Lambda(s)} u_1 \quad \frac{s}{\Lambda(s)} u_2 \quad \frac{1}{\Lambda(s)} u_1 \quad \frac{1}{\Lambda(s)} u_2 \right]^T \quad (2.33)$$

Η διαδικασία που ακολουθούμε για την εκτίμηση των ζητούμενων παραμέτρων είναι η εξής:

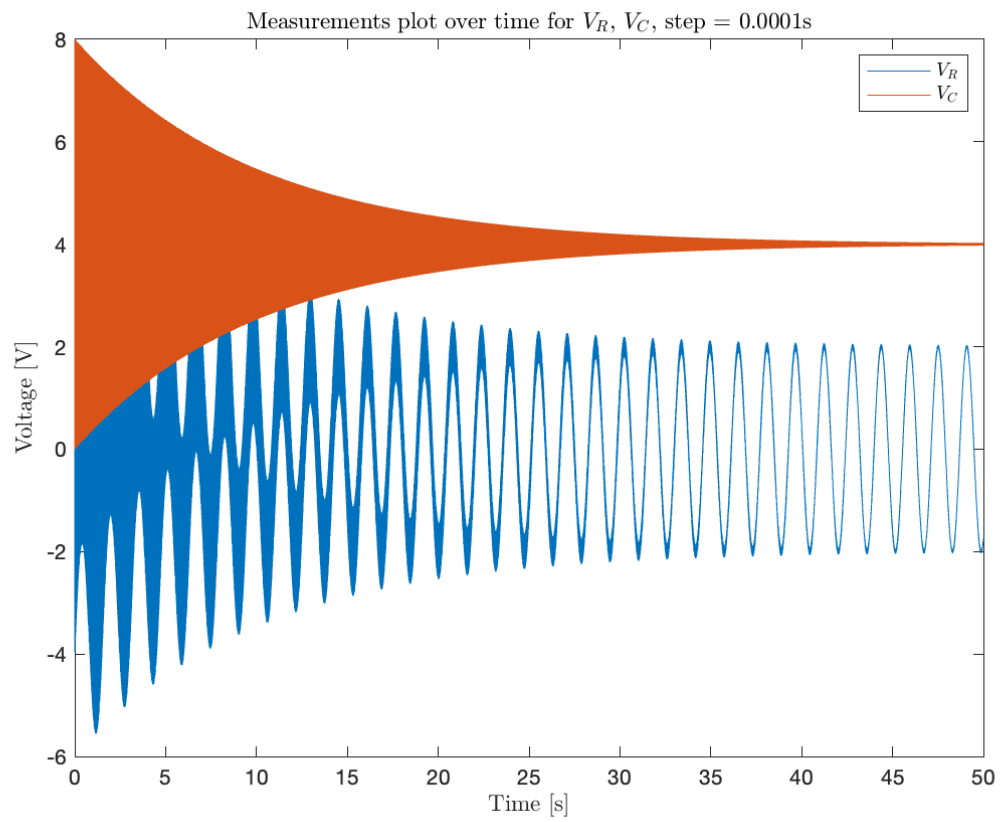
1. Λαμβάνουμε μετρήσεις για τα V_C , V_R από το αρχείο `v.p`
2. Εκτελούμε τον αλγόριθμο για να βρούμε τις εκτιμώμενες παραμέτρους
3. Παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα προσομοιώσεων

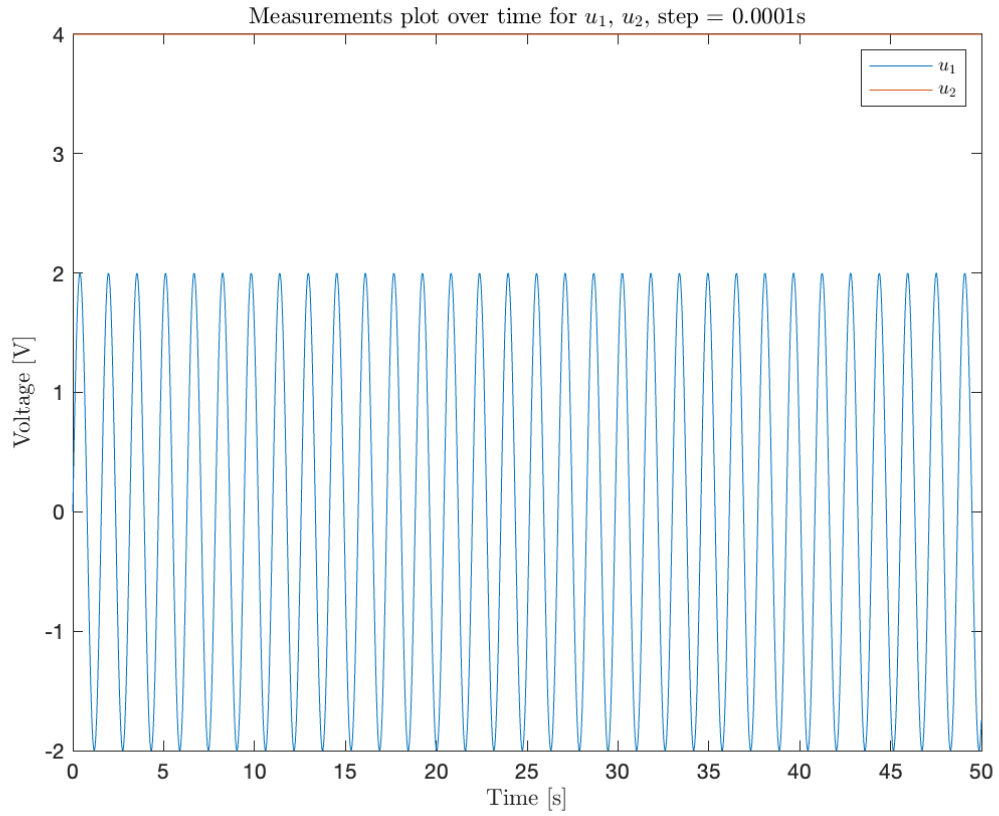
Στο παράδειγμά μας δε χρησιμοποιούμε τις παραμέτρους από την εκτίμηση του V_R γιατί λόγω αριθμητικής αστάθειας η MATLAB δεν επιστρέφει αξιόπιστες τιμές (εμφανίζεται σχετικό μήνυμα σφάλματος). Ο κώδικας παρατίθεται για λόγους πληρότητας.

Όμοια με το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε τα αρχεία `u1.m` και `u2.m` τα οποία επιστρέφουν τις τιμές της τάσης των πηγών u_1 και u_2 για όποιες χρονικές στιγμές επιθυμούμε, τα αρχεία `least_squares_estimate_Vc.m` και `least_squares_estimate_Vr.m` που εκτιμούν παραμέτρους με βάση μετρήσεις από την τάση του πυκνωτή και της αντίστασης αντίστοιχα, και τέλος το αρχείο `main.m` που εκτελεί όλους τους αλγορίθμους και δημιουργεί τα απαραίτητα διαγράμματα.

Οι τιμές που επιλέγουμε για τις παραμέτρους των φίλτρων είναι $\beta_1 = 500$ και $\beta_2 = 250000$, που αντιστοιχούν σε διπλό πόλο με πραγματικό μέρος -250.

Αρχικά παραθέτουμε διαγράμματα των μετρήσεων από τα V_C και V_R και από τις τάσεις των πηγών u_1 , u_2 :



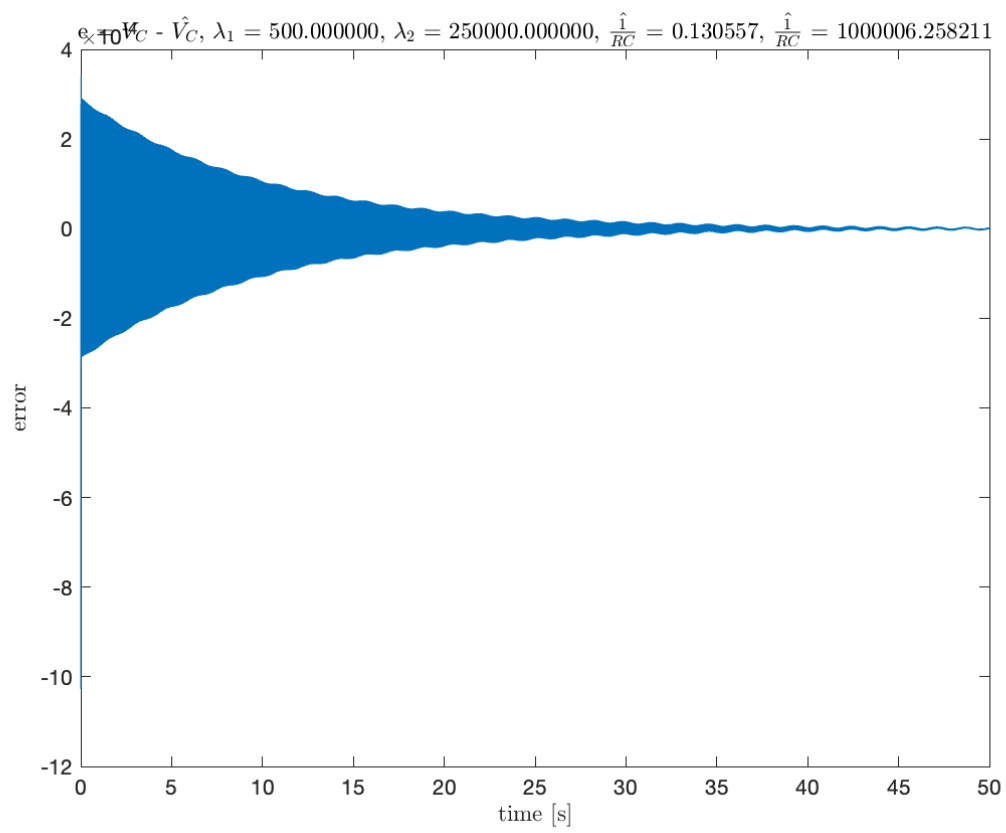
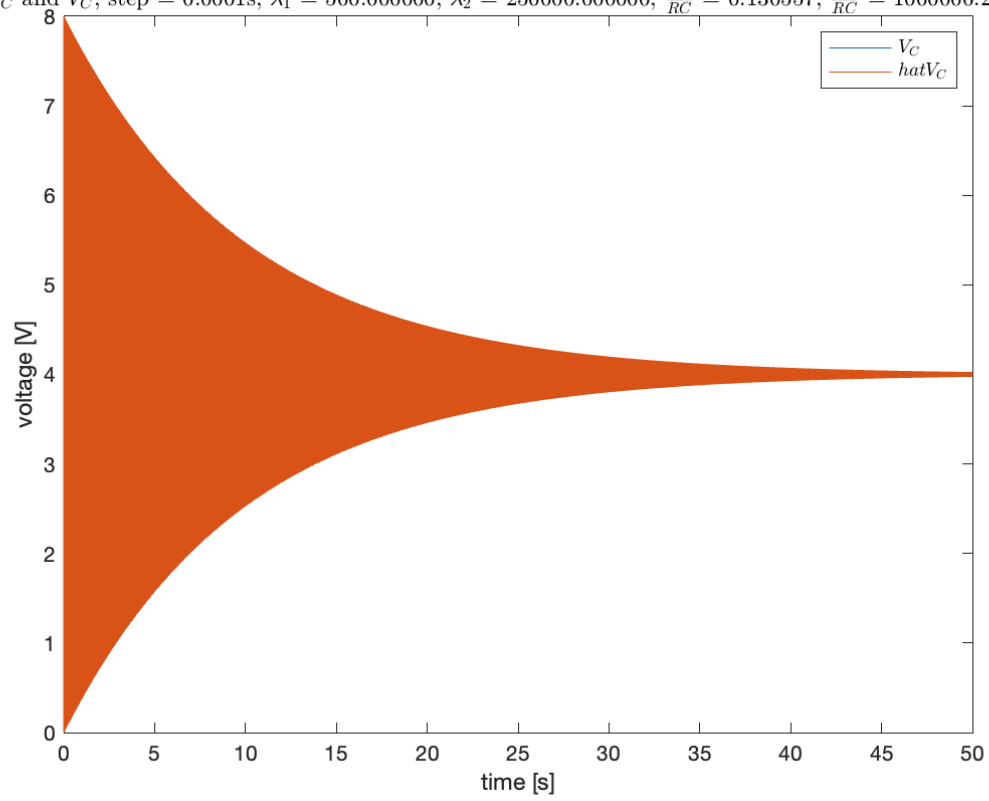


Εκτελώντας τους αλγορίθμους βρίσκουμε ότι :

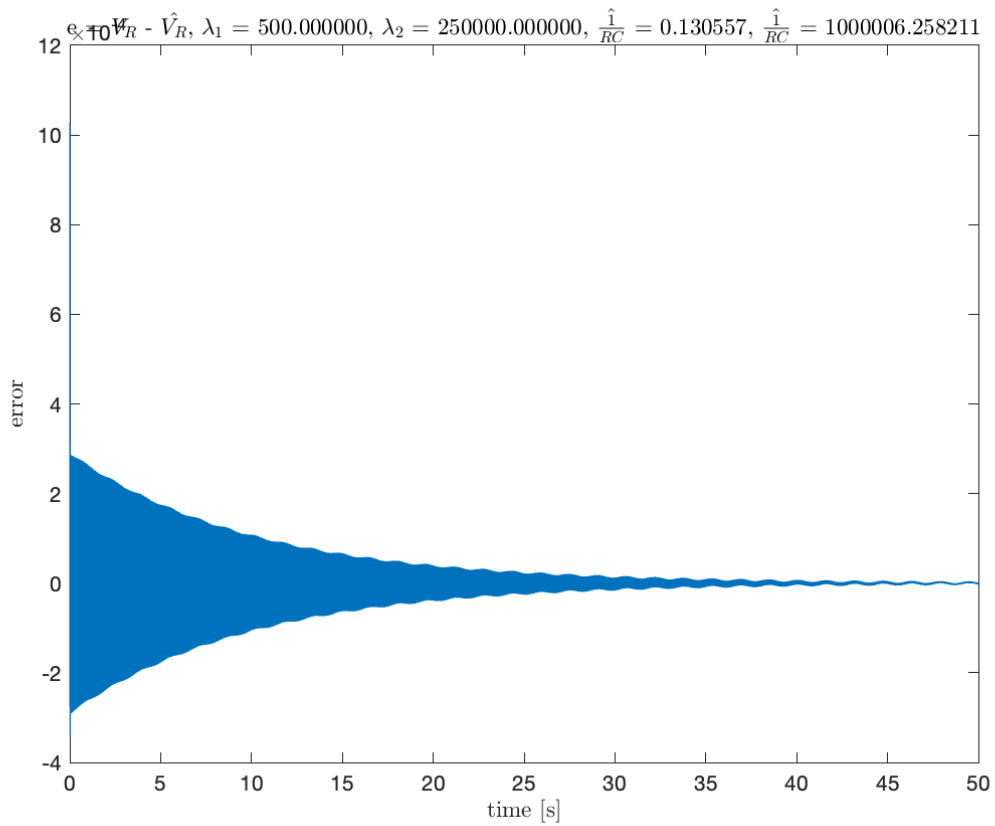
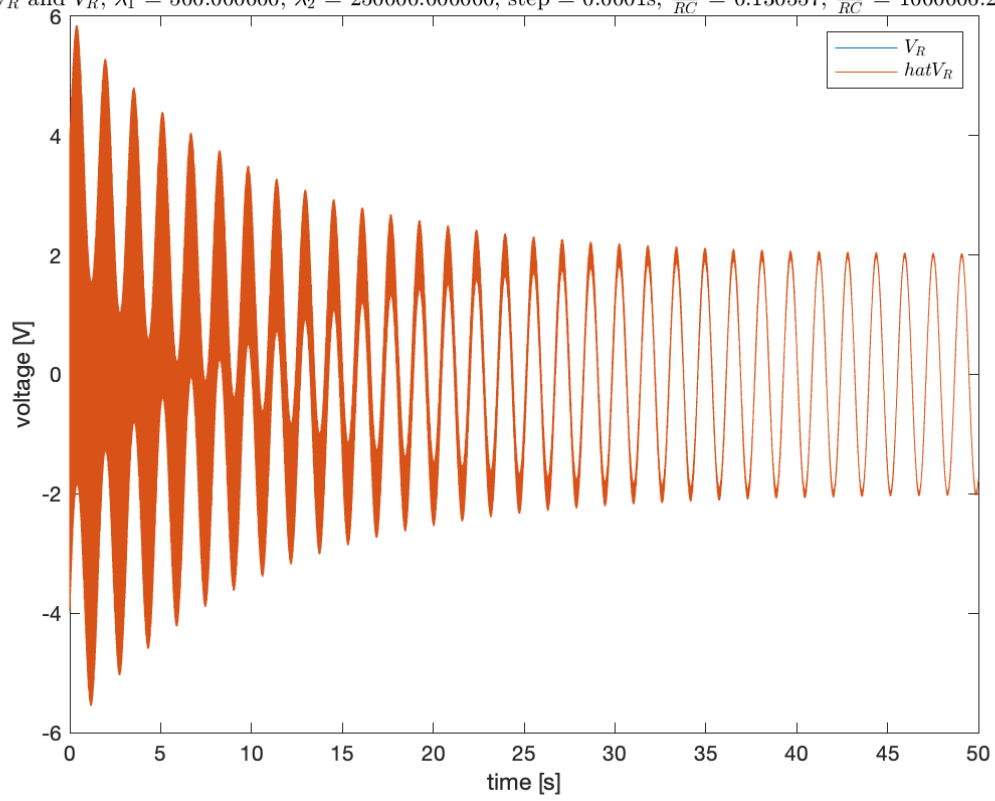
$$\begin{bmatrix} \hat{\frac{1}{RC}} \\ \hat{\frac{1}{LC}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.130557 \\ 1000006.258211 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Οι τιμές για τα προσομοιωμένα \hat{V}_C και \hat{V}_R καθώς και τα σφάλματα, προσομοιωμένα μέσω του διανύσματος οπισθοδρόμησης δίνονται στα παρακάτω διαγράμματα :

V_C and \hat{V}_C , step = 0.0001s, $\lambda_1 = 500.000000$, $\lambda_2 = 250000.000000$, $\frac{\hat{1}}{RC} = 0.130557$, $\frac{\hat{1}}{RC} = 1000006.258211$

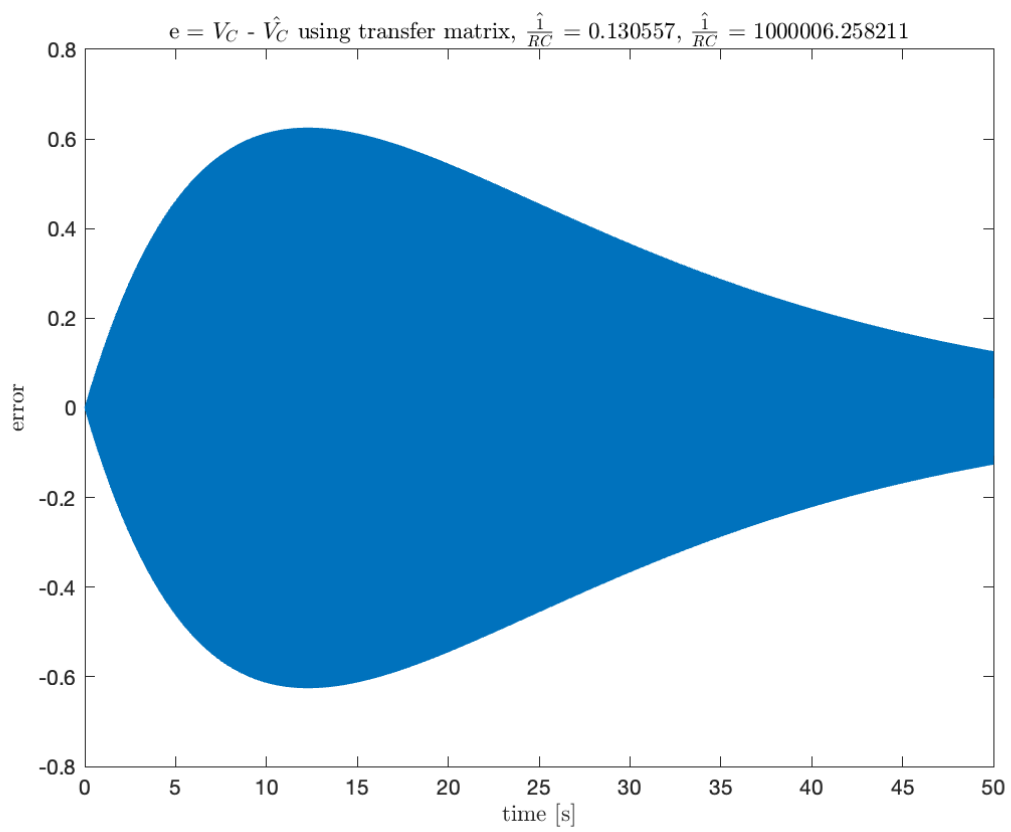
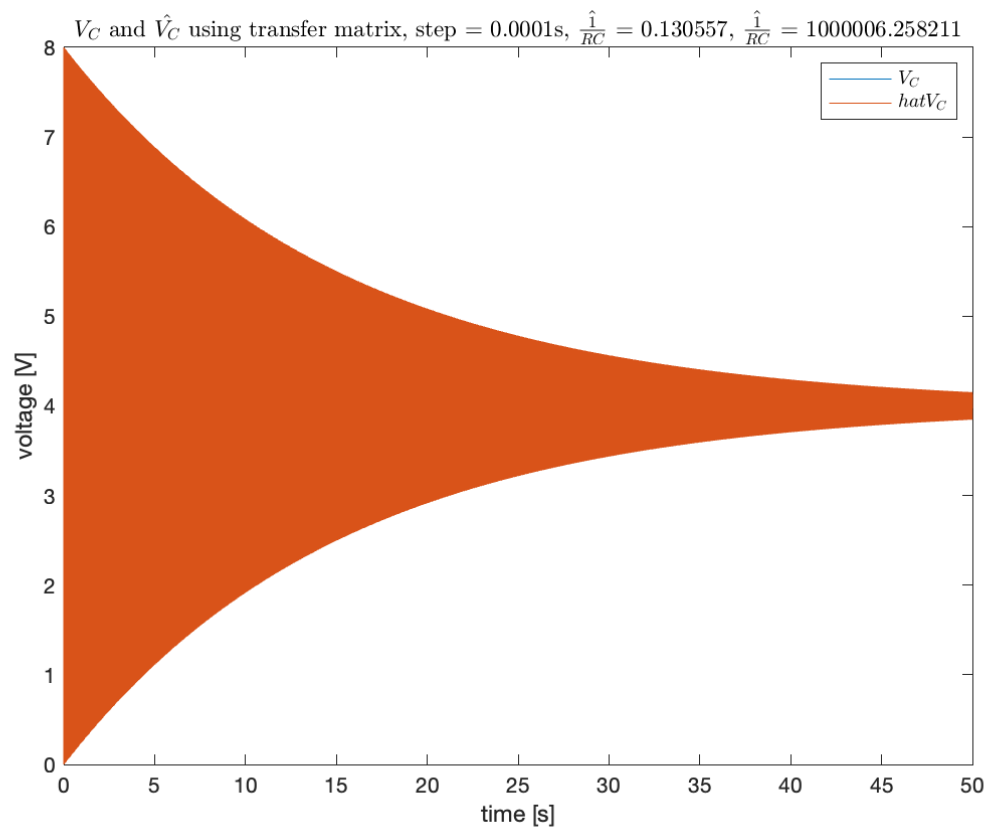


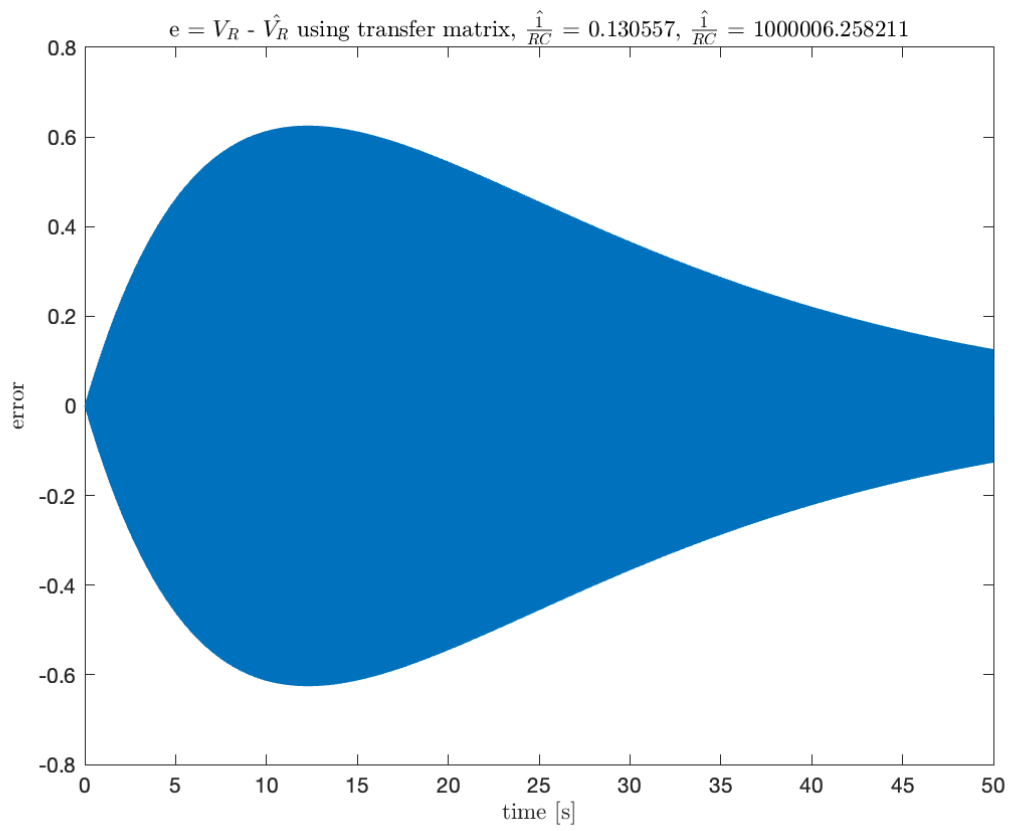
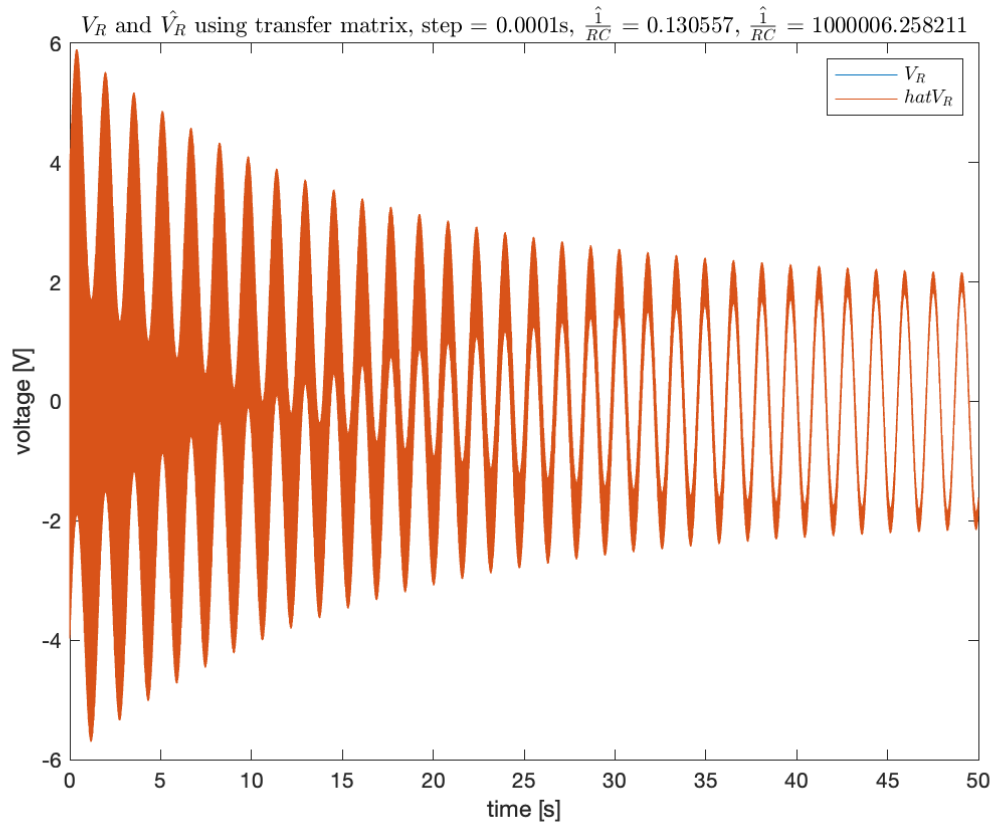
V_R and \hat{V}_R , $\lambda_1 = 500.000000$, $\lambda_2 = 250000.000000$, $\text{step} = 0.0001\text{s}$, $\frac{\hat{1}}{RC} = 0.130557$, $\frac{\hat{1}}{RC} = 1000006.258211$



Οι τιμές για τα προσομοιωμένα \hat{V}_C και \hat{V}_R καθώς και τα σφάλματα, προσομοιωμένα

μέσω του πίνακα μεταφοράς δίνονται στα παρακάτω διαγράμματα :

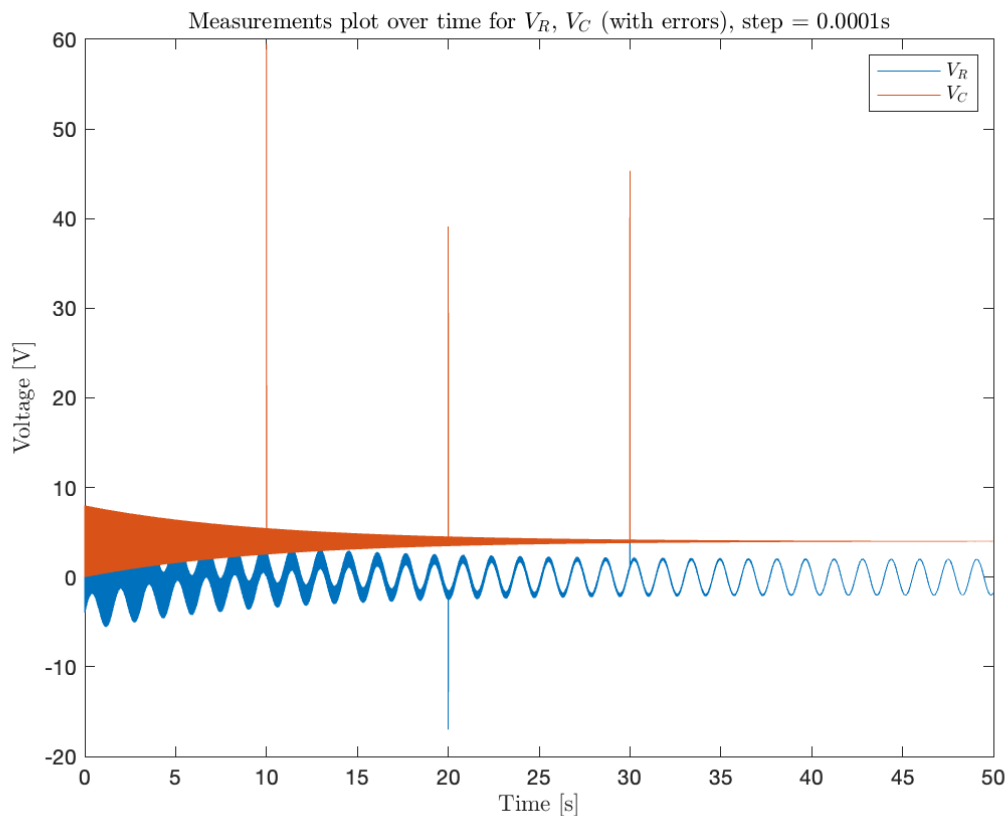




2.2 Εκτίμηση παραμέτρων με σφάλματα

Σύμφωνα και με τις κατευθύνσεις της εκφώνησης, προσθέτουμε σε 3 τυχαίες χρονικές στιγμές θόρυβο σφάλματος 10 φορές μεγαλύτερο (= μια τάξη μεγέθους) από την υπάρχουσα τιμή. Συγκεκριμένα, οι τιμές που επιλέξαμε αντιστοιχούν στα 10, 20 και 30 δευτερόλεπτα.

Οι μετρήσεις με τον θόρυβο φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα :



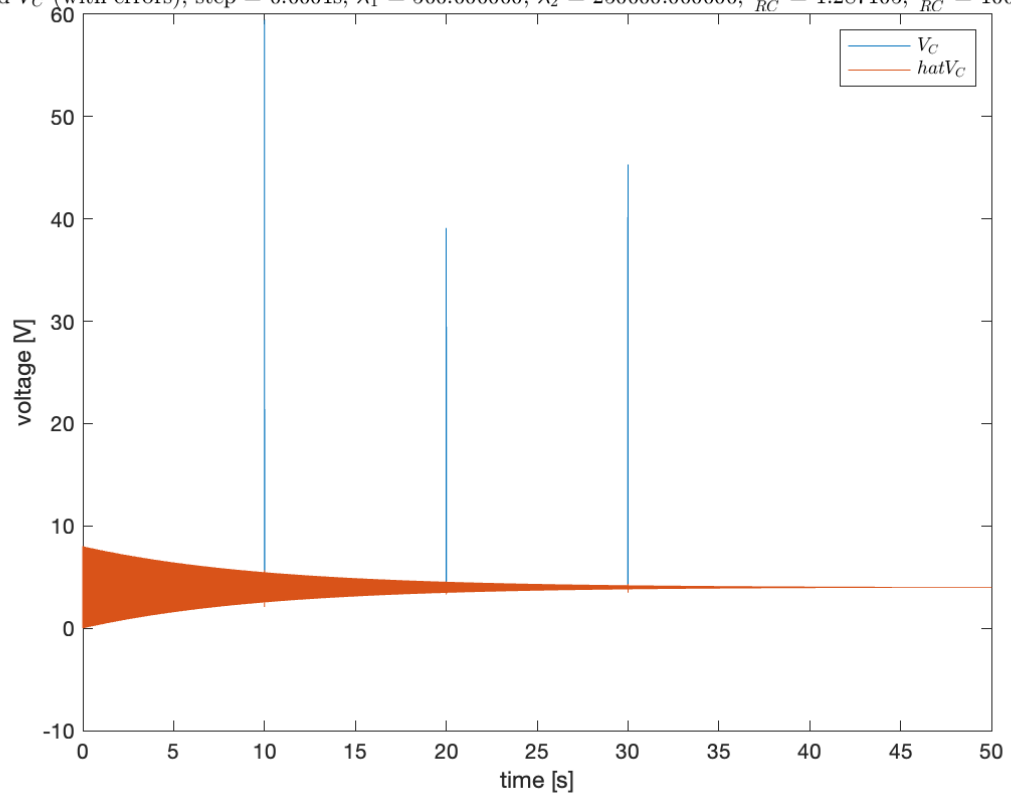
Εκτελώντας τους αλγορίθμους ξανά, βρίσκουμε :

$$\begin{bmatrix} \hat{\frac{1}{RC}} \\ \hat{\frac{1}{LC}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.287105 \\ 1002462.147605 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

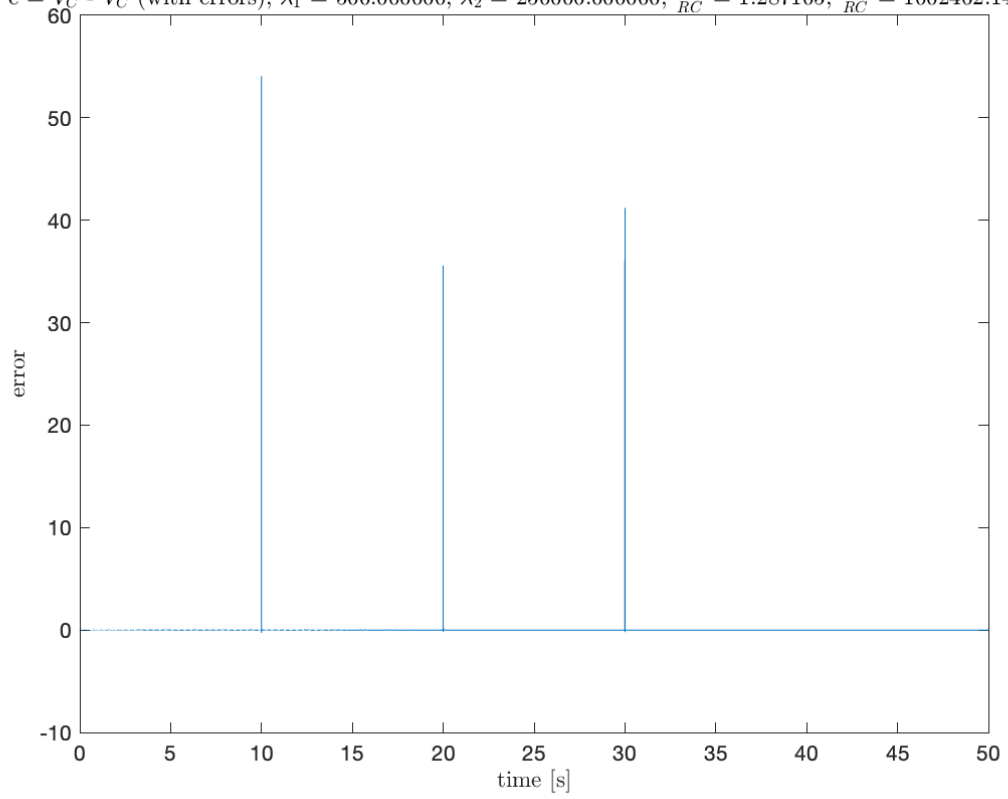
που αποκλίνουν κατά πολύ από τις τιμές που βρήκαμε πριν.

Οι τιμές για τα προσομοιωμένα \hat{V}_C και \hat{V}_R καθώς και τα σφάλματα, προσομοιωμένα μέσω του διανύσματος οπισθοδρόμησης δίνονται στα παρακάτω διαγράμματα :

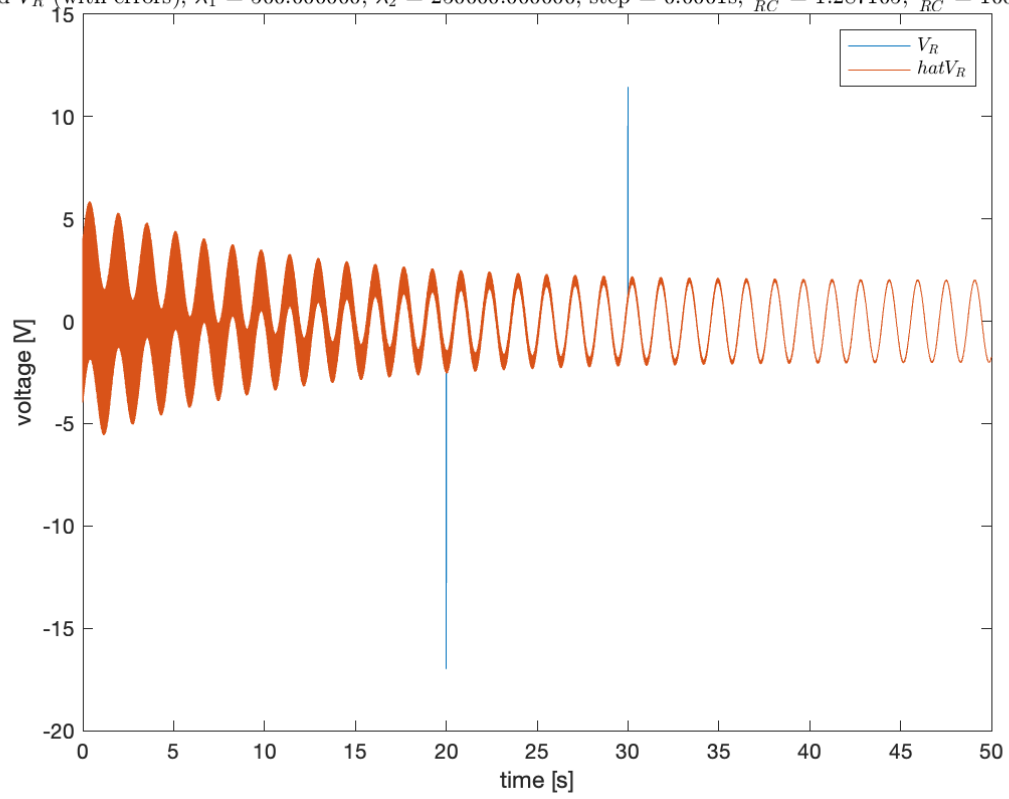
V_C and \hat{V}_C (with errors), step = 0.0001s, $\lambda_1 = 500.000000$, $\lambda_2 = 250000.000000$, $\frac{\hat{1}}{RC} = 1.287105$, $\frac{\hat{1}}{RC} = 1002462.147$



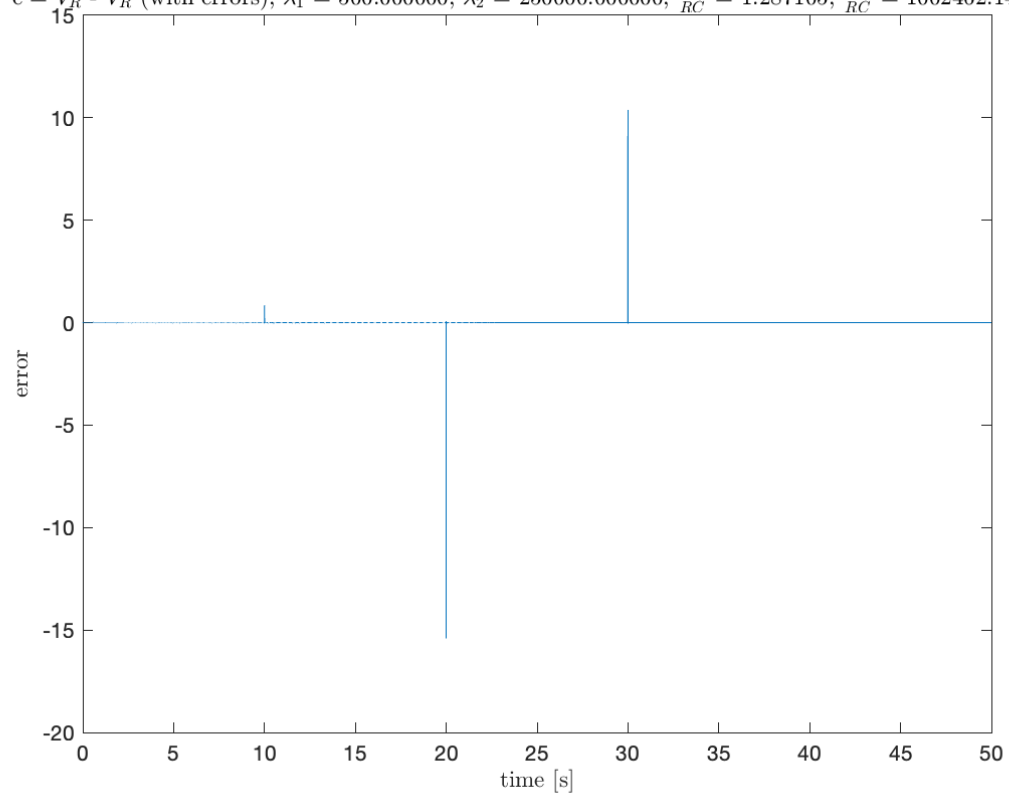
$e = V_C - \hat{V}_C$ (with errors), $\lambda_1 = 500.000000$, $\lambda_2 = 250000.000000$, $\frac{\hat{1}}{RC} = 1.287105$, $\frac{\hat{1}}{RC} = 1002462.147605$



V_R and \hat{V}_R (with errors), $\lambda_1 = 500.000000$, $\lambda_2 = 250000.000000$, $\text{step} = 0.0001\text{s}$, $\frac{\hat{1}}{RC} = 1.287105$, $\frac{\hat{1}}{RC} = 1002462.147$

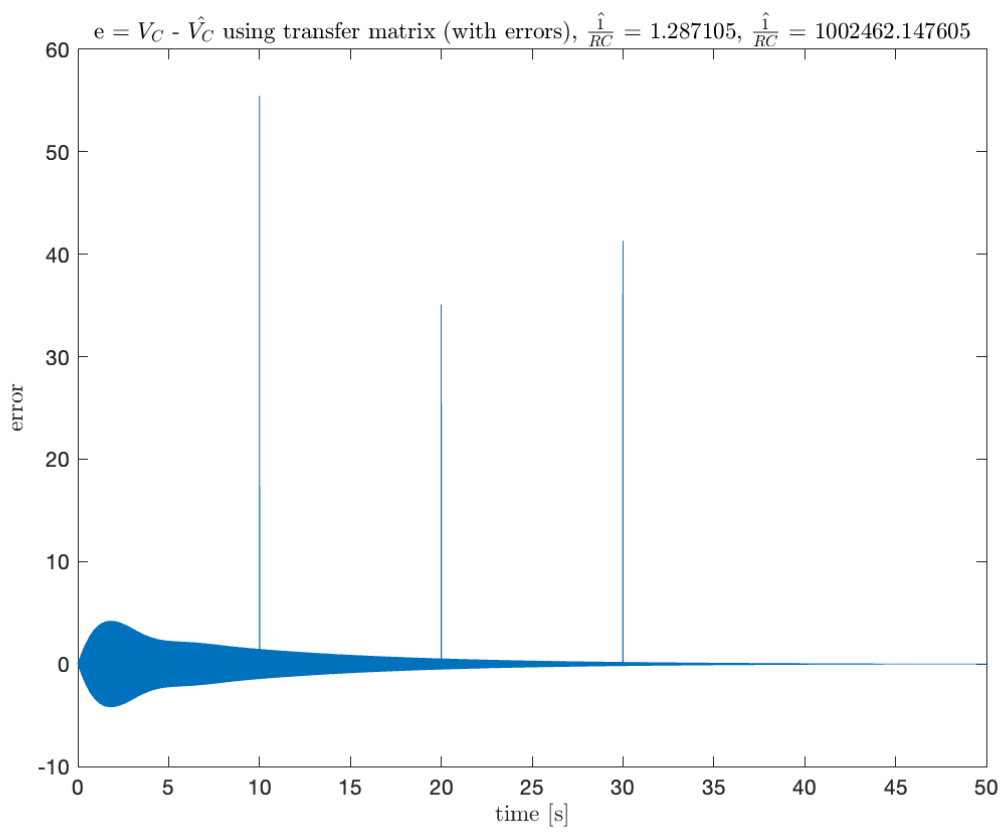
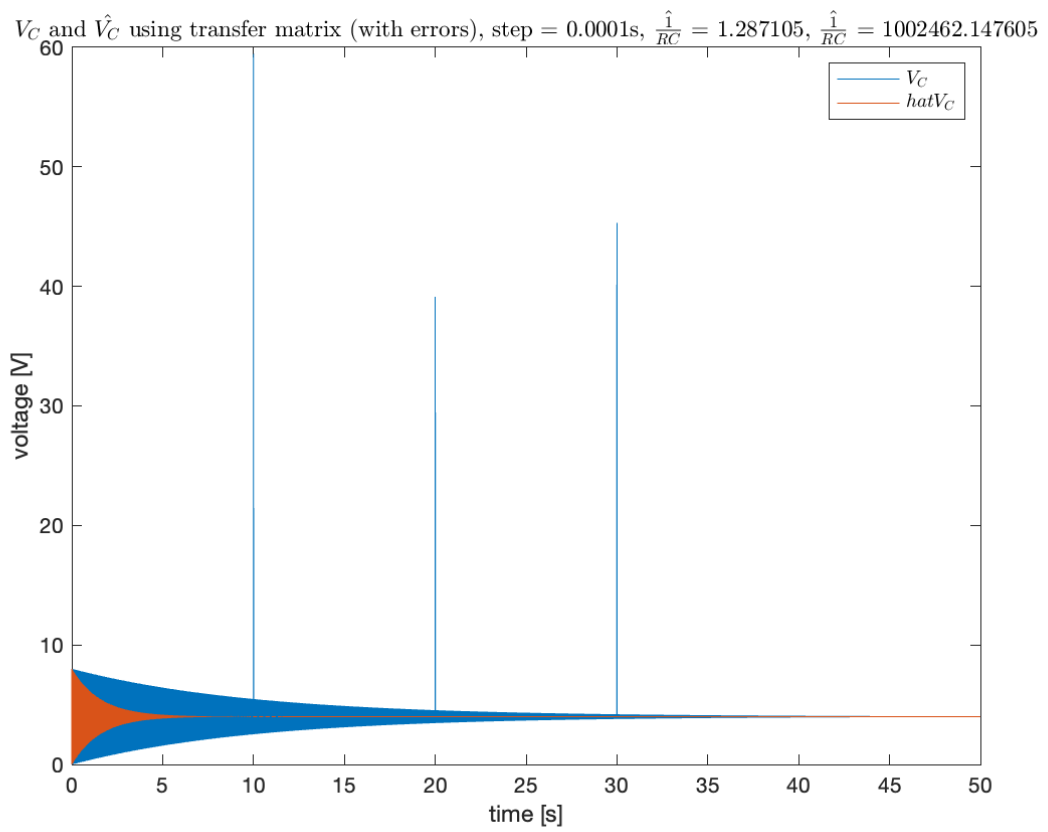


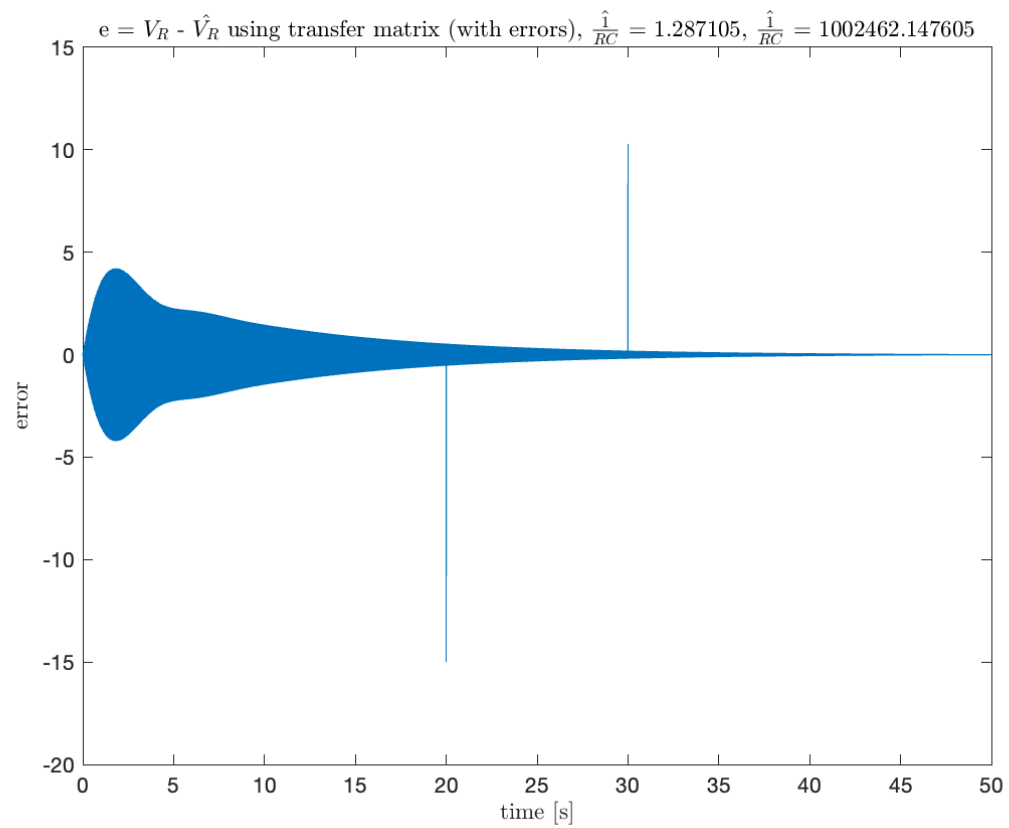
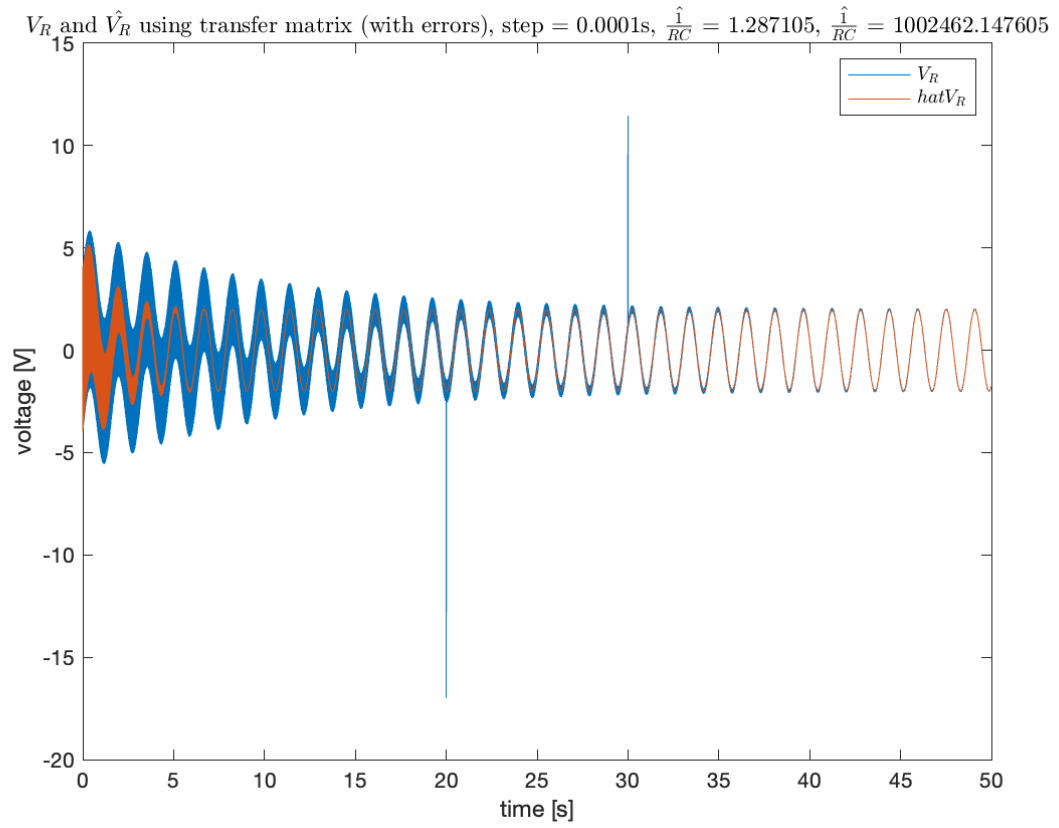
$e = V_R - \hat{V}_R$ (with errors), $\lambda_1 = 500.000000$, $\lambda_2 = 250000.000000$, $\frac{\hat{1}}{RC} = 1.287105$, $\frac{\hat{1}}{RC} = 1002462.147605$



Οι τιμές για τα προσομοιωμένα \hat{V}_C και \hat{V}_R καθώς και τα σφάλματα, προσομοιωμένα

μέσω του πίνακα μεταφοράς δίνονται στα παρακάτω διαγράμματα :





Παρατηρούμε ότι βλέπουμε στις χρονικές στιγμές αυτές μεγαλύτερο σφάλμα, καθώς

και overall μεγαλύτερο σφάλμα. Αυτό γίνεται, γιατί από την θεωρία έχουμε διαφορετικές μετρήσεις, που μεταβάλλουν κατά πολύ την εκτίμηση των παραμέτρων, και κατά συνέπεια τα προσομοιωμένα αποτελέσματα.

Bibliography

- [1] G. A. Rovithakis, *MODELLING AND SIMULATION OF SYSTEMS*, 2004.