



MÉCANIQUE DES FLUIDES

Bryan BACHELET, Matéo ERBISTI, Lenny RABINNE
Mai 2023

1 Introduction

Ce projet vise à simuler la mécanique des fluides dans divers cas proposés. Ce rapport rend compte du travail effectué lors de cet exercice. Il contient les questions théoriques sur lesquelles nous nous sommes interrogés, les résultats et leurs interprétations de chaque expérimentation. Nous expliquerons également l'architecture et les algorithmes utilisés pour chacune de ces expériences.

Les cas traités sont deux expérimentations informatiques sur la mécanique des fluides. La première expérience traite d'une situation d'écoulement avec un fluide parfait. La seconde expérience quant à elle est une implémentation de l'algorithme **SPH**, le Smooth Particule Hydrodynamics pour simuler le comportement d'écoulement d'un fluide réel visqueux depuis un réservoir.

Pour réaliser cette simulation informatique, nous utilisons le logiciel de rendu Unity afin de gérer l'affichage des expérimentations et la détection des collisions physiques. Le langage de programmation utilisée est le C# qui est utilisé dans Unity.

2 Première expérimentation : Fluide parfait

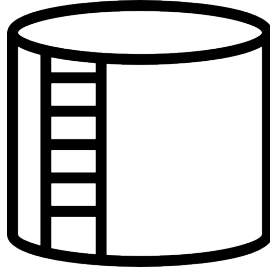
Le premier cas d'expérimentation a été de modéliser un réservoir de fluide parfait qui possède un orifice à la base du réservoir. Le réservoir est un cube de 4 m de côté sur une hauteur de 4 m. L'orifice en bas du réservoir est une section circulaire de 4 cm². Le fluide contenu dans le réservoir a $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

Tout d'abord, avant de commencer à implémenter la simulation informatique, nous avons d'abord dû répondre à plusieurs questions théoriques pour faciliter l'implémentation de notre algorithme et de pouvoir vérifier nos résultats de notre expérimentation. La première information que l'on souhaitait avoir était V_0 la vitesse d'écoulement initiale du fluide à travers l'orifice du réservoir. On a d'abord déterminé plusieurs hypothèses par rapport à notre expérimentation. La première est que le fluide étudié est un fluide parfait et homogène. La deuxième hypothèse est que l'écoulement est incompressible et stationnaire. On commence par calculer la section horizontale de notre réservoir S est de : $S_h = 4 * 4 = 16 \text{ m}^2$. Grâce aux hypothèses définies précédemment, on peut utiliser l'équation de Bernoulli : $P + \rho g h + \rho u^2/2 = \text{cste}$

P est la pression statique en Pascal, ρ est la masse volumique du fluide en $\text{m}^3 \text{ kg}^{-1}$, h la hauteur par rapport à l'origine en m et u la vitesse d'écoulement du fluide en m s^{-1} . Dans le cadre de notre expérience, on peut déduire la formule :

$$P_s + \rho g S_h + \frac{S_u^2 \cdot \rho}{2} = P_s + \rho g S_h + \frac{s_u^2 \cdot \rho}{2}$$

Pour simplifier cette expression, on a utilisé le théorème de Torricelli car on



sait que $P_s = P_S = P_{atm}$ où P_{atm} est la pression atmosphérique de la Terre et $S_u = 0$ lorsque $S_h \gg s_h$ et $H = S_h - s_h$ ce qui nous donne la formule :

$$s_u = \sqrt{2gH} \text{ donc } V_0 = \sqrt{2 * 9.81 * 4} = 8859 \text{ m s}^{-1}$$

La seconde information théorique recherchée est la distance horizontale maximale D à laquelle le fluide est projetée. Pour cela, il nous faut déterminer la hauteur H_R de base notre réservoir. On définit que H_R est de 5m. On peut donc trouver les équations de mouvement du fluide :

$$x(t) = V_{0x} t$$

$$y(t) = \frac{-gt^2}{2} + H_R$$

On cherche D qui correspond à : $x(t_{\max}) = V_{0x} t_{\max} = D$. On sait que $y(t_{\max}) = 0 = \frac{-gt^2}{2} + H_R$ donc on peut trouver le temps max avant que le fluide touche le sol $t_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot H_R}{g}}$. On peut donc remplacer l'inconnu t par les bonnes valeurs pour trouver D :

$$\begin{aligned} D &= V_{0x} \sqrt{\frac{2 \cdot H_R}{g}} \\ &= 8859 \sqrt{\frac{2 \cdot 5}{9.81}} \end{aligned}$$

$D = 8,944 \text{ m}$

Ensuite, nous souhaitons trouver T , le temps total pour vider le réservoir de fluide de l'expérimentation. On sait que

$$V(\text{vide}) = -S_h dh$$

où dh correspond à la différence entre H , la hauteur du réservoir et $h(t)$, la fonction qui la hauteur du fluide dans le réservoir : $dh = H - h(t)$. La seconde information que l'on sait est que

$$V(\text{sortant}) = Q_v dt$$

où Q_v est le débit volumique :

$$Q_v = S u_s dt$$

$$Q_v = S \sqrt{2gh(t)} dt$$

$$V(\text{vide}) = V(\text{sortant})$$

$$:\Leftrightarrow -S dh = s \sqrt{2gh(t)} dt$$

$$:\Leftrightarrow \frac{dh}{\sqrt{h(t)}} = s \frac{\sqrt{2g}}{-S} dt$$

$$:\Leftrightarrow h^{\frac{-1}{2}} dh = \frac{s\sqrt{2g}}{-S} dt$$

$$:\Leftrightarrow \int_H^0 h^{\frac{-1}{2}} dx = \frac{s\sqrt{2g}}{-S} \int_0^T dt$$

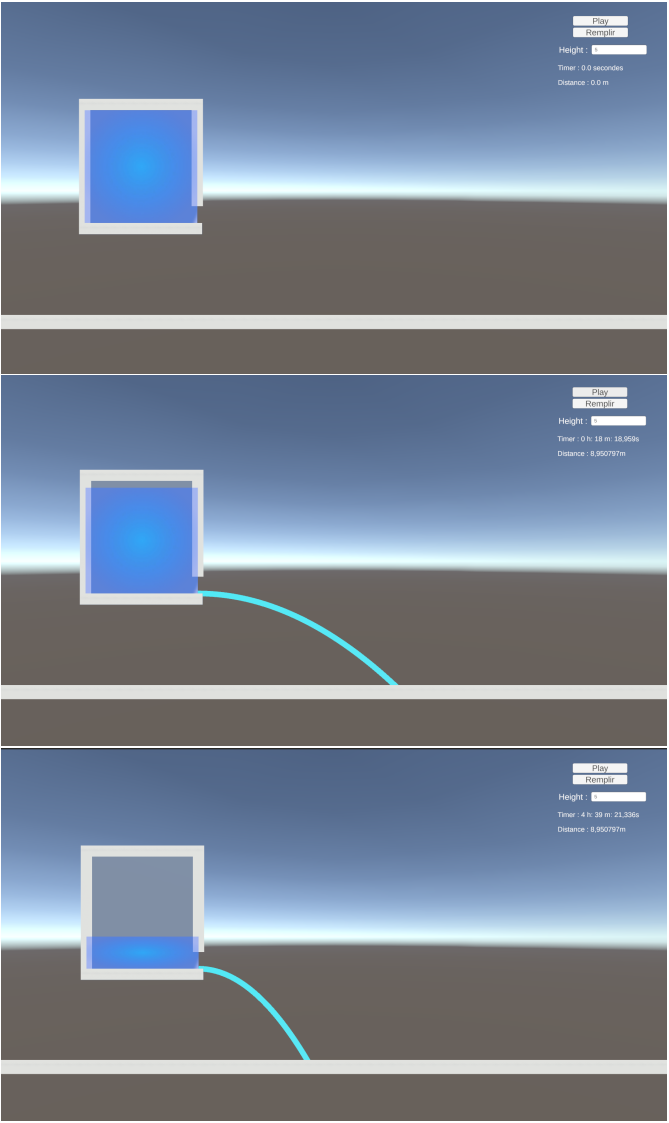
$$:\Leftrightarrow [-2h^{\frac{1}{2}}]_H^0 = \frac{s\sqrt{2g}}{-S} T$$

$$:\Leftrightarrow T = \frac{2S\sqrt{H}}{s\sqrt{2g}}$$

$$T = 36121 \text{ secondes} \approx 10 \text{ heures}$$

Le temps T pour vider l'ensemble du reservoir est 10 heures. On souhaitais trouver les expressions de $h(t)$ et de $V_{orif}(t)$. Pour $h(t) = (\frac{-s\sqrt{2g}t}{2S} + \sqrt{H})^2$ et pour $V_{orif}(t) = \sqrt{2gh(t)}$.

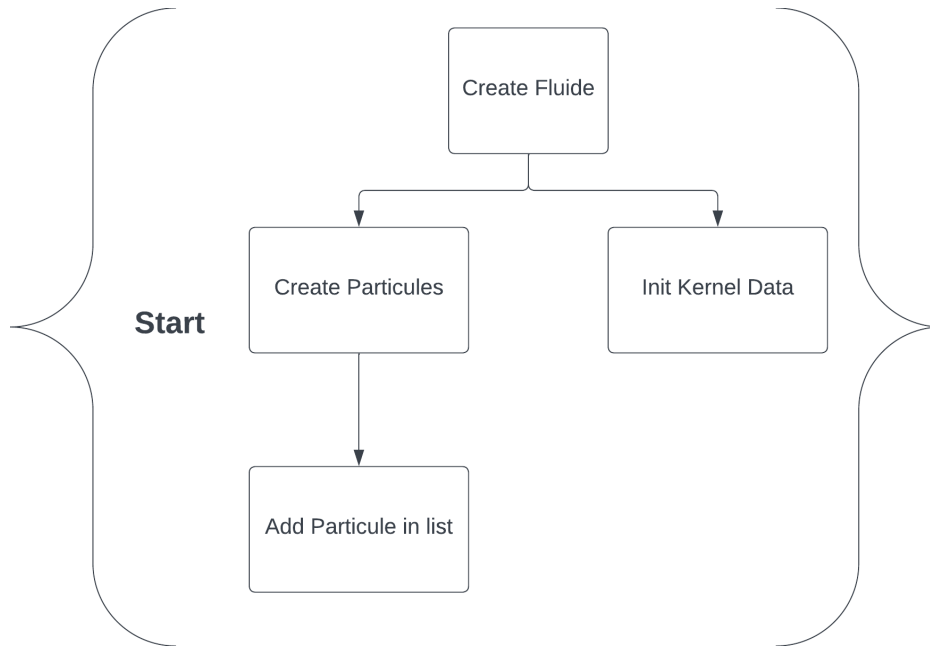
Lorsque l'on lance notre simulation, on obtient une durée d'écoulement totale $T_{max} = 36121.5$ secondes soient ≈ 10 heures et 2 minutes. La précision du résultat est tout à fait acceptable. Pour ce qui est de la distance maximale D_{max} , lorsqu'on faire tourner la simulation, on obtient $8,77m$ et on a obtenu avec les calculs théoriques $8,944$ m. La différence entre la valeur théorique et la valeur simulée peut être considéré comme non négligeable.



3 Seconde experimentation : Simulation réelle

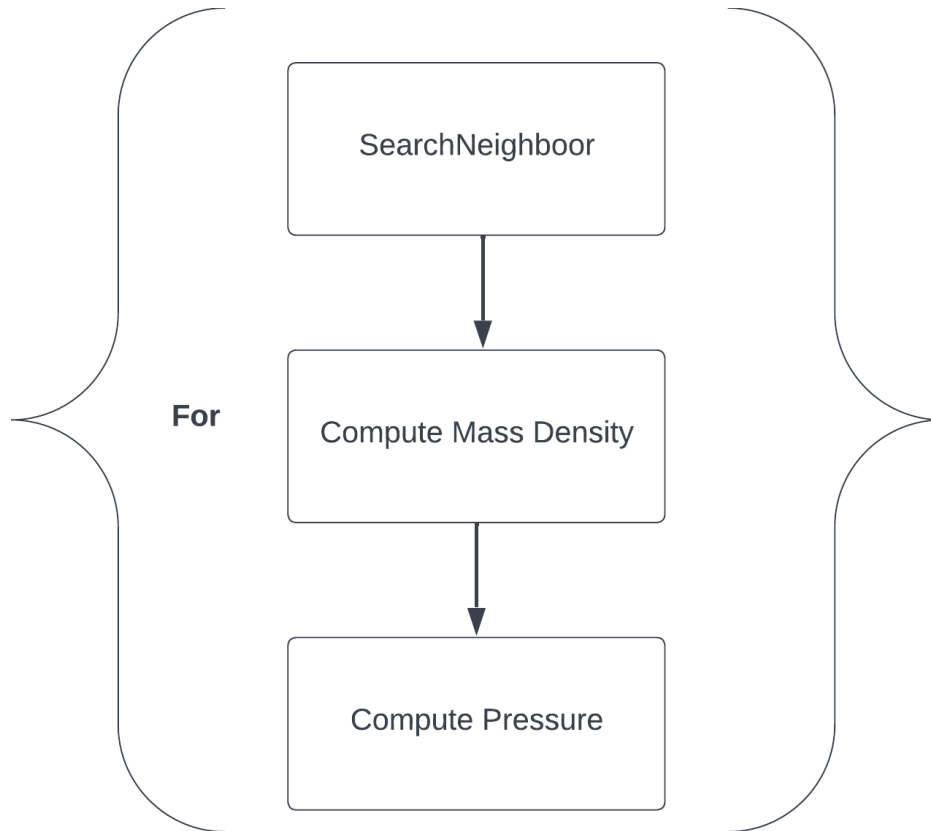
Cette seconde experimentation a pour objectif de simuler un fluide réel grâce au **SPH**, le Smooth Particule Hydrodynamics. Cet algorithme utilise une approche Lagrangienne en étudiant la trajectoire de chaque particule.

L'algorithme utilisé pour cette simulation est le suivant :

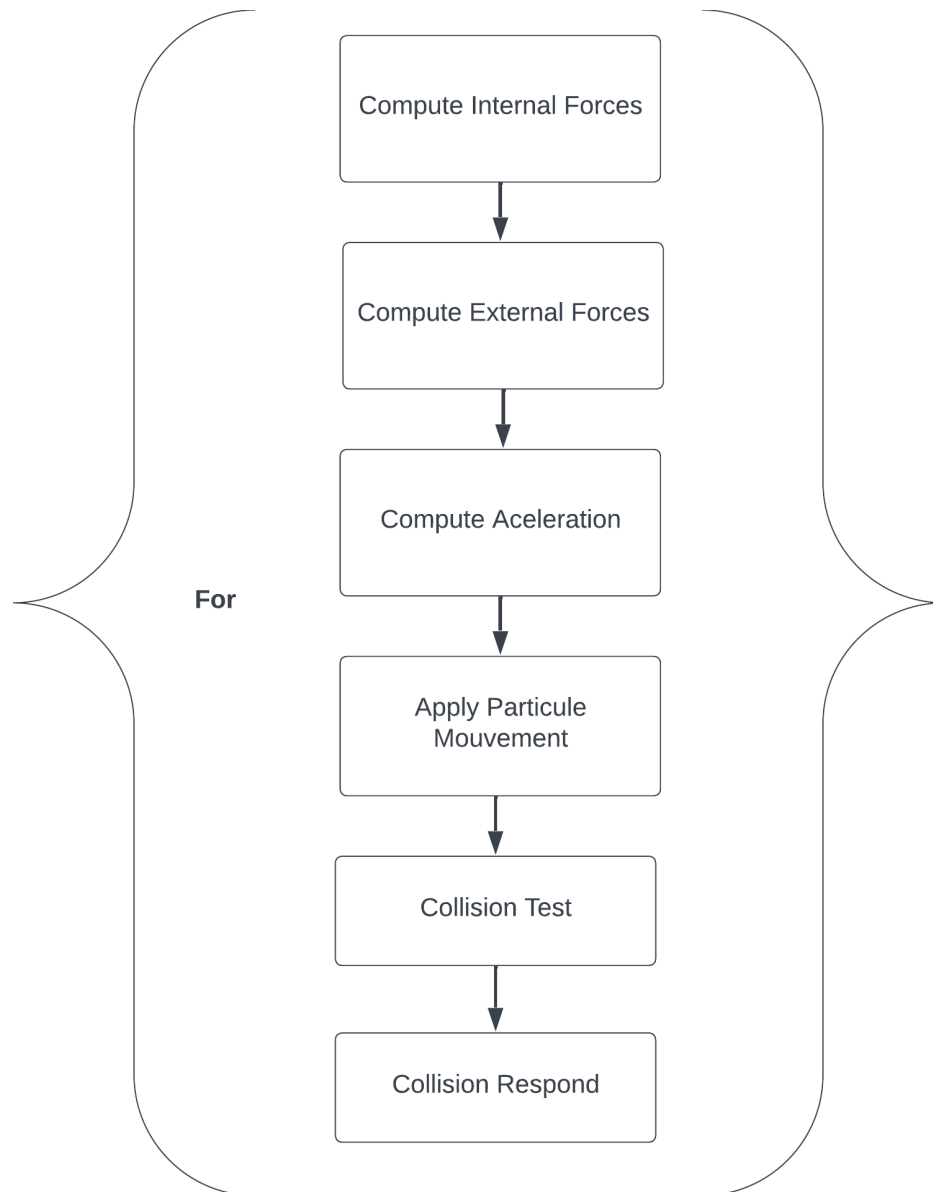


Tout d'abord au lancement de la simulation, on va initialiser tous les paramètres de nos fluides et créer nos particules de fluide. La première étape est la création du fluide en remplissant tous ses attributs comme sa masse volumique ou encore sa densité. La deuxième étape est divisée en deux est parallélisée par l'ordinateur. On va d'abord créer nos particules de fluide et les ranger dans une liste les contenant toutes. L'étape parallèle à cette création est la création et l'initialisation du kernel permettant de trouver les voisins de chaque particule. Cet objet nous servira plus tard dans la simulation.

Un fois l'étape d'initialisation finie pour notre simulation, on peut passer la partie de l'algorithme qui est exécuté à chaque frame. Il est construit en deux boucles de calculs séparée.



Voici la première boucle de calcul qui itérât sur toutes les particules du fluide. Son objectif est récolté des informations sur la particule et son status. Premièrement, on a cherché les particules voisines à la particule testée. On va les ranger dans une liste temporaire et on va les utiliser pour calculer la densité de masse de notre particule, ensuite on va calculer la pression sur la particule testée.

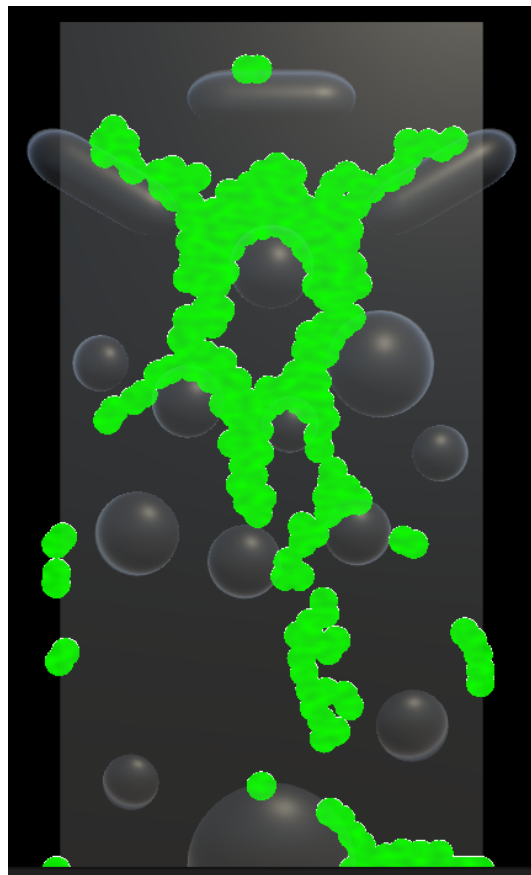


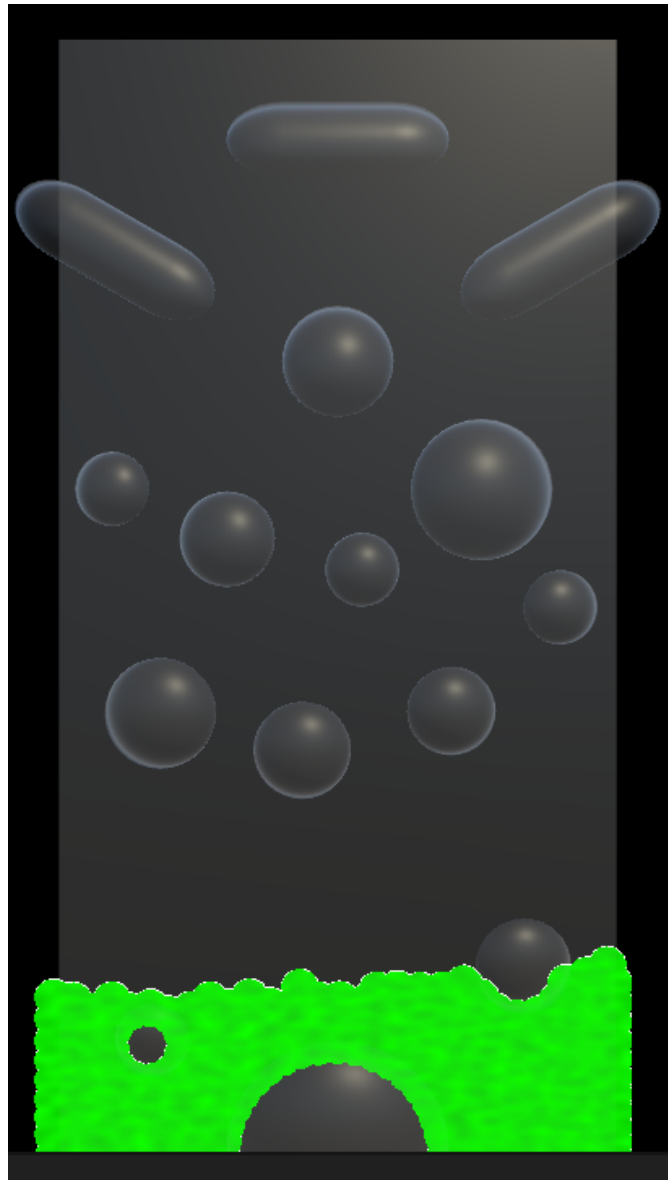
Seconde boucle calcul de l'algorithme SPH

Cette seconde boucle commence lorsqu'on finit de faire la première boucle. La première étape de cette boucle est le calcul de force interne à la particule puis le calcul des forces externes à la particule comme la gravité et enfin on va calculer le vecteur d'accélération de la particule. Une fois tous ses calculs fait, on applique le mouvement de la particule. Après qu'on est bougée la particule, on test si elle collision avec le décor si oui alors produire une réponse qui affectera la position de la particule.

Les comportements que l'on peut observer dans notre simulation sont un comportement visqueux de notre liquide ou encore des vagues lorsqu'un objet pénètre dans le fluide.

Le premier fluide simulé est du slime.





Le second fluide simulé est de l'eau.

