1 Линейная Алгебра

1.1 Линейное (векторное) пространство

Линейное пространство – это набор элементов (векторов), для которых определена операция сложения и умножения на число. Эти операции должны подчиняться набору аксиом.

Детальная статья в Википедии: Векторное пространство. В этой же статье:

- Линейная комбинация векторов
- Подпространство
- Линейная (не)зависимость векторов
- Базис, размерность (ранг)
- Норма вектора

1.2 Системы линейных уравнений

Урок на Stepik: Существование систем линейных уравнений.

Рассмотрим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{aligned}$$

В такой системе количество уравнений совпадает с количеством неизвестных. Запишем систему в следующем виде:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

В таком виде задачу о нахождении решения данной системы можно рассматривать как задачу о представлении вектора $\mathbf{b}$ в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ и $\mathbf{a_3}$.

Если вектора $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ и $\mathbf{a_3}$ образуют базис, то решение у такой системы существует при любом векторе $\mathbf{b}$, причем такое решение будет единственным. Если же эти вектора базис не образуют, то решение у системы будет существовать только в том случае, если вектор $\mathbf{b}$ будет принадлежать подпространству, пораждаемому векторами $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ и $\mathbf{a_3}$, причем решений в таком случае будет бесконечно много.

Аналогичные утверждения верны и для системы линейных уравнений с n уравнениями и n неизвестными.