

## Содержание

<b>1</b>	<b>Линейная Алгебра</b>	<b>1</b>
1.1	Линейное (векторное) пространство . . . . .	1
1.2	Линейная зависимость и независимость векторов . . . . .	2
1.3	Размерность линейного пространства. Базис. . . . .	2
1.4	Подпространство . . . . .	2
1.5	Системы линейных уравнений . . . . .	2
1.5.1	Частный случай. Число уравнений равно числу неиз- вестных. . . . .	3
1.5.2	Общий случай . . . . .	3
1.6	Решение систем линейных уравнений. Метод Гаусса. . . . .	4
1.7	Евклидово пространство . . . . .	4
1.7.1	Скалярное произведение . . . . .	4
1.7.2	Угол между векторами, длина вектора . . . . .	5
1.8	Операторы и базис . . . . .	6
1.8.1	Ортонормированный базис . . . . .	6
1.9	Линейные операторы . . . . .	6
1.9.1	Ядро и образ оператора . . . . .	6
1.9.2	Собственные числа и собственные векторы . . . . .	6
1.10	Определитель матрицы . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Математический анализ</b>	<b>7</b>
2.1	Вещественные числа . . . . .	7
2.1.1	Принцип математической индукции . . . . .	7
2.1.2	Принцип Архимеда . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Теория вероятностей</b>	<b>8</b>
3.1	Вероятностная модель эксперимента . . . . .	8

## 1 Линейная Алгебра

### 1.1 Линейное (векторное) пространство

Линейное пространство – это набор элементов (векторов), для которых определена операция сложения и умножения на число. Эти операции должны подчиняться определенному набору аксиом.

Детальная статья в Википедии (в которой в том числе перечислены все аксиомы): Векторное пространство.

Примеры линейных (векторных) пространств:

- Множество векторов на плоскости.
- Множество всех матриц размерности  $m \times n$ .

- Множество всех многочленов степени не выше  $n$ :

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$$

## 1.2 Линейная зависимость и независимость векторов

Рассмотрим набор векторов  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Данный набор векторов является **линейно зависимым**, если существуют такие числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , что хотя бы одно из этих чисел не равно нулю, и при этом выполнено равенство

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n = 0$$

Если же равенство выше равно нулю только в том случае, если все числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  равны нулю, то данный набор векторов называется **линейно независимым**.

## 1.3 Размерность линейного пространства. Базис.

Рассмотрим линейное пространство  $L$ . Рассмотрим набор из  $n$  векторов

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

принадлежащих этому пространству. Предположим, что этот набор векторов является линейно независимым и при этом любой набор из  $n + 1$  векторов из этого же пространства является линейно зависимым. В таком случае  $L$  называется  $n$ -мерным векторным пространством, и размерность этого пространства  $\dim(L) = n$ .

Вектора  $v_1, v_2, \dots, v_n$  образуют **базис** этого линейного пространства. Любой вектор  $u \in L$  можно единственным образом представить в виде линейной комбинации векторов базиса.

## 1.4 Подпространство

Множество векторов

$$u_1, u_2, \dots, u_m$$

принадлежащих  $L$ , образует **подпространство**  $M$ , если для этих векторов заданы те же операции сложения и умножения на число, что и в исходном пространстве, и при этом любой вектор  $u$ , который является результатом выполнения этих операций, также принадлежит  $M$ .

## 1.5 Системы линейных уравнений

Урок на Stepik: Существование систем линейных уравнений.

### 1.5.1 Частный случай. Число уравнений равно числу неизвестных.

Рассмотрим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3\end{aligned}$$

В такой системе количество уравнений совпадает с количеством неизвестных. Запишем систему в следующем виде:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

В таком виде задачу о нахождении решения данной системы можно рассматривать как задачу о представлении вектора  $\mathbf{b}$  в виде линейной комбинации векторов  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{a}_3$ .

Если вектора  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{a}_3$  образуют базис, то решение у такой системы существует при любом векторе  $\mathbf{b}$ , причем такое решение будет единственным. Если же эти вектора базис не образуют, то решение у системы будет существовать только в том случае, если вектор  $\mathbf{b}$  будет принадлежать подпространству, порождаемому векторами  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{a}_3$ , причем решений в таком случае будет бесконечно много.

Аналогичные утверждения верны и для системы линейных уравнений с  $n$  уравнениями и  $n$  неизвестными.

### 1.5.2 Общий случай

Рассмотрим теперь более общий случай. А именно, рассмотрим систему, состоящую из  $n$  линейных уравнений с  $m$  неизвестными:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\&\dots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n\end{aligned}$$

Перепишем систему в следующем виде:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_m \cdot \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

В таком виде задачу о нахождении решения для данной системы уравнений можно рассматривать как задачу о представлении вектора  $\mathbf{b}$  в виде

линейной комбинации векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ , каждый из которых является элементом  $n$ -мерного линейного пространства.

Рассмотрим линейное подпространство минимальной размерности, которое содержит все эти  $m$  векторов. Такое подпространство также называется линейной оболочкой, образуемой данными векторами. Размерность такого подпространства (линейной оболочки) называется **рангом** системы линейных уравнений.

Касательно существования решения для системы таких уравнений. Возможны два случая:

- Если вектор  $b$  не принадлежит данной линейной оболочке, то решений у системы нет.
- Если вектор  $b$  принадлежит данной линейной оболочке то, решение существует. При этом если  $n = m$ , то решение будет единственным, так как набор векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  будет образовывать базис. Если же число векторов больше, чем размерность линейной оболочки, то система будет иметь бесконечно много решений.

## 1.6 Решение систем линейных уравнений. Метод Гаусса.

Урок на Stepik: Решение систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса.

Основная идея метода Гаусса заключается в том, чтобы с помощью операций сложения и умножения на число последовательно исключать переменные, приводя матрицу коэффициентов к треугольному (диагональному виду). Имея матрицу в таком виде, можно затем последовательно найти значения всех неизвестных.

## 1.7 Евклидово пространство

### 1.7.1 Скалярное произведение

Для двух векторов  $u, v$ , принадлежащих некоторому линейному пространству  $L$ , скалярным произведением называется операция, которая этим двум векторам сопоставляет некоторое вещественное число:

$$(u, v) = c : c \in \mathbb{R}.$$

При этом такая операция должна удовлетворять 4-м аксиомам:

1.  $(x, y) = (y, x)$
2.  $(\lambda x, y) = \lambda \cdot (x, y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$3. (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$$

$$4. (x, x) \geq 0$$

Линейное (векторное) пространство с введенной на нем вышеописанной операцией скалярного произведения, называется **Евклидовым пространством**.

Для векторов  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  примером скалярного произведения может выступать сумма произведений их координат:

$$(u, v) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$$

### 1.7.2 Угол между векторами, длина вектора

Для векторов на плоскости скалярное произведение можно ввести следующим образом:

$$(x, y) = |x| \cdot |y| \cdot \cos(x, y)$$

Выразим отсюда косинус угла между векторами:

$$\cos(x, y) = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} = \cos(\alpha)$$

Из этого выражения получим, что **угол между векторами** можно найти следующим образом:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}\right)$$

Рассмотрим теперь выражение для скалярного произведения, в котором  $y = x$ .

$$(x, x) = |x| \cdot |x| \cdot \cos(x, x) = |x|^2$$

Отсюда получим, что **длина вектора**  $x$  есть

$$|x| = \sqrt{(x, x)}$$

То есть, если мы знаем, чему равно скалярное произведение, то мы можем найти угол между векторами, а также длину вектора.

Данные понятия можно обобщить на случай произвольного векторного пространства. А именно, длину произвольного вектора  $x$  можно определить как квадратный корень из скалярного произведения этого вектора на самого себя:

$$|x| = \sqrt{(x, x)}$$

Угол  $\phi$  между произвольными векторами  $x, y$  есть

$$\phi = \arccos \left( \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \right)$$

Для векторов на плоскости скалярное произведение будет равно нулю, если векторы ортогональны, то есть  $\phi = \frac{\pi}{2}$ . Два произвольных вектора будем называть **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю.

## 1.8 Операторы и базис

Урок на Stepik: Ортогональный базис.

### 1.8.1 Ортонормированный базис

Рассмотрим набор векторов  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  таких, что

1.  $(e_i, e_j) = 0 \quad \forall i, j : i \neq j.$
2.  $(e_i, e_j) = 1 \quad \forall i, j : i = j.$

Такой набор векторов называется ортонормированным набором векторов в линейном пространстве со скалярным произведением.

Уроки на Stepik:

- Как произвольный базис преобразовать в ортонормированный
- Метод наименьших квадратов

## 1.9 Линейные операторы

Оператор  $A : A \cdot x = y$  называется линейным оператором, если выполнены следующие аксиомы:

1.  $A \cdot (x_1 + x_2) = A \cdot x_1 + A \cdot x_2$
2.  $A(\lambda x) = \lambda \cdot Ax$

### 1.9.1 Ядро и образ оператора

...

### 1.9.2 Собственные числа и собственные векторы

...

## 1.10 Определитель матрицы

Урок на Stepik: Определитель матрицы.

## 2 Математический анализ

### 2.1 Вещественные числа

Урок на Stepik: Вещественные числа.

Введем понятие вещественных чисел аксиоматически. Вещественные числа, это такие числа, которые удовлетворяют определенному набору аксиом.

**Первый набор аксиом** касается алгебраической структуры чисел. Рассмотрим две операции – операции сложения и умножения на число, которые любой паре вещественных чисел сопоставляют вещественное число:  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Такие операции должны удовлетворять 9-ти аксиомам:

- Ассоциативность и коммутативность по сложению и умножению.
- Существование нейтрального и обратного элемента (для сложения и умножения).
- Дистрибутивность.

**Второй набор аксиом** касается порядковой структуры (отношение порядка). Для любых двух вещественных чисел  $x$  и  $y$  мы должны уметь определять, является ли  $x$  меньшим, либо равным  $y$  ( $x \leq y$ ). Такое отношение порядка должно удовлетворять следующему набору аксиом:

- Рефлексивность:  $x \leq x$
- Транзитивность:  $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- Антисимметричность  $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$
- Любые два вещественных числа должны быть сравнимы, то есть  $\forall x, y$  можно однозначно сказать, верно ли, что  $x \leq y$
- Если  $x \leq y$ , то  $x + z \leq y + z$
- Если  $0 \leq x$  и  $0 \leq y$ , то  $0 \leq xy$

**Аксиома полноты:**  $\forall A, B \subset \mathbb{R}$  и  $\forall x, y : x \in A, y \in B$  и при этом  $x \leq y$ , найдется  $z \in R$ , такое, что  $x \leq z \leq y$ .

#### 2.1.1 Принцип математической индукции

...

#### 2.1.2 Принцип Архимеда

...

## 3 Теория вероятностей

Урок на Stepik: Теория вероятностей.

### 3.1 Вероятностная модель эксперимента

Рассмотрим эксперимент, в котором возможно конечное число исходов

$$\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

Каждое  $w_i$  будем называть элементарными событиями,  $\Omega$  — пространством элементарных событий (пространством исходов). Рассмотрим примеры. ...