

1 Линейная Алгебра

1.1 Линейное (векторное) пространство

Линейное пространство — это набор элементов (векторов), для которых определена операция сложения и умножения на число. Эти операции должны подчиняться определенному набору аксиом.

Детальная статья в Википедии (в которой в том числе перечислены все аксиомы): Векторное пространство.

Примеры линейных (векторных) пространств:

- Множество векторов на плоскости.
- Множество всех матриц размерности $m \times n$.
- Множество всех многочленов степени не выше n :
$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$$

1.2 Линейная зависимость и независимость векторов

Рассмотрим набор векторов v_1, v_2, \dots, v_n . Данный набор векторов является **линейно зависимым**, если существуют такие числа a_1, a_2, \dots, a_n , что хотя бы одно из этих чисел не равно нулю, и при этом выполнено равенство

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n = 0$$

Если же равенство выше равно нулю только в том случае, если все числа a_1, a_2, \dots, a_n равны нулю, то данный набор векторов называется **линейно независимым**.

1.3 Размерность линейного пространства. Базис.

Рассмотрим линейное пространство L . Рассмотрим набор из n векторов

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

принадлежащих этому пространству. Предположим, что этот набор векторов является линейно независимым и при этом любой набор из $n + 1$ векторов из этого же пространства является линейно зависимым. В таком случае L называется n -мерным векторным пространством, и размерность этого пространства $\dim(L) = n$.

Вектора v_1, v_2, \dots, v_n образуют **базис** этого линейного пространства. Любой вектор $u \in L$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации векторов базиса.

1.4 Подпространство

Множество векторов

$$u_1, u_2, \dots, u_m$$

принадлежащих L , образует **подпространство** M , если для этих векторов заданы те же операции сложения и умножения на число, что и в исходном пространстве, и при этом любой вектор u , который является результатом выполнения этих операций, также принадлежит M .

1.5 Системы линейных уравнений

Урок на Stepik: Существование систем линейных уравнений.

1.5.1 Частный случай. Число уравнений равно числу неизвестных.

Рассмотрим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3\end{aligned}$$

В такой системе количество уравнений совпадает с количеством неизвестных. Запишем систему в следующем виде:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

В таком виде задачу о нахождении решения данной системы можно рассматривать как задачу о представлении вектора \mathbf{b} в виде линейной комбинации векторов \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 и \mathbf{a}_3 .

Если вектора \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 и \mathbf{a}_3 образуют базис, то решение у такой системы существует при любом векторе \mathbf{b} , причем такое решение будет единственным. Если же эти вектора базис не образуют, то решение у системы будет существовать только в том случае, если вектор \mathbf{b} будет принадлежать подпространству, порождаемому векторами \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 и \mathbf{a}_3 , причем решений в таком случае будет бесконечно много.

Аналогичные утверждения верны и для системы линейных уравнений с n уравнениями и n неизвестными.

1.5.2 Общий случай

Рассмотрим теперь более общий случай. А именно, рассмотрим систему, состоящую из n линейных уравнений с m неизвестными:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\&\dots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n\end{aligned}$$

Перепишем систему в следующем виде:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_m \cdot \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

В таком виде задачу о нахождении решения для данной системы уравнений можно рассматривать как задачу о представлении вектора \mathbf{b} в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$, каждый из которых является элементом n -мерного линейного пространства.

Рассмотрим линейное подпространство минимальной размерности, которое содержит все эти m векторов. Такое подпространство также называется линейной оболочкой, образуемой данными векторами. Размерность такого подпространства (линейной оболочки) называется **рангом** системы линейных уравнений.

Касательно существования решения для системы таких уравнений. Возможны два случая:

- Если вектор b не принадлежит данной линейной оболочке, то решений у системы нет.
- Если вектор b принадлежит данной линейной оболочке то, решение существует. При этом если $n = m$, то решение будет единственным, так как набор векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ будет образовывать базис. Если же число векторов больше, чем размерность линейной оболочки, то система будет иметь бесконечно много решений.

1.6 Решение систем линейных уравнений. Метод Гаусса.

Урок на Stepik: Решение систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса.

Основная идея метода Гаусса заключается в том, чтобы с помощью операций сложения и умножения на число последовательно исключать переменные, приводя матрицу коэффициентов к треугольному (диагональному

виду). Имея матрицу в таком виде, можно затем последовательно найти значения всех неизвестных.