

# Содержание

<b>1</b>	<b>Линейная Алгебра</b>	<b>2</b>
1.1	Линейное (векторное) пространство . . . . .	2
1.2	Линейная зависимость и независимость векторов . . . . .	2
1.3	Размерность линейного пространства. Базис. . . . .	2
1.4	Подпространство . . . . .	3
1.5	Системы линейных уравнений . . . . .	3
1.5.1	Частный случай. Число уравнений равно числу неиз- вестных. . . . .	3
1.5.2	Общий случай . . . . .	4
1.6	Решение систем линейных уравнений. Метод Гаусса. . . . .	4
1.7	Евклидово пространство . . . . .	5
1.7.1	Скалярное произведение . . . . .	5
1.7.2	Угол между векторами, длина вектора . . . . .	5
1.8	Операторы и базис . . . . .	6
1.8.1	Ортонормированный базис . . . . .	6
1.9	Линейные операторы . . . . .	7
1.9.1	Ядро и образ оператора . . . . .	7
1.9.2	Собственные числа и собственные векторы . . . . .	7
1.10	Матрицы. Произведение. Определитель и ранг . . . . .	7
1.11	Уравнение прямой. Пересечение прямых. . . . .	7
<b>2</b>	<b>Математический анализ</b>	<b>8</b>
2.1	Вещественные числа . . . . .	8
2.2	Последовательности. Предел последовательности. . . . .	8
2.3	Функции. Предел функции. Непрерывность. . . . .	9
2.3.1	Функции. Предел функции . . . . .	9
2.3.2	Непрерывность функции . . . . .	9
2.4	Производные 1 . . . . .	9
2.5	Производные 2 . . . . .	10
2.5.1	Разложение функции в ряд Тейлора . . . . .	10
2.5.2	Необходимые и достаточные условия экстремума функ- ции . . . . .	11
2.6	Интегралы 1 . . . . .	11
2.7	Интегралы 2 . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Теория вероятностей</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Комбинаторика</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Теория графов</b>	<b>12</b>
5.1	Потоки и сети . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Линейное программирование</b>	<b>13</b>
<b>7</b>	<b>Другое</b>	<b>13</b>

# 1 Линейная Алгебра

## 1.1 Линейное (векторное) пространство

Линейное пространство — это набор элементов (векторов), для которых определена операция сложения и умножения на число. Эти операции должны подчиняться определенному набору аксиом.

Детальная статья в Википедии (в которой в том числе перечислены все аксиомы): Векторное пространство.

Примеры линейных (векторных) пространств:

- Множество векторов на плоскости.
- Множество всех матриц размерности  $m \times n$ .
- Множество всех многочленов степени не выше  $n$ :  
$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$$

## 1.2 Линейная зависимость и независимость векторов

Рассмотрим набор векторов  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Данный набор векторов является **линейно зависимым**, если существуют такие числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , что хотя бы одно из этих чисел не равно нулю, и при этом выполнено равенство

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n = 0$$

Если же равенство выше равно нулю только в том случае, если все числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  равны нулю, то данный набор векторов называется **линейно независимым**.

## 1.3 Размерность линейного пространства. Базис.

Рассмотрим линейное пространство  $L$ . Рассмотрим набор из  $n$  векторов

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

принадлежащих этому пространству. Предположим, что этот набор векторов является линейно независимым и при этом любой набор из  $n + 1$  векторов из этого же пространства является линейно зависимым. В таком случае  $L$  называется  $n$ -мерным векторным пространством, и размерность этого пространства  $\dim(L) = n$ .

Вектора  $v_1, v_2, \dots, v_n$  образуют **базис** этого линейного пространства. Любой вектор  $u \in L$  можно единственным образом представить в виде линейной комбинации векторов базиса.

## 1.4 Подпространство

Множество векторов

$$u_1, u_2, \dots, u_m$$

принадлежащих  $L$ , образует **подпространство**  $M$ , если для этих векторов заданы те же операции сложения и умножения на число, что и в исходном пространстве, и при этом любой вектор  $u$ , который является результатом выполнения этих операций, также принадлежит  $M$ .

## 1.5 Системы линейных уравнений

Урок на Stepik: Существование решений систем линейных уравнений.

### 1.5.1 Частный случай. Число уравнений равно числу неизвестных.

Рассмотрим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3\end{aligned}$$

В такой системе количество уравнений совпадает с количеством неизвестных. Запишем систему в следующем виде:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

В таком виде задачу о нахождении решения данной системы можно рассматривать как задачу о представлении вектора  $\mathbf{b}$  в виде линейной комбинации векторов  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{a}_3$ .

Если вектора  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{a}_3$  образуют базис, то решение у такой системы существует при любом векторе  $\mathbf{b}$ , причем такое решение будет единственным. Если же эти вектора базис не образуют, то решение у системы будет существовать только в том случае, если вектор  $\mathbf{b}$  будет принадлежать подпространству, порождаемому векторами  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{a}_3$ , причем решений в таком случае будет бесконечно много.

Аналогичные утверждения верны и для системы линейных уравнений с  $n$  уравнениями и  $n$  неизвестными.

### 1.5.2 Общий случай

Рассмотрим теперь более общий случай. А именно, рассмотрим систему, состоящую из  $n$  линейных уравнений с  $m$  неизвестными:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\&\dots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n\end{aligned}$$

Перепишем систему в следующем виде:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_m \cdot \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

В таком виде задачу о нахождении решения для данной системы уравнений можно рассматривать как задачу о представлении вектора  $\mathbf{b}$  в виде линейной комбинации векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ , каждый из которых является элементом  $n$ -мерного линейного пространства.

Рассмотрим линейное подпространство минимальной размерности, которое содержит все эти  $m$  векторов. Такое подпространство также называется линейной оболочкой, образуемой данными векторами. Размерность такого подпространства (линейной оболочки) называется **рангом** системы линейных уравнений.

Касательно существования решения для системы таких уравнений. Возможны два случая:

- Если вектор  $b$  не принадлежит данной линейной оболочке, то решений у системы нет.
- Если вектор  $b$  принадлежит данной линейной оболочке то, решение существует. При этом если  $n = m$ , то решение будет единственным, так как набор векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  будет образовывать базис. Если же число векторов больше, чем размерность линейной оболочки, то система будет иметь бесконечно много решений.

## 1.6 Решение систем линейных уравнений. Метод Гаусса.

Урок на Stepik: Решение систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса.

Основная идея метода Гаусса заключается в том, чтобы с помощью операций сложения и умножения на число последовательно исключать переменные, приводя матрицу коэффициентов к треугольному (диагональному

виду). Имея матрицу в таком виде, можно затем последовательно найти значения всех неизвестных.

Статья и примеры в wiki: Gaussian Elimination. (в том числе используется для того, чтобы найти ранг и определитель матрицы).

## 1.7 Евклидово пространство

### 1.7.1 Скалярное произведение

Для двух векторов  $u, v$ , принадлежащих некоторому линейному пространству  $L$ , скалярным произведением называется операция, которая этим двум векторам сопоставляет некоторое вещественное число:

$$(u, v) = c : c \in \mathbb{R}.$$

При этом такая операция должна удовлетворять 4-м аксиомам:

1.  $(x, y) = (y, x)$
2.  $(\lambda x, y) = \lambda \cdot (x, y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
3.  $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
4.  $(x, x) \geq 0$

Линейное (векторное) пространство с введенной на нем вышеописанной операцией скалярного произведения, называется **Евклидовым пространством**.

Для векторов  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  примером скалярного произведения может выступать сумма произведений их координат:

$$(u, v) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$$

### 1.7.2 Угол между векторами, длина вектора

Для векторов на плоскости скалярное произведение можно ввести следующим образом:

$$(x, y) = |x| \cdot |y| \cdot \cos(x, y)$$

Выразим отсюда косинус угла между векторами:

$$\cos(x, y) = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} = \cos(\alpha)$$

Из этого выражения получим, что **угол между векторами** можно найти следующим образом:

$$\alpha = \arccos \left( \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \right)$$

Рассмотрим теперь выражение для скалярного произведения, в котором  $y = x$ .

$$(x, x) = |x| \cdot |x| \cdot \cos(x, x) = |x|^2$$

Отсюда получим, что **длина вектора**  $x$  есть

$$|x| = \sqrt{(x, x)}$$

То есть, если мы знаем, чему равно скалярное произведение, то мы можем найти угол между векторами, а также длину вектора.

Данные понятия можно обобщить на случай произвольного векторного пространства. А именно, длину произвольного вектора  $x$  можно определить как квадратный корень из скалярного произведения этого вектора на самого себя:

$$|x| = \sqrt{(x, x)}$$

Угол  $\phi$  между произвольными векторами  $x, y$  есть

$$\phi = \arccos \left( \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \right)$$

Для векторов на плоскости скалярное произведение будет равно нулю, если векторы ортогональны, то есть  $\phi = \frac{\pi}{2}$ . Два произвольных вектора будем называть **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю.

## 1.8 Операторы и базис

Урок на Stepik: Ортогональный базис.

### 1.8.1 Ортонормированный базис

Рассмотрим набор векторов  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  таких, что

1.  $(e_i, e_j) = 0 \quad \forall i, j : i \neq j.$
2.  $(e_i, e_j) = 1 \quad \forall i, j : i = j.$

Такой набор векторов называется ортонормированным набором векторов в линейном пространстве со скалярным произведением.

Уроки на Stepik:

- Как произвольный базис преобразовать в ортонормированный
- Метод наименьших квадратов

## 1.9 Линейные операторы

Оператор  $A : A \cdot x = y$  называется линейным оператором, если выполнены следующие аксиомы:

1.  $A \cdot (x_1 + x_2) = A \cdot x_1 + A \cdot x_2$
2.  $A(\lambda x) = \lambda \cdot Ax$

Пример линейного оператора в двумерном пространстве - оператор поворота на угол  $\alpha$ :

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы задать оператор, достаточно выяснить, как этот оператор действует на базисные вектора линейного пространства.

### 1.9.1 Ядро и образ оператора

- Ядро оператора - это все вектора, которые данный оператор обращает в нулевой вектор.
- Образ оператора - это множество всех ненулевых векторов, которые получаются в результате действия данного оператора.

### 1.9.2 Собственные числа и собственные векторы

$u$  - собственный вектор линейного оператора  $A$ , если  $Au = \lambda u$ .  $\lambda$  - собственное число оператора.

- Eigenvalues and eigenvectors
- характеристический многочлен и характеристическое уравнение
- следствие из основной теоремы алгебры

## 1.10 Матрицы. Произведение. Определитель и ранг.

- Урок на Stepik: Определитель матрицы.
- Статья в Wiki: Determinant.
- Произведение матриц: Matrix multiplication.
- Общая статья про матрицы: Matrix
- Ранг матрицы:

Определитель матрицы - это некоторое число, которое характеризует данную матрицу. Формальное определение определителя (формула Лейбница).

## 1.11 Уравнение прямой. Пересечение прямых.

Лекция: прямая на плоскости

## 2 Математический анализ

### 2.1 Вещественные числа

Урок на Stepik: Вещественные числа.

Введем понятие вещественных чисел аксиоматически. Вещественные числа, это такие числа, которые удовлетворяют определенному набору аксиом.

**Первый набор аксиом** касается алгебраической структуры чисел. Рассмотрим две операции – операции сложения и умножения на число, которые любой паре вещественных чисел сопоставляют вещественное число:  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Такие операции должны удовлетворять 9-ти аксиомам:

- Ассоциативность и коммутативность по сложению и умножению.
- Существование нейтрального и обратного элемента (для сложения и умножения).
- Дистрибутивность.

**Второй набор аксиом** касается порядковой структуры (отношение порядка). Для любых двух вещественных чисел  $x$  и  $y$  мы должны уметь определять, является ли  $x$  меньшим, либо равным  $y$  ( $x \leq y$ ). Такое отношение порядка должно удовлетворять следующему набору аксиом:

- Рефлексивность:  $x \leq x$
- Транзитивность:  $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- Антисимметричность  $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$
- Любые два вещественных числа должны быть сравнимы, то есть  $\forall x, y$  можно однозначно сказать, верно ли, что  $x \leq y$
- Если  $x \leq y$ , то  $x + z \leq y + z$
- Если  $0 \leq x$  и  $0 \leq y$ , то  $0 \leq xy$

**Аксиома полноты:**  $\forall A, B \subset \mathbb{R}$  и  $\forall x, y : x \in A, y \in B$  и при этом  $x \leq y$ , найдется  $z \in R$ , такое, что  $x \leq z \leq y$ .

### 2.2 Последовательности. Предел последовательности.

**Последовательностью** будем называть произвольное отображение из множества натуральных чисел в множество вещественных чисел:  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Примеры последовательностей:

- $x_n = n^2$



- $x_n = \frac{1}{n}$

Число  $a$  называется **пределом** последовательности  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  если

$$\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n > N |x_n - a| < \epsilon.$$

## 2.3 Функции. Предел функции. Непрерывность.

### 2.3.1 Функции. Предел функции

Функцией  $f : (\mathbb{E} \subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  будем называть некоторое правило, по которому каждому элементу множества  $E$  ставится в соответствие некоторое вещественное число.

**Определение предела функции** (по Коши). Число  $A$  называется пределом функции  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $a$ , если

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E : x \neq a, |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \epsilon$$

Определение на языке пределов:  $A$  – предел функции  $f$  в точке  $a$ , если для любой последовательности  $\{x_n\} \in E$ , такой, что  $x_n \neq a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  верно  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

Wiki: Limit of a function.

### 2.3.2 Непрерывность функции

Пусть  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $a \in E$ , причем  $a$  – предельная точка множества  $E$ . Тогда  $f$  непрерывна в точке  $a$  если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Эквивалентное определение. Функция  $f$  непрерывна в точке  $a$ , если

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Wiki: непрерывная функция.

## 2.4 Производные 1

Материалы на Stepik:

- Дифференцируемость и производная
- Геометрический смысл производной
- Правила дифференцирования
- Производные основных элементарных функций

- Теоремы о среднем
- Производная и монотонность
- Правило Лопиталя

Будем говорить, что функция  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$  если существует такое число  $k \in \mathbb{R}$ , что

$$f(x) = f(x_0) + k \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$$

То есть значение функции в точке  $x_0$  можно посчитать так, как описано выше.

Производной функции  $f$  в точке  $x_0$  называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Значение производной в заданной точке равно угловому коэффициенту касательной в этой точке (геометрический смысл производной).

**Теорема Ферма.** Пусть  $f$  - функция, заданная на промежутке  $< a, b > \rightarrow \mathbb{R}$  и дифференцируема в точке  $x_0 \in (a, b)$ . Пусть  $f(x_0)$  - максимум или минимум функции  $f$  в точке  $x_0$ . Тогда  $f'(x_0) = 0$ .

**Условия монотонности функций.** Пусть  $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда функция  $f$  возрастает на  $< a, b >$  тогда и только тогда, когда  $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$ . Если  $f'(x) > 0$ , то функция строго возрастает.

## 2.5 Производные 2

Материалы на Stepik:

- Формула Тейлора
- Экстремумы функции

### 2.5.1 Разложение функции в ряд Тейлора

Рядом Тейлора называется выражение вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Если для функции  $f$  все её производные ограничены некоторой константой  $M$ , то

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

В частности

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

### 2.5.2 Необходимые и достаточные условия экстремума функции

Для того, чтобы точка  $x_0$  являлась экстремумом функции  $f$ , необходимо, чтобы  $f'(x_0) = 0$ . Но если последнее выполнено, то это не значит, что точка  $x_0$  является экстремумом. Достаточные условия того, что точка  $x_0$  - экстремум, такие:

- Если  $f''(x_0) < 0$ , то  $x_0$  - точка максимума.
- Если  $f''(x_0) > 0$ , то  $x_0$  - точка минимума.

## 2.6 Интегралы 1

- Первообразная и неопределенный интеграл
- Действия с неопределенными интегралами
- Площади
- Определенный интеграл

Функция  $F(x)$  - первообразная функции  $f(x)$ , если  $F'(x) = f(x)$ .

Неопределенным интегралом для функции  $f$  называется множество всех первообразных этой функции:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

- Таблица основных интегралов.
- Действия с неопределенными интегралами
- Определенный интеграл

Рассмотрим функцию  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Определенным интегралом  $f$  по отрезку  $[a, b]$  назовем разность положительных и отрицательных составляющих площадей функции. Обозначение:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

## 2.7 Интегралы 2

- Равномерная непрерывность
- Интегральные суммы

## 3 Теория вероятностей

См. stepik-notes

## 4 Комбинаторика

См. stepik-notes

## 5 Теория графов

### 5.1 Потоки и сети

Урок на Stepik: Потоки и сети.

Под **сетью** будем понимать некоторый ориентированный граф  $G(V, E, s, t, c)$ , где

- $V$  - множество вершин
- $E$  - множество ребер
- Существует вершина  $s \in V$  такая, что  $\text{indeg}(s) = 0$ . Будем называть такую вершину **исток**ом.
- Существует вершина  $t \in V$  такая, что  $\text{outdeg}(t) = 0$ . Будем называть такую вершину **сток**ом.
- Задана функция  $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ , которая любому ребру  $(x, y) \in E$  ставит в соответствие некоторое вещественное неотрицательное число  $c(x, y)$ .

Функцию  $c(x, y)$  будем называть **пропускной способностью** этой цепи.

Рассмотрим функцию  $f$ , которая каждому ребру графа  $G$  ставит в соответствие вещественное неотрицательное число  $f(x, y)$ . Пусть для функции  $f$  выполняются следующие ограничения:

- Для всех ребер  $(x, y) \in E$  верно, что  $f(x, y) \leq c(x, y)$ .
- Для любой вершины  $y$  отличной от  $s$  и  $t$  верно, что

$$\sum_{x:(x,y) \in E} f(x, y) = \sum_{z:(y,z) \in E} f(y, z)$$

Тогда  $f(x, y)$  будем называть **потоком**, проходящим через ребро  $(x, y)$ . **Величиной потока** будем называть величину  $Q$ , определяемую так:

$$Q = \sum_{x:(s,x) \in E} f(s, x)$$

Рассмотрим разбиение множества всех вершин графа  $G$  на два множества  $S$  и  $T$ :  $s \in S$  и  $t \in T$ . Рассмотрим множество ребер  $R(S, T)$ , исходящих из вершин множества  $S$  и входящих в вершины множества  $T$ . Будем называть такое множество **разрезом**. **Пропускной способностью**  $C(S, T)$  данного разреза будем называть следующую величину:

$$C(S, T) = \sum_{(x,y) \in R} c(x, y)$$

Заметим, что никакой поток  $Q$  не может превосходить величины  $C(S, T)$  никакого из разрезов  $R(S, T)$ . Рассмотрим разрез, в котором пропускная способность минимальна.

**Утверждение (Теорема Форда-Фалкерсона).** Величина максимального потока в сети совпадает величиной пропускной способности минимального разреза.

maxflow.4up.pdf (Лекция про потоки).

## 6 Линейное программирование

<https://stepik.org/lesson/8517/step/1?unit=2696>

Simplex Algorithm (Wiki)

## 7 Другое

- Арифметическая прогрессия
- Геометрическая прогрессия