Содержание

1 Линейная Алгебра

1.1 Линейное (векторное) пространство

Линейное пространство – это набор элементов (векторов), для которых определена операция сложения и умножения на число. Эти операции должны подчиняться определенному набору аксиом.

Детальная статья в Википедии (в которой в том числе перечислены все аксиомы): Векторное пространство.

Примеры линейных (векторных) пространств:

- Множество векторов на плоскости.
- Множество всех матриц размерности $m \times n$.
- Множество всех многочленов степени не выше n:
  $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n$

1.2 Линейная зависимость и независимость векторов

Рассмотрим набор векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Данный набор векторов является **линейно зависимым**, если существуют такие числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что хотя бы одно из этих чисел не равно нулю, и при этом выполнено равенство

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \cdots + a_n \cdot v_n = 0$$

Если же равенство выше равно нулю только в том случае, если все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны нулю, то данный набор векторов называется **линейно независимым**.

1.3 Размерность линейного пространства. Базис.

Рассмотрим линейное пространство L. Рассмотрим набор из n векторов

$$v_1, v_2, \ldots, v_n$$

принадлежащих этому пространству. Предположим, что этот набор векторов является линейно независимым и при этом любой набор из $n + 1$ векторов из этого же пространства является линейно зависимым. В таком случае L называется n-мерным векторным пространством, и размерность этого пространства $dim(L) = n$.

Вектора $v_1, v_2, \ldots, v_n$ образуют **базис** этого линейного пространства. Любой вектор $u \in L$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации векторов базиса.

1.4 Подпространство

Множество векторов

$$u_1, u_2, \cdots, u_m$$

принадлежащих L, образует **подпространство** M, если для этих векторов заданы те же операции сложения и умножения на число, что и в исходном пространстве, и при этом любой вектор u, который является результатом выполнения этих операций, также принадлежит M.

1.5 Системы линейных уравнений

Урок на Stepik: Существование решений систем линейных уравнений.

1.5.1 Частный случай. Число уравнений равно числу неизвестных.

Рассмотрим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{aligned}$$

В такой системе количество уравнений совпадает с количеством неизвестных. Запишем систему в следующем виде:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

В таком виде задачу о нахождении решения данной системы можно рассматривать как задачу о представлении вектора $\mathbf{b}$ в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ и $\mathbf{a_3}$.

Если вектора $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ и $\mathbf{a_3}$ образуют базис, то решение у такой системы существует при любом векторе $\mathbf{b}$, причем такое решение будет единственным. Если же эти вектора базис не образуют, то решение у системы будет существовать только в том случае, если вектор $\mathbf{b}$ будет принадлежать подпространству, пораждаемому векторами $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ и $\mathbf{a_3}$, причем решений в таком случае будет бесконечно много.

Аналогичные утверждения верны и для системы линейных уравнений с n уравнениями и n неизвестными.

1.5.2 Общий случай

Рассмотрим теперь более общий случай. А именно, рассмотрим систему, состоящую из n линейных уравнений с m неизвестными:

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\
\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n
\end{gathered}$$

Перепишем систему в следующем виде:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + x_m \cdot \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \cdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

В таком виде задачу о нахождении решения для данной системы уравнений можно рассматривать как задачу о представлении вектора $\mathbf{b}$ в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \cdots, \mathbf{a_m}$, каждый из которых является элементом n-мерного линейного пространства.

Рассмотрим линейное подпространство минимальной размерности, которое содержит все эти m векторов. Такое подпространство также называется линейной оболочкой, образуемой данными векторами. Размерность такого подпространства (линейной оболочки) называется **рангом** системы линейных уравнений.

Касательно существования решения для системы таких уравнений. Возможны два случая:

- Если вектор b не принадлежит данной линейной оболочке, то решений у системы нет.
- Если вектор b принадлежит данной линейной оболочке то, решение существует. При этом если $n = m$, то решение будет единственным, так как набор векторов $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \cdots, \mathbf{a_m}$ будет образовывать базис. Если же число векторов больше, чем размерность линейной оболочки, то система будет иметь бесконечно много решений.

1.6 Решение систем линейных уравнений. Метод Гаусса.

Урок на Stepik: Решение систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса.

Основная идея метода Гаусса заключается в том, чтобы с помощью операций сложения и умножения на число последовательно исключать переменные, приводя матрицу коэффициентов к треугольному (диагональному виду). Имея матрицу в таком виде, можно затем последовательно найти значения всех неизвестных.

Статья и примеры в wiki: Gaussian Elimination. (в том числе используется для того, чтобы найти ранг и определитель матрицы).

1.7 Евклидово пространство

1.7.1 Скалярное произведение

Для двух векторов u, v, принадлежащих некоторому линейному пространству L, скалярным произведением называется операция, которая этим двум векторам сопоставляет некоторое вещественное число:

$$(u, v) = c : \ c \in \mathbb{R}.$$

При этом такая операция должна удовлетворять 4-м аксиомам:

1. $(x, y) = (y, x)$
2. $(\lambda x, y) = \lambda \cdot (x, y) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
3. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
4. $(x, x) \geq 0$

Линейное (векторное) пространство с введенной на нем вышеописанной операцией скалярного произведения, называется **Евклидовым пространством**.

Для векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ примером скалярного произведения может выступать сумма произведений их координат:

$$(u, v) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$$

1.7.2 Угол между векторами, длина вектора

Для векторов на плоскости скалярное произведение можно ввести следующим образом:

$$(x, y) = |x| \cdot |y| \cdot \cos(x, y)$$

Выразим отсюда косинус угла между векторами:

$$\cos(x, y) = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} = \cos(\alpha)$$

Из этого выражения получим, что **угол между векторами** можно найти следующим образом:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}\right)$$

Рассмотрим теперь выражение для скалярного произведения, в котором $y = x$.

$$(x,x) = |x|\cdot|x|\cdot\cos(x,x) = |x|^2$$

Отсюда получим, что **длина вектора** x есть

$$|x| = \sqrt{(x,x)}$$

То есть, если мы знаем, чему равно скалярное произведение, то мы можем найти угол между векторами, а также длину вектора.

Данные понятия можно обобщить на случай произвольного векторного пространства. А именно, длину произвольного вектора x можно определить как квадратный корень из скалярного произведения этого вектора на самого себя:

$$|x| = \sqrt{(x,x)}$$

Угол ϕ между произвольными векторами x, y есть

$$\phi = \arccos\left(\frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}\right)$$

Для векторов на плоскости скалярное произведение будет равно нулю, если векторы ортогональны, то есть $\phi = \frac{\pi}{2}$. Два произвольных вектора будем называть **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю.

1.8 Операторы и базис

Урок на Stepik: Ортогональный базис.

1.8.1 Ортонормированный базис

Рассмотрим набор векторов $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ таких, что

1. $(e_i, e_j) = 0 \ \forall i,j : \ i \neq j$.
2. $(e_i, e_j) = 1 \ \forall i,j : \ i = j$.

Такой набор векторов называется ортонормированным набором векторов в линейном пространстве со скалярным произведением.

Уроки на Stepik:

- Как произвольный базис преобразовать в ортонормированный
- Метод наименьших квадратов

1.9 Линейные операторы

Оператор $A: \ A \cdot x = y$ называется линейным оператором, если выполнены следующие аксиомы:

1. $A \cdot (x_1 + x_2) = A \cdot x_1 + A \cdot x_2$
2. $A(\lambda x) = \lambda \cdot Ax$

Пример линейного оператора в двумерном пространстве - оператор повотора на угол α:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы задать оператор, достаточно выяснить, как этот оператор действует на базисные вектора линейного пространства.+

1.9.1 Ядро и образ оператора

- Ядро оператора - это все вектора, которые данный оператор обращает в нулевой вектор.
- Образ оператора - это множество всех ненулевых векторов, которые получаются в результате действия данного оператора.

1.9.2 Собственные числа и собственные векторы

u - собственный вектор линейного оператора A, если $Au = \lambda u$. λ - собственное число оператора.

- Eigenvalues and eigenvectors
- характеристический многочлен и характеристическое уравнение
- следствие из основной теоремы алгебры

1.10 Матрицы. Произведение. Определитель и ранг.

- Урок на Stepik: Определитель матрицы.
- Статья в Wiki: Determinant.
- Произведение матриц: Matrix multiplication.
- Обшая статья про матрицы: Matrix
- Ранг матрицы:

Определитель матрицы - это некоторое число, которое характеризует данную матрицу. Формальное определение определителя (формула Лейбница).

1.11 Уравнение прямой. Пересечение прямых.

Лекция: прямая на плоскости

2 Математический анализ

2.1 Вещественные числа

Урок на Stepik: Вещественные числа.

Введем понятие вещественных чисел аксиоматически. Вещественные числа, это такие числа, которые удовлетворяют определенному набору аксиом.

Первый набор аксиом касается алгебраической структуры чисел. Рассмотрим две операции – операции сложения и умножения на число, которые любой паре вещественных чисел сопоставляют вещественное число: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Такие операции должны удовлетворять 9-ти аксиомам:

- Ассоциативность и коммутативность по сложению и умножению.
- Существование нейтрального и обратного элемента (для сложения и умножения).
- Дистрибудивность.

Второй набор аксиом касается порядковой структуры (отношение порядка). Для любых двух вещественных чисел x и y мы должны уметь определять, является ли x меньшим, либо равным y ($x \leq y$). Такое отношение порядка должно удовлетворять следующему набору аксиом:

- Рефлексивность: $x \leq x$
- Транзитивность: $x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- Антисимметричность $x \leq y,\ y \leq x \Rightarrow x = y$
- Любые два вещественных числа должны быть сравнимы, то есть $\forall x, y$ можно однозначно сказать, верно ли, что $x \leq y$
- Если $x \leq y$, то $x + z \leq y + z$
- Если $0 \leq x$ и $0 \leq y$, то $0 \leq xy$

Аксиома полноты: $\forall A, B \subset \mathbb{R}$ и $\forall x, y : x \in A,\ y \in B$ и при этом $x \leq y$, найдется $z \in R$, такое, что $x \leq z \leq y$.

2.2 Последовательности. Предел последовательности.

Последовательностью будем называть произвольное отображение из множества натуральных чисел в множество вещественных чисел: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Примеры последовательностей:

- $x_n = n^2$

- $x_n = \frac{1}{n}$

Число a называется **пределом** последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ если

$$\forall\epsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N\ |x_n - a| < \epsilon.$$

2.3 Функции. Предел функции. Непрерывность.

2.3.1 Функции. Предел функции

Функцией $f : (\mathbb{E} \subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ будем называть некоторое правило, по которому каждому элементу множества E ставится в соответствие некоторое вещественное число.

Определение предела функции (по Коши). Число A называется пределом функции $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ в точке a, если

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in E : x \neq a, |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \epsilon$$

Определение на языке пределов: A – предел функции f в точке a, если для любой последовательности $\{x_n\} \in E$, такой, что $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

2.3.2 Непрерывность функции

Пусть $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ и $a \in E$, причем a – предельная точка множества E. Тогда f непрерывна в точке a если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Эквивалентное определение. Функция f непрерывна в точке a, если

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

2.4 Производные 1

Материалы на Stepik:

- Дифференцируемость и производная
- Геометрический смысл производной
- Правила дифференцирования
- Производные основных элементраных функций
- Теоремы о среднем
- Производная и монотонность

- Правило Лопиталя

Будем говорить, что функция f дифференцируема в точке x_0 если существует такое число $k \in \mathbb{R}$, что

$$f(x) = f(x_0) + k \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$$

То есть значение функции в точке x_0 можно посчитать так, как описано выше.

Производной функции f в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Значение производной в заданной точке равно угловому коэффициенту касательной в этой точке (геометрический смысл производной).

Теорема Ферма. Пусть f - функция, заданная на промежутке $< a, b >$ $\to \mathbb{R}$ и дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$. Пусть $f(x_0)$ - максимум или минимум функции f в точке x_0. Тогда $f'(x_0) = 0$.

Условия монотонности функции. Пусть $f :< a, b > \to \mathbb{R}$ непрерывна и дифференцируема на (a, b). Тогда функция f возрастает на $< a, b >$ тогда и только тогда, когда $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b)$. Если $f'(x) > 0$, то функция строго возрастает.

2.5 Производные 2

Материалы на Stepik:

- Формула Тейлора
- Экстремумы функции

2.5.1 Разложение функции в ряд Тейлора

Рядом Тейлора называется выражение вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Если для функции f все её производные ограничены некоторой константой M, то

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

В частности
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

2.5.2 Необходимые и достаточные условия экстремума функции

Для того, чтобы точка x_0 являлась экстремумом функции f, необходимо, чтобы $f'(x_0) = 0$. Но если последнее выполнено, то это не значит, что точка x_0 является экстремумом. Достаточные условия того, что точка x_0 - экстремум, такие:

- Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка максимума.
- Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 - точка минимума.

2.6 Интегралы 1

- Первообразная и неопределенный интеграл
- Действия с неопределенными интегралами
- Площади
- Определенный интеграл

Функция $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Неопределенным интегралом для функции f называется множество всех первообразных этой функции:
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$
- Таблица основных интегралов.
- Действия с неопределенными интегралами
- Определенный интеграл

Рассмотрим функцию $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Определенным интегралом f по отрезку $[a, b]$ назовем разность положительных и отрицательных состовляющих площадей функции. Обозначение:
$$\int_a^b f(x)dx$$
Формула Ньютона-Лейбница:
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

2.7 Интегралы 2

- Равномерная непрерывность
- Интегральные суммы

3 Теория вероятностей

См. stepik-notes

4 Комбинаторика

См. stepik-notes

5 Теория графов

5.1 Потоки и сети

Урок на Stepik: Потоки и сети.

Под **сетью** будем понимать некоторый ориентированный граф $G(V, E, s, t, c)$, где

- V - множество вершин
- E - множество ребер
- Существует вершина $s \in V$ такая, что $indeg(s) = 0$. Будем называть такую вершину **истоком**.
- Существует вершина $t \in V$ такая, что $outdeg(t) = 0$. Будем называть такую вершину **стоком**.
- Задана функция $c : E \to \mathbb{R}^+$, которая любому ребру $(x, y) \in E$ ставит в соответствие некоторое вещественное неотрицательное число $c(x, y)$.

Функцию $c(x, y)$ будем называть **пропускной способностью** этой цепи.

Рассмотрим функцию f, которая каждому ребру графа G ставит в соответствие вещественное неотрицательное число $f(x, y)$. Пусть для функции f выполняются следующие ограничения:

- Для всех ребер $(x, y) \in E$ верно, что $f(x, y) \leq c(x, y)$.
- Для любой вершины y отличной от s и t верно, что

$$\sum_{x:(x,y)\in E} f(x, y) = \sum_{z:(y,z)\in E} f(y, z)$$

.

Тогда $f(x, y)$ будем называть **потоком**, проходящим через ребро (x, y). **Величиной потока** будем называть величину Q, определяемую так:

$$Q = \sum_{x:(s,x)\in E} f(s, x)$$

Рассмотрим разбиение множества всех вершин графа G на два множества S и T: $s \in S$ и $t \in T$. Рассмотрим множество ребер $R(S, T)$, исходящих из вершин множества S и входящих в вершины множества T. Будем называть такое множество **разрезом**. **Пропускной способностью** $C(S, T)$ данного разреза будем называть следующую величину:

$$C(S, T) = \sum_{(x,y)\in R} c(x, y)$$

Заметим, что никакой поток Q не может превосходить величины $C(S, T)$ никакого из разрезов $R(S, T)$. Рассмотрим разрез, в котором пропускная способность минимальна.

Утверждение (Теорема Форда-Фалкерсона). Величина максимального потока в сети совпадает величиной пропускной способности минимального разреза.

6 Другое

- Арифметическая прогрессия
- Геометрическая прогрессия