Содержание

1 Линейная Алгебра

1.1 Линейное (векторное) пространство

Линейное пространство – это набор элементов (векторов), для которых определена операция сложения и умножения на число. Эти операции должны подчиняться определенному набору аксиом.

Детальная статья в Википедии (в которой в том числе перечислены все аксиомы): Векторное пространство.

Примеры линейных (векторных) пространств:

- Множество векторов на плоскости.
- Множество всех матриц размерности $m \times n$.
- Множество всех многочленов степени не выше n:
  $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n$

1.2 Линейная зависимость и независимость векторов

Рассмотрим набор векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Данный набор векторов является **линейно зависимым**, если существуют такие числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что хотя бы одно из этих чисел не равно нулю, и при этом выполнено равенство

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \cdots + a_n \cdot v_n = 0$$

Если же равенство выше равно нулю только в том случае, если все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны нулю, то данный набор векторов называется **линейно независимым**.

1.3 Размерность линейного пространства. Базис.

Рассмотрим линейное пространство L. Рассмотрим набор из n векторов

$$v_1, v_2, \ldots, v_n$$

принадлежащих этому пространству. Предположим, что этот набор векторов является линейно независимым и при этом любой набор из $n + 1$ векторов из этого же пространства является линейно зависимым. В таком случае L называется n-мерным векторным пространством, и размерность этого пространства $dim(L) = n$.

Вектора $v_1, v_2, \ldots, v_n$ образуют **базис** этого линейного пространства. Любой вектор $u \in L$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации векторов базиса.

1.4 Подпространство

Множество векторов

$$u_1, u_2, \cdots, u_m$$

принадлежащих L, образует **подпространство** M, если для этих векторов заданы те же операции сложения и умножения на число, что и в исходном пространстве, и при этом любой вектор u, который является результатом выполнения этих операций, также принадлежит M.

1.5 Системы линейных уравнений

Урок на Stepik: Существование систем линейных уравнений.

1.5.1 Частный случай. Число уравнений равно числу неизвестных.

Рассмотрим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array}$$

В такой системе количество уравнений совпадает с количеством неизвестных. Запишем систему в следующем виде:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

В таком виде задачу о нахождении решения данной системы можно рассматривать как задачу о представлении вектора $\mathbf{b}$ в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ и $\mathbf{a_3}$.

Если вектора $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ и $\mathbf{a_3}$ образуют базис, то решение у такой системы существует при любом векторе $\mathbf{b}$, причем такое решение будет единственным. Если же эти вектора базис не образуют, то решение у системы будет существовать только в том случае, если вектор $\mathbf{b}$ будет принадлежать подпространству, пораждаемому векторами $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ и $\mathbf{a_3}$, причем решений в таком случае будет бесконечно много.

Аналогичные утверждения верны и для системы линейных уравнений с n уравнениями и n неизвестными.

1.5.2 Общий случай

Рассмотрим теперь более общий случай. А именно, рассмотрим систему, состоящую из n линейных уравнений с m неизвестными:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{gathered}$$

Перепишем систему в следующем виде:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + x_m \cdot \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \cdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

В таком виде задачу о нахождении решения для данной системы уравнений можно рассматривать как задачу о представлении вектора $\mathbf{b}$ в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \cdots, \mathbf{a_m}$, каждый из которых является элементом n-мерного линейного пространства.

Рассмотрим линейное подпространство минимальной размерности, которое содержит все эти m векторов. Такое подпространство также называется линейной оболочкой, образуемой данными векторами. Размерность такого подпространства (линейной оболочки) называется **рангом** системы линейных уравнений.

Касательно существования решения для системы таких уравнений. Возможны два случая:

- Если вектор b не принадлежит данной линейной оболочке, то решений у системы нет.
- Если вектор b принадлежит данной линейной оболочке то, решение существует. При этом если $n = m$, то решение будет единственным, так как набор векторов $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \cdots, \mathbf{a_m}$ будет образовывать базис. Если же число векторов больше, чем размерность линейной оболочки, то система будет иметь бесконечно много решений.

1.6 Решение систем линейных уравнений. Метод Гаусса.

Урок на Stepik: Решение систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса.

Основная идея метода Гаусса заключается в том, чтобы с помощью операций сложения и умножения на число последовательно исключать переменные, приводя матрицу коэффициентов к треугольному (диагональному виду). Имея матрицу в таком виде, можно затем последовательно найти значения всех неизвестных.

1.7 Евклидово пространство

1.7.1 Скалярное произведение

Для двух векторов u, v, принадлежащих некоторому линейному пространству L, скалярным произведением называется операция, которая этим двум векторам сопоставляет некоторое вещественное число:

$$(u, v) = c : \ c \in \mathbb{R}.$$

При этом такая операция должна удовлетворять 4-м аксиомам:

1. $(x, y) = (y, x)$
2. $(\lambda x, y) = \lambda \cdot (x, y) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
3. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
4. $(x, x) \geq 0$

Линейное (векторное) пространство с введенной на нем вышеописанной операцией скалярного произведения, называется **Евклидовым пространством**.

Для векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ примером скалярного произведения может выступать сумма произведений их координат:

$$(u, v) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n$$

1.7.2 Угол между векторами, длина вектора

Для векторов на плоскости скалярное произведение можно ввести следующим образом:

$$(x, y) = |x| \cdot |y| \cdot \cos(x, y)$$

Выразим отсюда косинус угла между векторами:

$$\cos(x, y) = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} = \cos(\alpha)$$

Из этого выражения получим, что **угол между векторами** можно найти следующим образом:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}\right)$$

Рассмотрим теперь выражение для скалярного произведения, в котором $y = x$.

$$(x,x) = |x|\cdot|x|\cdot\cos(x,x) = |x|^2$$

Отсюда получим, что **длина вектора** x есть

$$|x| = \sqrt{(x,x)}$$

То есть, если мы знаем, чему равно скалярное произведение, то мы можем найти угол между векторами, а также длину вектора.

Данные понятия можно обобщить на случай произвольного векторного пространства. А именно, длину произвольного вектора x можно определить как квадратный корень из скалярного произведения этого вектора на самого себя:

$$|x| = \sqrt{(x,x)}$$

Угол ϕ между произвольными векторами x, y есть

$$\phi = \arccos\left(\frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}\right)$$

Для векторов на плоскости скалярное произведение будет равно нулю, если векторы ортогональны, то есть $\phi = \frac{\pi}{2}$. Два произвольных вектора будем называть **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю.

1.8 Операторы и базис

Урок на Stepik: Ортогональный базис.

1.8.1 Ортонормированный базис

Рассмотрим набор векторов $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ таких, что

1. $(e_i, e_j) = 0 \ \forall i,j: \ i \neq j$.
2. $(e_i, e_j) = 1 \ \forall i,j: \ i = j$.

Такой набор векторов называется ортонормированным набором векторов в линейном пространстве со скалярным произведением.

Уроки на Stepik:

- Как произвольный базис преобразовать в ортонормированный
- Метод наименьших квадратов

1.9 Линейные операторы

Оператор $A: \; A \cdot x = y$ называется линейным оператором, если выполнены следующие аксиомы:

1. $A \cdot (x_1 + x_2) = A \cdot x_1 + A \cdot x_2$
2. $A(\lambda x) = \lambda \cdot Ax$

Пример линейного оператора в двумерном пространстве - оператор повотора на угол α:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

1.9.1 Ядро и образ оператора

- Ядро оператора - это все вектора, которые данный оператор обращает в нулевой вектор.
- Образ оператора - это множество всех ненулевых векторов, которые получаются в результате действия данного оператора.

1.9.2 Собственные числа и собственные векторы

u - собственный вектор линейного оператора A, если $Au = \lambda u$. λ - собственное число оператора.

- Eigenvalues and eigenvectors

1.10 Матрицы. Произведение. Определитель и ранг.

- Урок на Stepik: Определитель матрицы.
- Статья в Wiki: Determinant.
- Произведение матриц: Matrix multiplication.
- Обшая статья про матрицы: Matrix

Определитель матрицы - это некоторое число, которое характеризует данную матрицу. Формальное определение определителя (формула Лейбница).

1.11 Уравнение прямой. Пересечение прямых.

Лекция: прямая на плоскости

2 Математический анализ

2.1 Вещественные числа

Урок на Stepik: Вещественные числа.

Введем понятие вещественных чисел аксиоматически. Вещественные числа, это такие числа, которые удовлетворяют определенному набору аксиом.

Первый набор аксиом касается алгебраической структуры чисел. Рассмотрим две операции – операции сложения и умножения на число, которые любой паре вещественных чисел сопоставляют вещественное число: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Такие операции должны удовлетворять 9-ти аксиомам:

- Ассоциативность и коммутативность по сложению и умножению.
- Существование нейтрального и обратного элемента (для сложения и умножения).
- Дистрибудивность.

Второй набор аксиом касается порядковой структуры (отношение порядка). Для любых двух вещественных чисел x и y мы должны уметь определять, является ли x меньшим, либо равным y ($x \leq y$). Такое отношение порядка должно удовлетворять следующему набору аксиом:

- Рефлексивность: $x \leq x$
- Транзитивность: $x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- Антисимметричность $x \leq y,\ y \leq x \Rightarrow x = y$
- Любые два вещественных числа должны быть сравнимы, то есть $\forall x, y$ можно однозначно сказать, верно ли, что $x \leq y$
- Если $x \leq y$, то $x + z \leq y + z$
- Если $0 \leq x$ и $0 \leq y$, то $0 \leq xy$

Аксиома полноты: $\forall A, B \subset \mathbb{R}$ и $\forall x, y : x \in A,\ y \in B$ и при этом $x \leq y$, найдется $z \in R$, такое, что $x \leq z \leq y$.

2.2 Последовательности. Предел последовательности.

Последовательностью будем называть произвольное отображение из множества натуральных чисел в множество вещественных чисел: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Примеры последовательностей:

- $x_n = n^2$

- $x_n = \frac{1}{n}$

Число a называется **пределом** последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ если

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N: \ \forall n > N \ |x_n - a| < \epsilon.$$

2.3 Функции. Предел функции. Непрерывность.

2.3.1 Функции. Предел функции

Функцией $f : (\mathbb{E} \subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ будем называть некоторое правило, по которому каждому элементу множества E ставится в соответствие некоторое вещественное число.

Определение предела функции (по Коши). Число A называется пределом функции $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ в точке a, если

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in E : x \neq a, |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \epsilon$$

.
Определение на языке пределов: A – предел функции f в точке a, если для любой последовательности $\{x_n\} \in E$, такой, что $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

2.3.2 Непрерывность функции

Пусть $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ и $a \in E$, причем a – предельная точка множества E. Тогда f непрерывна в точке a если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Эквивалентное определение. Функция f непрерывна в точке a, если

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

2.4 Производные 1

Материалы на Stepik:

- Дифференцируемость и производная
- Геометрический смысл производной
- Правила дифференцирования
- Производные основных элементраных функций
- Теоремы о среднем

- Производная и монотонность
- Правило Лопиталя

Будем говорить, что функция f дифференцируема в точке x_0 если существует такое число $k \in \mathbb{R}$, что

$$f(x) = f(x_0) + k \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$$

То есть значение функции в точке x_0 можно посчитать так, как описано выше.

Производной функции f в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Значение производной в заданной точке равно угловому коэффициенту касательной в этой точке (геометрический смысл производной).

Теорема Ферма. Пусть f - функция, заданная на промежутке $< a, b > \to \mathbb{R}$ и дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$. Пусть $f(x_0)$ - максимум или минимум функции f в точке x_0. Тогда $f'(x_0) = 0$.

Условия монотонности функции. Пусть $f : < a, b > \to \mathbb{R}$ непрерывна и дифференцируема на (a, b). Тогда функция f возрастает на $< a, b >$ тогда и только тогда, когда $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b)$. Если $f'(x) > 0$, то функция строго возрастает.

2.5 Производные 2

Материалы на Stepik:

- Формула Тейлора
- Экстремумы функции

2.5.1 Разложение функции в ряд Тейлора

Рядом Тейлора называется выражение вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Если для функции f все её производные ограничены некоторой константой M, то

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

В частности

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

2.5.2 Необходимые и достаточные условия экстремума функции

Для того, чтобы точка x_0 являлась экстремумом функции f, необходимо, чтобы $f'(x_0) = 0$. Но если последнее выполнено, то это не значит, что точка x_0 является экстремумом. Достаточные условия того, что точка x_0 - экстремум, такие:

- Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка максимума.
- Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 - точка минимума.

2.6 Интегралы 1

- Первообразная и неопределенный интеграл
- Действия с неопределенными интегралами
- Площади
- Определенный интеграл

Функция $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Неопределенным интегралом для функции f называется множество всех первообразных этой функции:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

- Таблица основных интегралов.
- Действия с неопределенными интегралами
- Определенный интеграл

Рассмотрим функцию $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Определенным интегралом f по отрезку $[a, b]$ назовем разность положительных и отрицательных состовляющих площадей функции. Обозначение:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

2.7 Интегралы 2

- Равномерная непрерывность
- Интегральные суммы

3 Теория вероятностей

Урок на Stepik: Теория вероятностей.

3.1 Вероятностная модель эксперимента

Рассмотрим эксперимент, в котором возможно конечное число исходов

$$\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

Каждое w_i будем называть **элементарными событиями**, Ω – **пространством элементраных событий** (пространством исходов). Рассмотрим примеры.

1. Подбрасывание монетки. Пространство элементарных исходов состоит из двух событий – орел или решка.

$$\Omega = \{Heads, Tails\}$$

2. Подбрасывание игральной кости.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

3. n-кратное подбрасывание монеты.

$$\Omega = \{w : w = (a_1, a_2, \dots, a_n), a_i = Heads \mid Tails\}$$

Событием будем называть любое подмножество множества элементраных исходов. Формально A - событие, если $A \subset \Omega$.

3.2 Вероятностное пространство

Пусть $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ - пространство элеметраных событий. Рассмотрим набор вещественных чисел $p_1, \dots, p_n$ таких, что $p_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Назовем эти числа вероятностями элементарных событий. Тогда **вероятностью события** $A \subseteq \Omega$ будем называть сумму вероятностей элементарных событий из множества A:

$$P(A) = \sum_{i:\ w_i \in A} p_i$$

Свойства:

1. $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
2. $0 \leq P(A) \leq 1$
3. Если $A \cap B = \emptyset$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
6. $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$
7. $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + \sum_{j<k} P(A_j \cap A_k) - ...$

3.3 Классическое определение вероятности

Пусть $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, при этом $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{N}$. Тогда вероятностью события A будем называть отношение мощности множества A к мощности множества всех элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

3.4 Неравенства Маркова и Чебышева

...

4 Комбинаторика

...

5 Теория графов

5.1 Потоки и сети

Урок на Stepik: Потоки и сети.

Под **сетью** будем понимать некоторый ориентированный граф $G(V, E, s, t, c)$, где

- V - множество вершин
- E - множество ребер
- Существует вершина $s \in V$ такая, что $indeg(s) = 0$. Будем называть такую вершину **истоком**.
- Существует вершина $t \in V$ такая, что $outdeg(t) = 0$. Будем называть такую вершину **стоком**.

- Задана функция $c : E \to \mathbb{R}^+$, которая любому ребру $(x, y) \in E$ ставит в соответствие некоторое вещественное неотрицательное число $c(x, y)$.

Функцию $c(x, y)$ будем называть **пропускной способностью** этой цепи.

Рассмотрим функцию f, которая каждому ребру графа G ставит в соответствие вещественное неотрицательное число $f(x, y)$. Пусть для функции f выполняются следующие ограничения:

- Для всех ребер $(x, y) \in E$ верно, что $f(x, y) \le c(x, y)$.
- Для любой вершины y отличной от s и t верно, что

$$\sum_{x:(x,y)\in E} f(x, y) = \sum_{z:(y,z)\in E} f(y, z)$$

.

Тогда $f(x, y)$ будем называть **потоком**, проходящим через ребро (x, y). **Величиной потока** будем называть величину Q, определяемую так:

$$Q = \sum_{x:(s,x)\in E} f(s, x)$$

Рассмотрим разбиение множества всех вершин графа G на два множества S и T: $s \in S$ и $t \in T$. Рассмотрим множество ребер $R(S, T)$, исходящих из вершин множества S и входящих в вершины множества T. Будем называть такое множество **разрезом**. **Пропускной способностью** $C(S, T)$ данного разреза будем называть следующую величину:

$$C(S, T) = \sum_{(x,y)\in R} c(x, y)$$

Заметим, что никакой поток Q не может превосходить величины $C(S, T)$ никакого из разрезов $R(S, T)$. Рассмотрим разрез, в котором пропускная способность минимальна.

Утверждение (Теорема Форда-Фалкерсона). Величина максимального потока в сети совпадает величиной пропускной способности минимального разреза.