ТЕОРЕМА 1. *Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до порядка m включительно ($m \geqslant 1$) в некоторой δ-окрестности точки (x_0, y_0). Тогда для всех Δx и Δy, удовлетворяющих условию $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$, существует такое $\theta = \theta(\Delta x, \Delta y)$, $0 < \theta < 1$, что справедлива формула*

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right] +$$

$$+\frac{1}{3!}\Big(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{\{3\}} f(x_0, y_0) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(m-1)!}\Big(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{\{m-1\}} f(x_0, y_0) + r_{m-1}(\Delta x, \Delta y),$$

или, короче,

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k!}\Big(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{\{k\}} f(x_0, y_0) + r_{m-1}(\Delta x, \Delta y), \qquad (39.1)$$

где

$$r_{m-1}(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{m!}\Big(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{\{m\}} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y). \qquad (39.2)$$

Формула (39.1) называется *формулой Тейлора* (порядка $m-1$) для функции f.

Пусть $x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y$. Многочлен

$$P_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\Big((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{\{k\}} f(x_0, y_0), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

называется *многочленом Тейлора* степени n функции f в точке (x_0, y_0), разность $f(x, y) - P_n(x, y)$ — остаточным членом $r_n(x, y)$ формулы Тейлора. Таким образом, формула Тейлора (39.1) имеет вид

$$f(x, y) = P_{m-1}(x, y) + r_{m-1}(x, y).$$

Запись $r_{m-1}(\Delta x, \Delta y)$ в виде (39.2) называется остаточным членом формулы Тейлора в *форме Лагранжа.*

При $m = 1$ в (39.1) требует разъяснения смысл первого члена правой части, поскольку в этом случае верхний индекс суммирования равен нулю. В этом случае, по определению, полагается, что этот член равен нулю, т.е. что формула (39.1) имеет вид

$$\Delta z = r_0(\Delta x, \Delta y).$$

В дальнейшем всегда, когда встретится выражение, записанное с помощью символа Σ, у которого значение верхнего индекса суммирования меньше значения нижнего индекса, будем считать, что это выражение равно нулю.

Доказательство. Пусть Δx и Δy зафиксированы так, что $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$; тогда все точки вида $(x_0 + t\Delta x,\ y_0 + t\Delta y)$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, лежат на отрезке, соединяющем точки (x_0, y_0) и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, и поэтому все они принадлежат δ-окрестности точки (x_0, y_0). Вследствие этого имеет смысл композиция функций $z = f(x, y)$ и $x = x_0 + t\Delta x,\ y = y_0 + t\Delta y,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$, т.е. сложная функция

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_o + t\Delta y),\ 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{39.3}$$

Очевидно, что

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = F(1) - F(0). \tag{39.4}$$

Поскольку функция f имеет в δ-окрестности точки (x_0, y_0) m непрерывных частных производных, согласно теореме о производных сложной функции (см. п. 37.3), функция F также имеет на отрезке $[0, 1]$ m непрерывных производных и поэтому для нее справедлива формула Тейлора порядка $m-1$ с остаточным членом в форме Лагранжа

$$F(t) - F(0) = F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + ... + \frac{F^{m-1}(0)}{(m-1)!}t^{m-1} + \frac{F^m(\theta t)}{m!}t^m,$$

$$0 < \theta < 1, \tag{39.5}$$

и в рассматриваемой окрестности точки (x_0, y_0) функцию (39.3) можно m раз продифференцировать по правилу дифференцирования сложной функции (см. замечание 2 в п. 37.4), причем значения получающихся смешанных частных производных не зависят от порядка дифференцирования (см. п. 38.1).

Выразив производные $F^{(k)}(t)$ через производные функции $f(x, y)$ и положив в формуле (39.5) $t = 1$ (см.(39.4)), получим требуемую формулу Тейлора для функции $f(x, y)$. Действительно, из (39.3) следует, что

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)}{\partial y}\Delta y.$$

Отсюда для $F''(t)$, опустив для краткости обозначения аргументов, получим

$$F''(t) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2.$$