Национальный исследовательский университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Направление системного и прикладного программного обеспечения

ОТЧЁТ ПО ДОМАШНЕЙ РАБОТЕ

курса «Математика»

по теме: «Пределы»

Вариант № 24

Выполнил студент:

Тюрин Иван Николаевич

группа: P3110

Преподаватель:

Холодова С. Е.

Санкт-Петербург, 2021 г.

Содержание

Домашняя работа
Пределы

Задание 1

1.24. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$.

$$a_n = \frac{5n+1}{10n-3}, a = \frac{1}{2}$$

Доказательство: по определению предела:
$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geqslant N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$.
Т.е. $\left|\dfrac{5n+1}{10n-3} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon; \Rightarrow \left|\dfrac{2(5n+1)-(10n-3)}{2(10n-3)}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\dfrac{5}{2(10n-3)}\right| < \varepsilon$ $\Rightarrow \dfrac{5}{2(10n-3)} < \varepsilon \Rightarrow n > \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{5}{2\varepsilon} - 3\right)$. Значит по определению предела, при $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{5}{2\varepsilon} - 3\right)\right] + 1$ ряд имеет предел.

Задание 2

2.24. Вычислить предел числовой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)^2 - (n-1)^2)((n+1)^2 + (n-1)^2)}{(n+1)^3 + (n-1)^3} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n(n^2+1)}{(n+1)^3 + (n-1)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3} 8n(n^2+1)}{\left(\frac{(n+1)^3}{n^3} + \frac{(n-1)^3}{n^3}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^3} = \frac{8}{2} = 4.$$

Задание 3

3.24. Вычислить предел $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+2}-5n^2}{n-\sqrt{n^4-n+1}} =$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n^2}}-5n^2}{n-n^2\sqrt{1-\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n^2}}-5}{\dfrac{1}{n}-\sqrt{1-\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}}} = \dfrac{-5}{-1} = 5.$

Задание 4

4.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n(n-1)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n-\sqrt{n(n-1)}\right)\left(n+\sqrt{n(n-1)}\right)}{n+\sqrt{n(n-1)}} =$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n(n-1)}{n+\sqrt{n(n-1)}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}n}{\frac{1}{n}\left(n+\sqrt{n(n-1)}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{2}.$

Задание 5

5.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(2+2n)n}{2}}{\dfrac{2n\cdot n}{2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+2n^2}{2n^2} =$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+1\right) = 1.$

Задание 6

6.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n+2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n+2}\right)^{\dfrac{n+2}{2}\cdot\dfrac{2}{n+2}\cdot n} =$

$\lim\limits_{n\to\infty} e^{\dfrac{2n}{n+2}} = (e)^{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+2}} = (e)^{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{1+\frac{2}{n}}} = e^2.$

Задание 7

7.24. Доказать $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{7x^2+8x+1}{x+1} = -6$ *Доказательство:* по определению предела функции в точке:

$\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : (0 < |x-(-1)| < \delta) \Rightarrow \left(\left|\dfrac{7x^2+8x+1}{x+1} - (-6)\right| < \varepsilon\right)$

Тогда $\left|\dfrac{7x^2+8x+1}{x+1}+6\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\dfrac{7x^2+7x+x+1}{x+1}+6\right| = |7x+1+6| = 7|x+1| < \varepsilon \Rightarrow |x+1| < \frac{\varepsilon}{7} \, (|x+1| = |x-(-1)| < \delta) \Rightarrow \delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{7}$ Следовательно функция имеет приедел равный -6 при $x \to -1$.

Задание 8

8.24. Доказать, что функция $f(x) = -5x^2 - 7$ непрерывна в точке $x_0 = 1$ (найти $\delta(\varepsilon)$): Чтобы доказать, что функция непрерывна в точке, нужно доказать что она имеет предел в этой точке и ее значение в этой точке равно пределу.
$f(1) = -12$
По определению предела функции в точке:
$\lim\limits_{x\to 1}(-5x^2-7) = -12 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : (0 < |x-1| < \delta) \Rightarrow \left(\left|-5x^2-7-(-12)\right| < \varepsilon\right)$

Тогда $\left|-5x^2-7+12\right| < \varepsilon \Rightarrow 5|x^2-1| < \varepsilon \Rightarrow |(x-1)(x+1)| < \dfrac{\varepsilon}{5}$

$\Rightarrow |(x-1)(x-1+2)| < \dfrac{\varepsilon}{5} \Rightarrow |(x-1)^2+2(x-1)| < \dfrac{\varepsilon}{5} \xRightarrow{(x-1)^2 \geqslant 0} |x-1|^2+2|x-1| < \dfrac{\varepsilon}{5}$

$\Rightarrow |x-1|^2+2|x-1| - \dfrac{\varepsilon}{5} < 0 \xRightarrow{D=4+4\frac{\varepsilon}{5}} -1-\sqrt{D} < |x-1| < -1+\sqrt{D} \Rightarrow |x-1| < -1+\sqrt{4+4\dfrac{\varepsilon}{5}}; (|x-1| < \delta) \Rightarrow \delta(\varepsilon) = -1+\sqrt{4+4\dfrac{\varepsilon}{5}}.$

Функция имеет предел в точке равный ее занчению в не, значит функция непрерывна в точке $x = 1$.

Задание 9

9.24. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+2)(x+1)}{(x+2)(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{-2} = -0,5.$

Задание 10

10.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}} \xrightarrow{\text{Домножим до разности кубов}} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{8+3x-x^2-8}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt{1+x}\left(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}(3-x)}{\sqrt{1+x}\left(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4\right)} = 0.$$

Задание 11

11.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos(x-\pi)}{(e^{3x}-1)^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{(3x)^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{(3x)^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2\cdot 9x^2} = \dfrac{1}{18}.$

Задание 12

12.24. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi - x} \xRightarrow{x=t+\pi} \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\sin\left(\frac{t+\pi}{2}\right)}{-t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{-t} =$

$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{t^2}{8}}{-t} =$

$= \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{-8} = 0.$

Задание 13

13.24. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\operatorname{tg}(x+1)}{e^{\sqrt[3]{x^3-4x^2+6}}-e} \xRightarrow{x=y-1} \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} y}{e^{\sqrt[3]{(y-1)^3-4(y-1)^2+6}}-e} =$

$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} y}{e^{\sqrt[3]{y^3-7y^2+11y+1}}-e} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{e(e^{\sqrt[3]{y^3-7y^2+11y+1}-1}-1)} =$

$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{e(\sqrt[3]{y^3-7y^2+11y+1}-1)} \xrightarrow{\text{Домножим до разности кубов}}$

$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y\left(\sqrt[3]{(y^3-7y^2+11y+1)^2}+\sqrt[3]{y^3-7y^2+11y+1}+1\right)}{e(y^3-7y^2+11y)} =$

$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{(y^3-7y^2+11y+1)^2}+\sqrt[3]{y^3-7y^2+11y+1}+1\right)}{e(y^2-7y+11)} = \dfrac{3}{11e}.$

Задание 14

14.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{3x}}{\sin 3x-\operatorname{tg}2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)-(e^{3x}-1)}{\sin 3x-\operatorname{tg}2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-3x}{3x-2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x}{x} = -2.$

Задание 15

15.24. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2(\sin-\frac{1}{2})(\sin+1)}{2(\sin-\frac{1}{2})(\sin-1)} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin+1}{\sin-1} = \dfrac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1} = -3.$

Задание 16

16.24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{x^2}\right)^{\dfrac{1}{1-\cos\pi x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\ln(2-e^{x^2}}\right)^{\dfrac{1}{1-\cos\pi x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\dfrac{\ln(2-e^{x^2})}{1-\cos\pi x}} = (e)^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-(e^{x^2}-1)}{1-\cos\pi x}} = (e)^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-(e^{x^2}-1)}{\frac{(\pi x)^2}{2}}} = (e)^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-(x^2)}{\frac{(\pi x)^2}{2}}} = e^{-\frac{2}{\pi^2}}.$

Задание 17

17.24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{x}\right)^{x+2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x}{x}\right)^{0+2} = 3^2 = 9.$

Задание 18

18.24. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^{\dfrac{1}{\cos x}} \xRightarrow{x=2y+\frac{\pi}{2}} \lim\limits_{y\to 0}\left(\operatorname{ctg}\left(\dfrac{2y+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right)^{\dfrac{1}{\cos(2y+\frac{\pi}{2})}} = \lim\limits_{y\to 0}\left(\operatorname{ctg}\left(y+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^{-\dfrac{1}{\sin 2y}} = \lim\limits_{y\to 0}\left(e^{\ln\operatorname{ctg}\left(y+\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{-\dfrac{1}{\sin 2y}} = (e)^{\lim\limits_{y\to 0}-\dfrac{1}{\sin 2y}\ln\dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(y+\frac{\pi}{4}\right)}} =$

$$(e)^{\lim\limits_{y\to 0} -\frac{1}{\sin 2y}\ln\left(1-\frac{2\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} y+1}\right)} = (e)^{\lim\limits_{y\to 0} -\frac{1}{2y}\ln\left(1-\frac{2y}{y+1}\right)} = (e)^{\lim\limits_{y\to 0} -\frac{1}{2y}\left(\frac{-2y}{y+1}\right)} = (e)^{\lim\limits_{y\to 0} \frac{1}{y+1}} = e.$$

Задание 19

19.24. $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{e^{\sin \pi x}-1}{x-1}\right)^{x^2+1} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{e^{\sin \pi x}-1}{x-1}\right)^{2} \xrightarrow{x=y+1} \left(\lim_{y\to 0}\frac{e^{\sin \pi(y+1)}-1}{y}\right)^2 = \left(\lim_{y\to 0}\frac{e^{-\sin \pi y}-1}{y}\right)^2 = \left(\lim_{y\to 0}\frac{-\sin \pi y}{y}\right)^2 = \left(\lim_{y\to 0}\frac{-\pi y}{y}\right)^2 = \pi^2.$$

Задание 20

20.24. $$\lim_{x\to 0}\sqrt{(e^{\sin x}-1)\cos\left(\frac{1}{x}\right)+4\cos x} \xrightarrow{(|\cos\frac{1}{x}|\leqslant 1)\ \vee\ (e^{\sin x}\to 1)} \lim_{x\to 0}\sqrt{0+4\cos x} = \sqrt{4} = 2.$$

Вывод

Повторил определение пределов числовой последовательности и функции в точке. Научился вычислять пределы числовых последовательностей и функций, укрепил знание об эквивалентных функциях при $x \to 0$.