

**Факультет Программной Инженерии и Компьютерной техники**

**Моделирование**

**Лабораторная работа №2**  
**«Марковские модели систем массового**  
**обслуживания»**  
**Вариант 46/54/102**

**Выполнили:**  
**Тюрин И.Н.**  
**Сосновцев Г.А.**  
**Группа Р34102**

**Санкт-Петербург**  
**2024**

<b>Цель работы.....</b>	<b>2</b>
<b>Ход работы.....</b>	<b>2</b>
Анализ исходных данных.....	2
Система 1.....	5
Система 2.....	8
<b>Сравнение характеристик систем.....</b>	<b>10</b>
<b>Вывод.....</b>	<b>11</b>

## Цель работы

Изучение метода марковских случайных процессов и его применение для исследования простейших моделей – систем массового обслуживания (СМО) с однородным потоком заявок.

## Ход работы

### Анализ исходных данных

Таблица 1 - Параметры структурной и функциональной организации

Вариант 1	СИСТЕМА_1		Вариант 2	СИСТЕМА_2		Критерий эффективности
	П	ЕН		П	ЕН	
46	3	3	54	2(Е3)	2	(г)

**СИСТЕМА\_1.** В системе содержится 3 прибора с общим накопителем ёмкостью 3.

**СИСТЕМА\_2.** В системе содержится 2 прибора, в одном из которых длительность обслуживания заявок распределена по закону эрланга 3-го порядка; перед приборами находится один общий накопитель ёмкостью 2.

Критерий эффективности:

г) минимальное время пребывания в системе заявок;

Таблица 2 - Параметры нагрузки

Номер варианта (группы)	Интенс. потока	Ср.длит. обслуж.	Вероятности занятия прибора ...		
	$\lambda, \text{с}^{-1}$	$b, \text{с}$	П1	П2	П3
102	1,0	2	0,6	0,25	0,15

Интенсивность обслуживания  $\mu = \frac{1}{b} = 0.5 (\text{с}^{-1})$ .

Вероятности занятия приборов в СИСТЕМА\_1:

$$p_1 = 0,6; p_2 = 0,25; p_3 = 0,15.$$

Вероятности занятия приборов в СИСТЕМА\_2:

$$p_1 = 0,6; p_2 = 0,4.$$

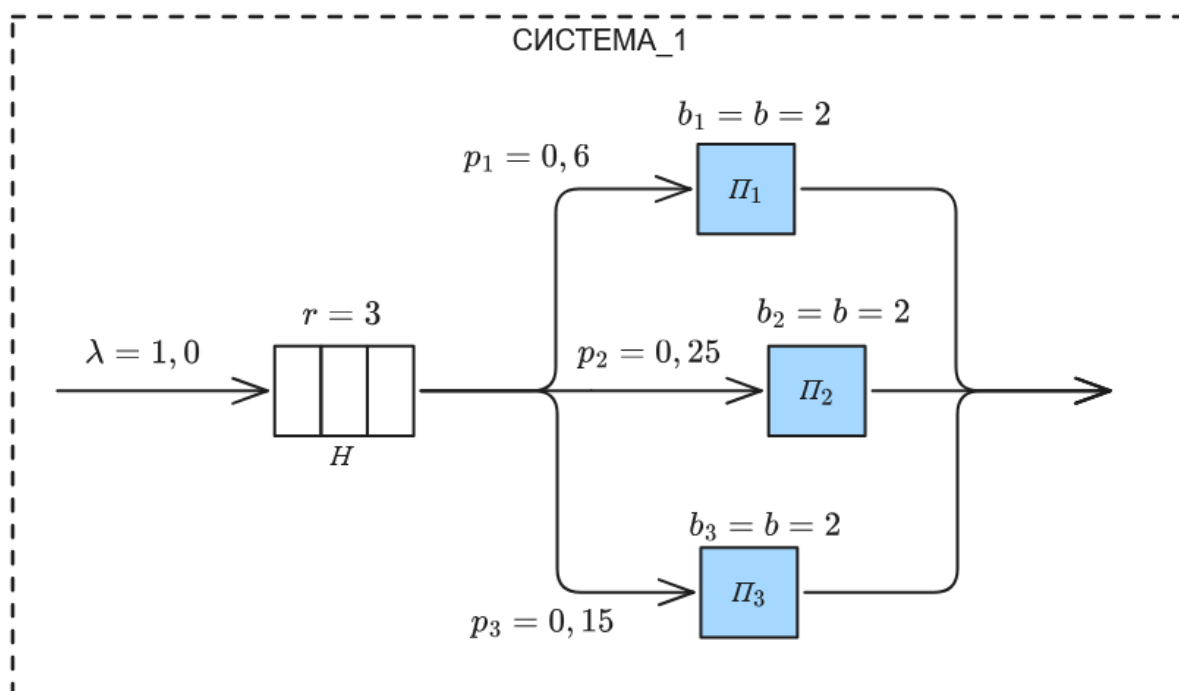


Рисунок 1 - Схема СИСТЕМА\_1

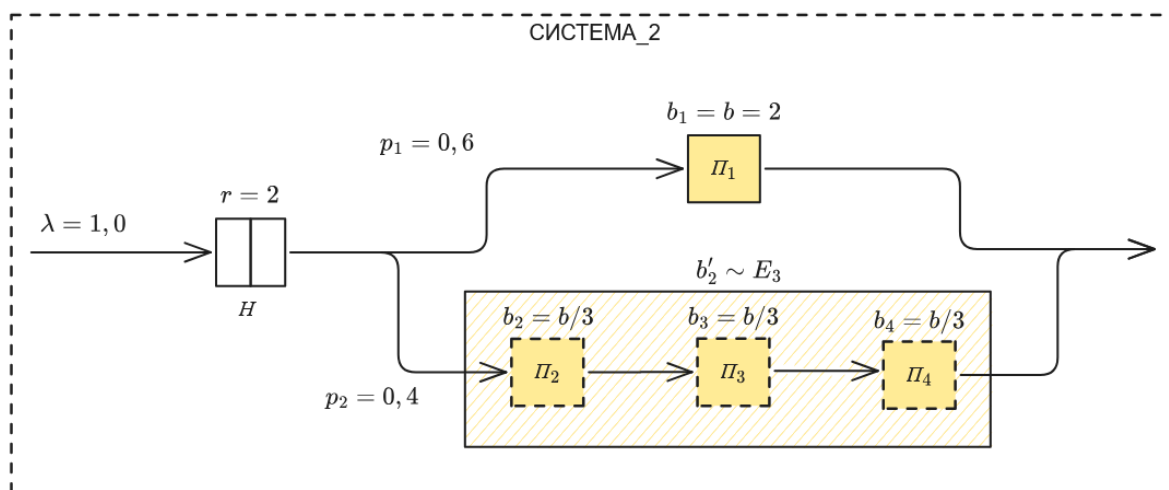


Рисунок 2 - Схема СИСТЕМА\_2

Для данных систем определили состояния как упорядоченные наборы значений:

1. для первой системы  $((\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3), H_1)$  обозначает состояние (занятость) первого прибора  $\Pi_1$ , состояние (занятость) второго прибора  $\Pi_2$ , состояние (занятость) третьего прибора  $\Pi_3$  и количество заявок в очереди (накопителе)  $H_1$
2. для второй системы  $((\Pi_1, E_2), H)$  обозначает состояние (занятость) первого прибора  $\Pi_1$ , состояние второго (с эрланговским распределением 3-порядка) прибора  $E_2$  (Где 0 - свободное, 1 - занят один псевдо прибор, 2 - занято 2 псевдоприбора, 3 - занято три псевдоприбора), и количество заявок в очереди (накопителе)  $H$

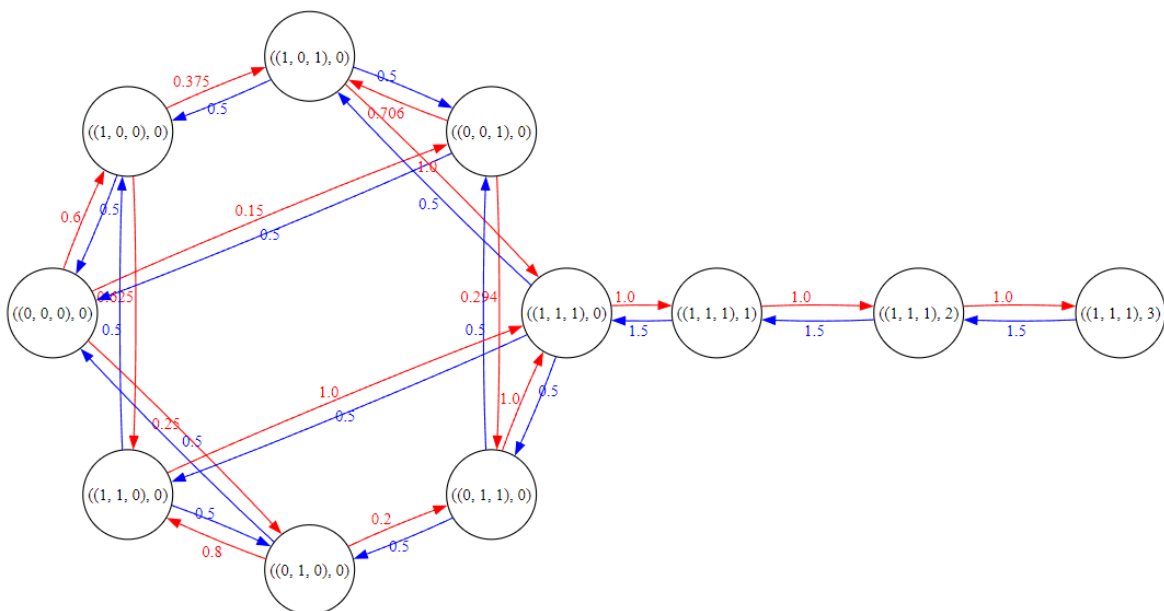
Таблица 3 - Состояния Марковского процесса (СИСТЕМА\_1 и СИСТЕМА\_2)

Номер состояния	СИСТЕМА_1	СИСТЕМА_2
	$((\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3), H)$	$((\Pi_1, E_2), H)$
S0	$((0,0,0),0)$	$((0, 0), 0)$
S1	$((1,0,0),0)$	$((0, 1), 0)$
S2	$((0,1,0),0)$	$((0, 2), 0)$
S3	$((1,1,0),0)$	$((0, 3), 0)$

S4	$((0,0,1),0)$	$((1, 0), 0)$
S5	$((1,0,1),0)$	$((1, 1), 0)$
S6	$((0,1,1),0)$	$((1, 1), 1)$
S7	$((1,1,1),0)$	$((1, 1), 2)$
S8	$((1,1,1),1)$	$((1, 2), 0)$
S9	$((1,1,1),2)$	$((1, 2), 1)$
S10	$((1,1,1),3)$	$((1, 2), 2)$
S11		$((1, 3), 0)$
S12		$((1, 3), 1)$
S13		$((1, 3), 2)$

## Система 1

Граф переходов Системы 1



Интенсивности перехода между состояниями с несколькими занятыми приборами рассчитываются в соответствии с вероятностями выбора этих приборов в текущем состоянии.

Важно обратить внимание, что интенсивности переходов в состояниях с всеми занятыми приборам кратно увеличены в направлении опустошения очереди. Это связано с тем, что каждый прибор независимо дает свою интенсивность перехода в состояние с меньшим размером очереди равной интенсивности обслуживания.

## Матрица переходов Системы 1

Filtered Transition Rate Matrix



Из матрицы интенсивностей переходов можно получить вероятности нахождения в состояниях в стационарном режиме решив систему линейных уравнений полученную умножением строки вероятностей на столбцы интенсивностей и приравняв их к 0, с уравнением описывающим условие, что сумма вероятностей равна 1.

Номер	Состояние	Вероятность, $p_i$
	$((\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3), H)$	
0	$((0, 0, 0), 0)$	0.121805
1	$((0, 0, 1), 0)$	0.058393
2	$((0, 1, 0), 0)$	0.074159
3	$((0, 1, 1), 0)$	0.056605

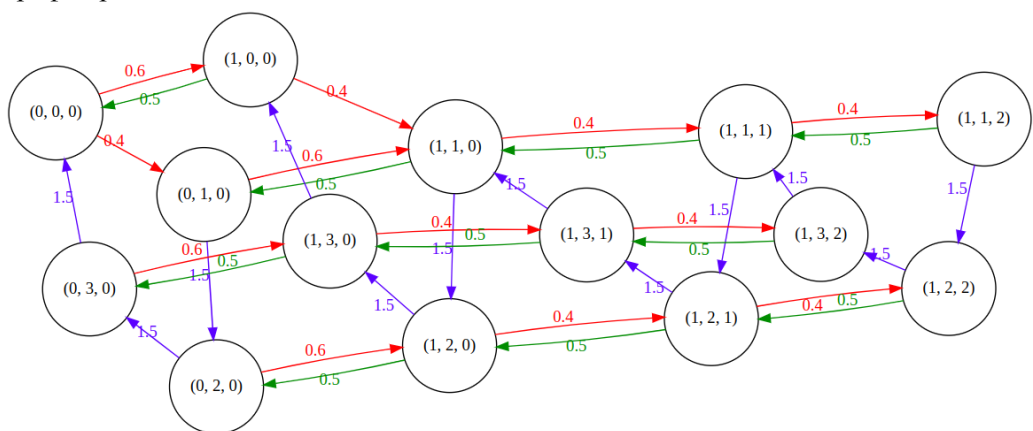
4	((1, 0, 0), 0)	0.111057
5	((1, 0, 1), 0)	0.082034
6	((1, 1, 0), 0)	0.104970
7	((1, 1, 1), 0)	0.162406
8	((1, 1, 1), 1)	0.108271
9	((1, 1, 1), 2)	0.072180
10	((1, 1, 1), 3)	0.048120

Характеристика	Прибор	Расчетная формула	СИСТЕМА_1
Нагрузка	П1	$y_1 = \lambda_1 / \mu = p_1 \lambda b = p_1 y$	1.2
	П2	$y_2 = \lambda_2 / \mu = p_2 \lambda b = p_2 y$	0.5
	П3	$y_3 = \lambda_3 / \mu = p_3 \lambda b = p_3 y$	0.3
	Система	$y = y_1 + y_2 + y_3 = \lambda / \mu$	2.0
Загрузка	П1	$\rho_1 = p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{10}$	0.68903839
	П2	$\rho_2 = p_2 + p_3 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{10}$	0.62671152
	П3	$\rho_1 = p_1 + p_3 + p_5 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{10}$	0.5880095
	Сумма	$\Sigma \rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$	1.90375940
	Система	$\rho = avg(\rho) = \Sigma \rho / 3$	0.63458647
Длина очереди	Н	$l = p_8 + 2 p_9 + 3 p_{10}$	0.39699248
Число заявок	Система	$m = \Sigma(p_i(\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + Н)) = l + \Sigma \rho$	2.30075188
Вероятность потери	Н	$\pi_n = p_{10}$	0.04812030
Производительность	П1	$\lambda'_1 = \lambda_1 \cdot (1 - \pi_n)$	0.57112782
	П2	$\lambda'_2 = \lambda_2 \cdot (1 - \pi_n)$	0.23796992
	П3	$\lambda'_3 = \lambda_3 \cdot (1 - \pi_n)$	0.14278195

	Система	$\lambda' = \lambda'_1 + \lambda'_2 + \lambda'_3$	0.95187970
Время ожидания	Н	$w = l/\lambda'$	0.41706161
Время пребывания	Система	$u = m/\lambda'$	2.41706161

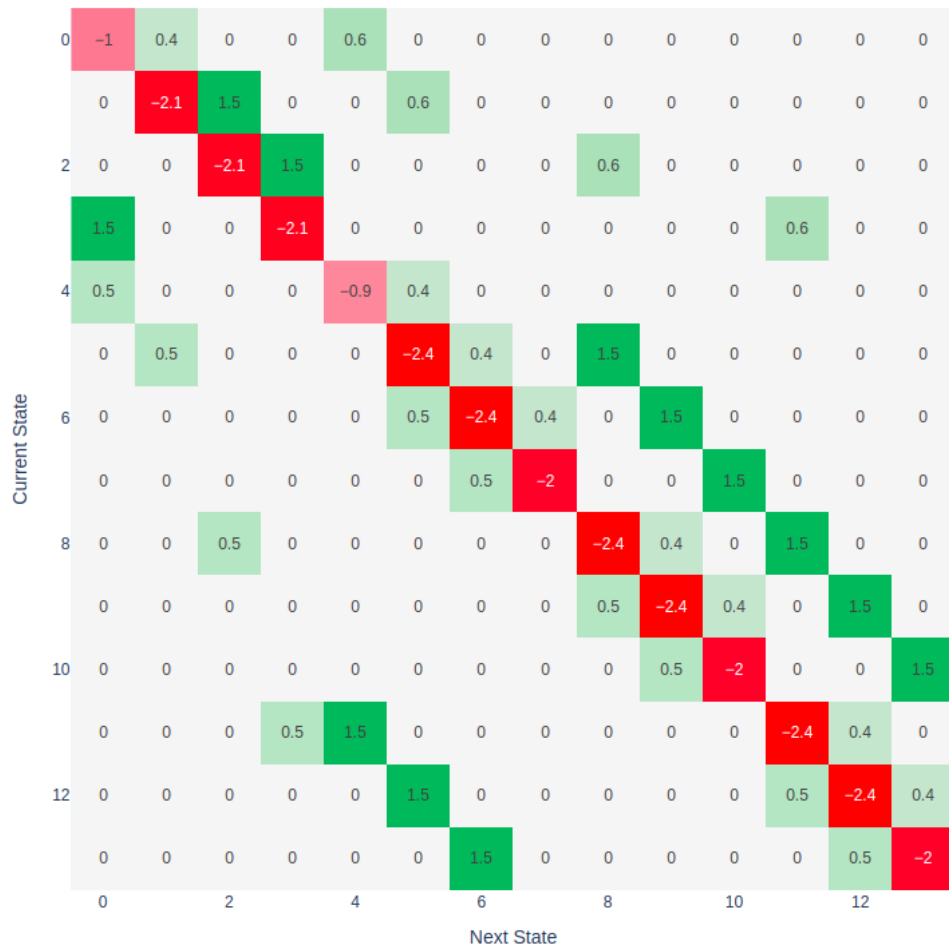
## Система 2

Граф переходов Системы 2



Матрица переходов Системы 2





Номер	Состояние	Вероятность
	$((\Pi_1, E_2), H)$	
0	$((0, 0), 0)$	0.2202
1	$((0, 1), 0)$	0.06185
2	$((0, 2), 0)$	0.06172
3	$((0, 3), 0)$	0.06022
4	$((1, 0), 0)$	0.2598
5	$((1, 1), 0)$	0.08361
6	$((1, 1), 1)$	0.02323
7	$((1, 1), 2)$	0.004646

8	((1, 2), 0)	0.07367
9	((1, 2), 1)	0.02872
10	((1, 2), 2)	0.009229
11	((1, 3), 0)	0.06777
12	((1, 3), 1)	0.03202
13	((1, 3), 2)	0.01333

Характеристика	Прибор	Расчетная формула	СИСТЕМА_2
Нагрузка	П1	$y_1 = \lambda/\mu$	1.2
	Е2	$y_2 = \lambda/\mu$	0.8
	Сумма	$y = y_1 + y_2$	2.0
Загрузка	П1	$\rho_1 = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3)$	0.59594
	Е2	$\rho_2 = 1 - (p_0 + p_4)$	0.5200
	Сумма	$\rho = \rho_1 + \rho_2$	1.11601
Длина очереди	Н	$l = (p_6 + p_9 + p_{12}) + 2 \cdot (p_7 + p_{10} + p_{13})$	0.13837825
Число заявок	П1	$m_1 = l_1 + \rho_1$	0.73436766
	Е2	$m_2 = l_2 + \rho_2$	0.65840316
	Сумма	$m = m_1 + m_2 + m_3$	1.392770
Вероятность потери	Н	$\pi_n = p_7 + p_{10} + p_{13}$	0,027175
Производительность	П1	$\lambda'_1 = \lambda_1 \cdot (1 - \pi_n)$	0.58367906
	Е2	$\lambda'_2 = \lambda_2 \cdot (1 - \pi_n)$	0.38911937
	Сумма	$\lambda' = \lambda'_1 + \lambda'_2$	0.9727984317

Время ожидания	Н	$w = l/\lambda$	0.21145
Время пребывания	П1	$u_1 = m_1/\lambda$	1.2581703
	Е2	$u_2 = m_2/\lambda$	1.69203389
	Сумма	$u = (u_1 + u_2)/2$	1.43171573

## Сравнение характеристик систем

Собрали данные таблиц в одну.

Название	Система 1	Система 2
Нагрузка	2.0000	2.0000
Загрузка	1.9037	1.9160
Длина очереди	0.3969	0.6770
Число заявок	2.3008	1.3927
Время ожидания	0.417	0.7844
Время пребывания	<b>2.417</b>	<b>2.7004</b>
Вероятность потери	0.0481	0.0672
Производительность	0.9518	0.9727

## Вывод

По таблице видно, что по целевому критерию эффективности, а именно *времени пребывания* в системе, Система 1 является более предпочтительной.