

令和6年度 卒業論文

ペトリネットに基づく量子最適化の効率化  
Multi-objective traffic optimization using  
quantum annealing



琉球大学工学部工学科  
知能情報コース

215752H 上地 涼太  
指導教員 名嘉村 盛和

# 要旨

量子最適化

# Abstract

yeah

# 目 次

3.1	フローショップシステムのペトリネットモデル . . . . .	4
4.1	変数削減のためのペトリネット変換 . . . . .	11

# 表 目 次

3.1 XML ファイルから取得した情報 . . . . .	9
3.2 エネルギー関数内の変数 . . . . .	9

# 第1章 序論

## 1.1 背景と目的

近年、最適化問題に対するアプローチとして量子最適化技術が注目を集めている。量子最適化計算の技術は進展しているものの、実用化および普及に向けては多くの課題が存在する。特に、最適化問題を QUBO(Quadratic Unconstrained Binary Optimaization) や Ising モデルで定式化するプロセスが容易ではなく実用化が困難である。また、大規模な問題、制約や目的関数の複雑性による解の質の劣化が実用化における障壁となっている。本研究では、ペトリネット理論に基づく QUBO や Ising モデルの定式化の技術の開発を行う。具体的には、ドメイン知識に基づくモデルベースの定式化と効率探索のための最適化問題の変換技術を組み合わせることにより、大規模かつ複雑な制約を含む問題に対しても高品質な解が得られる枠組みの構築を目指す。

## 1.2 論文の構成

本論文は、第1章に序論を述べ、第2章で本実験で使用した基礎概念、第3章で本実験で扱う技術を学ぶために実施した関連研究と評価実験に関して記述する。第4章で本実験の効率化の手法に関する詳細を述べ、最後の第5章にてまとめと今後の課題に関して記述する。

## 第2章 基礎概念

### 2.1 ペトリネット

ペトリネット  $PN = (N, M_0)$  は、プレース、トランジションの2種類のノードからなる有向2部グラフ  $N = (P, T, Pre, Post)$  と初期マーキング  $M_0$  で表される. [1]

$P = p_1, p_2, \dots, p_n$  はプレースの集合,  $T = t_1, t_2, \dots, t_n$  はトランジションの集合である. プレースにトークンが配置されることにより現在のシステムの状態を表すことができる.  $Pre(p, t)$  はトランジション  $t$  に入る入力プレース  $p$  を接続するアークの重みを表している.  $Post(p, t)$  はトランジション  $t$  から出ている出力プレース  $p$  を接続するアークの重みを表している. 各トランジション  $t$  の入力プレースに重み以上のトークンが配置されている時トランジション  $t$  は発火可能であると言う. トランジションの発火は事象の生起を表し, トークンの分布変化が起こる.

### 2.2 量子アニーリング

量子アニーリングは量子コンピュータを用いた一種の最適化アルゴリズムであり, QUBO モデルや Ising モデルとしてエネルギー関数の形で表現し, 最適解に近い解を高速に求めることが期待されている. 量子アニーリングは, D-Wave 社が開発して商用量子アニーリングマシンにより数万量子ビットの計算が可能であり, 実用化が進んでいる. さらに, デジタル方式で QUBO モデルや Ising モデルに基づく最適化処理を行う量子インスパイアードシステムや, GPU を用いてアニーリングを模倣するシステムも提案されており, これらは新たな組み合わせ最適化プラットフォームとして注目を集めている.

QUBO モデルは (2.1) 式のように表すことができる.

$$H = \sum_{i,j} Q_{i,j} q_i q_j \quad (2.1)$$

ここで  $Q_{i,j} \in \mathbb{R}$  は, バイナリ変数 ( $q_i \in \{0, 1\}$ ) の係数を表している.

### 2.3 多資源フローショップスケジューリング問題

多資源フローショップスケジューリング問題 (MRFSSP) は, 複数の工程からなる複数のジョブを処理するスケジューリング問題の一種である. 各ジョブは複数の工程によって

構成され、各工程は指定された共有資源の利用を必要とする。ジョブ内の各工程はタスクと呼ばれる。

本論文で扱っている MRFSSP を以下にまとめる。

1. ジョブの数は  $N$  個、それぞれのジョブは  $M$  このタスク (工程に対応) で構成される。
2. 各マシンには単位時間当たりの稼働コストが予め与えられている。
3. 各マシンには単位作業時間当たりの処理時間が予め与えられている。
4. 各ジョブは  $M$  個のタスクを決められた順番で処理する必要がある、その順番は全てのジョブで同一である。
5. 各タスクは予め指定されたマシンリソース群の中から一台のマシンを利用して処理がなされる。一度スタートした処理は中断なく完了まで行われる。
6. 各タスクは同じジョブの直前タスクの完了以前には処理は開始できない (先行制約)。
7. 全てのジョブの全てのタスクに対して、マシンが割り当てられている (完了制約)。
8. 任意の二つのタスク間でマシンの競合が発生しない (競合制約)。

また、目的関数として次の二つを考える。

9. 各タスクのリソースの待ち時間の総和を最小化する。
10. リソースコストの総和を最小化する。

## 2.4 ベイズ最適化

ベイズ最適化とは、目的関数を少ない回数で評価するための確率的な手法である。未知の領域を含む探索空間全体を考慮しながら最適化を行うのでハイパーパラメータの探索として利用されている。



## 第3章 関連研究

量子インスパイアード最適化の論文 [2] の定式化を参考に MRFSSP の各タスクのリソースコストとタスク間の待機時間の最適化を図る検証を行った。

### 3.1 多資源フローショップスケジューリング問題

#### 3.1.1 ペトリネットモデル

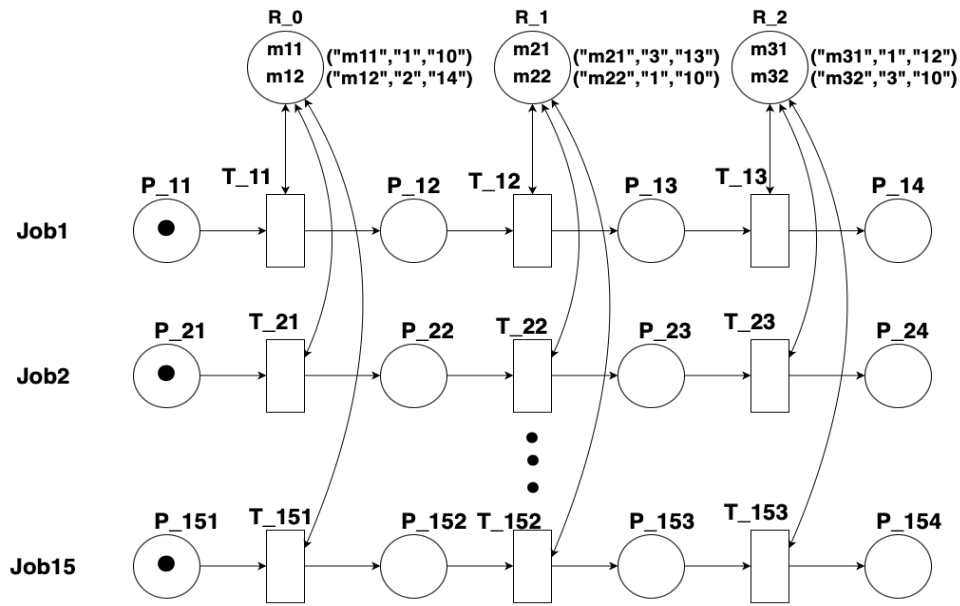


図 3.1: フローショップシステムのペトリネットモデル

MRFSSP に対するペトリネットモデルは、図 3.1 のように表現できる。図 3.1 では、15 個のジョブを省略した形で記載している。各ジョブはプレース、トランジションの交互列となるパスで表されている。例えば、Job1 に対するパス  $P_{1,1}, T_{1,1}, P_{1,2}, \dots, P_{1,4}$  は、3 種類のタスク (工程)  $T_{1,1}, T_{1,2}, T_{1,3}$  から構成されており、それぞれ、 $R_0, R_1, R_2$  のマシンリソースを必要としている。3 種類のマシンリソースは、カラートークンとしてマシン ID、処理速度、マシンコストの情報を含む文字列で表されている。ここでは紙面の都合上詳細な説明は省略する。このペトリネットモデルのようにドメイン知識さえあれば、わずかなペトリネットの記述のルールに基づいてペトリネットモデルを作成することができる。

### 3.1.2 CPNTools によるモデル生成

CPNTools は、カラードペトリネットのモデリングおよびシミュレーションを支援するツールである。本研究では、CPNTools を用いて生成したペトリネットモデルを XML 形式でエクスポートすることで、プレース、アーク、トランジションに関する構造情報および動作情報を取得できる。

プレース、トランジション、アークの XML ファイルの一部を以下に示す。

Listing 3.1: プレースの XML ファイル

```
1 <place id="ID1412324394">
2     <posattr x="-284.000000"
3         y="42.000000"/>
4     <fillattr colour="White"
5         pattern=""
6         filled="false"/>
7     <lineattr colour="Black"
8         thick="1"
9         type="Solid"/>
10    <textattr colour="Black"
11        bold="false"/>
12    <text>p_11</text>
13    <ellipse w="60.000000"
14        h="40.000000"/>
15    <token x="-10.000000"
16        y="0.000000"/>
17    <marking x="0.000000"
18        y="0.000000"
19        hidden="false">
20        <snap snap_id="0"
21            anchor.horizontal="0"
22            anchor.vertical="0"/>
23    </marking>
24    <type id="ID1412324395">
25        <posattr x="-244.000000"
26            y="18.000000"/>
27        <fillattr colour="White"
28            pattern="Solid"
29            filled="false"/>
30        <lineattr colour="Black"
31            thick="0"
32            type="Solid"/>
33        <textattr colour="Black"
34            bold="false"/>
35        <text tool="CPN Tools"
36            version="4.0.1">UNIT</text>
37    </type>
```

```

38      <initmark id="ID1412324396">
39          <posattr x="-255.000000"
40              y="65.000000"/>
41          <fillattr colour="White"
42              pattern="Solid"
43              filled="false"/>
44          <lineattr colour="Black"
45              thick="0"
46              type="Solid"/>
47          <textattr colour="Black"
48              bold="false"/>
49          <text tool="CPN Tools"
50              version="4.0.1">1'()</text>
51      </initmark>
52  </place>

```

Listing 3.1 は、プレースに関する情報であり `< place id >` はアークとの関連付けに使用するためのユニークな ID である。 `< text >` プレース `</text >` はプレースのラベルが指定されており人間が理解しやすい形になっている。 `< initmark id >` はトークンのユニークな ID であり `< text tool >` トークンの数 `' () </text >` で初期状態でのトークンの数を表している。

Listing 3.2: トランジションの XML ファイル

```

1 <trans id="ID1412324537"
2     explicit="false">
3     <posattr x="-138.000000"
4         y="42.000000"/>
5     <fillattr colour="White"
6         pattern=""
7         filled="false"/>
8     <lineattr colour="Black"
9         thick="1"
10        type="solid"/>
11    <textattr colour="Black"
12        bold="false"/>
13    <text>t_11</text>
14    <box w="60.000000"
15        h="38.000000"/>
16    <binding x="7.200000"
17        y="-3.000000"/>
18    <cond id="ID1412324538">
19        <posattr x="-177.000000"
20            y="72.000000"/>
21        <fillattr colour="White"
22            pattern="Solid"
23            filled="false"/>
24        <lineattr colour="Black"

```

```

25         thick="0"
26         type="Solid"/>
27     <textattr colour="Black"
28         bold="false"/>
29     <text tool="CPN Tools"
30         version="4.0.1"/>
31 </cond>
32 <time id="ID1412324539">
33     <posattr x="-93.500000"
34         y="72.000000"/>
35     <fillattr colour="White"
36         pattern="Solid"
37         filled="false"/>
38     <lineattr colour="Black"
39         thick="0"
40         type="Solid"/>
41     <textattr colour="Black"
42         bold="false"/>
43     <text tool="CPN Tools"
44         version="4.0.1"/>
45 </time>
46 <code id="ID1412324540">
47     <posattr x="-73.500000"
48         y="-9.000000"/>
49     <fillattr colour="White"
50         pattern="Solid"
51         filled="false"/>
52     <lineattr colour="Black"
53         thick="0"
54         type="Solid"/>
55     <textattr colour="Black"
56         bold="false"/>
57     <text tool="CPN Tools"
58         version="4.0.1"/>
59 </code>
60 <priority id="ID1412324542">
61     <posattr x="-206.000000"
62         y="12.000000"/>
63     <fillattr colour="White"
64         pattern="Solid"
65         filled="false"/>
66     <lineattr colour="Black"
67         thick="0"
68         type="Solid"/>
69     <textattr colour="Black"
70         bold="false"/>
71     <text tool="CPN Tools"

```

```

72         version="4.0.1"/>
73     </priority>
74 </trans>

```

Listing 3.2 は、トランジションに関する情報でありプレース同様にプレースとアークの関連付けに使用するためのユニークな ID が付与されている。また、text 要素にはトランジションのラベルが指定されている。さらに、< cond >はトランジションの発火条件、< priority >は発火の優先順位、< time >トランジションの処理時間を記載する要素である。ただし、本研究では< cond >、< priority >、および< time >には設定を行っていない。

Listing 3.3: アークの XML ファイル

```

1 <arc id="ID1412324579"
2     orientation="PtoT"
3     order="1">
4     <posattr x="0.000000"
5         y="0.000000"/>
6     <fillattr colour="White"
7         pattern=""
8         filled="false"/>
9     <lineattr colour="Black"
10        thick="1"
11        type="Solid"/>
12     <textattr colour="Black"
13        bold="false"/>
14     <arrowattr headsize="1.200000"
15        currentcycle="2"/>
16     <transend idref="ID1412324537"/>
17     <placeend idref="ID1412324394"/>
18     <annot id="ID1422288249">
19         <posattr x="-211.000000"
20             y="53.000000"/>
21         <fillattr colour="White"
22             pattern="Solid"
23             filled="false"/>
24         <lineattr colour="Black"
25             thick="0"
26             type="Solid"/>
27         <textattr colour="Black"
28             bold="false"/>
29         <text tool="CPN Tools"
30             version="4.0.1">1'()</text>
31     </annot>
32 </arc>

```

Listing 3.3 は、アークに関する情報でありユニークな ID が付与されている。< arc

orientation >では、アークの接続方向の指定がされている。PtoTはプレースからトランジション、TtoPはトランジションからプレースの接続を意味する。

上記のXMLファイルから得られた情報を表にまとめる。

表 3.1: XML ファイルから取得した情報

リスト	取得情報
<i>resource_m</i>	マシンリソースのラベルとリソースの複数の性能
<i>machine_processing_time</i>	単位時間あたりの処理時間
<i>machine_cost</i>	単位時間あたりのコスト
<i>job</i>	各ジョブのタスクを順番に並べた構造

### 3.1.3 QUBO 定式化

基本的な QUBO 定式化の方式に基づいて MRFSSP のペトリネットモデルからの定式化を行う。これらの式で用いた変数を表にまとめる。

表 3.2: エネルギー関数内の変数

変数	定義
$rc^r$	単位時間あたりのマシンリソース $r$ の使用コスト
$fd^r$	マシンリソース $r$ を使ってタスクを処理する場合の処理時間
$t_i^j$	ジョブ $j$ の $i$ 番目のタスク
$x_k^r(t_i^j)$	時刻 $k$ において $t_i^j$ がマシンリソース $r$ を使用していれば $x_k^r(t_i^j) = 1$ , そうでなければ 0 を示すバイナリ変数

ペトリネットの発火規則に従うためには、以下のエネルギー関数をゼロにする必要がある。すなわち、 $E_{c1}$  及び  $E_{c2}$  ともトランジションズの発火にはその入力プレース全てにトークンが配置されている必要があり、かつ、同じ入力プレースで同じトークンを前提に発火を行うことは禁止されているため、その競合状態にある場合には、一つのトランジションの発火のみに当該トークンが利用される必要がある。このようにペトリネットの発火規則から以下のエネルギー関数が生成できる。

$$E_{c1} = \sum_{k_1, k_2} \sum_r \sum_{(j_1, j_2)} \sum_i x_{k_1}^r(t_i^{j_1}) \cdot x_{k_2}^r(t_i^{j_2}) \quad (3.1)$$

$$E_{c2} = \sum_{k_1, k_2} \sum_{r_1, r_2} \sum_j \sum_i x_{k_1}^{r_1}(t_i^j) \cdot x_{k_2}^{r_2}(t_{i+1}^j) \quad (3.2)$$

一方、本スケジューリング問題は、全てのジョブが完了するまでタスクの実行計画を作成することであるので、全てのトランジションがただ一度ずつ発火する必要がある。これより、以下のエネルギー関数が生成できる。

$$E_{c3} = \left( 1 - \sum_k \sum_r \sum_j \sum_i x_k^r(t_i^j) \right)^2 \quad (3.3)$$

目的関数として、リソースの総コストの最小化とタスクの処理の待機時間の最小化となるため、ペトリネットの振る舞いモデルより以下のエネルギー関数が導かれる。

$$E_{o1} = \sum_k \sum_r \sum_j \sum_i r c^r \cdot f d^r \cdot x_k^r(t_i^j) \quad (3.4)$$

$$E_{o2} = \sum_i \sum_{k_1, k_2} \sum_{r_1, r_2} \sum_j \sum_i (k_1 - f d^{r_2}) \cdot x_{k_2}^{r_2}(t_{i+1}^j) \cdot x_{k_1}^{r_1}(t_i^j) \quad (3.5)$$

式 (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) に重み  $A, B, C, D, E$  を乗じてまとめた全体のエネルギー関数は以下ようになる。

$$E = A \cdot E_{c1} + B \cdot E_{c2} + C \cdot E_{c3} + D \cdot E_{o1} + E \cdot E_{o2} \quad (3.6)$$

## 3.2 評価実験

ペトリネットモデルから QUBO モデルに定式化したエネルギー関数の最適化を行う。本実験では、OpenJij を用いて最適化計算を行う。

制約条件 (3.1), (3.2), (3.3) 式に対する重みパラメータ  $A, B, C$  は、それぞれ 600, 150, 250 に固定されており、事前の調整に基づいて設定された。評価実験では、目的関数 (3.4), (3.5) 式に対応する重みパラメータ  $D$  および  $E$  のみを変化させた。

## 第4章 大規模な問題におけるペトリネット変換

### 4.1 効率よく解を探索するためのマシンリソース配置

量子アニーリングは、変数の数が少ない場合により効率的に最適解を探索できる特性がある。この特性、問題の解探索に必要な量子ビットの数が変数の数に依存するためである。変数が少ないほど解の探索空間が小さくなり最適解に到達しやすくなる。このため、量子アニーリングを用いる場合は、対象問題を可能な限りコンパクトに表現し変数の数を削減することが重要である。特に、大規模問題を効率的に解くためには、ペトリネット変換や問題分割などの手法を用いて問題のサイズを適切に縮小することが必要である。

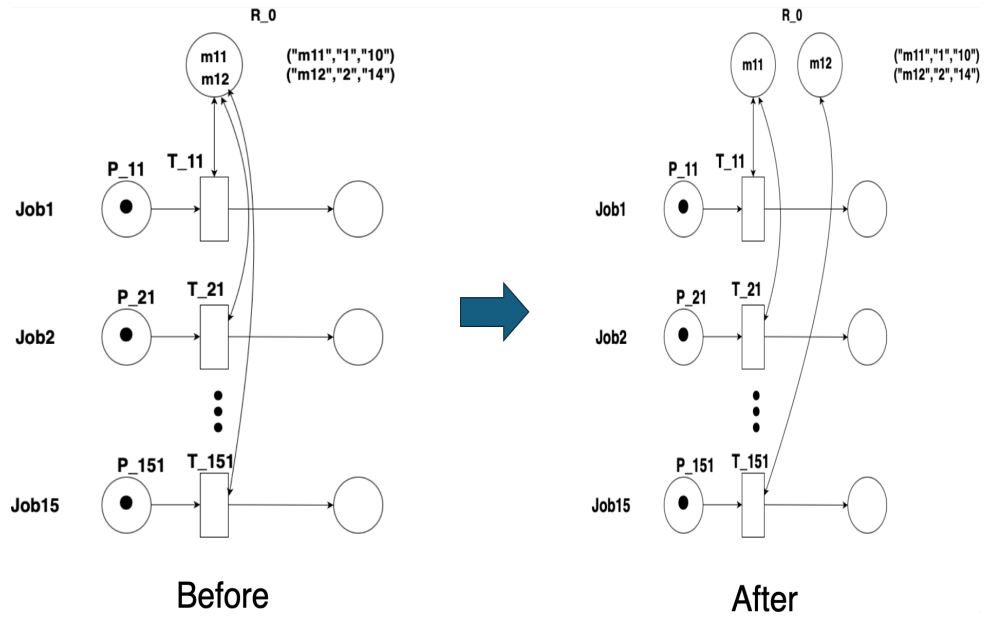


図 4.1: 変数削減のためのペトリネット変換

図 4.1 は対象問題のペトリネットモデルを変換した図になる。このモデル変換は以下の二段階のプロセスで構成される。

1. リソースの事前割り当てを適用することによりペトリネットモデルを変換する。ペトリネットモデルを変換するためのエネルギー関数が (4.1) 式である。

$$\min \sum_{m \neq m_i}^M \left( \sum_t^T a_{m_i,t} \cdot x_{m_i,t} - \sum_t^T a_{m,t} \cdot x_{m,t} \right)^2 + \left( 1 - \sum_t^T x_{m,t} \right)^2 \quad (4.1)$$



2. (4.1) 式を処理時間またはリソースコストを最適化を行うことで効率的なリソース配置をする.

変数の数は  $r \times k \times t$  (ここで,  $r$  はマシンリソース数,  $k$  は制限の最大時刻,  $t$  はタスク数) で表される. だが, ペトリネットモデルの変換を行うことにより変数の数が  $k \times t$  に削減される. この削減により, 最適化計算の規模が縮小し計算効率が向上する.

## 4.2 評価実験

比較とcaする

## 第5章 結論

### 5.1 まとめ

### 5.2 今後の展望

## 参考文献

- [1] T.Murata. Petri nets: Properties, analysis and applications. *Proceedings of the IEEE*, Vol. 77, No. 4, pp. 541-580, 1989.
- [2] 新城巧也, 名嘉村盛和, 猪谷宜彦. 信学技報, 段替え作業を考慮したフローショップスケジューリング問題のペトリネットモデリングと QUBO 定式化. vol. 122, no. 78, MSS2022-17, pp. 90-95, 2022 年 6 月