Cours d'algorithmique

ESGI 2ème année

2021-2022

baudoin2020@gmail.com

L'algorithmique à l'ESGI

- 1ère année : **brut force**
  - Itératif : imbriquer plusieurs boucles avec appel de fonction pour traitement
    - traitements : *filtrage, comptage*, calcul de min et de max
  - Récursivité
- 2ème année : **performance**
  - itératif
  - Récursivité
- 3ème année : tris et structures : implémentation

Comment mesurer la performance d'un algorithme ?

- calcul du temps d'exécution → performance **empirique**
- calcul de la complexité → performance **théorique**

Comment améliorer la performance d'un algorithme ?

- Utilisation de *Sets* et de *Hashmap*
- Récursivité : Backtracking
- Méthodes générales
  - Diviser pour régner
  - Programmation dynamique
- Méthodes ad-hoc
  - balayage, matrice des correspondances, …

Progression

Séance 1

- introduction à python
- mesure du temps d'exécution (code timing) : un premier exemple
- *Filtrage* : Rechercher une valeur dans un tableau
    - recherche simple
    - recherche dichotomique
    - recherche dans un hashSet (ensemble)
- *Comptage* : tableaux associatifs : les tables de hachage (hashmaps)

Séance 2 : TP

- exercices basiques
- exercice de synthèse : indexation de documents

Séance 3

- CC1
- Calcul de complexité théorique
- implémentation hashset

Séance 4 : Récursivité

- rappels
- backtracking

Séance 5 : Récursivité : applications

- carré magique
- sudoku
- mots croisés

Installation de Python

Python3 avec au choix

- l'IDE natif IDLE
- votre Ide préféré (pycharm, atom, …)
- des notebook jupyter, à installer
    - via winpython
    - ou via conda

1. Introduction à Python

Variables, type, print et input, if

```
x=9
print(type(x))
```

```
<class 'int'>
```

```
x='toto'
print(type(x))
```

```
<class 'str'>
```

```
print(x)
```

```
toto
```

```
x=input('Entrez un mot : ')
print(type(x), x)
```

```
Entrez un mot : 2
<class 'str'> 2
```

```
x=int(input('Entrez un nombre : '))
print(type(x), x)
```

```
Entrez un nombre : 2
<class 'int'> 2
```

```
x=int(input('Entrez un nombre : '))
if x == 0 : print("-> nombre nul")
else : print("-> nombre non nul")
```

```
Entrez un nombre : 3
nombre non nul
```

```
for x in range(3, 7):
    print(x)
```

```
3
4
5
6
```

Boucles

La fonction *range* et l'opérateur *in*

```
print(range(5))
```

```
range(0, 5)
```

```
print( 3 in range(5))
```

```
True
```

```
print( 3 in range(2))
```

```
False
```

la boucle *for*

```
for x in range(3):
    print(x)
```

```
0
1
2
```

```
for x in range(3, 7):
    print(x)
```

```
3
4
5
6
```

Exercice 1

- Afficher les nombres de 1 à 10
- Afficher la somme des nombres pairs entre 2 et un entier saisi par l'utilisateur

Tableaux (listes)

```
liste = []
liste.append(3)
liste.append(5)
print(liste)
```

```
[3, 5]
```

```
liste = [0]*10
print(liste)
```

```
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
```

```
liste = [3, 5, 2]
print(liste[1])
```

```
5
```

```
liste.sort()
print(liste)
```

```
[2, 3, 5]
```

```
print(len(liste))
```

```
2
```

Fonctions

```
def afficheListe(tab):
    for i in range(len(tab)):
        print(tab[i])

tab=[4, 6, 5]
afficheListe(tab)
```

```
4
6
5
```

Exercice 2

Ecrire (et tester) les fonctions suivantes :

- rechDoublons qui indique (en renvoyant un booléen) si des doublons sont présents dans le tableau tab

- rechDoublonsVoisins qui indique si des doublons sont présents **côte à côte** dans le tableau tab

Timing de code

```
import time

start = time.time()
# code à timer
s=0
for i in range(100000): s+=s*i
#
end=time.time()
print(end-start)
```

```
0.03296184539794922
```

```
import time

for taille in [1000,10000,100000]:
    start = time.time()
    # code à timer
    s=0
    for i in range(taille): s+=s*i-i*i
    #
    end=time.time()

    print('taille = ', taille, ' en ', end-start, 'sec')
```

```
taille =  1000  en  0.000995635986328125 sec
taille =  10000  en  0.09894180297851562 sec
taille =  100000  en  7.85050630569458 sec
```

```
import random
min=0
max=21
for i in range(10):
    print(random.randint(min, max))#donne une valeur entre 0 et 20 (inclus)
```

```
19
5
12
13
5
18
12
2
12
5
```

Exercice 3 Timing de code : méthodologie

Le pire des cas

Quand on souhaite mesurer le temps d'exécution d'une fonction, il convient de s'assurer que la fonction ne se termine pas prématurément.

Pour avoir un résultat significatif, il faut donc choisir des paramètres qui correspondent au *pire des cas*, c'est-à-dire au traitement le plus long.

Mesurer les temps d'exécution des fonctions ***rechDoublonsVoisins*** et ***rechDoublons*** sur des tableaux de taille 100, 1000, 10000 et 30000 dans le pire des cas

2. Rechercher une valeur dans un tableau

Cette opération fait partie des opérations les plus fréquentes dans une application : rechercher si un tableau contient une valeur donnée.

- la recherche simple : si on ne dispose pas d'information à propos des données du tableau
- la recherche dichotomique : si le tableau est trié

Exercice 4 : recherche simple

Ecrire une fonction rechSimple qui prend en paramètre un tableau tab et une valeur val et qui renvoie un entier qui vaut :

- l'index de la première occurrence de val dans le tableau
- -1 si val ne se trouve pas dans le tableau

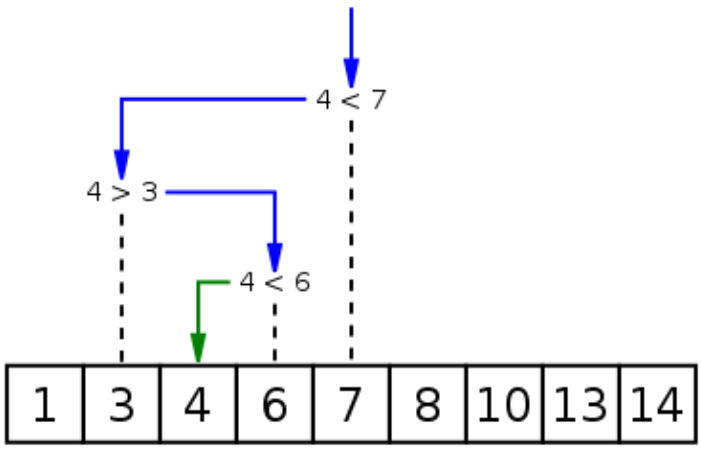
Exercice 5 : recherche dichotomique (binary search)

Ecrire une fonction rechDich qui prend en paramètre un tableau tab **supposé trié** et une valeur val et qui renvoie un entier qui vaut :

- l'index de la première occurrence de val dans le tableau
- -1 si val ne se trouve pas dans le tableau

. Vous procéderez selon le principe suivant :

1. On tient en permanence deux indices gauche et droite tels que T[gauche] <= val <= T[droite].
2. À chaque itération, on calcule l'index au milieu de l'intervalle [gauche, droite] et on compare val avec la valeur du tableau à cet index.
3. En fonction du résultat, soit on affiche l'indice du milieu, soit on met à jour gauche ou droite et on continue à chercher n dans le sous-tableau correspondant.



Exercice 6 : Comparaison des fonctions de recherche

Mesurer les temps d'exécution des 2 fonctions de recherche pour 1 opération de recherche sur des tableaux de taille 100, 1k, 10k et 100k dans le pire des cas

3. Utilisation de HashSets

Les *sets* (ensembles) sont des structures de données destinées à accélérer les opérations de recherches.

Set en python

Initialisation

```
mySet={10, 20}
print(mySet)
#ou
mySet = set()
print(mySet)
```

```
{10, 20}
set()
```

Ajouter un élément.

```
mySet.add(2)
print(mySet)
```

```
{2}
```

Pour ajouter les éléments d'une liste.

```
mySet.update([5,3,4])
print(mySet)
```

```
{2, 3, 4, 5}
```

Les set ne contiennent pas de doublons

```
mySet.add(2)
print(mySet)
```

```
{2, 3, 4, 5}
```

On peut retirer un élément d'un set avec remove (qui renvoie une erreur s'il ne s'y trouve pas) ou discard qui marche tout le temps

```
mySet.remove(1)
```

```
---------------------------------------------------------------------------
KeyError                                  Traceback (most recent call last)
<ipython-input-14-f21715c34701> in <module>()
----> 1 mySet.remove(1)

KeyError: 1
```

```
mySet.discard(2)
print(mySet)
```

```
{3, 4, 5}
```

Recherche dans un set

Test d'appartenance d'un élément dans un set.

```
3 in mySet
```

```
True
```

Construction d'un set à partir d'un tableau

```
s=set()
s.update([5,3,4,3])
print(s)
```

```
{3, 4, 5}
```

Exercice 7 : Comparaison des fonctions de recherche

Construisez un set avec des valeurs aléatoires (100, 1k, 10k et 100k valeurs) et rechercher une valeur dans le pire des cas. Comparez le temps d'exécution avec les 2 autres méthodes de recherche de l'exercice 6.

Exercice 8 : Exercice avec les sets

Ecrire une fonction rechDoublonsRapide qui prend en paramètre un tableau d'entiers tab et qui renvoie un booléen qui indique si tab contient des doublons.

On utilisera un set auxiliaire, de manière à accélérer la recherche.

Indice : le set doit contenir les valeurs « déjà vues »

4. Utilisation de Hashmaps

Les hashmaps (tables de hachage) sont un type de tableau associatif, une structure de donneés qui repose sur une correspondance clé-valeur.

key	values
'toto'	3
'tata'	89
'titi'	45
'toutou'	12

En python, les hashmap sont des dict (pour dictionnaires). Dans le cas du dictionnaire, les clefs sont les mots (définis) et les valeurs sont les définitions de ces mots.

- Les clés sont uniques et leur type est quelconque.
- l'ensemble des clefs forment un set

Initialisation

```
hm={}
#ou
hm={'a':2, 'b':4}
print(hm)
hm['F']=5 # ajout d'une ligne
print(hm)
```

```
{'a': 2, 'b': 4}
{'a': 2, 'b': 4, 'F': 5}
{'b': 3, 'a': 3}
```

Recherche dans une hashmap

```
print('a' in hm)
print('r' in hm)
```

```
True
False
```

Exercice 9 : Exercice avec les hashmaps

Ecrire une fonction rechTriplonsRapide qui prend en paramètre un tableau d'entiers tab et qui renvoie un booléen qui indique si tab contient des triplons. Attention, vous pouvez utiliser une hashmap auxiliaire mais il est interdit de la parcourir

Ecrire également une autre fonction (brute force) et comparer les temps d'exécution sur des tableaux de tailles différentes.

5. Exercices de TP

Exercice 1

On cherche à écrire une fonction premCarRec(tableau) qui renvoie le **premier élément récurrent** d'un tableau (dans une lecture des indices croissants). Il s'agit du problème du *First Recurring Character*

Version 1 : renvoyer l'élément présent plusieurs fois dans le tableau, dont on découvre la première occurrence en premier Par exemple,

- tableau = [3, 6, 2, 7, 2, 6, 1], la fonction doit renvoyer 6

Version 2 : renvoyer l'élément présent plusieurs fois dans le tableau, dont on découvre la deuxième occurrence en premier Par exemple,

- tableau = [3, 6, 2, 7, 2, 6, 1], la fonction doit renvoyer 2

Pour les 2 versions :

- tableau = list('hippopotame'), la fonction doit renvoyer 'p'
- tableau = [3, 6, 2, 7, 1], la fonction doit renvoyer None car il n'y a pas de doublon

Version 1

1. Ecrire une solution de type **brut-force**
2. Ecrire une solution plus rapide **en utilisant une hashmap** et évaluer le gain de performance surun gros tableau de taille >50k

Version 2

1. Ecrire une solution de type **brut-force**. Est ce possible en 2 boucles seulement ?
2. Ecrire une solution plus rapide **en utilisant un set** et évaluer le gain de performance sur un gros tableau de taille >50k

Exercice 2

On cherche à écrire une fonction premCarNonRec(tableau) qui renvoie le **premier élément non-répété** du tableau (dans une lecture des indices croissants), c'est à dire celui qui ne réapparait pas et qui est lu en premier

Par exemple,

- tableau = [3, 6, 2,5, 7, 2, 6, 3], la fonction doit renvoyer 5
- tableau = list('hippopothame'), la fonction doit renvoyer 'i'
- tableau = [3, 6, 3, 6, 6], la fonction doit renvoyer None car il n'y a pas de valeur unique

1. Ecrire une solution de type **brut-force**
2. Ecrire une solution plus rapide, **avec une hashmap**

3. Ecrire une solution rapide avec **des sets**

Exercice 3

On cherche à écrire une fonction ***mostFreq*** qui permet de déterminer l'élément le plus fréquent dans un tableau. En cas d'égalité, renvoyer l'élément qui apparait en premier dans le tableau (le plus à gauche)

1. Ecrire une solution de type brute force
2. Ecrire une solution rapide

Exercice 4

On cherche à écrire une fonction ***doubDoub*** qui permet de déterminer si le tableau en paramètre contient au moins 2 doublons, c'est-à-dire 2 valeurs qui se répètent chacune au moins 2 fois.

Par exemple, sur le tableau tab=[2, 4, 2, 6, 4, 7, 4] la fonction doit renvoyer true

et sur le tableau tab = [2, 4, 12, 6, 4, 7, 4] la fonction doit renvoyer false

1. Ecrire une solution de type brute force
2. Ecrire une solution rapide

Exercice 5

On cherche à écrire une fonction ***xetxx*** qui prend en paramètre un tableau d'entiers trié croissant et qui renvoie un booléen qui vaut :

- true si le tableau contient une valeur et son carré (par exemple, -3 et 9 avec tab=[-3, -1, 4, 9, 24]) ou, 1 et 1 avec tab=[-3, 1, 4, 19, 24])
- false sinon

Ecrire une solution rapide sans set ni hashmap

6. Complexité théorique

Définition :

L'analyse de la complexité consiste à étudier la quantité de ressources (par exemple de temps ou d'espace) nécessaire à l'exécution de cet algorithme.

La complexité s'exprime en fonction de la taille de l'entrée de l'algorithme

Deux approches :

- calcul de la complexité dans le pire des cas
- calcul de la complexité en moyenne

Exemple : recherche d'une valeur dans un tableau (une liste)

1. **Recherche simple dans un tableau de taille n**

```
def rechSimple(liste, val):
    for i in range(len(liste)):
        if liste[i]==val :
            return i
    return -1
```

Ici, on cherche à exprimer le nombre d'itérations de l'algorithme

- en fonction de la taille de liste (notée n)
- dans le pire des cas, c'est-à-dire quand la valeur ne se trouve pas dans le tableau

➔ Il faut *n* itérations. Donc la complexité vaut ***0(n)***

2. **Recherche dichotomique**

```
def rechDich(liste, val):
    g=0
    d=len(liste)-1
    while(g<=d):
        m=(g+d)//2
        if(liste[m]==val):return m
        if(liste[m]<val):g=m+1
        if(liste[m]>val):d=m-1
        #print(g, d, m)
    return -1
```

Soit n la taille du tableau liste. On suppose que n est grand et qu'il peut s'écrire $n = 2^k$

A chaque itération de l'algorithme, on écarte la moitié des possibilités, c'est-à-dire qu'on le divise par 2. Il faudra donc k itérations pour s'assurer que la valeur ne se trouve pas dans le tableau (le pire des cas).

Or $n = 2^k \leftrightarrow k = \log(n)$

➔ Donc le nombre d'itérations dans le pire des cas vaut log(n), la complexité se note **O(log(n))**

Les ordres de grandeur : la notation de Landau *0(n)*

Soit a(n) le nombre d'instructions exécutées dans le pire des cas, en fonction de n (généralement la taille du paramètre d'entrée de l'algorithme).

Alors, on dit que $\boldsymbol{a(n) \in O(f(n))}$ si

$$\exists\, C > 0,\ \exists\, n_0,\ a(n) < C * f(n)$$

ou

$$\exists\, C > 0,\quad \lim \frac{a(n)}{f(n)} < C$$

Quelques règles utiles :

- Les coefficients peuvent être omis : $4n^2$ devient n^2
- n^a domine n^b si a > b : par exemple, n^4 domine n^3
- Une exponentielle domine un polynôme : 3^n domine n^2 (cela domine également 2^n)●
- De même, un polynôme domine un logarithme : n domine $\log(n)$. Cela signifie également, par exemple, que n^2 domine $n * \log(n)$

Exercice 1

Pour chacun des codes suivants, donner le nombre d'itérations de l'algorithme, ainsi que la complexité simplifiée. Par exemple : 3*n=0(n)

Code 1
 	
for (int i = 0; i<n; i++) {
  // instructions
}
for (int i = 0; i<n; i++) {
  // instructions
}
	Code 2
	
	for (int i = 0; i<n; i++) {
	  // instructions
	  for (int j = 0; j<n; j++) {
	  // instructions
	  }
	}
	for (int j = 0; j<n; j++) {
	  // instructions
	}

Code 3
 	
for (int i = 0; i<n; i++) {
  // instructions
  for (int j = 0; j<i; j++) {
  // instructions
  }
}
	Code 4
	
	 for (int i = 0; i<n; i++) {
	  // instructions
	  for (int j = 0; j<n*n; j++) {
	  // instructions
	  }
	}

Code 5
 	
def f(tab):
  n = len(tab)
  for i in range(n):
	Code 6
	
	def f(tab):
	  n = len(tab)
	  for i in range(n):

```
    for j in range(5*n):
            print(i+j)
for i in range(n):
    print(i*i*i)
```

```
    for j in range(n):
        g(i+j)
def g(k):
    for i in range(k):
        for j in range(k*k):
            print(i)
```

Comparaison des complexités

log(n)	$\sqrt{n}$	n	n log(n)	n^2
3	3	10	33	100
7	10	100	664	10 000
10	32	1000	9966	1 000 000
13	100	10 000	132 877	100 000 000
17	316	100 000	1 660 964	10 000 000 000
20	1000	1 000 000	19 931 569	1 000 000 000 000

Opérations par secondes	Taille du problème: 1 million			Taille du problème 1 milliard		
	n	$n \log(n)$	n^2	n	$n \log(n)$	n^2
10^6	Secondes	Secondes	Semaines	Heures	Heures	Jamais
10^9	Immédiat	Immédiat	Heures	Secondes	Secondes	Décennies
10^{12}	Immédiat	Immédiat	Secondes	Immédiat	Immédiat	Semaines

7. Implémenter ses propres sets et hashmaps

Sets d'entiers

On souhaite rechercher des valeurs dans un tableau d'entiers (myTab), de taille quelconque, *mais on veut éviter de parcourir tout le tableau à chaque recherche ;*

a. Version 0 : On suppose d'abord que tous les entiers sont dans un intervalle [0, 100]. On cherche à transformer le tableau myTab en un tableau mySet de taille 100 :

mySet[i]=1 si i est une valeur du tableau myTab, et 0 sinon

Plus simplement, si i est présent dans myTab alors mySet[i]=1

Par exemple (pour des nombres compris entre 0 à 10)

myTab : de taille quelconque mais avec 10 valeurs possibles (c'est-à-dire différentes) seulement.

4	7	9	4	7	9	3	3	5	5	5	5	5	5	2	7	4	7	7	7

mySet : de taille 10

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	1	1	1	0	1	0	1

➔ Ecrire une fonction int[] **tab2set0**(int[] tab, int taille) qui transforme myTab en mySet. (taille est la taille de mySet)

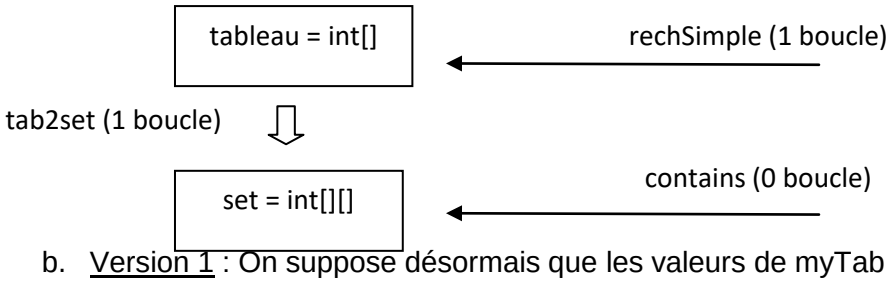
En python, votre fonction devrait commencer comme :

```
def tab2set0(mytab, taille):
    myset =[0]*taille  #créé le tableau myset, initialisé avec des 0
…
```

➔ Ecrire une fonction boolean **contains0**(int[] mySet, int val) qui renvoie True si la valeur val se trouve dans myTab

```
def contains0 (mySet, val):
    …
    …
```

Principe :



b. Version 1 : On suppose désormais que les valeurs de myTab sont dans un intervalle [0, 1000]. On pourrait créer un tableau MySet de taille 1000 mais on va continuer à utiliser un MySet de taille = 100. A la différence de l'exercice précédent, mySet ne sera plus un tableau d'entiers, mais un tableau de tableau d'entiers.

si i est une valeur du tableau myTab,
le (petit) tableau mySet[i%100] *contient* i

Par exemple (pour des nombres compris entre 0 à 100 et un mySet de taille 10)

myTab :

4	7	29	14	7	9	33	93	85	5	25	5	5	5	2	7	14	7	7	7

mySet :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
[]	[]	[2]	[33, 93]	[4, 14, 14]	[85, 5, 25, 5, 5, 5]	[]	[7, 7, 7, 7, 7, 7]	[]	[29, 9]

➔ Ecrire une fonction int[][] **tab2set**(int[] tab, int taille) qui transforme le tableau myTab en double tableau mySet

En python, votre fonction devrait commencer comme :

```
def tab2set(mytab, taille):
    myset =[[] for i in range(taille)] #créé le tableau myset,
initialisé avec des tableaux vides
…
```

Vous aurez également besoin d'ajouter un élément dans un tableau. en python, cela se fait avec *tableau.append(val)*

➔ Ecrire une fonction boolean **contains**(int[][] mySet, int val) qui renvoie True si la valeur val se trouve dans myTab

```
def contains (mySet, val):
    …
    …
```

Set de String

On cherche maintenant à adapter nos solutions pour le stockage et la recherche de String. Pour cela, on va calculer un entier à partir d'une String, pour ensuite stocker la String comme cet entier.

➔ Ecire une fonction ***hashCode****(myString)* qui renvoie un entier. Il serait judicieux que sur 2 String différentes, la fonction ***hashCode*** renvoie 2 entiers différents (le plus souvent possible)

Principe : on va stocker la chaine s dans mySet, à l'endroit où l'on aurait stocké l'entier hashCode(s)

➔ Ecrire une fonction **tab2StringSet**(stringTab, taille) qui renvoie un tel mySet
➔ Ecrire une fonction **stringContain**(mySet, myString) qui indique si myString appartient à mySet

Bonus : Puisque Python le permet, ajouter la fonction ***hashCode*** aux paramètre des fonctions tab2StringSet et stringContain (et/ou utilisez les lamba expression)

On s'intéresse enfin au paramètre taille des fonction tab2Set.

Pour que la fonction contain s'exécute rapidement, il faut que les tableaux de mySet restent relativement petits. Sur un texte littéraire quelconque (quelconque mais assez gros, par exemple https://fr.wikisource.org/wiki/Quatrevingt-treize/I,_1), déterminer la valeur du paramètre taille qui permet d'avoir des mySet[i] de taille inférieure à 100. Pour la fonction ***hashCode***, on pourra opter pour le hashcode des String en Java (https://docs.oracle.com/javase/1.5.0/docs/api/java/lang/String.html#hashCode%28%29)

Autre source de données pour récupérer un gros tableau de string (1 million de mots environ) :

```
import urllib.request
with urllib.request.urlopen('http://norvig.com/big.txt') as
response:
   html = response.read().decode('utf-8')
tab=html.lower().split()
```

Fonctions Python utiles :

1. char to ascii : ord('A') vaut 65
2. Découper une String en token. : avec split du module re
   import re

Complexité avec Python

https://wiki.python.org/moin/TimeComplexity

	List	Set	Dict
x in s (recherche)	0(n)	0(1)	0(1)
Get item (accès)	0(1)	0(1)	0(1)

8. Récursivité

Exemple et rappel terminologique

```
FONCTION g (ENT n) RENVOIE ENT
DEBUT
        SI n<3
                ALORS RENVOIE 0
        FSI
        RENVOIE g(n-1)-1
FIN g
```

Calculer les valeurs de :

- g(5)
- g(7)
- g(n), pour un n quelconque

Exercice préliminaire : Itération en récursivité

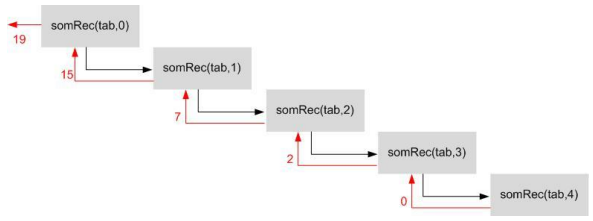
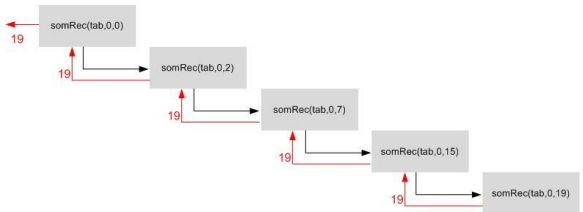
Contrainte : interdit d'utiliser des structures itératives (POUR ou ITER). Indiquer pour chaque fonction, l'algorithme qui comprend la première instruction d'appel.

a. Ecrire une fonction *IterRec* récursive qui prend en paramètre un entier n et qui produit l'affichage de n fois le message « bonjour ».

b. Ecrire une fonction *parTab* récursive qui prend en paramètre un tableau d'entiers et un entier k et qui en affiche les valeurs de gauche à droite à partir de l'indice k. Comment modifier l'ordre d'affichage des éléments sans changer le premier appel de la fonction *parTab ?*

```
def parTab(tab, indice):


parTab([1,2,3,4],0)
```

c. Ecrire une fonction *SomRec* récursive qui prend en paramètre un tableau d'entiers et qui renvoie la somme de ses éléments.

<table>
<tr><th colspan="2">Correction pour la fonction somRec</th></tr>
<tr><td>Fonction somRec(ent[] tab, ent k) renvoie ENT
Si k==taille(tab)
alors renvoie 0
fsi
renvoie tab[k] + somRec(tab, k+1)</td><td>Fonction somRec(ent[] tab, ent k, ent som)
renvoie ENT
Si k==taille(tab)
alors renvoie som
fsi
renvoie somRec(tab, k+1, som+tab[k])</td></tr>
<tr><td>1er appel : k=0</td><td>1er appel : k=0 et som=0</td></tr>
<tr><th colspan="2">Execution sur tab = {2, 5, 8, 4}</th></tr>
<tr><td> 
</td><td> 
</td></tr>
</table>

Exercice préliminaire : suite de Fibonacci

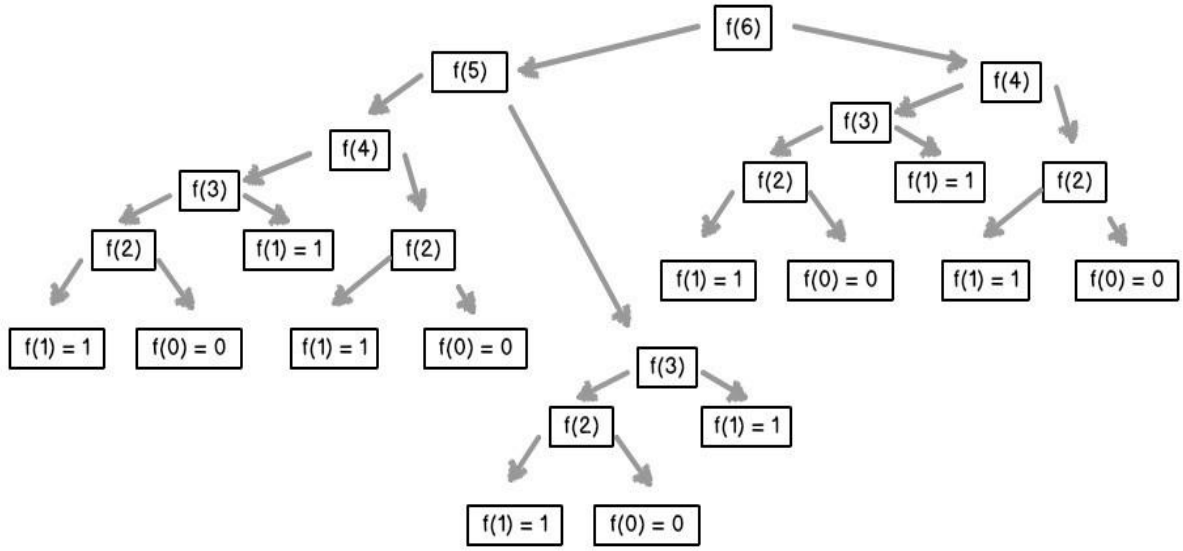
a. Ecrire une fonction récursive fibo(int n) qui renvoie la valeur du n-ième terme de la suite de Fibonacci définie par :

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}\ \forall n > 1 \text{ avec } U_0 = 0 \text{ et } U_1 = 1$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

b. Ecrire une fonction récursive terminale équivalente
c. Ecrire une fonction itérative équivalente
d. Comparer le temps d'exécution pour n = 25, n=35

```
import time
start = time.time()
for i in range (100000): x=x**i
end = time.time()
print(end - start
```



Exercice 1 : affichages des chaines de bits de taille n

Par exemple, pour n = 2 , la console doit afficher : 00, 01, 10, 11

Soit tab un tableau de taille n. On cherche à remplir ce tableau de toutes les manières possibles avec des 0 et des 1. Pour ce faire, on va écrire une fonction récursive void chainesBits(int [] tab, int ind) qui devra :

- affecter une valeur à tab[ind] (0 ou 1)
- s'appeler sur l'indice d'après

Début de solution à compléter :

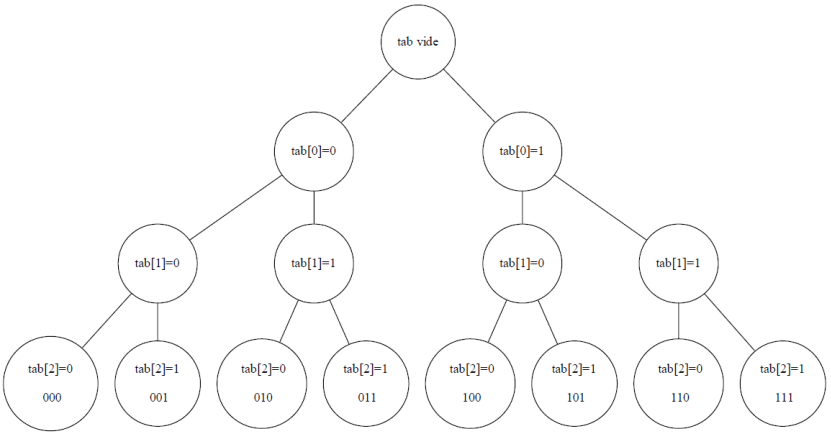
```
def chainesBits ( tab,   ind) :
    if ???
    else :
        tab[ind]=0
        chainesBits (tab, ind+1)
        tab[ind]=1
        chainesBits (tab, ind+1)

def printChainesBits(n):
    tab=[0]*n
    chainesBits(tab,0)
```

Correction :

	def chainesBits (tab, ind) :
C	if ind == len(tab):print(tab) else :
A	tab[ind]=0 chainesBits (tab, ind+1)
B	tab[ind]=1 chainesBits (tab, ind+1)

Notation : chainesBits (tab, ind) = cb(ind)

cb(0)				Console
A : tab[0]=0	cb(1)			
	A : tab[1]=0	cb(2)		
		A : tab[2]=0	cb(3)	
			C →	000
		B : tab[2]=1	cb(3)	
			C →	001
	B : tab[1]=1	cb(2)		
		A : tab[2]=0	cb(3)	
			C →	010
		B : tab[2]=1	cb(3)	
			C →	011
B : tab[0]=1	cb(1)			
	A : tab[1]=0	cb(2)		
		A : tab[2]=0	cb(3)	
			C →	100
		B : tab[2]=1	cb(3)	
			C →	101
	B : tab[1]=1	cb(2)		
		A : tab[2]=0	cb(3)	
			C →	110
		B : tab[2]=1	cb(3)	
			C →	111



Bonus :
Modifier votre function de manière à stocker les chaines obtenues dans une liste listeRes

void chainesBits2 (int [] tab, int ind, listeRes),

où listeRes est une liste des (different états du) tableaux tab

Attention, cette question nécessite d'utiliser les passage par reference des parameters de la fonction. (c'est plus compliqué via la valeur de retour) . Vous aller sans doute avoir besoin de stocker des copies du tableau tab. En python, liste[:] est une copie de liste (donc de reference différente)

Exercice 2 [masque booléen] : Sous séquence de somme nulle

Ecrire une fonction sousSeqSomNulle(liste, ind, tab) qui prend en paramètre un tableau d'entiers, et qui indique si la somme de certaines de ses valeurs (en nombre quelconque et non nécessairement côte à côte) vaut 0. Par exemple, sur le tableau tab = {4 , 6, 5, -3, 1, 9, -12, 40} la fonction doit afficher (textuellement) « 6+(-3)+9+(-12) = 0 ».

Indice : Utiliser un principe de masque booléen

4	6	5	-3	1	9	-12	40
0	1	0	1	0	1	1	0

Pour ce tableau, les masques suivants sont solution :

```
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0]
[0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0]
[0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0]
[1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0]
```

Exercice 2.5 [masque booléen] : Nombre de montants à partir d'un ensemble de pièces

Le problème est le suivant : On dispose d'un ensemble de n pièces. La pièce numéro i vaut tab[i] euros. On cherche à savoir combien de montants différents peut-on régler avec ces pièces sans avoir à rendre de monnaie.

par exemple, si tab=[1, 2, 5, 5], on peut régler les montants suivants :

0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12 et 13. Il y a donc 12 montants

Version 1 : en listant tous les montants payables sans retour de monnaie (quitte à les afficher plusieurs fois)

0, 5, 5, 10, 2, 7, 7, 12, 1, 6, 6, 11, 3, 8, 8, 13

Version 2 : en affichant la liste des montants payables

{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13}

indice : ajouter comme paramètre un set et y accumuler les montants

Exercice 3 énumération des n-uplets

En s'inspirant de la fonction qui affiche les chaines de bits de taille n, écrire une fonction qui affiche tous les chaines (liste) de taille n dont les valeurs sont comprises entre 0 (inclus) et un entier max (exclu)

par exemple, si n=2 et max = 3, votre fonction doit afficher :

[0, 0]
[0, 1]
[0, 2]
[1, 0]
[1, 1]
[1, 2]
[2, 0]
[2, 1]
[2, 2]

Exercice 4 permutations

Adapter votre fonction de manière à afficher toutes les permutations de taille n, c'est-à-dire les liste formées d'entiers compris entre 0 (inclus) et n (exclu) sans valeurs répétées

Par exemple, pour n = 3, votre fonction doit afficher :

[0, 1, 2]
[0, 2, 1]
[1, 0, 2]
[1, 2, 0]
[2, 0, 1]
[2, 1, 0]

Exercice 5 [chaine bits & backtracking] : Problème des mots bien parenthésés de taille n

On considère les mots formés uniquement de parenthèses. Par exemple w = '())())'.

1. Ecrire une fonction bienBalance qui prend en paramètre un tel mot (un tableau de char plutôt qu'une string')
et qui renvoie true si les parenthèses sont bien balancées (Par exemple w = '(()())') et false sinon

bien balancées	mal balancées
(()())	)()()(
((())())	(()
()	)(

2. Ecrire une fonction printAll(n) qui affiche tous les mots de parenthèses bien balancées de taille n
3. idem avec un mécanisme de backtracking

pour n = 6 :

```
((()))
(()())
(())()
()(())
()()()
```

Pour passer du tableau de char à une string :

avec tab = `['(', '(', '(']`

```
' '.join(tab) vaut '((('
```

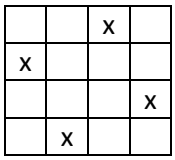
Pour passer d'une string à un tableau de char :

```
list('()()()()()')
```

Exercice 5 [nuplets & backtracking] : Problème des n-reines

Le but dans le problème des n reines est de placer n dames d'un jeu d'échecs sur un échiquier de n×n cases sans que les dames ne puissent se menacer mutuellement, conformément aux règles du jeu d'échecs (la couleur des pièces étant ignorée). Par conséquent, deux dames ne devraient jamais partager la même rangée, colonne, ou diagonale. L'objectif est de trouver une solution en fonction d'un entier n fourni par l'utilisateur.

On propose coder une configuration des n reines sur l'échiquier à l'aide d'un tableau mono indice. Par exemple, pour n = 4, une des solutions est la configuration suivante :



Codage par numérotation des reines dans chaque colonne (vers le bas en partant de 0) :

1	3	0	2

Tableaux de test :

[1, 3, 0, 2] pour n = 4

[0, 4, 7, 5, 2, 6, 1, 3] pour n = 8

- version 1 : en modifiant la fonction nuplets de manière à parcourir tous les tableaux de n entiers strictement inférieurs à n.
- version 2 : **backtracking** : en incorporant un mécanisme de retour sur trace qui consiste à revenir légèrement en arrière sur des décisions prises afin de sortir d'un blocage. Par exemple, ceci permet de ne pas continuer à « avancer » si le début du tableau est

1	1		

  - On pourra définir une fonction *inserable*(ENT[] tab, ENT val,ENT r) qui renvoie un booléen valant VRAI si la valeur val est insérable dans le tableau tab au rang r, et FAUX sinon. Par exemple, inserable(tab, 1, 1) doit renvoyer FAUX si tab ={1,-,-,-}. («-» désigne des valeurs pas encore attribuées. On peut le remplacer par -1)

1			

    Par exemple, pour la 2ème case du tableau, les valeurs 0, 1, et 2 ne sont pas insérables

  - On pourra définir une fonction nReines(ENT[] tab, ENT rang) qui renvoie un booléen valant VRAI si il existe une solution, et FAUX sinon
  - Modifier votre algo de manière à lister toutes les configurations gagnantes pour un n donné

Bonus (hors récursivité):

Traiter le même problème (backtracking inclus) en générant le code.

Utiliser la fonction eval('mon code') qui exécute *mon code*

cf https://docs.python.org/3/library/functions.html

Exercice 6 [nuplets & backtracking] : Sudoku

L'objectif est de coder un solveur de Sudoku, à tester sur la grille suivante :

```
  x 0 1 2 | 3 4 5 | 6 7 8
y ---------------------
0 | 0 0 6 | 0 3 0 | 7 0 0
1 | 0 3 0 | 5 0 8 | 0 9 0
2 | 8 0 0 | 4 0 7 | 0 0 6
-------------------------
3 | 0 9 0 | 0 0 0 | 0 3 0
4 | 0 0 0 | 8 2 9 | 0 0 0
5 | 0 6 0 | 0 0 0 | 0 2 0
-------------------------
6 | 3 0 0 | 6 0 4 | 0 0 9
7 | 0 4 0 | 2 0 1 | 0 8 0
8 | 0 0 1 | 0 5 0 | 2 0 0
```

```
grid = [
  [0,0,6,0,3,0,7,0,0],
  [0,3,0,5,0,8,0,9,0],
  [8,0,0,4,0,7,0,0,6],
  [0,9,0,0,0,0,0,3,0],
  [0,0,0,8,2,9,0,0,0],
  [0,6,0,0,0,0,0,2,0],
  [3,0,0,6,0,4,0,0,9],
  [0,4,0,2,0,1,0,8,0],
  [0,0,1,0,5,0,2,0,0]
]
```

9. Gain de performance : méthodes générales et ad-hoc

Dans les problèmes ci dessous, vous devez fournir une solution brute-force et une solution plus rapide.

Pour chaque exercice, vous devez

- Déterminer la complexité des 2 solutions
- Evaluer la performance de vos deux solutions, et déterminer le gain de performance (en % moyen) de la solution rapide.

Exercice 1 Recherche de la plus grande sous chaine commune

1. Ecrire une fonction *souchmax* qui prend en paramètre 2 chaines de caractère *adn1 et adn2 ,* et qui renvoie une chaine qui vaut la plus grande sous chaine communes à *adn1 et adn2.* Par exemple, souchmax(‘’crotale‘’, ‘‘hippopotame’’) doit renvoyer ‘’ota’’. Si il existe plusieurs sous chaines communes, renvoyer celle qui apparait en premier dans adn1.
   Remarque : adn1 et adn2 pourront être des tableaux de caractères, ou bien même des tableaux d’entiers.

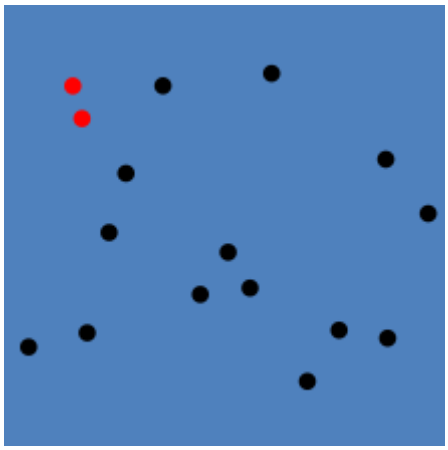
2. Solution rapide

Indice : de baser sur le tableau à double indice [1]suivant (à construire à partir des 2 chaines) :

	H	I	P	P	O	P	O	T	A	M	E
C											
R											
O					1		1				
T								2			
A									3		
L											
E											1

Exercice 2 Paire de points la plus proche

On considère un ensemble de n points du plan et on cherche à déterminer la paire de points la plus proche. Ce problème a des applications en contrôle aérien ou maritime.



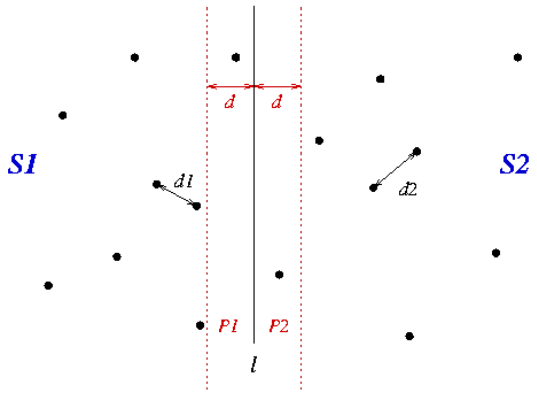
Les coordonnées de n points peuvent être rassemblées dans 2 tableaux x et y de taille n

Par exemple, pour n = 3

les points M0=(2, 6), M1=(4,3), M2=(5,1), sont codés dans les tableaux x={2,4,5} et y={6, 3, 1}

[1] grille = [[0]*n for i in range(m)]

- ➔ Ecrire une fonction float dist(int a, int b, int c, int d) qui renvoie la distance euclidienne entre les points de coordonnées (a, b) et (c, d).
- ➔ Ecrire une fonction void ppp(int[] x, int[] y) qui affiche la distance entre la paire de points la plus proche.
- ➔ version rapide : diviser pour régner



Pour visualiser le nuage de points en python :
Après l'installation du package matplotlib,

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.scatter(x, y)
plt.show()
```

Exercice 3 Sous tableau de somme maximale

Le but de l'exercice est de déterminer pour un tableau d'entiers quelconques, le sous tableau dont la somme des éléments est la plus grande.

a. Ecrire une fonction *sommesstab* qui prend en paramètre un tableau d'entier tab, et 2 entiers i et j, et qui renvoie un entier valant la somme des cases du tableau tab entre les indices i et j (inclus).
Par exemple, si tab = { -6,12,-7,0,14,-7,5 },

0	1	2	3	4	5	6
-6	12	-7	0	14	-7	5

sommesstab(tab, 1, 4) = tab[1] + tab[2] + tab[3] + tab[4] =12-7+0+14 =19

b. Ecrire une fonction qui prend en paramètre un tableau d'entiers (positifs, nuls, ou négatifs), et renvoie la somme des éléments du sous tableau qui la rend maximale. On ne s'intéressera ici qu'aux sous tableaux correspondant à des cases *adjacentes* du tableau initial (il ne peut pas y avoir de trou.

Par exemple, si T = { -6,12,-7,0,14,-7,5 } alors le sous tableau à déterminer est T'= { 12,-7,0,14 } car 19 =est la somme partielle de cases adjacentes la plus grande (par exemple, la somme du sous tableau T'' = { -6,12,-7 } vaut 1, ce qui est moins que 19.

- Que vaut le sous tableau si le tableau ne contient que des entiers positifs ?
- Que vaut le sous tableau si le tableau ne contient que des entiers négatifs ?

c. Donner le nombre d'itérations de votre algorithme dans le pire des cas en fonction de la taille n du tableau initial
d. Tenter de réduire ce nombre en raisonnant par récurrence. (**)