Algoritmo dinamica diretta per alberi cinematici

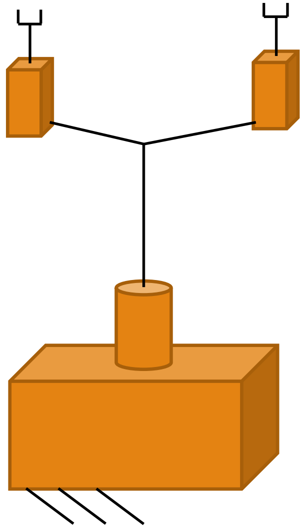
Meccanica dei Robot a.a. 2022/2023

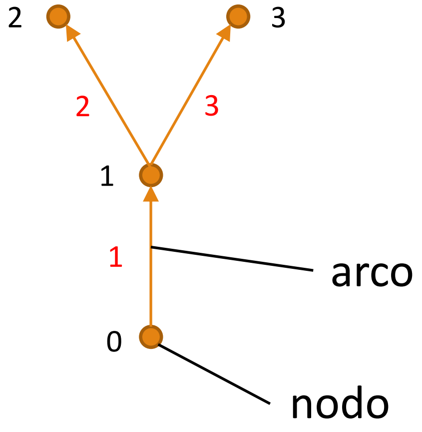
Università di Pisa

ABA: ARTICULATED BODY ALGORITHM

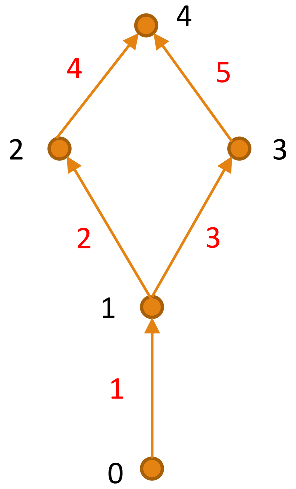
Alcune definizioni:

Grafo di un sistema cinematico ramificato





- I nodi rappresentano i copri rigidi (link); la numerazione parte da 0 (base) fino ad N_B (numero di corpi rigidi mobili). Regola: i nodi figli devono avere un numero più grande del nodo padre
- Gli archi rappresentano i giunti; la numerazione parte da 1 fino ad N_B. Regola: l’arco i-esimo si deve chiamare come il nodo figlio



NON E’ UN ALBERO CINEMATICO

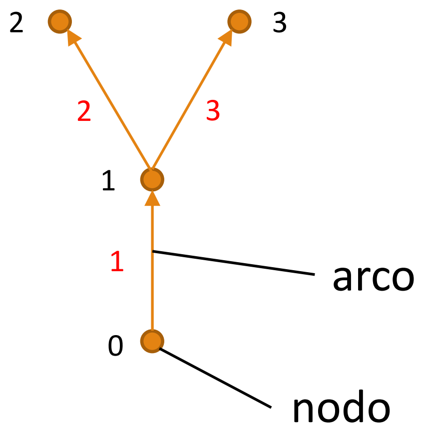
Un albero cinematico è un grafo cinematico senza vincoli di chiusura.

Struttura dati dell'albero cinematico per il book keeping:

- Lista $p(i) = \{\dots p_i \dots\}$ contiene gli indici dei nodi predecessori
- Lista $s(i) = \{\dots s_i \dots\}$ contiene gli indici dei nodi successori
- Lista $\lambda(i) = \{\dots \lambda_i \dots\}$ contiene gli indici dei nodi parent
- Lista $\mu(i) = \{j \in \{1: N_B\} \mid \lambda(j) = i\}$ elenca l'insieme dei nodi figli del nodo i

Esempio:

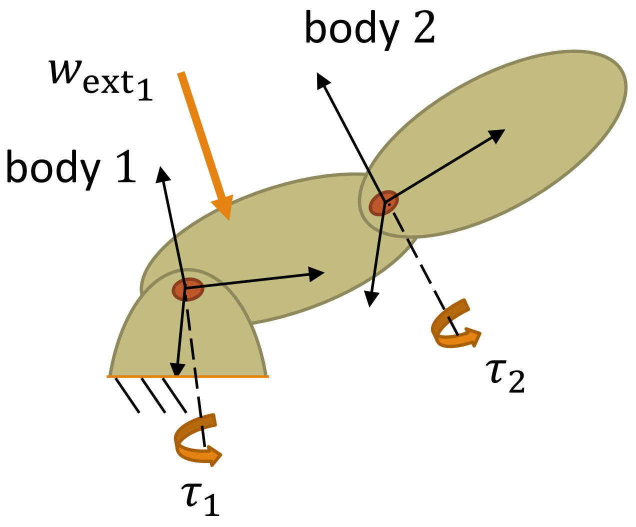
- $p = \{0, 1, 1\}$
- $s = \{1, 2, 3\}$
- $\lambda = \{0, 1, 1\}$
- $\mu = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$



ABA: Articulated Body Algorithm

Algoritmo efficiente per il calcolo della <u>dinamica diretta</u>, ovvero la determinazione delle accelerazioni dei giunti ($\ddot{q}$), note la postura (q), le velocità ($\dot{q}$) e le forze/coppie di attuazione (τ).

Iniziamo con un esempio semplice. Prendiamo il seguente sistema composto da 2 corpi:

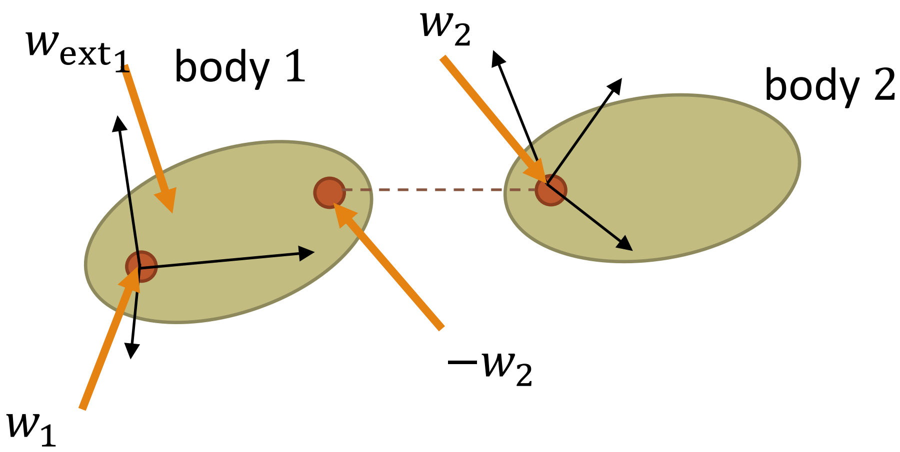


Obbiettivo: scrivere eq. dinamica diretta nella forma:

$$\ddot{q}_i = f_i(q, \dot{q}, \tau, \ddot{q}_{1:i-1})$$

L'accelerazione del i-esimo giunto può dipendere al massimo dalle accelerazioni dei giunti precedenti

Il corpo 1 è la maniglia (handle) che viene sollecitata dal giunto 1 tramite τ_1 e dal wrench esterno w_{ext_1}.
Tali wrench andranno ad accelerare il corpo 1 ed una parte si trasmetterà tramite il giunto 2 al corpo 2.



Scriviamo eq. dinamico dei corpi:

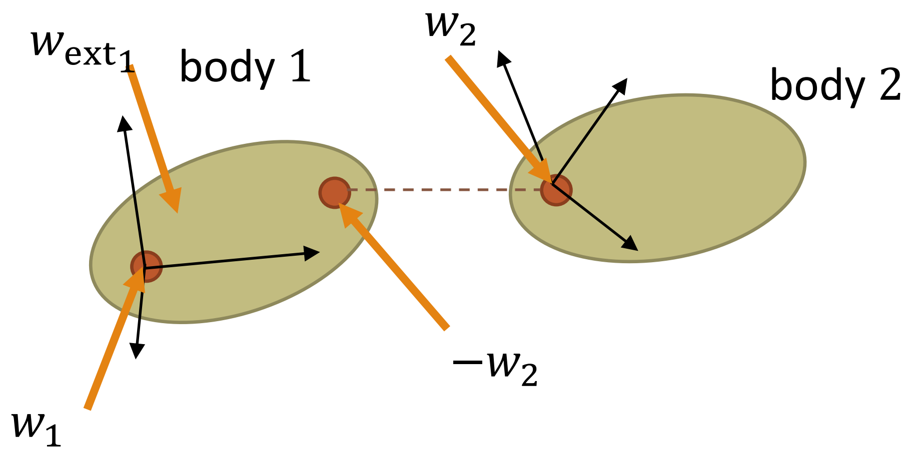
$$w_1^1 + w_{\text{ext}_1} - A_{12}^* w_2^2 = M_1^1 \dot{V}_1^1 + \text{ad}_{V_1^1}^* M_1^1 V_1^1 = M_1^1 \dot{V}_1^1 + b_1^1$$

$$w_2^2 = M_2^2 \dot{V}_2^2 + \text{ad}_{V_2^2}^* M_2^2 V_2^2 = M_2^2 \dot{V}_2^2 + b_2^2$$

Si è definito con $b = \text{ad}_V^* MV$ il <u>wrench di bias</u> (wrench necessario per avere accelerazione nulla).

Introduciamo, per compattezza, la seguente notazione:

$$A_{i-1,i} = \text{Ad}_{g_{i-1,i}}; \quad a_i = \text{ad}_{X_i \dot{q}_i}; \quad V_{i-1}^i = A_{i-1,i}^{-1} V_{i-1}^{i-1};$$



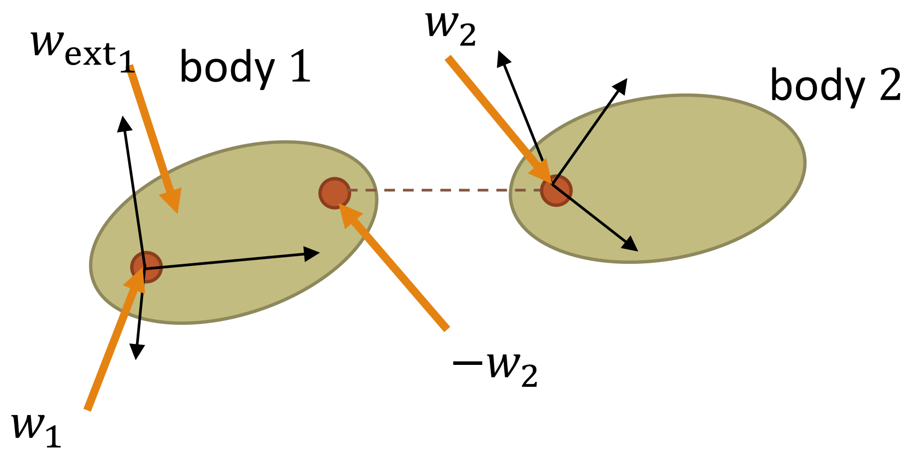
Scriviamo eq. dinamico dei corpi:

$$w_1^1 + w_{\text{ext}_1} - A_{12}^* w_2^2 = M_1^1 \dot{V}_1^1 + b_1^1$$

$$w_2^2 = M_2^2 \dot{V}_2^2 + b_2^2$$

L'accelerazione del corpo 2 $\dot{V}_2^2$ dipende dall'accelerazione del corpo 1:

$$\dot{V}_2^2 = \dot{V}_1^2 + X_2 \ddot{q}_2 - a_2 V_1^2$$



L'accelerazione del corpo 2 $\dot{V}_2^2$ dipende dall'accelerazione del corpo 1:

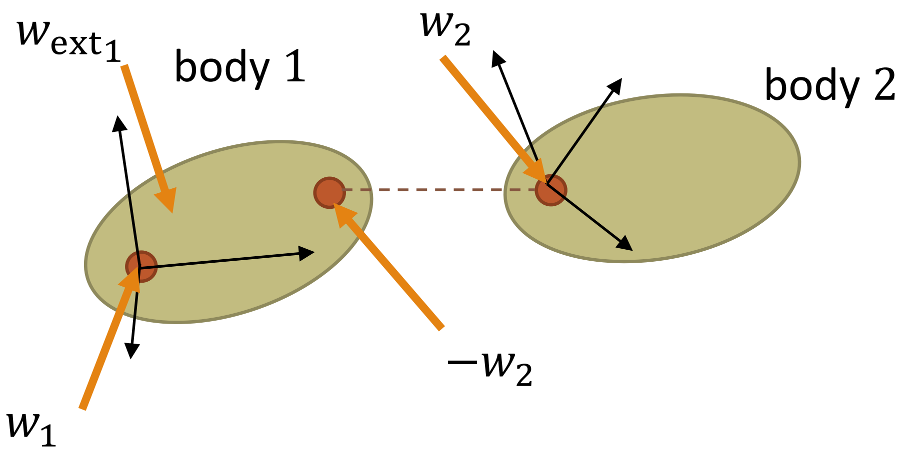
$$\dot{V}_2^2 = \dot{V}_1^2 + X_2\ddot{q}_2 - a_2 V_1^2$$

Sostituiamo nell'eq. del corpo 2:

$$w_2^2 = M_2^2\dot{V}_2^2 + b_2^2$$
$$w_2^2 = M_2^2\left(\dot{V}_1^2 + X_2\ddot{q}_2 - a_2V_1^2\right) + b_2^2$$

Analizziamo la componente attiva del giunto:

$$X_2^T w_2^2 = \tau_2 = X_2^T M_2^2\left(\dot{V}_1^2 - a_2V_1^2\right) + X_2^T M_2^2 X_2\ddot{q}_2 + X_2^T b_2^2$$



Analizziamo la componente attiva del giunto:

$$X_2^T w_2^2 = \tau_2 = X_2^T M_2^2\left(\dot{V}_1^2 - a_2 V_1^2\right) + X_2^T M_2^2 X_2 \ddot{q}_2 + X_2^T b_2^2$$

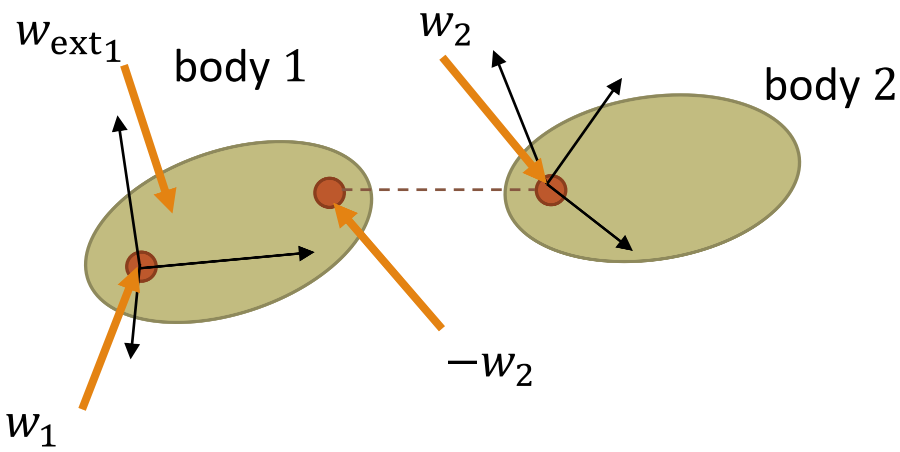
Possiamo esplicitare l'accelerazione del giunto $\ddot{q}_2$:

$$\ddot{q}_2 = \frac{\tau_2 - X_2^T\left[M_2^2\left(\dot{V}_1^2 - a_2 V_1^2\right) - b_2^2\right]}{m_2^2}$$

dove:

$m_2^2 = X_2^T M_2^2 X_2$ è uno scalare

Da notare che $\ddot{q}_2$ è funzione di $\dot{V}_1^2$ che è ancora incognita.



Torniamo all'equilibrio dei corpi:

$$w_1^1 + w_{\text{ext}_1} - A_{12}^* w_2^2 = M_1^1 \dot{V}_1^1 + b_1^1$$
$$w_2^2 = M_2^2 \dot{V}_2^2 + b_2^2$$

Sostituiamo w_2^2 nell'eq. del corpo 1:

$$w_1^1 + w_{\text{ext}_1} - A_{12}^* M_2^2 \dot{V}_2^2 + b_2^2 = M_1^1 \dot{V}_1^1 + b_1^1$$

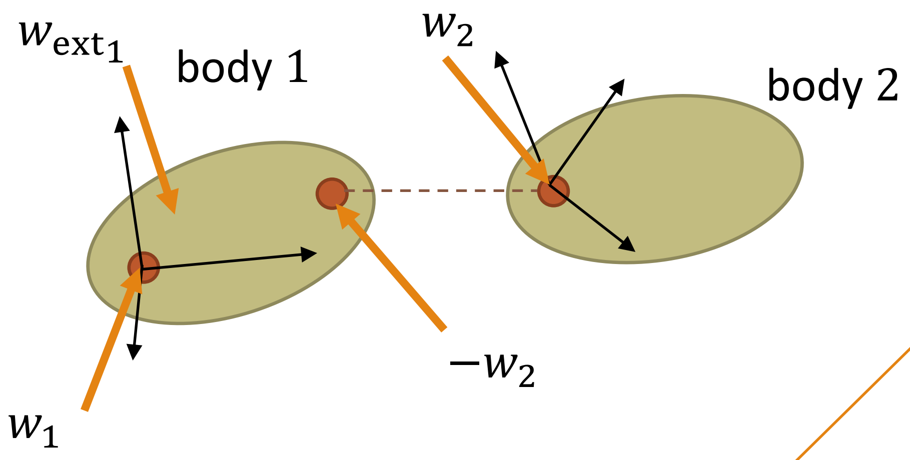
Avendo già osservato che:

$$\dot{V}_2^2 = \dot{V}_1^2 + X_2 \ddot{q}_2 - a_2 V_1^2$$
$$\ddot{q}_2 = \frac{\tau_2 - X_2^T \left[M_2^2 \left(\dot{V}_1^2 - a_2 V_1^2\right) - b_2^2\right]}{m_2^2}$$

Possiamo sostituire tali espressioni nell'eq. corpo 1:

$$w_1^1 + w_{\text{ext}_1} - A_{12}^* \left[M_2^2 \left(\dot{V}_1^2 + X_2 \ddot{q}_2 - a_2 V_1^2\right) + b_2^2\right] = M_1^1 \dot{V}_1^1 + b_1^1$$

$$w_1^1 + w_{\text{ext}_1} - A_{12}^* \left[M_2^2 \left(\dot{V}_1^2 + X_2 \frac{\tau_2 - X_2^T \left[M_2^2 \left(\dot{V}_1^2 - a_2 V_1^2\right) - b_2^2\right]}{m_2^2} - a_2 V_1^2\right) + b_2^2\right] = M_1^1 \dot{V}_1^1 + b_1^1$$



Ricordiamoci che: $\dot{V}_1^2 = A_{12}^{-1}\dot{V}_1^1$

$$w_1^1 = -w_{\mathrm{ext}_1} + A_{12}^* \left[M_2^2 \left(\dot{V}_1^2 + X_2 \frac{\tau_2 - X_2^T \left[M_2^2 \left(\dot{V}_1^2 - a_2 V_1^2 \right) - b_2^2 \right]}{m_2^2} - a_2 V_1^2 \right) + b_2^2 \right] + M_1^1 \dot{V}_1^1 + b_1^1$$

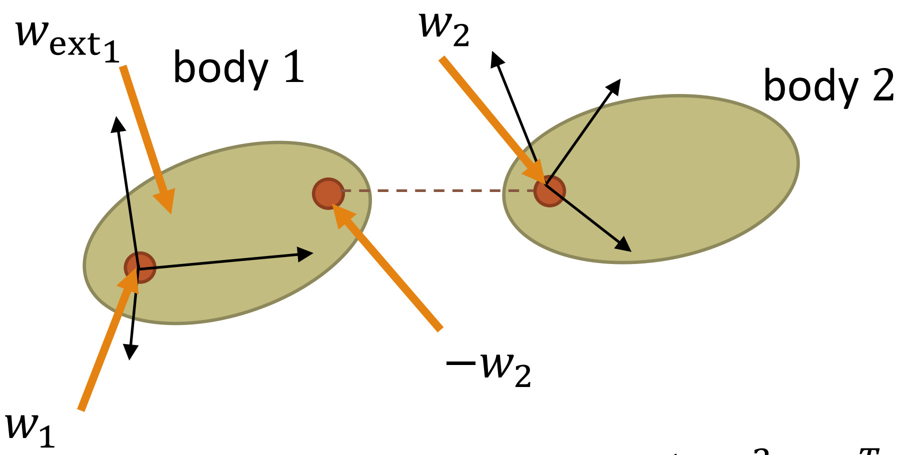
L'obbiettivo ora è di fattorizzare l'equazione nella forma:

$$w_1^1 = \widehat{M}_1^1 \dot{V}_1^1 + \hat{b}_1^1$$

dunque:

$$w_1^1 = A_{12}^* M_2^2 A_{12}^{-1} \dot{V}_1^1 - \frac{A_{12}^* M_2^2 X_2 X_2^T M_2^2 A_{21}}{m_2^2} \dot{V}_1^1 + M_1^1 \dot{V}_1^1 +$$

$$+ A_{12}^* b_2^2 - \frac{A_{12}^* M_2^2 X_2 X_2^T}{m_2^2} b_2^2 - A_{12}^* M_2^2 a_2 V_1^2 + \frac{A_{12}^* M_2^2 X_2 X_2^T M_2^2 a_2 V_1^2}{m_2^2} + b_1^1 - w_{\mathrm{ext}_1}$$



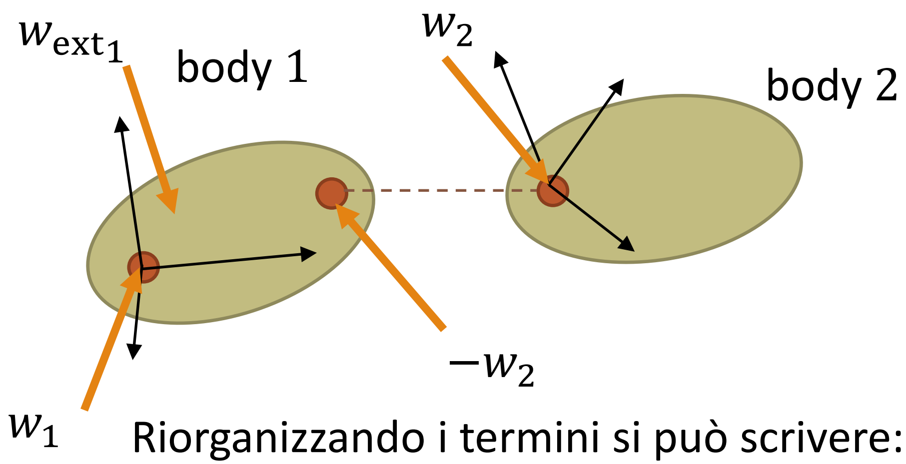
$$w_1^1 = A_{12}^* M_2^2 A_{12}^{-1} \dot{V}_1^1 - \frac{A_{12}^* M_2^2 X_2 X_2^T M_2^2 A_{21}}{m_2^2} \dot{V}_1^1 + M_1^1 \dot{V}_1^1 +$$

$$+ A_{12}^* b_2^2 - \frac{A_{12}^* M_2^2 X_2 X_2^T}{m_2^2} b_2^2 - A_{12}^* M_2^2 a_2 V_1^2 + \frac{A_{12}^* M_2^2 X_2 X_2^T M_2^2 a_2 V_1^2}{m_2^2} + \frac{A_{12}^* M_2^2 X_2}{m_2^2} \tau_2 + b_1^1 - w_{\mathrm{ext}_1}$$

Riorganizzando i termini si può scrivere:

$$w_1^1 = \underbrace{\left(A_{12}^* M_2^2 A_{21} - \frac{A_{12}^* M_2^2 X_2 X_2^T M_2^2 A_{21}}{m_2^2} + M_1^1 \right)}_{\widehat{M}_1^1} \dot{V}_1^1 +$$

$$\underbrace{+ A_{12}^* \left(I - \frac{M_2^2 X_2 X_2^T}{m_2^2} \right) b_2^2 - A_{12}^* \left(I - \frac{M_2^2 X_2 X_2^T}{m_2^2} \right) M_2^2 a_2 V_1^2 + \frac{A_{12}^* M_2^2 X_2}{m_2^2} \tau_2 + b_1^1 - w_{\mathrm{ext}_1}}_{\hat{b}_1^1}$$



Riorganizzando i termini si può scrivere:

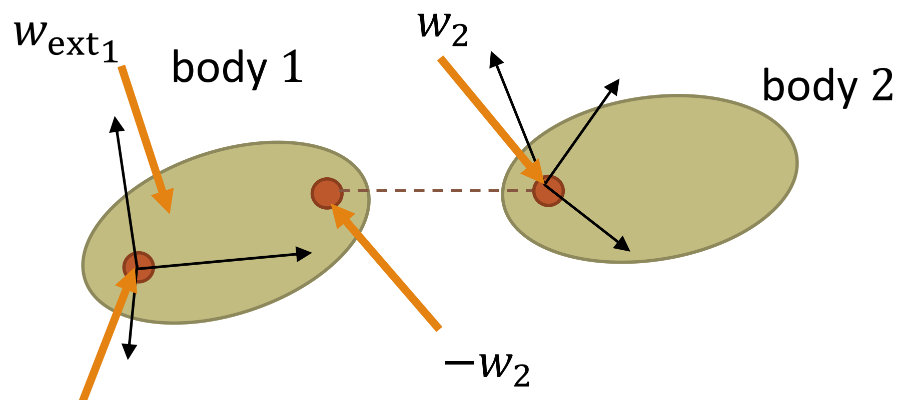
$$w_1^1 = \left(A_{12}^* M_2^2 A_{21} - \frac{A_{12}^* M_2^2 X_2 X_2^T M_2^2 A_{21}}{m_2^2} + M_1^1\right)\dot{V}_1^1 +$$

$$+A_{12}^*\left(I - \frac{M_2^2 X_2 X_2^T}{m_2^2}\right) b_2^2 - A_{12}^* M_2^2 \left(I - \frac{X_2 X_2^T M_2^2}{m_2^2}\right) a_2 V_1^2 + \frac{A_{12}^* M_2^2 X_2}{m_2^2}\tau_2 + b_1^1 - w_{\text{ext}_1}$$

Concentriamoci su $\widehat{M}_1^1$:

$$\widehat{M}_1^1 = A_{12}^* M_2^2 A_{21} - \frac{A_{12}^* M_2^2 X_2 X_2^T M_2^2 A_{21}}{m_2^2} + M_1^1 = A_{12}^* \overline{M}_2^2 A_{21} + M_1^1$$

dove $\overline{M}_2^2 = \left(I - \frac{M_2^2 X_2 X_2^T}{m_2^2}\right) M_2^2$ può essere interpretata come un inerzia proiettata lungo le componenti strutturali del giunto (si spoglia il tensore di inerzia dagli elementi che influenzano la componente attiva del giunto)



Riorganizzando i termini si può scrivere:

$$w_1^1 = \left(A_{12}^* M_2^2 A_{21} - \frac{A_{12}^* M_2^2 X_2 X_2^T M_2^2 A_{21}}{m_2^2} + M_1^1\right)\dot{V}_1^1 +$$

$$+A_{12}^*\left(I - \frac{M_2^2 X_2 X_2^T}{m_2^2}\right) b_2^2 - A_{12}^* M_2^2 \left(I - \frac{X_2 X_2^T M_2^2}{m_2^2}\right) a_2 V_1^2 + \frac{A_{12}^* M_2^2 X_2}{m_2^2}\tau_2 + b_1^1 - w_{\mathrm{ext}_1}$$

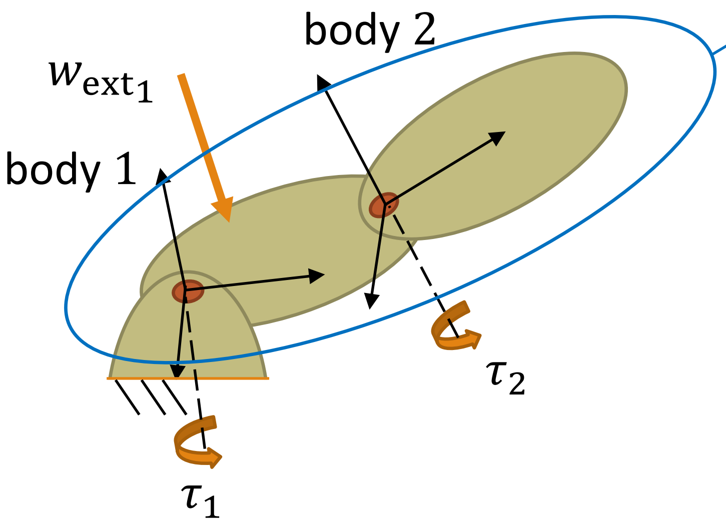
Wrench di attuazione proiettato e riportato in componenti corpo 1

Concentriamoci su $\hat{b}_1^1$:

$$\hat{b}_1^1 = +b_1^1 - w_{\mathrm{ext}_1} + A_{12}^* \bar{b}_2^2 + \frac{A_{12}^* M_2^2 X_2}{m_2^2}\tau_2 - \boxed{A_{12}^* \bar{M}_2^2 a_2 V_1^2}$$

Forza generalizzata di Coriolis proiettata e riportata in componenti del corpo 1

Anche qui $\bar{b}_2^2$ è la proiezione del wrench di bias del corpo 2 lungo le componenti strutturali del giunto.



Corpo articolato 1+2

Equazione del corpo articolato:

$$w_1^1 = \widehat{M}_1^1(q)\dot{V}_1^1(q,\dot{q},\ddot{q}_1) + \hat{b}_1^1(q,\dot{q})$$

Inerzia equivalente

Wrench di bias equivalente

ABA: Articulated Body Algorithm

Andiamo a riscrivere in modo compatto e sistematico l’algoritmo in modo da applicarlo ad alberi cinematici generici

ABA: Articulated Body Algorithm

Algoritmo efficiente per il calcolo della dinamica diretta, ovvero la determinazione delle accelerazioni dei giunti ($\ddot{q}$), note la postura (q), le velocità ($\dot{q}$) e le forze/coppie di attuazione (τ).

Esso è caratterizzato da 3 passaggi principali:

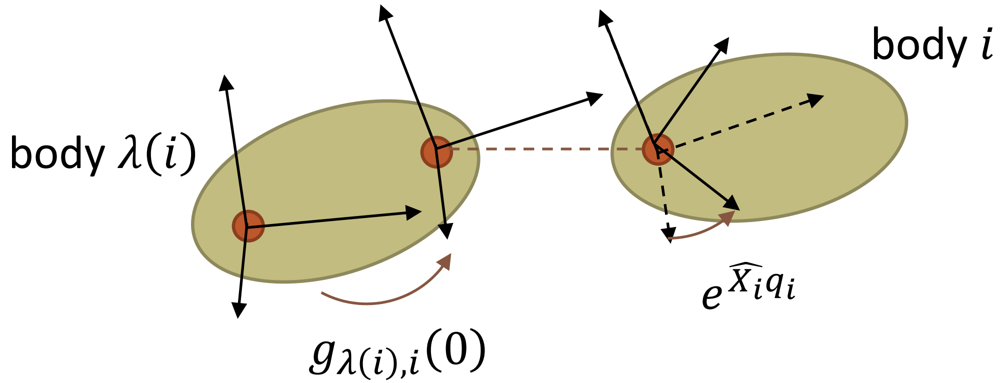
1. Propagazione in avanti delle posture e delle velocità dei corpi rigidi;
2. Propagazione ricorsiva indietro delle inerzie generalizzate e delle forze di bias dei sotto-sistemi articolati;
3. Note le inerzie generalizzate e forze di bias, si ripropagano in avanti le accelerazioni dei giunti.

Passo 1) Propagazione in avanti delle posture e velocità dei corpi.

Per $i = 1 \dots N_B$ e conoscendo V_0 della base, si calcola:

Propagazione delle posture, a partire dalla parametrizzazione local POE:

$$g_{\lambda(i),i}(q_i) = g_{\lambda(i),i}(0)e^{\hat{X}_i q_i}$$



Propagazione dei twist di ciascun corpo:

$$V_i^i = \mathrm{Ad}^{-1}_{g_{\lambda(i),i}} V_{\lambda(i)}^{\lambda(i)} + X_i \dot{q}_i$$

Passo 2) Propagazione indietro delle inerzie e delle forze di bias.

Definizione forza di bias.

Equilibrio di un corpo rigido:
$w = M\dot{V} + \mathrm{ad}_V^* MV$

Si definisce forza di bias $b = \mathrm{ad}_V^* MV$ (wrench che bisogna esercitare per avere accelerazione nulla)

Ricorsivamente si calcola per $i = N_B, \dots, 1$:

`If` $\mu(i) = \emptyset$

$\widehat{M}_i^i = M_i^i;\ \hat{b}_i^i = b_i^i\ ;$

`else`

$\widehat{M}_i^i = M_i^i + \sum_{j\in\mu(i)} A_{ij}^* \overline{M}_j^j A_{ij}^{-1} \longrightarrow$ articulated body inertia

con $\overline{M}_j^j = \left(I - \frac{\widehat{M}_j^j X_j X_j^T}{\widehat{m}_j^j}\right)\widehat{M}_j^j = \widehat{M}_j^j - \frac{\widehat{M}_j^j X_j X_j^T \widehat{M}_j^j}{\widehat{m}_j^j}\ ;\ \widehat{m}_j^j = X_j^T \widehat{M}_j^j X_j$

$\hat{b}_i^i = b_i^i - w_{ext}^i + \sum_{j\in\mu(i)}\left[A_{ij}^* \bar{b}_j^j - A_{ij}^* \overline{M}_j^j a_j V_i^j + \frac{A_{ij}^* \widehat{M}_j^j X_j \tau_j}{\widehat{m}_j^j}\right]$, con $\bar{b}_j^j = \left(I - \frac{\widehat{M}_j^j X_j X_j^T}{\widehat{m}_j^j}\right)\hat{b}_j^j$

Notazione:

$A_{ij} = A_{\lambda(j),j} = \mathrm{Ad}_{g_{\lambda(j),j}}\ ;$

$a_j = \mathrm{ad}_{X_j \dot{q}_j};$

$V_i^j = A_{\lambda(j),j}^{-1} V_i^i;$

$b_i^i = \mathrm{ad}_{V_i^i}^* M_i^i V_i^i\ ;$

Passo 3) Propagazione in avanti delle accelerazioni di giunto.

Ricorsivamente si calcola per $i = 1, \dots, N_B$, e conoscendo $\dot{V}_0$ della base:

$$\ddot{q}_i = \frac{\tau_i - X_i^T\left[\widehat{M}_i^i\left(\dot{V}_{\lambda(i)}^i - a_i V_{\lambda(i)}^i\right) + \hat{b}_i^i\right]}{X_i^T \widehat{M}_i^i X_i} \qquad (1) \longrightarrow$$ accelerazione dell'i-esimo giunto

$$\dot{V}_i^i = A_{i,\lambda(i)} \dot{V}_{\lambda(i)}^{\lambda(i)} + X_i \ddot{q}_i - a_i A_{i,\lambda(i)} V_{\lambda(i)}^{\lambda(i)} \qquad (2) \longrightarrow$$ accelerazione dell'i-esimo corpo

Osservazione:

l'equazione (1) deriva dall'aver fatto l'equilibrio di un corpo rigido articolato equivalente:

$$w_i^i = \widehat{M}_i^i \dot{V}_i^i + \hat{b}_i^i = \widehat{M}_i^i \left(A_{i,\lambda(i)} \dot{V}_{\lambda(i)}^{\lambda(i)} + X_i \ddot{q}_i - a_i A_{i,\lambda(i)} V_{\lambda(i)}^{\lambda(i)}\right) + \hat{b}_i^i$$

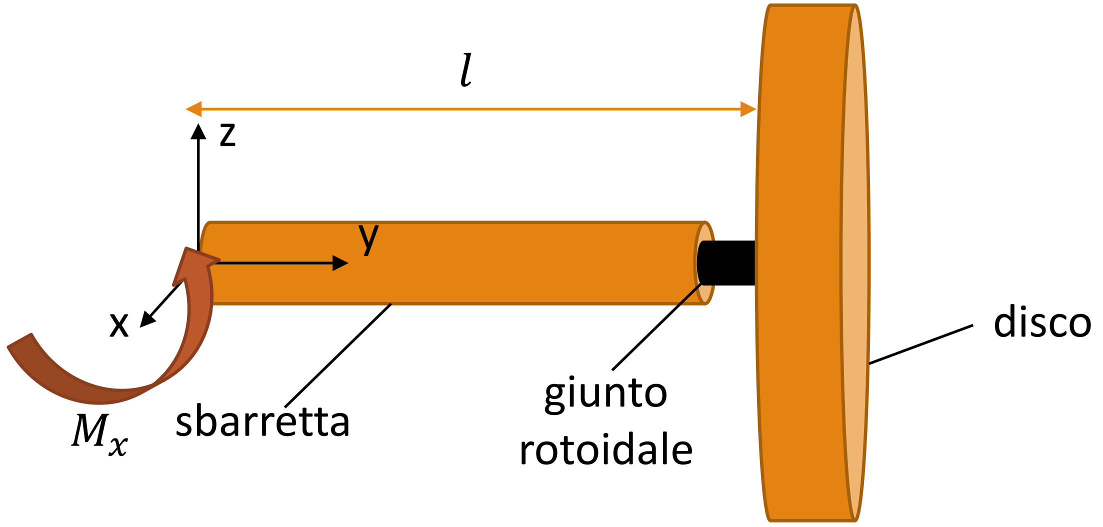
lungo la componente del giunto:

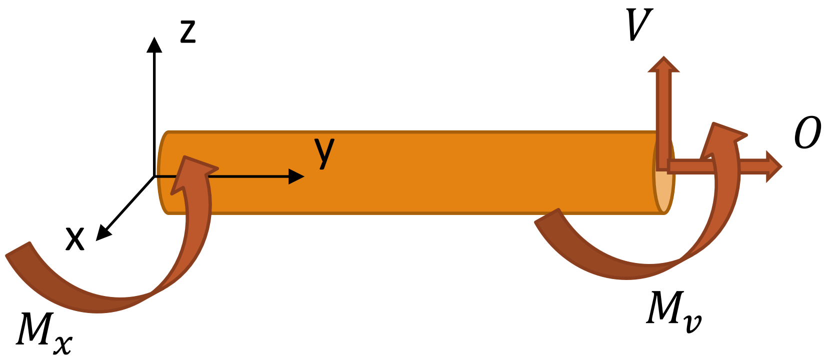
$$\tau_i = X_i^T w_i^i = X_i^T \widehat{M}_i^i X_i \ddot{q}_i + X_i^T \widehat{M}_i^i \left(A_{i,\lambda(i)} \dot{V}_{\lambda(i)}^{\lambda(i)} - a_i A_{i,\lambda(i)} V_{\lambda(i)}^{\lambda(i)}\right) + X_i^T \hat{b}_i^i$$

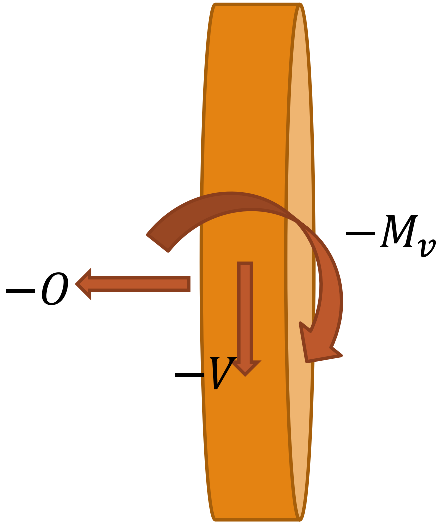
da cui si esplicita $\ddot{q}_i$

Esempio:

Sistema composto da sbarretta rigida e disco collegati tramite giunto rotoidale







Equilibrio a rotazione della sbarretta lungo x:

$$M_x + Vl + Mv = I^S_{xO}\alpha_x$$

Dall'equilibrio del disco:

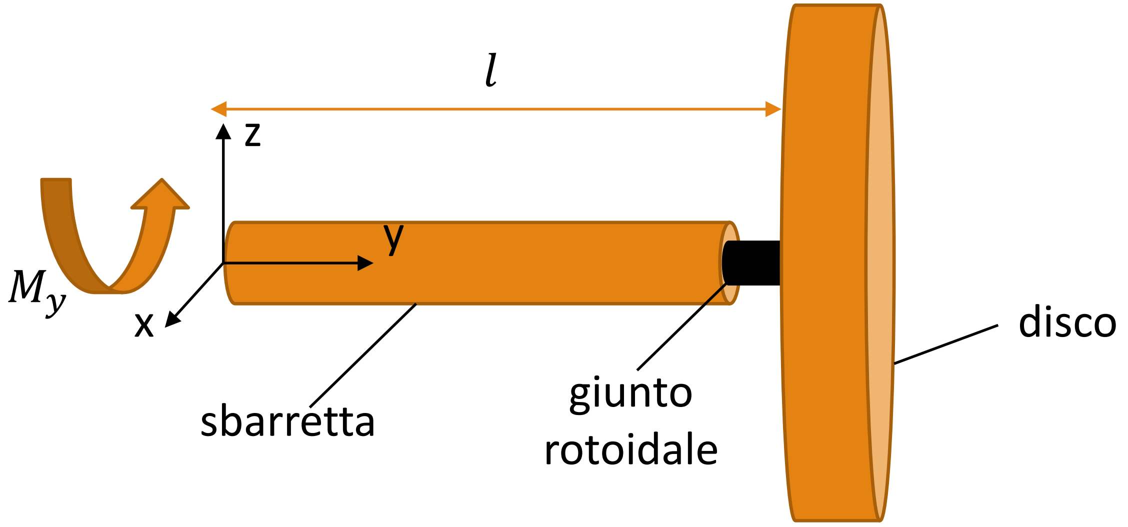
$$M_v = -I^D_{xG}\alpha_x$$
$$V = -m_D\ddot{y} = -m_D\alpha_x l$$

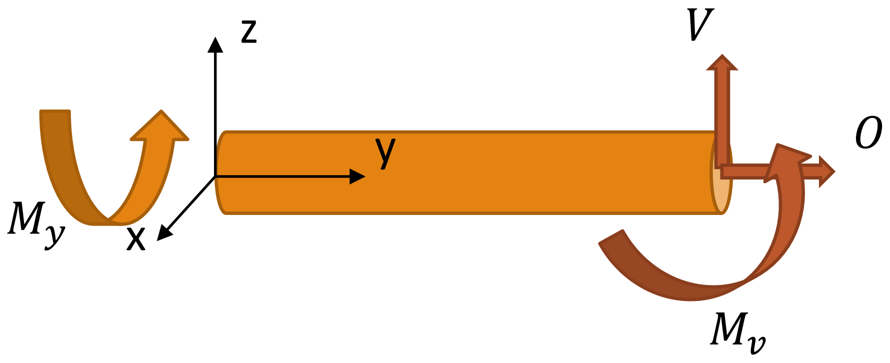
Sostituendo nell'eq. di equilibrio rot. lungo x della sbarretta si ricava l'equilibrio del corpo articolato:

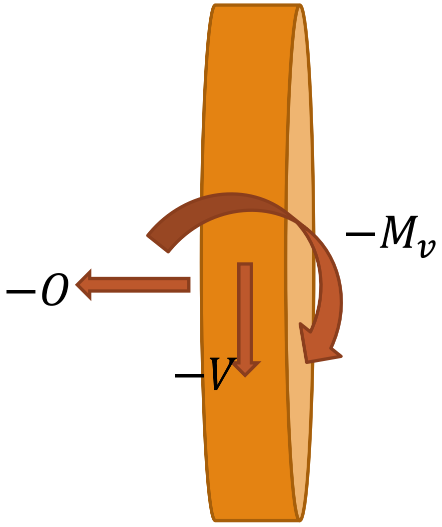
$$M_x = \underbrace{\left(I^S_{xO} + m_D l^2 + I^D_{xG}\right)}_{\text{somma dei contributi inerziali come se fosse un unico corpo rigido}}\alpha_x$$

Esempio:

Sistema composto da sbarretta rigida e disco collegati tramite giunto rotoidale







Equilibrio a rotazione della sbarretta lungo y:

$$M_y = I_{yO}^{s}\alpha_y$$

non ci sono reazioni vincolari che fanno momento lungo y

Rimane solo l'inerzia della sbarretta nell'equilibrio lungo y

Scriviamo la matrice d'inerzia generalizzata del corpo articolato col metodo ABA:

$$\widehat{M}_D = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x^D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_y^D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_z^D \end{bmatrix}$$

Il disco è inizializzato come foglia (inerzia baricentrica)

$$\overline{M}_D = \left(I - \frac{\widehat{M}_D X X^T}{X^T \widehat{M}_D X} \right) \widehat{M}_D = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x^D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_z^D \end{bmatrix}$$

Componenti inerziali del disco che si scaricano strutturalmente

Inerzia sbarretta nel polo O_s

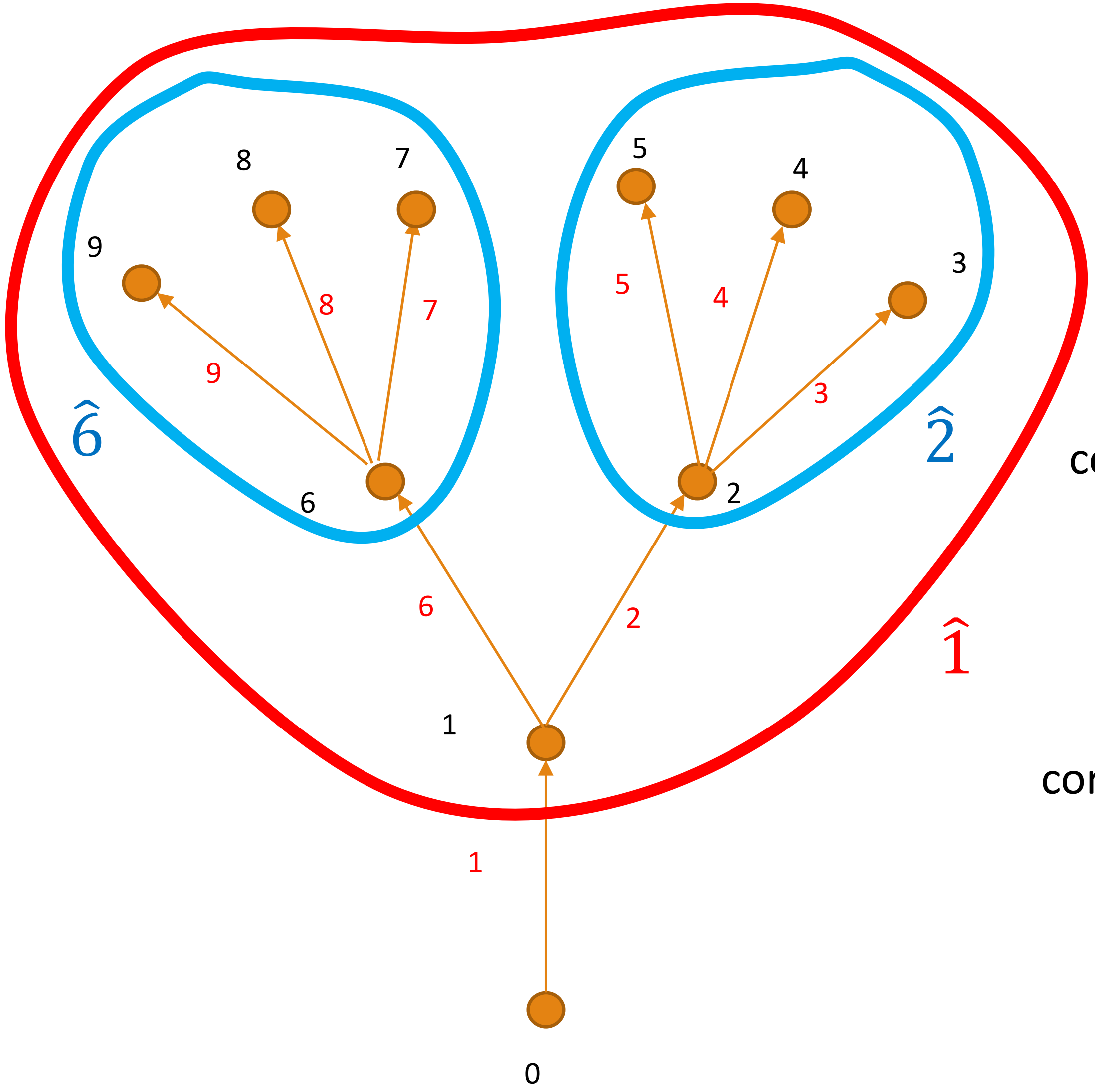
$$\widehat{M}_s = M_s + A_{sD}^* \overline{M}_D A_{sD}^{-1} = \begin{bmatrix} m_D + m_s & 0 & 0 & 0 & 0 & -l m_D - \frac{l}{2} m_s \\ 0 & m_D + m_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_D + m_s & l m_D + \frac{l}{2} m_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l m_D + \frac{l}{2} m_s & I_x^D + I_{Ox}^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{Oy}^s & 0 \\ -l m_D - \frac{l}{2} m_s & 0 & 0 & 0 & 0 & I_z^D + I_{Oz}^s + l^2 m_D \end{bmatrix}$$

Inerzia generalizzata del corpo articolato sbarretta + disco

$$\widehat{M}_s \dot{V}_s^s = \widehat{M}_s \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_x & \alpha_y & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_x (l m_D + \frac{l}{2} m_s) & (I_{Ox}^s + m_D l^2 + I_x^D)\alpha_x & I_{Ox}^s \alpha_y & 0 \end{bmatrix}^T$$

wrench inerziale del corpo articolato complessivo (assente componente di bias nella conf. corrente)

Esempio di schema dell'accumulazione ricorsiva delle inerzie dei corpi articolati



corpi foglia

$$\widehat{M}_3^3 = M_3^3; \widehat{M}_4^4 = M_4^4; \widehat{M}_5^5 = M_5^5;$$
$$\widehat{M}_7^7 = M_7^7; \widehat{M}_8^8 = M_8^8; \widehat{M}_9^9 = M_9^9;$$

corpi articolati $\hat{2}$ e $\hat{6}$

$$\widehat{M}_2^2 = M_2^2 + A_{23}^* \overline{M}_3^3 A_{23}^{-1} + A_{24}^* \overline{M}_4^4 A_{24}^{-1} + A_{25}^* \overline{M}_5^5 A_{25}^{-1};$$
$$\widehat{M}_6^6 = M_6^6 + A_{67}^* \overline{M}_7^7 A_{67}^{-1} + A_{68}^* \overline{M}_8^8 A_{68}^{-1} + A_{69}^* \overline{M}_9^9 A_{69}^{-1};$$

corpo articolato $\hat{1}$

$$\widehat{M}_1^1 = M_1^1 + A_{16}^* \overline{M}_6^6 A_{16}^{-1} + A_{12}^* \overline{M}_2^2 A_{12}^{-1};$$