Algoritmo dinamica diretta per alberi cinematici

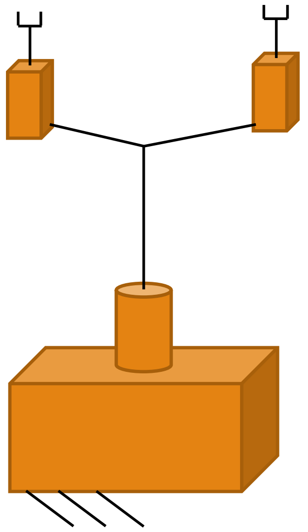
Meccanica dei Robot a.a. 2021/2022

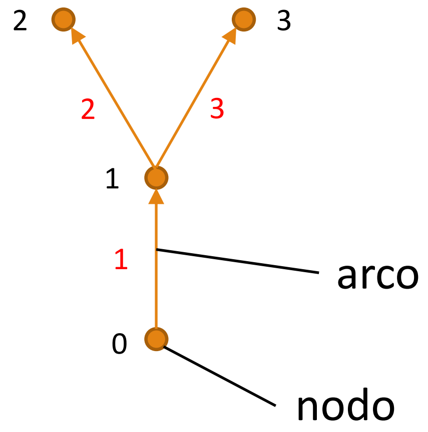
Università di Pisa

ABA: ARTICULATED BODY ALGORITHM

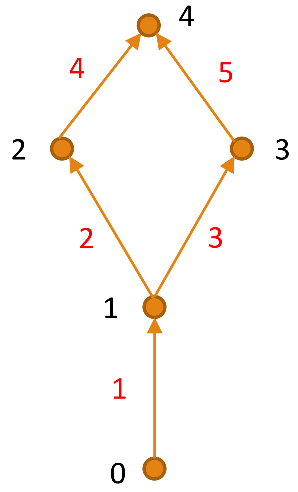
Alcune definizioni:

Grafo di un sistema cinematico ramificato





- I nodi rappresentano i copri rigidi (link); la numerazione parte da 0 (base) fino ad N_B (numero di corpi rigidi mobili). Regola: i nodi figli devono avere un numero più grande del nodo padre
- Gli archi rappresentano i giunti; la numerazione parte da 1 fino ad N_B. Regola: l'arco i-esimo si deve chiamare come il nodo figlio



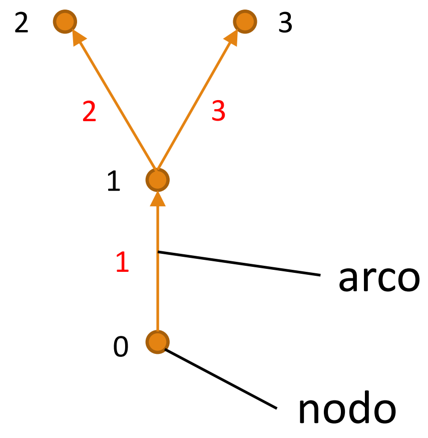
NON E' UN ALBERO CINEMATICO

Un albero cinematico è un grafo cinematico senza vincoli di chiusura.

Struttura dati dell'albero cinematico per il book keeping:

- Lista $p(i) = \{\dots p_i \dots\}$ contiene gli indici dei nodi predecessori
- Lista $s(i) = \{\dots s_i \dots\}$ contiene gli indici dei nodi successori
- Lista $\lambda(i) = \{\dots \lambda_i \dots\}$ contiene gli indici dei nodi parent
- Lista $\mu(i) = \{j \in \{1{:}\, N_B\} \mid \lambda(j) = i\}$ elenca l'insieme dei nodi figli del nodo i

Esempio:
- $p = \{0, 1, 1\}$
- $s = \{1, 2, 3\}$
- $\lambda = \{0, 1, 1\}$
- $\mu = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$



ABA: Articulated Body Algorithm

Algoritmo efficiente per il calcolo della dinamica diretta, ovvero la determinazione delle accelerazioni dei giunti ($\ddot{q}$), note la postura (q), le velocità ($\dot{q}$) e le forze/coppie di attuazione (τ).

Esso è caratterizzato da 3 passaggi principali:

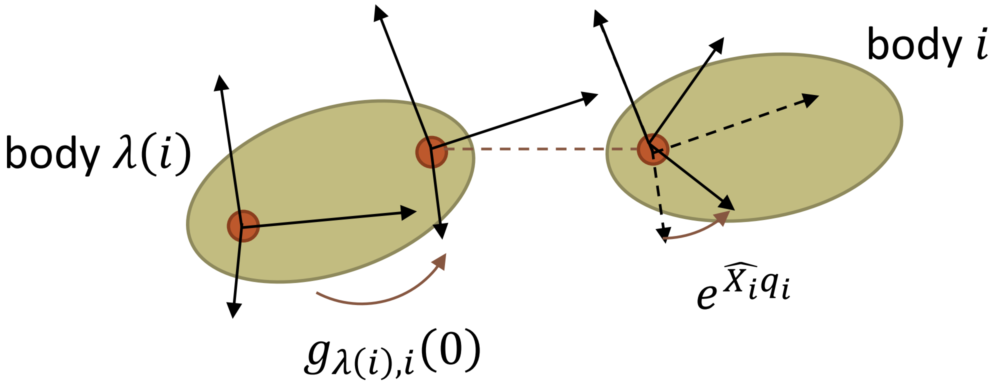
1. Propagazione in avanti delle posture e delle velocità dei corpi rigidi;
2. Propagazione ricorsiva indietro delle inerzie generalizzate e delle forze di bias dei sotto-sistemi articolati;
3. Note le inerzie generalizzate e forze di bias, si ripropagano in avanti le accelerazioni dei giunti.

Passo 1) Propagazione in avanti delle posture e velocità dei corpi.

Per $i = 1 \dots N_B$ e conoscendo V_0 della base, si calcola:

Propagazione delle posture, a partire dalla parametrizzazione local POE:

$$g_{\lambda(i),i}(q_i) = g_{\lambda(i),i}(0)e^{\hat{X}_i q_i}$$



Propagazione dei twist di ciascun corpo:

$$V_i^i = \mathrm{Ad}^{-1}_{g_{\lambda(i),i}} V_{\lambda(i)}^{\lambda(i)} + X_i \dot{q}_i$$

Passo 2) Propagazione indietro delle inerzie e delle forze di bias.

Definizione forza di bias.

Equilibrio di un corpo rigido:
$w = M\dot{V} + \mathrm{ad}_V^* MV$

Si definisce forza di bias $b = \mathrm{ad}_V^* MV$ (wrench che bisogna esercitare per avere accelerazione nulla)

Ricorsivamente si calcola per $i = N_B, \dots, 1$:

<u>`If`</u> $\mu(i) = \emptyset$

$\widehat{M}_i^i = M_i^i; \ \ \hat{b}_i^i = b_i^i \ ;$

<u>`else`</u>

$$\widehat{M}_i^i = M_i^i + \sum_{j\in\mu(i)} A_{ij}^* \overline{M}_j^j A_{ij} \longrightarrow \text{articulated body inertia}$$

con $$\overline{M}_j^j = \left(I - \frac{\widehat{M}_j^j X_j X_j^T}{X_j^T \widehat{M}_j^j X_j} \right) \widehat{M}_j^j = \widehat{M}_j^j - \frac{\widehat{M}_j^j X_j X_j^T \widehat{M}_j^j}{X_j^T \widehat{M}_j^j X_j}$$

$$\hat{b}_\mathrm{i}^\mathrm{i} = b_i^i - w_{ext}^i + \sum_{j\in\mu(i)} \left[A_{ij}^* \hat{b}_j^j - A_{ij}^* \overline{M}_j^j a_j V_i^j + \frac{A_{ij}^* \widehat{M}_j^j X_j \left(\tau_j - X_j^T \hat{b}_j^j \right)}{X_j^T \widehat{M}_j^j X_j} \right]$$

Notazione:

$A_{ij} = A_{\lambda(j),j} = \mathrm{Ad}_{g_{\lambda(j),j}}$;

$a_j = \mathrm{ad}_{X_j \dot{q}_j}$;

$V_i^j = A_{\lambda(j),j}^{-1} V_i^i$;

$b_i^i = \mathrm{ad}_{V_i^i}^* M_i^i V_i^i$;

Passo 3) Propagazione in avanti delle accelerazioni di giunto.

Ricorsivamente si calcola per $i = 1, \dots, N_B$, e conoscendo $\dot{V}_0$ della base:

$$\ddot{q}_i = \frac{\tau_i - X_i^T \left[\widehat{M}_i^i \left(\dot{V}_{\lambda(i)}^i - a_i V_{\lambda(i)}^i \right) + \hat{b}_i^i \right]}{X_i^T \widehat{M}_i^i X_i} \quad (1) \longrightarrow \text{accelerazione dell'i-esimo giunto}$$

$$\dot{V}_i^i = A_{i,\lambda(i)} \dot{V}_{\lambda(i)}^{\lambda(i)} + X_i \ddot{q}_i - a_i A_{i,\lambda(i)} V_{\lambda(i)}^{\lambda(i)} \quad (2) \longrightarrow \text{accelerazione dell'i-esimo corpo}$$

Osservazione:

l'equazione (1) deriva dall'aver fatto l'equilibrio di un corpo rigido articolato equivalente:

$$w_i^i = \widehat{M}_i^i \dot{V}_i^i + \hat{b}_i^i = \widehat{M}_i^i \left(A_{i,\lambda(i)} \dot{V}_{\lambda(i)}^{\lambda(i)} + X_i \ddot{q}_i - a_i A_{i,\lambda(i)} V_{\lambda(i)}^{\lambda(i)} \right) + \hat{b}_i^i$$

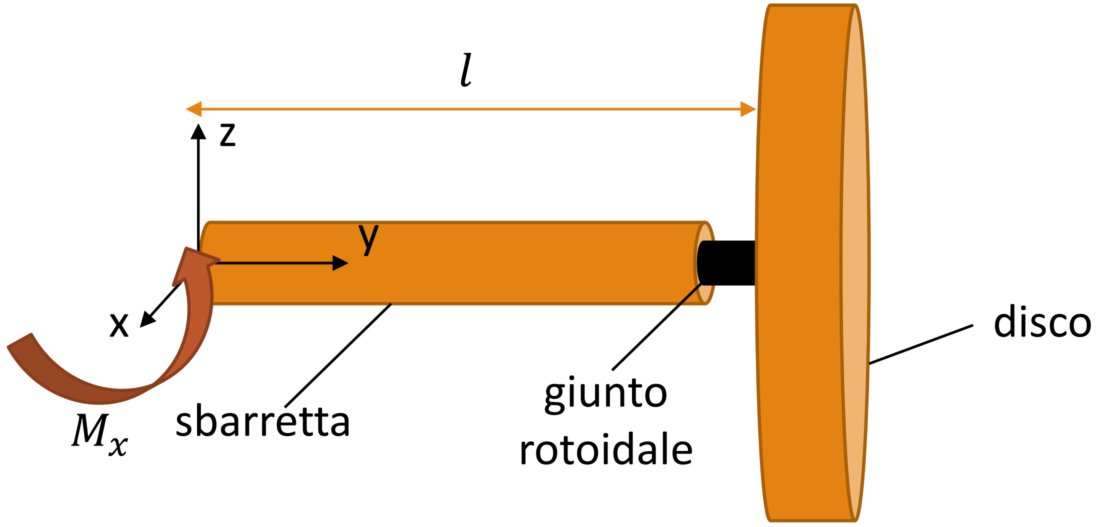
lungo la componente del giunto:

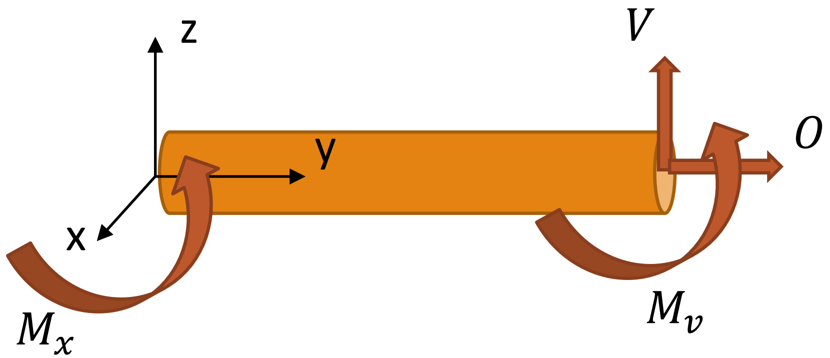
$$\tau_i = X_i^T w_i^i = X_i^T \widehat{M}_i^i X_i \ddot{q}_i + X_i^T \widehat{M}_i^i \left(A_{i,\lambda(i)} \dot{V}_{\lambda(i)}^{\lambda(i)} - a_i A_{i,\lambda(i)} V_{\lambda(i)}^{\lambda(i)} \right) + X_i^T \hat{b}_i^i$$

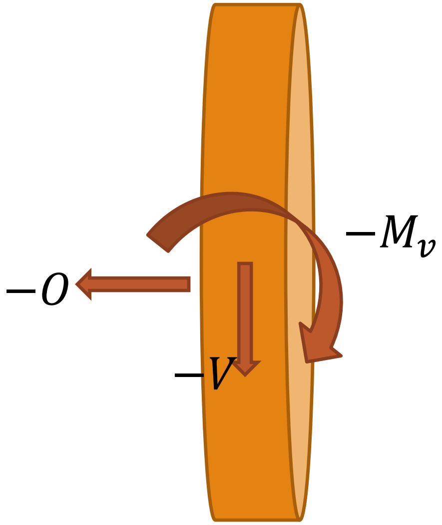
da cui si esplicita $\ddot{q}_i$

Esempio:

Sistema composto da sbarretta rigida e disco collegati tramite giunto rotoidale







Equilibrio a rotazione della sbarretta lungo x:

$$M_x + Vl + Mv = I^S_{xO}\alpha_x$$

Dall'equilibrio del disco:

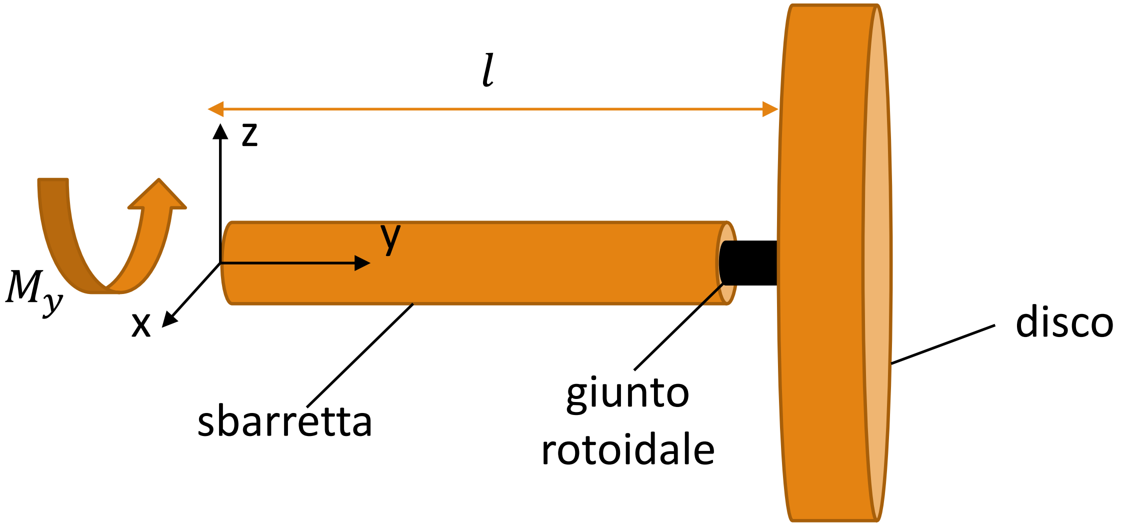
$$M_v = -I^D_{xG}\alpha_x$$
$$V = -m_D\ddot{y} = -m_D\alpha_x l$$

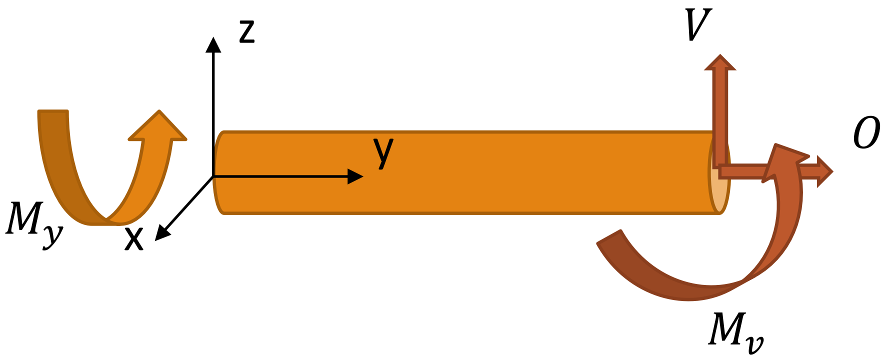
Sostituendo nell'eq. di equilibrio rot. lungo x della sbarretta si ricava l'equilibrio del corpo articolato:

$$M_x = \underbrace{\left(I^S_{xO} + m_D l^2 + I^D_{xG}\right)}_{\text{somma dei contributi inerziali come se fosse un unico corpo rigido}}\alpha_x$$

Esempio:

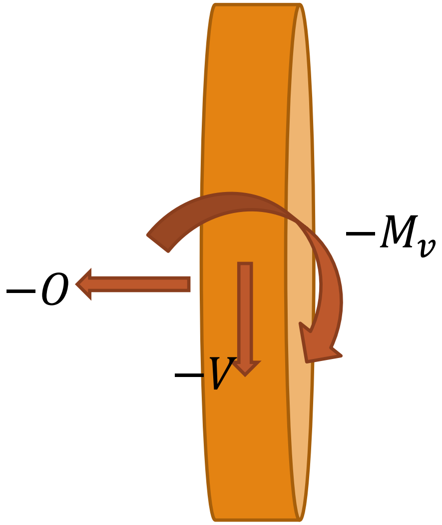
Sistema composto da sbarretta rigida e disco collegati tramite giunto rotoidale





Equilibrio a rotazione della sbarretta lungo y:

$M_y = I^s_{xO}\alpha_y$ → non ci sono reazioni vincolari che fanno momento lungo y



Rimane solo l'inerzia della sbarretta nell'equilibrio lungo y

Scriviamo la matrice d'inerzia generalizzata del corpo articolato col metodo ABA:

$$\widehat{M}_D = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x^D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_y^D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_z^D \end{bmatrix}$$

Il disco è inizializzato come foglia (inerzia baricentrica)

$$\overline{M}_D = \left(I - \frac{\widehat{M}_D X X^T}{X^T \widehat{M}_D X} \right) \widehat{M}_D = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x^D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_z^D \end{bmatrix}$$

Componenti inerziali del disco che si scaricano strutturalmente

Inerzia sbarretta nel polo O_s

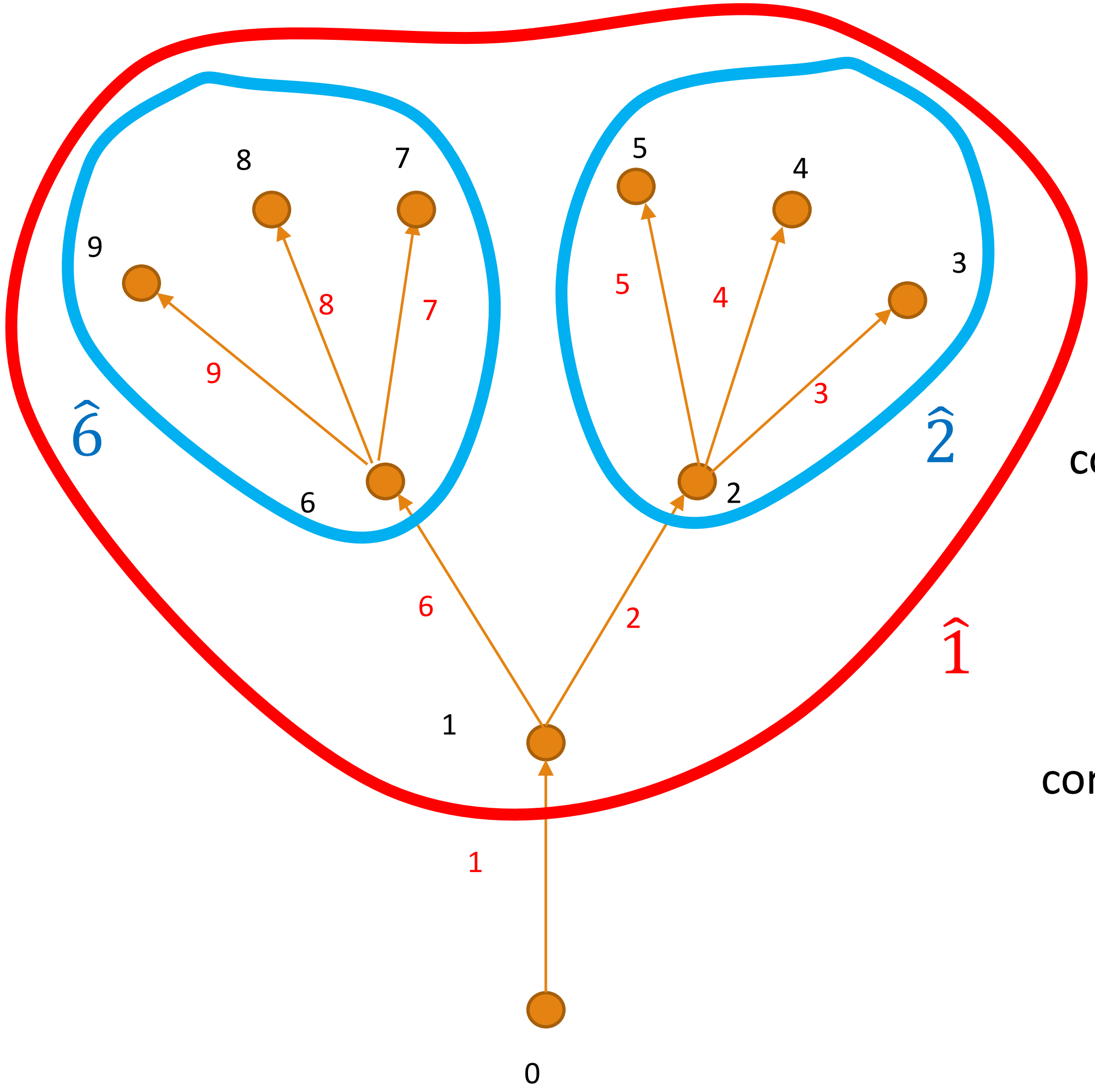
$$\widehat{M}_s = M_s + A_{sD}^* \overline{M}_D A_{sD}^{-1} = \begin{bmatrix} m_D + m_s & 0 & 0 & 0 & 0 & -l m_D - \frac{l}{2} m_s \\ 0 & m_D + m_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_D + m_s & l m_D + \frac{l}{2} m_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l m_D + \frac{l}{2} m_s & I_x^D + I_{Ox}^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{Oy}^s & 0 \\ -l m_D - \frac{l}{2} m_s & 0 & 0 & 0 & 0 & I_z^D + I_{Oz}^s + l^2 m_D \end{bmatrix}$$

Inerzia generalizzata del corpo articolato sbarretta + disco

$$\widehat{M}_s \dot{V}_s^s = \widehat{M}_s \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_x & \alpha_y & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_x (l m_D + \frac{l}{2} m_s) & (I_{Ox}^s + m_D l^2 + I_x^D)\alpha_x & I_{Ox}^s \alpha_y & 0 \end{bmatrix}^T$$

wrench inerziale del corpo articolato complessivo (assente componente di bias nella conf. corrente)

Esempio di schema dell'accumulazione ricorsiva delle inerzie dei corpi articolati



corpi foglia

$$\widehat{M}_3^3 = M_3^3; \widehat{M}_4^4 = M_4^4; \widehat{M}_5^5 = M_5^5;$$
$$\widehat{M}_7^7 = M_7^7; \widehat{M}_8^8 = M_8^8; \widehat{M}_9^9 = M_9^9;$$

corpi articolati $\hat{2}$ e $\hat{6}$

$$\widehat{M}_2^2 = M_2^2 + A^*_{23}\overline{M}_3^3 A^{-1}_{23} + A^*_{24}\overline{M}_4^4 A^{-1}_{24} + A^*_{25}\overline{M}_5^5 A^{-1}_{25};$$
$$\widehat{M}_6^6 = M_6^6 + A^*_{67}\overline{M}_7^7 A^{-1}_{67} + A^*_{68}\overline{M}_8^8 A^{-1}_{68} + A^*_{69}\overline{M}_9^9 A^{-1}_{69};$$

corpo articolato $\hat{1}$

$$\widehat{M}_1^1 = M_1^1 + A^*_{16}\overline{M}_6^6 A^{-1}_{16} + A^*_{12}\overline{M}_2^2 A^{-1}_{12};$$