$M_{n,m}(\mathbb{R})$ $\qquad$ $M^{*} = \bigcup\limits_{n,m \in \mathbb{N}^{+}} M_{n,m}(\mathbb{R})$

S език def = $\qquad$ Света на S е M^{*}

и L: $s(a,b,c)$, $p(a,b,c)$, $vec(a)$

$p^{S}(A,B,C) \iff A.B = C$

$s^{S}(A,B,C) \iff A$ и B еднакъв ред и $A+B=C$

$vec^{S}(A) \iff A$ е вектор ред

---

1 зад $\quad P(x) \iff vec(x) \wedge \exists y(p(x,y,x))$

$\boxed{\Rightarrow}$ $X \in M_{1,1}(X) \Rightarrow vec(x)$ е вярно, защото може да се разгледа като вектор стълб (x_1)

$y \in M_{rk}(\mathbb{R})$ $\quad (x_1) \cdot \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y \\ \vdots & & \\ y & \dots & y \end{pmatrix} = (x_1) \Rightarrow y = (y_{11}) \in M_{1,1}(\mathbb{R})$ вярно е само при $r = k = 1$

$\boxed{\Leftarrow}$ $vec(x) \Rightarrow x = (x_1 \dots x_n)$ $\qquad (x_1 \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1k} \\ y_{r1} & & y_{rk} \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n)$

$\exists y(p(x,y,x)) \iff x \cdot y = x$

$y \in M_{rk}(\mathbb{R})$ това е възможно при $k = 1$

$\Rightarrow (x_1 \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{r1} \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n)$

Но $x \notin M_{1,1}(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ не е вярно д) $p(x) \Leftrightarrow vec(x) \& \exists y(p(x,y,y))$

$\boxed{\Rightarrow}$ $x \in M_{1,1}(x) \Rightarrow vec(x)$ е изпълнено.

$\exists y \in M_{n,k}(\mathbb{R})$, $x \circ y = (x)\begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1k} \\ y_{n1} & \dots & y_{nk}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1k} \\ y_{n1} & \dots & y_{nk}\end{pmatrix}$ което е възможно при $n=1$

$= y \in M_{1k}(\mathbb{R})$ но това y съществува

$\boxed{\Leftarrow}$ $vec(x) \& \exists y(p(x,y,y)) \Rightarrow x = (x_1 \dots x_n)$ и $\exists y \in M_{mk}$

$(x_1 \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1k} \\ y_{m1} & \dots & y_{mk}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1k} \\ y_{m1} & \dots & y_{mk}\end{pmatrix}$, но това е възможно само при $m=1$.

но понеже y отдясно на „=" ще е вектор ред

$\Rightarrow k=1$ и $n=1$ $\Rightarrow$ Да, правилно е

в) $f_{1,1}(x) \Leftrightarrow vec(x) \& \forall y(p(x,y,y))$ $\rightarrow$ това е невъзможно, защото

гласи че $\forall y \in M_{n,k}(q)$ $x.y=y$,

$x \in M_{1,1}(\mathbb{R})$.

не е правилно

г) $p_{1,1}(x) \Leftrightarrow \exists y(p(x,x,y)) \& vec(x))$

$\boxed{\Rightarrow}$ $x \in M_{1,1}(\mathbb{R})$, $\exists y \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ $p(x,x,y)$, но $x \circ x = y$ е във вида $(x_1 \dots x_n)(x_1 \dots x_n) = (y_1 \dots y_n)$, но това е вярно при $n=1$ $\Rightarrow (x_1)(x_1) = (y_1)$ и $y_1 \in M_{1,1}(\mathbb{R})$

$vec(x)$ е вярно защото $(x_1) \in M_{1,1}(\mathbb{R})$ може да се гледа като вектор стълб (x_1), $x_1 \in \mathbb{R}$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists y : p(x,x,y) \& vec(x)$

$\Rightarrow$ $x \in M_{1,n}(\mathbb{R})$, $x = (x_1 \dots x_n)$ и $(x_1 \dots x_n) \times (x_1 \dots x_n) = y$

но това е възможно при $n=1$

$\Rightarrow x \in M_{1,1}(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ Да правилно е

2 зад

при

Same size $(x,y) \leftrightarrow \exists z\,(s(x,y,z))$ е подходящ защото:

$\exists x \in M_{n,m}(\mathbb{R}), \exists y \in M_{q,k}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ ако x и y са един и същ размер то $n=q$ и $m=k$

при $s(x,y,z) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1,m} \\ \vdots & & \\ x_{n1} & \dots & x_{n,m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & \dots & y_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & \dots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \dots & z_{nm} \end{pmatrix}$

но това е изпълнено за някое $z \in M_{n,m}$

Ако е за $\forall z$, то няма да е вярно защо z може да е с други размери ($z \in M_{w,e}(\mathbb{R})$) $w \neq n$, $e \neq m$

3. $P_{comb}(A,B,C) \Leftrightarrow C \in \ell(A,B)$ $\quad C = \alpha_1 A + \alpha_2 B \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $A,B,C \in M_{1,k}(\mathbb{R})$

Нека за всяка точка $vec(A) \& vec(B) \& vec(C)$ е изпълнена

1) $P_{comb}(x,y,z) \Leftrightarrow vec(x) \wedge s(x,y,z)$

↳ Това значи че $x+y=z$, което не винаги е вярно

⇒ грешно

2) $P_{comb}(x,y,z) \Leftrightarrow vec(x) \& vec(y) \& \exists u \exists u_1 \exists v \exists v_1 (p(u,x,u_1) \& p(v,y,v_1) \& p(u_1,v_1,z))$

↳ Това не е вярно, защото при $z \in \ell(x,y) \Leftrightarrow u.x + v.y = z$ тук u и v са скалари, а в горното дефо u, v са вектор стълбове $\begin{pmatrix} u \\ \vdots \\ u \end{pmatrix} . (x \dots x) = (u_1 \dots u_1)$ и не винаги като скалари

⇒ грешно

3) $\varphi_{lcomb}(x,y,z) \overset{def}{\iff} \exists u \exists u_1 \exists v \exists v_1 (\varphi_{1,1}(u) \wedge \varphi_{1,1}(v)$
$\wedge\, p(u,x,u_1) \wedge p(v,y,v_1) \wedge s(u_1,v_1,z))$

$\boxed{\Rightarrow}$ $\varphi_{lcomb}(x,y,z) \to \alpha_1 x + \alpha_2 y = z$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

тук α_1 и α_2 може да се разгледат като скаларите
$\to \alpha_1, \alpha_2 \in M_{1,1}(\mathbb{R})$. Нека $\alpha_1 = u$, $\alpha_2 = v$
$\to u.x = u_1$ или $p(u,x,u_1) \to$ това гласи $vec(u_1)$
$\to$ съгласно за $v.y = v_1 \iff p(v,y,v_1) \to vec(v_1)$
$\to s(u_1,v_1,z)$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists u \exists u_1 \exists v \exists v_1$ и $\varphi_{1,1}(u) \wedge \varphi_{1,1}(v) \Rightarrow u$ и v може да се гледат като скалари

и $p(u,x,u_1)$ & $p(v,y,v_1)$ е като $u.x = u_1$ и $v.y = v_1$
и това е вярно при $u, v \in M_{1,1}(\mathbb{R})$

като после $s(u_1,v_1,z)$ е $u_1 + v_1 = z$
$\to u_1 + v_1 = u.x + v.y = z$ където $u, v \in M_{1,1}(\mathbb{R})$
така правилно е представена лин.ов.

$\Rightarrow$ 3) е вярно

4. $\varphi_{lcomb}(x_1, x_2 \dots x_n, z) \iff vec(x_1) \,\&\, \dots \,\&\, vec(x_n)$
$\to \underbrace{\alpha_1 x_1}_{\beta_1} + \underbrace{\alpha_2 x_2}_{\beta_2} + \underbrace{\alpha_3 x_3}_{\beta_3} + \dots + \underbrace{\alpha_n x_n}_{\beta_n} = z$

$\to \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \in M_{1,1}(\mathbb{R})$

$\beta_2' \quad \beta_3' \quad \dots \quad \beta_{n-1}'$

Формално: $\varphi_{lcomb}(x_1 \dots x_n, z) \overset{def}{\iff} \exists \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n \exists \beta_1 \dots \beta_n \exists \beta_2' \dots \beta_{n-1}'$
$\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_{1,1}(\alpha_i) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} p(\alpha_i, x_i, \beta_i)\right.$
$\wedge\, s(\beta_1, \beta_2, \beta_2') \wedge \bigwedge_{i=3}^{n-1} s(\beta_{i-1}', \beta_i, \beta_i')$
$\left.\wedge\, s(\beta_{n-1}', \beta_n, z)\right)$

5. $S \models P_{1,n}[\![A]\!] \longleftrightarrow A \in M_{1,n}(\mathbb{R})$

1) индукция по n за $P_{1,n}$ ка имаме $P_{1,1}, P_{1,2} \ldots P_{1,n-1}$

$$P_{1,n}(x) \longleftrightarrow vec(x) \land \bigwedge_{i=1}^{n} \neg P_{1,i}(x)$$ не е възможно защото имаме противоречие

$$„P_{1,n}(x) \longleftrightarrow \ldots \land \neg P_{1,n}(x) \land \ldots"$$

$\longrightarrow$ не е вярно

2) $$P_{1,n}(x) \longleftrightarrow vec(x) \land \exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_n [\![P_{lcomb}(y_1 \ldots y_n, x)) \land \forall z (vec(z) \Rightarrow P_{lcomb}(y_1 \ldots y_n, z))]\!]$$

тук има проблем че $\forall z$ ако е $vec(z)$ то може да се представи от n на брой промеливи.

Ако $n=2$ и $\forall z \in M_{1,50}(\mathbb{R})$ може да се представи, което е невъзможно $\longrightarrow$ не е вярно

3) $$P_{1,n}(x) \longleftrightarrow vec(x) \land \bigwedge_{i=1}^{n} \neg P_{1,i}(x) \land$$

$$\forall y_1 \ldots \forall y_n \forall z (same\,size(x,y) \Rightarrow P_{lcomb}(y_1 \ldots y_n, z))$$

тук пак имаме противоречие $P_{1,n}(x) \longleftrightarrow \neg P_{1,n}(x)$

$\Rightarrow$ не е вярно

Друг вариант: Нека имаме $P_{1,1} \ldots P_{1,n-1}$

$$P_{1,n}(x) \longleftrightarrow vec(x) \land \bigwedge_{i=1}^{n-1} \neg P_{1,i}(x)$$

това е нужно

$$\land \exists y_1 \ldots \exists y_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \neg P_{lcomb}(y_1 \ldots y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots y_n, y_i) \right.$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} same\,size(y_i, x) \land P_{lcomb}(y_1 \ldots y_n, x)$$

$$\land \forall z (same\,size(z, x) \Rightarrow P_{lcomb}(y_1 \ldots y_n, z))$$

Ако може да я използваме за зад. 5 на упр

$\boxed{\Rightarrow}$ $f_{1,n}(x) \to vec(x)$ и $\neg P_{1,i}(x)$ за $i = 1 \ldots n-1$ понеже $x \in M_{1,n}(\mathbb{R})$

$\exists\, y_1 \ldots y_n$ т.ч. $same\ size(y_i, x)$ за $i = 1 \ldots n$

от Основната лема $\Rightarrow$ $P_{\ell comb}(y_1 \ldots y_n, X)$

$\Rightarrow \forall z$ което $same\ size(z, X) \Rightarrow P_{\ell comb}(y_1 \ldots y_n, z)$

$\boxed{\Leftarrow}$ X е вектор-ред с $X = (X_1 \ldots X_k)$ $k > n-1$

понеже $\exists\, y_1 \ldots y_n$ и $same\ size(y_i, X)$ за $i = 1 \ldots n$

и $X \in \ell(y_1 \ldots y_n)$

и ако $same\ size(z, x)$ за $\forall z \in M_{1k}(\mathbb{R}) \to z \in \ell(y_1 \ldots y_n)$

$\Rightarrow M_{1,k}(\mathbb{R}) \subseteq \ell(y_1 \ldots y_n)$

и $same\ size(y_i, x) \wedge same\ size(z, X) \Rightarrow y_i \in M_{1,k}$ за $i = 1 \ldots n$

$\Rightarrow \ell(y_1 \ldots y_n) \subseteq M_{1k}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \ell(y_1 \ldots y_n) = M_{1k}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow X \in M_{1k}(\mathbb{R})$

6 зад

$$Basis(x_1 \ldots x_n) \longleftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} P_{1n}(x_i) \wedge \forall z \big(P_{1n}(z) \wedge P_{\ell comb}(x_1 \ldots x_n, z)\big)$$

Тук грешката е в конюнкцията

$$P_{1n}(z) \Rightarrow P_{\ell comb}(x_1 \ldots x_n, z)\big)\big)$$

защото иначе значи че $\forall z \in M^* \to z \in M_{1,n}$ и в лин. обв. на $x_1 \ldots x_n$