Примерни задачи по Алгебра 1 за специалност Компютърни науки, II поток, 2013-2014 уч.г.

1 Задачи за контролна работа № 1

Задача 1. *Да се извършат означените действия:*

$$\text{(i)}\quad (2+i)^2+(2-i)^2;\quad \text{(ii)}\quad (1+2i)^3-(1-2i)^3;\quad \text{(iii)}\quad \frac{1+i\tan(\alpha)}{1-i\tan(\alpha)};$$

$$\text{(iv)}\quad \frac{(1+2i)^2-(2-i)^3}{(1-i)^3+(2+i)^2};\quad \text{(v)}\quad \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3k+2}, k\in\mathbb{Z};$$

$$\text{(vi)}\quad \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{6k}, k\in\mathbb{Z};\quad \text{(vii)}\quad \sqrt{2i};\quad \text{(viii)}\quad \sqrt{3-4i};$$

$$\text{(ix)}\quad \sqrt[3]{-27};\quad \text{(x)}\quad \sqrt[4]{16}.$$

Отговори: (i) 6; (ii) $-4i$; (iii) $\cos(2\alpha)+i\sin(2\alpha)$; (iv) $5+5i$; (v) $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; (vi) 1; (vii) $\pm(1+i)$; (viii) $\pm(2-i)$; (ix) $\frac{3}{2}\pm i\frac{3\sqrt{3}}{2}$, -3; (x) ± 2, $\pm 2i$.

Задача 2. *Нека n, m са естествени числа, n не дели m, а $\omega_k=\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ за $0\le k\le n-1$ са n-тите корени на единицата. Да се докаже, че*

$$\omega_0^m+\omega_1^m+\ldots+\omega_{n-1}^m=0.$$

Задача 3. *За $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$ да се докаже, че:*

$$\cos x+\cos(2x)+\ldots\cos(nx)=\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\quad \textit{и}$$

$$\sin x+\sin(2x)+\ldots\sin(nx)=\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Задача 4. *Да се решат системите линейни уравнения:*

$$\text{(i)}\quad \left|\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +2x_3 & =8\\ -x_1 & -2x_2 & +3x_3 & =1\\ 3x_1 & -7x_2 & +4x_3 & =10\end{array}\right.\qquad \text{(ii)}\quad \left|\begin{array}{lllll} x_1- & x_2 & +2x_3 & -x_4 & =-1\\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & -2x_4 & =-2\\ -x_1 & +2x_2 & -4x_3 & +x_4 & =1\\ 3x_1 & & & -3x_4 & =-3\end{array}\right. ;$$

$$
\text{(iii)} \quad \left| \begin{array}{llll} & -2x_2 & +3x_3 & = 1 \\ 3x_1 & +6x_2 & -3x_3 & = -2 \\ 6x_1 & +6x_2 & +3x_3 & = 5 \end{array} \right. .
$$

Отговори: (i) $(3,1,2)$; (ii) $(x_4-1, 2x_3, x_3, x_4)$ за произволни x_3, x_4;
(iii) системата няма решение.

Задача 5. *Да се решат системите линейни уравнения в зависимост от стойностите на участващите параметри $a, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{C}$:*

$$
\text{(i)} \quad \left| \begin{array}{llll} (1-3a)x_1 & +3x_2 & +x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +5x_2 & -x_3 & = 8a \\ 3x_1 & 7x_2 & -7x_3 & = 6a \end{array} \right. ; \qquad \text{(ii)} \quad \left| \begin{array}{lllll} & & x_3 & +x_4 & = b_1 \\ & x_2 & & +x_4 & = b_2 \\ x_1 & & & x_4 & = b_3 \\ ax_1 & +ax_2 & +ax_3 & -x_4 & = 0 \end{array} \right. .
$$

Отговори: (i) Ако $a=0$, то системата е несъвместима. За $a \neq 0$ системата има единствено решение

$$
\left(\frac{4}{3a} - 26a, \quad 12a - \frac{11}{21a}, \frac{1}{21a} \right).
$$

(ii) Ако $a = -\frac{1}{3}$ и $b_1+b_2+b_3 \neq 0$, то системата е несъвместима. Ако $a = -\frac{1}{3}$ и $b_1+b_2+b_3=0$, то системата има решения $(b_3 - x_4, \quad b_2 - x_4, \quad b_1 - x_4, \quad x_4)$ за произволни x_4. За $a \neq -\frac{1}{3}$ системата има единствено решение

$$
\left(\frac{b_3 + a(-b_1 - b_2 + 2b_3)}{3a+1}, \quad \frac{b_2 + a(-b_1 + 2b_2 - b_3)}{3a+1}, \quad \frac{b_1 + a(2b_1 - b_2 - b_3)}{3a+1} \right).
$$

Задача 6. *Кои от следните подмножества на $\mathbb{Q}^2$ са подпространства:*

$$
M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \quad | \quad x = 2y\},
$$

$$
M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \quad | \quad x = 2y, \quad 2x = y\},
$$

$$
M_3 = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \quad | \quad x = 2y+1\},
$$

$$
M_4 = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \quad | \quad xy = 0\}.
$$

Решение: Подмножеството M_1 е подпространство съгласно $(2y_1+2y_2, y_1+y_2) \in M_1$ за произволни $(2y_1, y_1), (2y_2, y_2) \in M_1$ и $q(2y_1, y_1) = (2(qy_1), qy_1) \in M_1$ за $\forall q \in \mathbb{Q}$, $\forall (2y_1, y_1) \in M_1$.

Подмножеството $M_2 = \{(0,0)\} \subset \mathbb{Q}^2$ е подпространство.

Множеството M_3 не е подпространство на $\mathbb{Q}^2$, защото сумата на $(2y_1+1, y_1) \in M_3$ и $(2y_2+1, y_2) \in M_3$ е $(2(y_1+y_2)+2, (y_1+y_2)) \not\in M_3$ и $q(2y_1+1, y_1) = (2(qy_1)+q, qy_1) \not\in M_3$ за $q \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$.

За $\forall (x,y) \in M_4$ и $\forall q \in \mathbb{Q}$ е в сила $q(x,y) = (qx, qy) \in M_4$, защото $(qx)(qy) = q^2(xy) = 0$. Но M_4 не е подпространство на $\mathbb{Q}^2$, защото $(1,0), (0,1) \in M_4$ и $(1,0)+(0,1) = (1,1) \not\in M_4$.

Задача 7. *Подмножеството* E *на поле* F *е подполе, ако* E *съдържа поне два елемента и* E *е затворено относно събиране, изваждане, умножение и деление с ненулев елемент. Да се докаже, че:*

(i) ако E *е подполе на поле* F*, то* F *е линейно пространство над* E*;*

(ii) множеството $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}$ *е числово поле;*

(iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *е линейно пространство над* $\mathbb{Q}$.

Задача 8. *Нека* F *е поле, а* $F[x]$ *е множеството на полиномите на* x *с коефициенти от* F*. Да се докаже, че:*

(i) $F[x]$ *е линейно пространство над* F *относно обичайните операции събиране на полиноми и умножение на полином с число;*

(ii) множеството $F^{(n+1)}[x] = \{f(x) \in F[x] \,|\, \deg(f) \leq n\}$ *на полиномите от степен не по-голяма от* n *е подпространство на* $F[x]$*;*

(iii) множеството $U = \{f(x) \in F[x] \,|\, f(1) = 0\}$ *на полиномите, анулиращи се в* $1 \in F$ *е подпространство на* $F[x]$*;*

(iv) за числово поле F*, множеството* $V = \{f(x) \in F[x] \,|\, f(0) = 1\}$ *на полиномите, приемащи стойност* 1 *в* $0 \in F$ *не е подпространство на* $F[x]$*;*

(v) за произволни константи $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in F$ *множеството*

$$W = \{f(x) \in F[x] \,|\, f(\lambda_1) + f(\lambda_2) + \ldots + f(\lambda_k) = 0\}$$

е подпространство на $F[x]$*;*

(vi) за произволни константи $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in F$ *множеството*

$$T = \{f(x) \in F[x] \,|\, f(\lambda_1) = f(\lambda_2) = \ldots = f(\lambda_k) = 0\}$$

е подпространство на $F[x]$.

Задача 9. *Нека* V *е множеството на всички безкрайни редици с елементи от поле* F*. Да се докаже, че:*

(i) V *е линейно пространство над* F *относно покомпонентно определените събиране на редици и умножение на редица с* $\lambda \in F$*;*

(ii) подмножеството $V_o \subset V$ *на финитните редици (т.е. на редиците с най-много краен брой ненулеви членове) е подпространство на* V*;*

(iii) подмножеството $A \subset V$ *на аритметичните прогресии е подпространство на* V*;*

(iv) подмножеството $G \subset V$ *на геометричните прогресии не е подпространство на* V*;*

(v) подмножеството $W_{\lambda,\mu} = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \,|\, a_{n+1} = \lambda a_n + \mu a_{n-1}$ *за* $\forall n \geq 2\} \subset V$ *за произволни фиксирани* $\lambda, \mu \in F$ *е линейно подпространство на* V.

Задача 10. *Да се определи кои от следните вектори са линейно независими и кои са линейно зависими:*

(i) $(4, -1, 2)$, $(-4, 10, 2) \in \mathbb{R}^3$*;* *(ii)* $(-1, 2, 4)$, $(5, -10, -20) \in \mathbb{R}^3$*;*

(iii) $(3, -1)$, $(4, 5)$, $(-4, 7) \in \mathbb{R}^2$*;* *(iv)* $(-3, 0, 4)$, $(5, -1, 2)$, $(1, 1, 3) \in \mathbb{R}^3$*;*

(v) $(3, 8, 7, -3)$, $(1, 5, 3, -1)$, $(2, -1, 2, 6)$, $(1, 4, 0, 3) \in \mathbb{R}^4$*;*

(vi) $(0, 3, 1, -1)$, $(6, 0, 5, 1)$, $(4, -7, 1, 3) \in \mathbb{R}^4$*;*

(vii) $x^2 + x + 3$, $5x^2 - x + 2$, $-3x^2 + 4 \in \mathbb{R}[x]$.

Задача 11. *За кои стойности на реалния параметър* λ *векторите*

$$a_1 = (\lambda, -1, -1), \quad a_2 = (-1, \lambda, -1), \quad a_3 = (-1, -1, \lambda) \in \mathbb{R}^3$$

са линейно независими?

Решение: Нека $\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 = (0,0,0)$. Тогава

$$\left| \begin{array}{llll} \mu_1\lambda & -\mu_2 & -\mu_3 & = 0 \\ -\mu_1 & +\lambda\mu_2 & -\mu_3 & = 0 \\ -\mu_1 & -\mu_2 & +\lambda\mu_3 & = 0 \end{array} \right. .$$

Решаваме като система линейни уравнения с неизвестни μ_1, μ_2, μ_3 и параметър λ. Ако $\lambda \neq -1, 2$, то системата има единствено решение $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ и векторите a_1, a_2, a_3 са линейно независими. За $\lambda = 2$ имаме $a_1 + a_2 + a_3 = (0,0,0)$ и векторите a_1, a_2, a_3 са линейно зависими. При $\lambda = -1$ имаме $a_2 - a_1 = a_3 - a_1 = (0,0,0)$, така че a_1, a_2, a_3 са линейно зависими.

Задача 12. *(а) За кои стойности на параметъра* p *векторът* $b = (1, -1, p, 2p)$ *принадлежи на линейната обвивка на векторите*

$$a_1 = (1, -1, 2, 1), \quad a_2 = (3, 1, 2, -1), \quad a_3 = (1, -1, -1, 2).$$

(б) За кои стойности на параметъра p *векторът* $b = (1, 1, p, 1-p)$ *не принадлежи на линейната обвивка на векторите*

$$a_1 = (1, 2, -2, 1), \quad a_2 = (1, -3, 1, -1), \quad a_3 = (1, 1, -1, -2).$$

Отговори: (а) $p = \frac{5}{7}$; (б) $p \neq -\frac{19}{11}$.

Задача 13. *(i) Да се определи кои от следните множества от вектори образуват базис на линейното пространство* $\mathbb{Q}^2$*:*

(а) $(4,1)$, $(-7,-8)$*;* *(б)* $(0,0)$, $(1,3)$*;* *(в)* $(1,2)$, $(0,3)$, $(2,7)$.

(ii) Да се определи кои от следните множества от вектори образуват базис на линейното пространство $\mathbb{Q}^3$*:*

(а) $(3,1,-4)$, $(2,5,6)$, $(1,4,,8)$*;* *(б)* $(2,-3,1))$, $(4,1,1)$, $(0,-7,1)$*;*
(в) $(-1,3,2))$, $(6,1,1)$.

(i) Да се определи кои от следните множества от вектори образуват базис на линейното пространство $\mathbb{Q}^{(3)}[x]$ *на полиномите на* x *с рационални коефициенти от степен не по-голяма от 2 :*

(а) $1 - 3x + 2x^2$ $1 + x + 4x^2$, $1 - 7x$*;* *(б)* $-4 + x + 3x^2$, $6 + 5x + 2x^2$, $8 + 4x + x^2$*;*
(в) $1 + x + x^2$, $x - 1$.

Задача 14. *Нека*

$$V = \{(a + \sqrt{3}b,\ c + \sqrt{3}d,\ 2a - 2\sqrt{3}b,\ -c + \sqrt{3}d) \in \mathbb{R}^4 \,|\, a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}.$$

(i) Да се докаже, че V *е линейно пространство над полето* $\mathbb{Q}$ *на рационалните числа и да се намери размерността* $\dim_{\mathbb{Q}} V$.

(ii) Да се провери, че

$$W = \{(a + \sqrt{3}b,\ c + \sqrt{3}d,\ 2a - 2\sqrt{3}b,\ -c + \sqrt{3}d) \in V \,|\, a + \sqrt{3}b = 2(c + \sqrt{3}d) - (c - \sqrt{3}d)\}$$

е подпространство на V *и да се намери базис на* W.

Задача 15. *Да се намерят координатите на вектора* $v = (2, -1, 3) \in \mathbb{R}^3$ *спрямо базиса* $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (2, 2, 0)$, $e_3 = (3, 3, 3)$ *на* $\mathbb{R}^3$.

Задача 16. *Да се намерят координатите на полинома* $p(x) = 2 - x + x^2 \in \mathbb{R}^{(3)}[x]$ *спрямо базиса* $f_1(x) = 1 + x$, $f_2(x) = 1 + x^2$, $f_3(x) = x + x^2$ *на пространството* $\mathbb{R}^{(3)}[x]$ *на полиномите на* x *с реални коефициенти от степен най-много* 2.

Задача 17. *Нека* A *е линейното пространство на аритметичните прогресии с рационални елементи. Да се докаже, че* A *е* 2*-мерно линейно пространство над* $\mathbb{Q}$ *и да се намери базис на* A *над* $\mathbb{Q}$.

Задача 18. *(i) Да се докаже, че множеството* V *на функциите* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *е линейно пространство над* $\mathbb{R}$ *относно поточково определените събиране*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{за} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

и умножение

$$(rf)(x) = rf(x) \quad \text{за} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

с реално число $r \in \mathbb{R}$.

(ii) Да се докаже, че функциите $\cos^2(x)$, $\sin^2(x)$, $\cos(2x) \in V$ *са линейно зависими над* $\mathbb{R}$ *и да се намери базис на линейната им обвивка* $l_{\mathbb{R}}(\cos^2(x), \sin^2(x), \cos(2x))$.

Задача 19. *Да се определи размерността на следните подпространства на* $\mathbb{R}^4$*:*

(i) $U_1 = \{(a, b, c, 0) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$;

(ii) $U_2 = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad d = a + b, \quad c = a - b\}$;

(iii) $U_3 = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad a = b = c = d\}$.

Задача 20. *Нека* $f : V \times V \to F$ *е полилинейна антисиметрична функция върху линейно пространство* V *с базис* e_1, e_2, e_3 *над числово поле* F. *Да се докаже, че*

$$f(a_1, a_2) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})f(e_1, e_2) + (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})f(e_2, e_3) + (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})f(e_3, e_1)$$

за произволни вектори $a_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}e_j \in V$, $i = 1, 2$ *с координати* $a_{ij} \in F$ *спрямо базиса* e_1, e_2, e_3 *на* V.

Задача 21. *(i) Нека* $f : V \times V \to F$ *е полилинейна антисиметрична функция върху линейно пространство* V *с базис* e_1, e_2 *над числово поле* F. *Да се докаже, че*

$$f(a_1, a_2) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})f(e_1, e_2)$$

за произволни вектори $a_i = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 \in V$, $i = 1, 2$ *с координати* $a_{ij} \in F$ *спрямо базиса* e_1, e_2 *на* V.

(ii) Нека $f : V \times V \times V \to F$ *е полилинейна антисиметрична функция върху линейно пространство* V *с базис* e_1, e_2, e_3 *над числово поле* F. *Да се докаже, че*

$$f(a_1, a_2, a_3) =$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})f(e_1, e_2, e_3)$$

за произволни вектори $a_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}e_j \in V$, $i = 1, 2, 3$ *с координати* $a_{ij} \in F$ *спрямо базиса* e_1, e_2, e_3 *на* V.

Задача 22. *Нека $f : V \times V \times V \times V \to F$ е полилинейна антисиметрична функция върху линейно пространство V с базис e_1, e_2, e_3, e_4 над числово поле F. Да се намери стойността $f(a_1, a_2, a_3, a_4)$, ако*

$$a_1 = 2e_1 + e_3 + 3e_4, \quad a_2 = e_2 + 3e_3 + 2e_4, \quad a_3 = e_1 + 3e_2 + 2e_3, \quad a_4 = 3e_1 + 2e_2 + e_4.$$

Отговор: $f(a_1, a_2, a_3, a_4) = 0$.

Задача 23. *Да се пресметнат детерминантите*

$$(i) \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}; \quad (ii) \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}; \quad (iii) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Задача 24. *Да се пресметнат детерминантите:*

$$(i) \begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}; \quad (ii) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & x_1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & x_2 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & 1 \dots & 1 & 1 & 1 & \end{vmatrix};$$

$$(iii) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 3 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 2 & 5 & 4 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & 7 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 \end{vmatrix}; \quad (iv) \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & a_{n-1,n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & x_n \end{vmatrix};$$

$$(v) \text{ (Пачи крак)} \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ c_n & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix}; \quad (vi) \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x & x \\ x & a_2 & x & \dots & x & x \\ x & x & a_3 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_{n-1} & x \\ x & x & x & \dots & x & a_n \end{vmatrix};$$

$$(vii) \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}; \quad (viii) \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

Задача 25. *Да се пресметнат детерминнатите Δ_n от n-ти ред чрез извеждане на рекурентни зависимости от втора степен:*

$$(i) \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad (ii) \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{vmatrix};$$

$$(iii)\Delta_n = \begin{vmatrix} x+y & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y & x+y & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & y & x+y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+y & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y & x+y \end{vmatrix};$$

$$(iv)\Delta_n = \begin{vmatrix} x+y & 2x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{y}{2} & x+y & 2x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y}{2} & x+y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+y & 2x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{y}{2} & x+y \end{vmatrix}.$$

Задача 26. *Дадена е матрицата*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 8 & 11 & 19 & 0 & 11 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbb{Q}).$$

Намерете базис на пространството на вектор-редовете на A и базис на пространството на вектор-стълбовете на A. Определете ранга на A.

Решение: С елементарни преобразувания по редове свеждаме A към

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

и определяме, че $\mathrm{rk}(A) = 4$. Четирите реда на A образуват базис на вектор-редовете.

За стълбовете $c_1, \dots, c_5$ на A пресмятаме, че $c_1 - c_3 - 3c_4 + c_5 = \mathcal{O}$. Следователно кои и да са четири стълба на A, включващи c_2, образуват базис на пространството на вектор-стълбовете.

2 Задачи за контролна работа № 2

Задача 27. *Да се намери базис на пространството от решения на хомогенната линейна система*

$$\begin{vmatrix} x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = 0 \end{vmatrix}.$$

Да се определи за кои стойности на параметрите p и q векторът $(1, 2, p, q)$ принадлежи на пространството от решения на тази хомогенна линейна система.

Отговор: $p = 0$, $q = -1$.

Задача 28. *В линейното пространство* $\mathbb{Q}^4$ *са дадени пространството от решения* U *на хомогенната линейна система*

$$\left| \begin{array}{ccccc} x_1 & +2x_2 & -6x_3 & +3x_4 & =0 \\ x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -3x_4 & =0 \end{array} \right. \tag{1}$$

и пространството от решения W *на хомогенната линейна система*

$$\left| \begin{array}{ccccc} x_1 & +x_2 & -2x_3 & & =0 \\ 2x_1 & -x_2 & -2x_3 & +x_4 & =0 \end{array} \right. . \tag{2}$$

Да се намерят базиси на сечението $U \cap W$ *и сумата* $U + W$*.*

Решение: Сечението $U \cap W$ е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{ccccc} x_1 & +2x_2 & -6x_3 & +3x_4 & =0 \\ x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -3x_4 & =0 \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & & =0 \\ 2x_1 & -x_2 & -2x_3 & +x_4 & =0 \end{array} \right. , \tag{3}$$

получена чрез обединение на уравненията на системите (1) и (2). Пространството от решения на (3) е правата, породена от вектора $a_1 = (1,1,1,1)$.

По Теоремата за размерност на сума и сечение,

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3,$$

защото хомогенните линейни системи (1) и (2) са на 4 променливи и имат ранг 2. За намиране на базис на $U + W$ ни трябват фундаментални системи решения на (1) и (2). Например, $b_1 = (2,5,2,0)$, $b_2 = (0,-3,0,2)$ е базис на U, а $c_1 = (-1,1,0,3)$, $c_2 = (2,0,1,-2)$ е базис на W. Чрез елементарни преобразувания към редовете на матрицата $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, анулиращи позиции под главния диагонал, намираме линейната зависимост

$$b_1 + b_2 - 2c_1 - 2c_2 = 0.$$

Всеки от векторите b_1, b_2, c_1, c_2 участва с ненулев коефициент в тази линейна зависимост и може да се изрази като линейна комбинация на останалите. Следователно кои и да са три вектора измежду b_1, b_2, c_1, c_2 образуват базис на $U + W$.

Задача 29. *В линейното пространство* $\mathbb{Q}^4$ *са дадени линейната обвивка* $U = l(a_1, a_2)$ *на векторите*

$$a_1 = (1,-1,2,3), \quad a_2 = (1,1,3,2)$$

и линейната обвивка $W = l(b_1, b_2)$ *на векторите*

$$b_1 = (1,-2,1,1), \quad b_2 = (3,1,2,4).$$

Да се намерят базиси на сечението $U \cap W$ *и сумата* $U + W$*.*

Отговор: За намиране на базис на $U \cap W$ представяме U и W като пространства от решения на хомогенни линейни системи. Разглеждаме хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & -x_2 & +2x_3 & +3x_4 & =0 \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & +2x_4 & =0 \end{array} \right. , \tag{4}$$

чиито уравнения имат за коефициенти координатите на a_1 и a_2. Един начин за представяне на общото решение на (4) е $x_1 = 5x_2 - 5x_4$, $x_3 = -2x_2 + x_4$. Векторите $c_1 = (5, 1, -2, 0)$ и $c_2 = (-5, 0, 1, 1)$ образуват фундаментална система решения на (4) и U е пространството от решения на

$$\left| \begin{array}{lllll} 5x_1 & +x_2 & -2x_3 & & =0 \\ 5x_1 & & -x_3 & -x_4 & =0 \end{array} \right. . \tag{5}$$

Аналогично, да разгледаме хомогенната система

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & =0 \\ 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & +4x_4 & =0 \end{array} \right. , \tag{6}$$

чиито уравнения имат за коефициенти компонентите на b_1, b_2. Тя има фундаментална система решения $d_1 = (-5, 1, 7, 0)$, $d_2 = (-2, 0, 1, 1)$. Затова W е пространството от решения на

$$\left| \begin{array}{lllll} 5x_1 & -x_2 & -7x_3 & & =0 \\ 2x_1 & & -x_3 & -x_4 & =0 \end{array} \right. . \tag{7}$$

Сечението $U \cap W$ е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{lllll} 5x_1 & +x_2 & -2x_3 & & =0 \\ 5x_1 & & -x_3 & -x_4 & =0 \\ 5x_1 & -x_2 & -7x_3 & & =0 \\ 2x_1 & & -x_3 & -x_4 & =0 \end{array} \right. , \tag{8}$$

получена чрез обединение на уравненията на (5) и (7). Системата (8) има нулево пространство от решения и $U \cap W = \{\mathcal{O}\}$ няма базис.

По Теоремата за размерност на сума и сечение,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 0 = 4,$$

така че $U + W = \mathbb{Q}^4$ и всеки базис на $\mathbb{Q}^4$ е базис на $U + W$.

Задача 30. *В линейното пространство $\mathbb{Q}^4$ са дадени пространството от решения U на хомогенната линейна система*

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & +3x_2 & +4x_3 & -6x_4 & =0 \\ 2x_1 & -3x_2 & -4x_3 & +3x_4 & =0 \end{array} \right. \tag{9}$$

и линейната обвивка $W = l(a_1, a_2, a_3, a_4)$ на векторите

$$a_1 = (1, -1, 2, 1), \quad a_2 = (1, 3, -1, 1), \quad a_3 = (2, 3, 1, 1), \quad a_4 = (1, 2, -1, 2).$$

Да се намерят базиси на сечението $U \cap W$ и сумата $U + W$.

Решение: За да намерим базис на $U \cap W$, представяме W като пространство от решения на хомогенна линейна система. Ако

$$\left| \begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & = 0 \end{array} \right. \tag{10}$$

е хомогенната линейна система с матрица от коефициенти $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$, а $(8, -3, -4, -3)$ е нейна фундаментална система решния, то W е пространството от решения на хомогенното линейно уравнение

$$8x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0. \tag{11}$$

Сечението $U \cap W$ е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & +4x_3 & -6x_4 & = 0 \\ 2x_1 & -3x_2 & -4x_3 & +3x_4 & = 0 \\ 8x_1 & -3x_2 & -4x_3 & -3x_4 & = 0 \end{array} \right. , \tag{12}$$

получена чрез обединение на уравненията на (9) и (11). Системите (9) и (12) имат пространства от решения $U \supseteq U \cap W$ и един и същи ранг 2, така че $U = U \cap W$. Един базис на $U = U \cap W$ е $b_1 = (3, 5, 0, 3)$, $b_2 = (4, 0, 5, 4)$.

По Теоремата за размерност на сума и сечение,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = \dim(W),$$

така че включването $W \subseteq U + W$ е съвпадение, $W = U + W$. Съгласно линейната зависимост $a_1 + 2a_2 - a_3 - a_4 = \mathcal{O}$, всяка тройка вектори измежду $a_1, \ldots, a_4$ е базис на $W = U + W$.

Задача 31. *Спрямо базиса e_1, e_2, e_3 на линейното пространство U е даден линейният оператор $\varphi : U \longrightarrow U$,*

$$\varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) =$$
$$= (x_1 + x_2 + 2x_3)e_1 + (2x_1 - x_2 + x_3)e_2 + (-2x_1 + x_2 - x_3)e_3.$$

Да се намерят:

(а) базиси на ядрото $\ker(\varphi)$ и образа $\operatorname{im}(\varphi)$;

(б) вектори $u_1, \ldots, u_k \in U$, за които $\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_k)$ е базис на $\operatorname{im}(\varphi)$.

Решение: Матрицата на φ спрямо базиса e_1, e_2, e_3 на U е

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Координатните стълбове $X \in M_{3,1}(F)$ на векторите от ядрото $\ker(\varphi)$ на φ образуват пространството от решения на хомогенната линейна система

$$AX = 0_{3\times 1}.$$

В случая, $\ker(\varphi)$ е правата през началото в U, породена от вектора $e_1 + e_2 - e_3$. Образът $\mathrm{im}(\varphi)$ е двумерен съгласно Теоремата за ранга и дефекта на линейния оператор φ на тримерното пространство U. Произволни два различни стълба на A са непропорционални и задават координатите на базис на $\mathrm{im}(\varphi)$ спрямо e_1, e_2, e_3.

По определение, стълбовете на матрицата A на φ спрямо базиса e_1, e_2, e_3 на U представляват координатите на $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$ спрямо базиса e_1, e_2, e_3 на U. В случая, за произволни $1 \leq i < j \leq 3$ векторите $e_i, e_j \in U$ са такива, че $\varphi(e_i), \varphi(e_j)$ е базис на образа $\mathrm{im}(\varphi)$ на φ.

Задача 32. *Да се намери линеен оператор $\varphi : \mathbb{Q}^4 \longrightarrow \mathbb{Q}^4$ с образ $\mathrm{im}(\varphi) = W$, ако:*

(а) $W = l(a_1, a_2, a_3)$ е линейната обвивка на векторите

$$a_1 = (1, -1, 2, 1), \quad a_2 = (2, 1, -1, 1), \quad a_3 = (0, 1, -1, 2);$$

(б) W е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{llllll} x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & -3x_5 & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & +2x_4 & +x_5 & = 0 \\ x_1 & +3x_2 & -2x_3 & +x_4 & +x_5 & = 0 \end{array} \right. \tag{13}$$

Във всеки от случаите да се намери дефекта $d(\varphi)$ на φ.

Упътване: (а) Векторите a_1, a_2, a_3 са линейно независими, така че операторът φ има ранг $\mathrm{rk}(\varphi) = \dim \mathrm{im}(\varphi) = \dim(W) = 3$ и дефект $d(\varphi) = 4 - \mathrm{rk}(\varphi) = 1$. Избираме произволен базис $e_1, \ldots, e_4$ на $\mathbb{Q}^4$ и разглеждаме еднозначно определения линеен оператор $\varphi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ с $\varphi(e_i) = a_i$ за $1 \leq i \leq 3$ и $\varphi(e_4) = 0_{1\times 4}$. Образът $\mathrm{im}(\varphi) = l_{\mathbb{Q}}(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_4)) = l_{\mathbb{Q}}(a_1, a_2, a_3, 0_{1\times 4}) = l_{\mathbb{Q}}(a_1, a_2, a_3) = W$.

(б) Избираме фундаментална система решения

$$b_1 = (-1, 1, 1, 0, 0), \quad b_2 = (2, -1, 0, 0, 1)$$

на (13) и базис $f_1, \ldots, f_4$ на $\mathbb{Q}^4$. Линейният оператор $\varphi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ с $\varphi(f_i) = b_i$ за $1 \leq i \leq 2$, $\varphi(f_i) = 0_{1\times 4}$ за $3 \leq i \leq 4$ има образ $\mathrm{im}(\varphi) = l_{\mathbb{Q}}(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_4)) = l_{\mathbb{Q}}(b_1, b_2) = W$. Рангът на φ е $\mathrm{rk}(\varphi) = \dim \mathrm{im}(\varphi) = 2$, а дефектът на φ е $d(\varphi) = 4 - \mathrm{rk}(\varphi) = 2$.

Задача 33. *Да се намери линеен оператор $\psi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ с ядро W, ако:*

(а) $W = l(a_1, a_2, a_3)$ е линейната обвивка на векторите

$$a_1 = (1, 1, -2, 1), \quad a_2 = (2, 3, -1, 0), \quad a_3 = (1, 1, -1, 1);$$

(б) W е пространството от решения на хомогенното линейно уравнение

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \tag{14}$$

Упътване: (а) Проверяваме, че $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$ са линейно независими и допълваме до базис $a_1, a_2, a_3, a_4 = (0,0,0,1)$ на $\mathbb{R}^4$. Ако линейният оператор $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има ядро $\ker(\psi) = W = l_{\mathbb{R}}(a_1, a_2, a_3)$, то дефектът на ψ е $d(\psi) = \dim\ker(\psi) = 3$, а рангът на ψ е $\mathrm{rk}(\psi) = \dim\mathrm{im}(\psi) = 4 - d(\psi) = 1$. За произволен ненулев вектор $b \in \mathbb{R}^4$ линейният оператор $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ с $\psi(a_i) = 0_{1\times 4}$ за $1 \leq i \leq 3$, $\psi(a_4) = b$ има ядро $\ker(\psi) = W$, защото

$$0_{1\times 4} = \psi\left(\sum_{i=1}^{4} x_u a_i\right) = \sum_{i=1}^{4} x_i \psi(a_i) = x_4 b$$

е еквивалентно на $x_4 = 0$.

(б) Избираме фундаментална система решения

$$b_1 = (1,1,0,0), \quad b_2 = (-1,0,1,0), \quad b_3 = (1,0,0,1)$$

на (14). Допълваме до базис $b_1, b_2, b_3, b_4 = (1,0,0,0)$ на $\mathbb{R}^4$ и разглеждаме линейния оператор $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ с $\psi(b_i) = 0_{1\times 4}$ за $1 \leq i \leq 3$, $\psi(b_4) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{(0,0,0)\}$. Тогава

$$0_{1\times 4} = \psi\left(\sum_{i=1}^{4} y_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{4} y_i \psi(b_i) = y_4 \psi(b_4)$$

е равносилно на $y_4 = 0$ и ядрото $\ker(\psi) = l_{\mathbb{R}}(b_1, b_2, b_3) = W$. Дефектът на ψ е $d(\psi) = \dim\ker(\psi) = 3$, а рангът е $\mathrm{rk}(\psi) = 4 - d(\psi) = 1$.

Задача 34. *В тримерното линейно пространство U са дадени линейните оператори $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ с матрици*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

спрямо някакккъв базис e_1, e_2, e_3 на U.

(а) Да се намерят матриците на операторите $\varphi_1 + \varphi_2$ и $\psi_1(\varphi_1 + \varphi_2)$ спрямо базиса e_1, e_2, e_3.

(б) Да се опишат линейните оператори $\psi_2 : U \to U$, за които $(\psi_1 + \psi_2)(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathbb{O}$ е нулевото изображение.

(в) Да се докаже, че $(\psi_1 + \psi_2)(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathbb{O}$ тогава и само тогава, когато

$$\psi_2(2e_1 + e_2) = -e_1 + e_2 - 5e_3, \quad \psi_2(2e_3 + e_2) = -e_1 - 3e_2 - 3e_3. \tag{15}$$

Решение: (а) Матрицата на $\varphi_1 + \varphi_2$ спрямо базиса e_1, e_2, e_3 е

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

а матрицата на $\psi_1(\varphi_1 + \varphi_2)$ спрямо базиса e_1, e_2, e_3 е

$$B_1(A_1 + A_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(б) Ако ψ_2 има матрица B_2 спрямо e_1, e_2, e_3, то условието $(\psi_1 + \psi_2)(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathbb{O}$ е еквивалентно на условието $(B_1+B_2)(A_1+A_2) = 0_{3\times 3}$, съгласно взаимната еднозначност на съответствието между линейните оператори в U и техните матрици спрямо базиса e_1, e_2, e_3. Матрицата $B = B_1 + B_2 \in M_{3\times 3}(F)$ изпълнява условието $B(A_1 + A_2) = 0_{3\times 3}$ точно когато редовете (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}), $1 \leq i \leq 3$ на B са решения на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & & = 0 \end{array} \right. .$$

Следователно търсените матрици B са от вида

$$B = \begin{pmatrix} b_{13} & -2b_{13} & b_{13} \\ b_{23} & -2b_{23} & b_{23} \\ b_{33} & -2b_{33} & b_{33} \end{pmatrix} \tag{16}$$

за произволни $b_{13}, b_{23}, b_{33} \in F$. Оттук следва, че линейният оператор $\psi_2 : U \to U$ изпълнява условието $(\psi_1 + \psi_2)(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathbb{O}$ тогава и само тогава, когато има матрица

$$B_2 = B - B_1 = \begin{pmatrix} b_{13} - 1 & -2b_{13} + 1 & b_{13} - 1 \\ b_{23} + 1 & -2b_{23} - 1 & b_{23} - 1 \\ b_{33} - 2 & -2b_{33} - 1 & b_{33} - 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

за някои $b_{13}, b_{23}, b_{33} \in F$ спрямо базиса e_1, e_2, e_3.

(в) Ако $(\psi_2 + \psi_1)(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathbb{O}$, то матрицата B_2 на ψ_2 спрямо базиса e_1, e_2, e_3 е от вида (17) и

$$\psi_2(e_1) = (b_{13} - 1)e_1 + (b_{23} + 1)e_2 + (b_{33} - 2)e_3,$$

$$\psi_2(e_2) = (-2b_{13} + 1)e_1 + (-2b_{23} - 1)e_2 + (-2b_{33} - 1)e_3,$$

$$\psi_2(e_3) = (b_{13} - 1)e_1 + (b_{23} - 1)e_2 + (b_{33} - 1)e_3.$$

Оттук следва, че $\psi_2(2e_1 + e_2) = 2\psi_2(e_1) + \psi_2(e_2) = -e_1 + e_2 - 5e_3$, $\psi_2(2e_3 + e_2) = 2\psi_2(e_3) + \psi_2(e_2) = -e_1 - 3e_2 - 3e_3$.

Обратно, ако са изпълнени условията (15), то

$$\psi_2(e_1) = \frac{1}{2}[-e_1 + e_2 - 5e_3 - \psi_2(e_2)], \quad \psi_2(e_3) = \frac{1}{2}[-e_1 - 3e_2 - 3e_3 - \psi_2(e_1)].$$

Полагаме $\psi_2(e_2) = pe_1 + qe_2 + re_3$ за някакви $p, q, r \in F$ и получаваме, че матрицата B_2 на ψ_2 спрямо базиса e_1, e_2, e_3 е

$$B_2 = \begin{pmatrix} \frac{-p-1}{2} & p & \frac{-p-1}{2} \\ & & \\ \frac{-q+1}{2} & q & \frac{-q-3}{2} \\ & & \\ \frac{-r-5}{2} & r & \frac{-r-3}{2} \end{pmatrix}.$$

Следователно операторът $\psi_1 + \psi_2$ има матрица

$$B = B_1 + B_2 = \begin{pmatrix} \frac{-p+1}{2} & p-1 & \frac{-p+1}{2} \\ \frac{-q-1}{2} & q+1 & \frac{-q-1}{2} \\ \frac{-r-1}{2} & r+1 & \frac{-r-1}{2} \end{pmatrix}$$

от вида (16) спрямо базиса e_1, e_2, e_3. Оттук $0_{3\times 3} = B(A_1 + A_2) = (B_1 + B_2)(A_1 + A_2)$ и операторът ψ_2 изпълнява условието $(\psi_1 + \psi_2)(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathbb{O}$.

Задача 35. *Да се пресметнат детерминантите Δ_n чрез преставяне като произведение на две други подходящи детерминанти, ако*

$$(i) \quad \Delta_n = \det(\sin(\alpha_i + \beta_j))_{i,j=1}^n; \quad (ii) \quad \Delta_n = \det\left(\frac{1 - a_i^n b_j^n}{1 - a_i b_j}\right)_{i,j=1}^n;$$

$$(iii) \quad \Delta_{n+1} = \det((a_i + b_j)^n)_{i,j=0}^n.$$

Задача 36. *Да се решат матричните уравнения:*

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(б) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(в) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix};$$

Упътване: Когато матричният коефициент е необратим, разпишете матричното уравнение като система линейни уравнения за елементите на неизвестната матрица.

Отговор: (а) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$;

(б) Матричното уравнение е еквивалентно на

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

и има решение

$$Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} y_{31} + \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} y_{32} \\ \frac{7}{4} y_{31} - \frac{1}{4} & \frac{7}{4} y_{32} + 1 \\ y_{31} & y_{32} \end{pmatrix}$$

за произовлни y_{31}, y_{32}.

(в) Матричното уравнение е еквивалентно на

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

и няма решение, защото вторият и третият ред на лявата страна съвпадат, докато вторият ред е различен от третия в дясната страна.

Задача 37. *Да се намери обратната A^{-1} на матрицата*

$$(i)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{Q}); \qquad (ii)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{Q});$$

$$(iii)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{Q}).$$

Отговор:

$$(i)\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad (ii)\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -8 & 13 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 5 & -8 \end{pmatrix};$$

(iii) Ако редовете на A от втори до n-ти се заменят с разликите на първия ред с тези редове, а така модифицираните редове се извадят от първия, получаваме единичната матрица. Прилагането на същите елементарни преобразувания към единичната матрица дава

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 38. *Спрямо базиса e_1, e_2, e_3 на линейното пространство U е зададен линейният оператор $\varphi : U \longrightarrow U$,*

$$\varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) =$$
$$= (2x_1 - x_2 + x_3)e_1 + (x_1 + x_2 - 2x_3)e_2 + (2x_1 - x_2)e_3.$$

Да се намери матрицата B на φ спрямо базиса

$$e_1' = e_1 + 2e_2 + e_3, \quad e_2' = -e_1 + e_2 + e_3, \quad e_3' = 2e_1 - e_2 - e_3,$$

на U.

Отговор: Матрицата A на φ спрямо базиса e_1, e_2, e_3 на U и базиса $f_1, \dots, f_4$ на V е

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицата на прехода T от базиса e_1, e_2, e_3 към базиса e'_1, e'_2, e'_3 е

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{с} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Следователно

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -11 & 20 \\ -1 & -7 & 13 \end{pmatrix}.$$

Задача 39. *Нека $\varphi : U \to V$ е линейно изображение на n-мерно пространство U в m-мерно пространство V. Да се докаже, че съществуват базис $e_1, \dots, e_n$ на U и базис $f_1, \dots f_m$ на V, относно които φ има матрица*

$$\begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix},$$

където E_r е единичната матрица от ред $r = \mathrm{rk}(\varphi)$.

Упътване: Изберете базис $e_{r+1}, \dots, e_n$ на ядрото $\ker(\varphi)$ на φ и допълнете до базис $e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n$ на U. Тогава $f_1 = \varphi(e_1), \dots, f_r = \varphi(e_r)$ образуват базис на $\mathrm{im}(\varphi)$. Допълнете линейно независимите вектори $f_1, \dots, f_r \in V$ до базис $f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_m$ на линейното пространство V.

Задача 40. *Спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$ на пространството $\mathbb{R}^n$ операторът $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ има матрица*

$$\text{(а) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(б) } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{(в) } A = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b & b \\ b & a & b & \dots & b & b \\ b & b & a & \dots & b & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a & b \\ b & b & b & \dots & b & a \end{pmatrix} \quad \textit{с} \quad b \neq 0.$$

Да се намери базис на V, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Да се провери, че не съществува базис на V, съставен от собствени вектори за линейния оператор

$$\psi : V \longrightarrow V,$$

$$\varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (-x_2 + 2x_3)e_1 + (-x_1 - 3x_2 + 5x_3)e_2 + (-x_1 - 3x_2 + 5x_3)e_3.$$

Решение: (а) Характеристичният полином

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(-1-\lambda) - 2 + 2\lambda + 2(1-\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-1).$$

Характеристичните корени $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$ са реални. Следователно те съвпадат със собствените стойности на оператора.

Собствените вектори, отговарящи на собствената стойност $\lambda_1 = -1$ са ненулевите решения на

$$(A+E_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Те са пропорционални на $v_1 = (1,1,1)$.

Ненулевите решения на

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

са собствените вектори, отговарящи на събствената стойност $\lambda_2 = 0$. Например, $v_2 = (1,0,1)$.

Собствените вектори, отговарящи на собствената стойност $\lambda_3 = 1$ са ненулевите решения на

$$(A-E_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Те са пропорционални на $v_3 = (2,-1,1)$.

По този начин, операторът има диагонална матрица

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

спрямо базиса $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,0,1)$, $v_3 = (2,-1,1)$.

(б) Характеристичният полином

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 4 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(-3-\lambda) + 8(1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-1) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2.$$

Характеристичните корени $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = -1$ са реални и съвпадат със собствените стойности на оператора.

Характеристичният корен $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ е двукратен. Собствените вектори, отговарящи на тази собствена стойност са решения на хомогенната линейна система

$$(A - E_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_3$$

с двумерно пространство от решения $\{(p, q, p) \mid p, q \in \mathbb{R}\}$. Избираме линейно независими собствени вектори $v_1 = (1, 0, 1)$ и $v_2 = (0, 1, 0)$, отговарящи на $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Ненулевите решения на

$$(A + E_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

са собствените вектори със собствена стойност $\lambda_3 = -1$. Те са пропорционални на $v_3 = (1, -1, 2)$.

В резултат, операторът има диагонална матрица

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

спрямо базиса $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (1, -1, 2)$.

(в) Извадете първия ред на $A - \lambda E_n$ от всички останали, а после прибавете стълбовете от втори до n-ти към първия, за да пресметнете характеристичния полином $f_A(\lambda) = [a - \lambda + (n-1)b](a - \lambda - b)^{n-1}$. За $b \neq 0$ той има прост корен $\lambda_1 = a + (n-1)b$ и $(n-1)$-кратен корен $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = a - b \neq \lambda_1$.

Собствен вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = a + (n-1)b$ е $v_1 = (1, 1, \ldots, 1, 1)$.

Собствените вектори, отговарящи на $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = a - b$ с $b \neq 0$ са ненулевите решения на хомогенното линейно уравнение

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 0.$$

Един базис на пространството от решения е

$$v_2 = (1, -1, 0, \ldots, 0),$$

$$v_3 = (1, 0, -1, \ldots, 0),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v_n = (1, 0, 0, \ldots, -1),$$

където v_i има първа компонента 1 и i-та компонента -1 за $2 \leq i \leq n$.

Матрицата на φ спрямо базиса от собствени вектори $v_1, v_2, \ldots, v_n$ е

$$D = \begin{pmatrix} a+(n-1)b & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a-b \end{pmatrix}.$$

Матрицата на ψ спрямо базиса e_1, e_2, e_3 е

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Характеристичният полином е

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 2 \\ -1 & -3-\lambda & 5 \\ -1 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix}.$$

Изваждаме втория ред от третия и получаваме

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 2 \\ -1 & -3-\lambda & 5 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Изнасяме λ от третия ред и прибавяме третия стълб към втория, за да пресметнем

$$f_A(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda[-\lambda(2-\lambda)+1] = -\lambda(\lambda-1)^2.$$

Хрктеристичните корени $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$ са реални и съвпадат със собствените стойности на ψ.

Собствените вектори, отговарящи на собствената стойност 1 са ненулевите решения на хомогенната линейна система

$$(A - E_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 5 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Всички те са пропорционални на $v_1 = (1, 1, 1)$.

Собствените вектори, отговарящи на $\lambda_3 = 0$ са ненулевите решения на

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Това са векторите, пропорционални на $v_2 = (-1, 2, 1)$.

Операторът ψ не притежава базис от собствени вектори или ψ няма диагонална матрица спрямо нито един базис на V.

3 Задачи за контролна работа № 3

Задача 41. *Нека $e_1, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на евклидовото пространство V. За всяко естествено $1 \leq k \leq n$ да се докаже, че*

$$l(e_1, \dots, e_k)^{\perp} = l(e_{k+1}, \dots, e_n).$$

Решение: Условието $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in l(e_1, \dots, e_k)^{\perp}$ е еквивалентно на $0 = (v, e_i) = x_i$ за $\forall 1 \leq i \leq k$. Следователно $v = \sum\limits_{i=k+1}^{n} x_i e_i$ и $l(e_1, \dots, e_k)^{\perp} \subseteq l(e_{k+1}, \dots, e_n)$.

Обратно, $l(e_{k+1}, \dots, e_n) \subseteq l(e_1, \dots, e_k)^{\perp}$, защото от $(e_i, e_j) = 0$ за $\forall 1 \leq i \leq k < j \leq n$ следва $e_j \in l(e_1, \dots, e_k)^{\perp}$ за $\forall k+1 \leq j \leq n$, а оттам и $l(e_{k+1}, \dots, e_n) \subseteq l(e_1, \dots, e_k)^{\perp}$.

Задача 42. *Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени векторите*

(i) $a_1 = (1, -1, 1, -1)$, $\quad a_2 = (-2, 1, -5, 4)$, $\quad a_3 = (0, -1, 5, -2)$*;*

(ii) $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\quad a_2 = (2, 4, 0, -2)$, $\quad a_3 = (1, -3, 5, 9)$.

Да се ортогонализират a_1, a_2, a_3 по метода на Грам-Шмид и да се определи размерността на линейната обвивка $l(a_1, a_2, a_3)$.

Решение: (i) Полагаме $b_1 = a_1$. Търсим $b_2 = a_2 + \lambda b_1$ така, че

$$0 = (b_2, b_1) = (a_2, b_1) + \lambda(b_1, b_1).$$

Оттук $\lambda = -\frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)} = -\frac{(-12)}{4} = 3$ и

$$b_2 = a_2 + 3b_1 = (1, -2, -2, 1).$$

На следващата стъпка полагаме $b_3 = a_3 + \alpha b_1 + \beta b_2$ и определяме $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ от равенствата

$$0 = (b_3, b_1) = (a_3, b_1) + \alpha(b_1, b_1),$$

$$0 = (b_3, b_2) = (a_3, b_2) + \beta(b_2, b_2),$$

вземайки предвид $(b_1, b_2) = 0$. Пресмятаме

$$\alpha = -\frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{8}{4} = -2, \quad \beta = -\frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\frac{(-10)}{10} = 1$$

и намираме

$$b_3 = a_3 - 2b_1 + b_2 = (-1, -1, 1, 1).$$

Ненулевите ортогонални вектори b_1, b_2, b_3 са линейно независими, така че подпространството $l(a_1, a_2, a_3) = l(b_1, b_2, b_3)$ е тримерно.

(ii) Избираме $b_1 = a_1$. Търсим $b_2 = a_2 + \lambda b_1$ така, че $0 = (b_2, b_1) = (a_2, b_1) + \lambda(b_1, b_1)$. По-точно, $\lambda = -\frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)} = -\frac{4}{4} = -1$ и

$$b_2 = a_2 - b_1 = (1, 3, -1, -3).$$

Сега $b_3 = a_3 + \alpha b_1 + \beta b_2$ има коефициенти

$$\alpha = -\frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{12}{4} = -3, \quad \beta = -\frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\frac{(-40)}{20} = 2$$

и

$$b_3 = a_3 - 3b_1 + 2b_2 = (0, 0, 0, 0).$$

При ортогонализация на a_1, a_2, a_3 по метода на Грам-Шмид получихме ненулеви ортогонални b_1, b_2 и $b_3 = \mathcal{O}$. Следователно a_1, a_2 са линейно независими, а $a_3 \in l(a_1, a_2)$, така че $\dim l(a_1, a_2, a_3) = \dim l(a_1, a_2) = 2$.

Задача 43. *Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени линейната обвивка $U = l(a_1, a_2, a_3)$ на векторите*

$$a_1 = (1, 2, -1, 0), \quad a_2 = (-1, -5, 1, 1), \quad a_3 = (0, 9, 0, 1)$$

и векторът $v = (1, 1, 1, 1)$. Да се намерят:

(а) ортогонални базиси на подпространството U и на ортогоналното му допълнение $U^{\perp}$;

(б) ортогоналната проекция v_1 и перпендикулярът h_1 от v към U;

Решение: (а) Прилагаме ортогонализация по метода на Грам-Шмид към векторите a_1, a_2, a_3 и получаваме ортогонален базис

$$b_1 = a_1 = (1, 2, -1, 0),$$

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = a_2 + 2b_1 = (1, -1, -1, 1),$$

$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = a_3 - 3b_1 + 2b_2 = (-1, 1, 1, 3)$$

на подпространството U.

Ако x е стълб от четири числа, то умножението на матрици $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x$ съвпада със скаларното произведение спрямо ортонормиран базис, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} (a_1, x) \\ (a_2, x) \\ (a_3, x) \end{pmatrix}$. Затова ортогоналното допълнение $U^{\perp}$ е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & -x_3 & & = 0 \\ x_1 & +5x_2 & -x_3 & -x_4 & = 0 \\ & 9x_2 & & +x_4 & = 0 \end{array} \right. ,$$

чиято матрица от коефициенти е образувана по редове от координатите на a_1, a_2, a_3. Използвайки $l(a_1, a_2, a_3) = l(b_1, b_2, b_3)$, можем да зададем $U^{\perp}$ като пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & -x_3 & & = 0 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & +3x_3 & = 0 \end{array} \right. .$$

Общото решение на тази система е $x_1 = x_3$, $x_2 = x_4 = 0$ и $U^\perp = l(c)$ за $c = (1, 0, 1, 0)$.

(б) Търсим вектор $v_1 = x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3 \in U$ с реални x_1, x_2, x_3, така че $v - v_1$ да принадлежи на ортогоналното допълнение $U^\perp$. За $U = l(a_1, a_2, a_3) = l(b_1, b_2, b_3)$ условието $v - v_1 \in U^\perp$ е еквивалентно на $0 = (v - v_1, b_i) = (v, b_i) - x_i(b_i, b_i)$ за $1 \le i \le 3$. Оттук

$$x_1 = \frac{(v, b_1)}{(b_1, b_1)} = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{(v, b_2)}{(b_2, b_2)} = 0, \quad x_3 = \frac{(v, b_3)}{(b_3, b_3)} = \frac{1}{3}$$

или

$$v_1 = \frac{1}{3} b_1 + \frac{1}{3} b_3 = (0, 1, 0, 1), \quad h_1 = v - v_1 = (1, 0, 1, 0).$$

По друг начин, търсим перпендикуляра $h_1 = xc \in U^\perp$, така че $v_1 = v - h_1 = v - xc \in U = (U^\perp)^\perp$. С други думи, $0 = (v_1, c) = (v, c) - x(c, c)$ или $x = \frac{(v,c)}{(c,c)} = 1$ и

$$h_1 = c, \quad v_1 = v - c = (0, 1, 0, 1).$$

Задача 44. *Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени пространството от решения U на хомогенното линейно уравнение*

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$$

и векторът $v = (1, 1, 1, 1)$. Да се намерят:

(а) ортогонален базис на подпространството U;

(б) ортогоналната проекция v_1 и перпендикулярът h_1 от v към U;

Решение: (а) Пространството от решения U на хомогенна линейна система с ранг 1 в $\mathbb{R}^4$ е тримерно. Избираме $c_1 = (1, 0, 0, 1)$. Търсим c_2 като ненулево решение на

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & -2x_3 & -x_4 & = 0 \\ x_1 & & & +x_4 & = 0 \end{array} \right. .$$

Например, $c_2 = (0, 2, 1, 0) \in U$. Накрая определяме вектора $c_3 \in U$, ортогонален на c_1 и c_2 като ненулево решение на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & -2x_3 & -x_4 & = 0 \\ x_1 & & & +x_4 & = 0 \\ & 2x_2 & +x_3 & & = 0 \end{array} \right. .$$

С точност до пропорционалност $c_3 = (5, -2, 4, -5)$. Векторите c_1, c_2, c_3 образуват ортогонален базис на U.

(б) Ортогоналната проекция $v_1 = x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3 \in U$, така че $v - v_1 \in U^\perp$ или $0 = (v - v_1, c_i) = (v, c_i) - x_i(c_i, c_i)$ за $1 \le i \le 3$. Пресмятаме

$$x_1 = \frac{(v, c_1)}{(c_1, c_1)} = 1, \quad x_2 = \frac{(v, c_2)}{(c_2, c_2)} = \frac{3}{5}, \quad x_3 = \frac{(v, c_3)}{(c_3, c_3)} = \frac{1}{35}$$

и получаваме

$$v_1 = c_1 + \frac{3}{5} c_2 + \frac{1}{35} c_3 = \left(\frac{8}{7}, \frac{8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7} \right), \quad h = v - v_1 = \left(-\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7} \right).$$

По друг начин, $U^\perp = l(c)$ за $c = (1,1,-2,-1)$ и търсим $h_1 = xc$ така че $v_1 = v - h_1 = v - xc \in U = (U^\perp)^\perp$. Еквивалентно, $0 = (v_1, c) = (v, c) - x(c, c)$ и $x = \frac{(v,c)}{(c,c)} = -\frac{1}{7}$. В резултат,

$$h_1 = \left(-\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right), \quad v_1 = v - h_1 = \left(\frac{8}{7}, \frac{8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}\right).$$

Задача 45. *Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство* $\mathbb{R}^n$, $n = 3, 4$, *линейният оператор* $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *има матрица*

$$(i) \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (ii) \quad N = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix};$$

$$(iii) \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -10 & -2 \\ -10 & 5 & -8 \\ -2 & -8 & 11 \end{pmatrix}; \quad (iv) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(v) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (vi) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, *в който матрицата* D *на* φ *е диагонална, както и тази матрица* D.

Решение: (i) Характеристичният полином

$$f_M(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-4) = 0.$$

Решението $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ на хомогенната линейна система уравнения $(M + 2E_3)x = 0_{3\times 1}$ е единичен собствен вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = -2$. Решаваме хомогенната линейна система $(M - 2E_3)x = 0_{3\times 1}$ и намираме единичен собствен вектор $e_2 = (0,1,0)$, отговарящ на собствената стойност $\lambda_2 = 2$. Некрая избираме единичния собствен вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda_3 = 4$ като ненулево решение на хомогенната линейна система $(M - 4E_3)x = 0_{3\times 1}$. Операторът φ е симетричен, защото има симетрична матрица M относно ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$. Векторите e_1, e_2, e_3 образуват ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$, съставен от собствени вектори на φ, в който φ има диагонална матрица

$$D_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(ii) Характеристичният полином

$$f_N(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 & -2 \\ 4 & -2-\lambda & 4 \\ -2 & 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+6)(\lambda-6)^2 = 0.$$

Решението $e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$ на хомогенната линейна система $(N+6E_3)x = 0_{3\times 1}$ е единичен собствен вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = -6$. Собствените вектори, отговарящи на двукратната собствена стойност $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ са решения на хомогенното линейно уравнение $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. Избираме единичен собствен вектор $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0)$, отговарящ на собствената стойност $\lambda_2 = 6$. Търсим e_3 като ненулево единично решение на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{rrrl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & =0 \\ 2x_1 & +x_2 & & =0 \end{array} \right. ,$$

така че e_3 да е единичен собствен вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda_3 = 6$ и да е перпендикулярен на e_2. Избираме $e_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{30}}(1,-2,-5)$ и получаваме ортонорчиран базис e_1, e_2, e_3 на $\mathbb{R}^3$, в който φ има диагонална матрица

$$D_2 = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

(iii) Характеристичният полином

$$f_P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -10 & -2 \\ -10 & 5-\lambda & -8 \\ -2 & -8 & 11-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+9)(\lambda-9)(\lambda-18) = 0.$$

Решението $e_1 = \frac{1}{3}(2,2,1)$ на хомогенната линейна система $(P+9E_3)x = 0_{3\times 1}$ е единичен собствен вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = -9$. Избираме единичен собствен вектор $e_2 = \frac{1}{3}(-2,1,2)$, отговарящ на собствената стойност $\lambda_2 = 9$ като решение на хомогенната линейна система $(P-9E_3)x = 0_{3\times 1}$. Единичният собствен вектор $e_3 = \frac{1}{3}(1,-2,2)$, отговарящ на собствената стойност $\lambda_3 = 18$ е решение на хомогенната линейна система $(P-18E_3)x = 0_{3\times 1}$. Операторът φ е симетричен, защото има симетрична матрица P спрямо ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$. Следователно собствените вектори e_1, e_2, e_3, отговарящи на различните собствени стойности $\lambda_1 = -9$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 18$ са ортогонални помежду си и образуват ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$, съставен от собствени вектори на φ. Матрицата на φ спрямо базиса $e_1, e_@, e_3$ е

$$D_3 = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

(iv) Характеристичният полином

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5) = 0,$$

Решението $e_1 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$ на хомогенната линейна система $(A+E_4)X = 0_{4\times 1}$ е единичен собствен вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = -1$. Решението $e_2 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$ на хомогенната линейна система $(A-E_4)X = 0_{4\times 1}$ е единичен собствен вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda_2 = 1$. Аналогично, решението $e_3 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)$ на $(A - 3E_4)X = 0_{4\times 1}$ е единичен собствен вектор, отговарящ на $\lambda_3 = 3$, а $e_4 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)$ е единичен собствен вектор, отговарящ на $\lambda_4 = 5$. Матрицата на φ спрямо ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$ е симетрична, така че φ е симетричен оператор. Следователно собствените вектори, отговарящи на различни собствени стойности са ортогонални помежду си и e_1, e_2, e_3, e_4 е ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$. Матрицата на φ спрямо този базис е

$$D_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(v) Характеристичният полином

$$f_B(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Избираме собствените вектори e_1, e_2, отговарящи на собствените стойности $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ като ортонормиран базис на пространството от решения на хомогенната линейна система

$$(B + E_4)X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = 0_{4\times 1}.$$

Например, $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0)$. Аналогично, собствените вектори $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)$, $e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0)$, отговарящи на собствените стойности $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ са ортонормиран базис на пространството от решения на

$$(B - E_4)X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = 0_{4\times 1}.$$

Операторът φ е симетричен, защото има симетрична матрица спрямо ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$. Следователно, собствените вектори на φ, отговарящи на различни собствени стойности са ортогонални помежду си и e_1, e_2, e_3, e_4 е ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$. Матрицата на φ спрямо този базис е

$$D_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(vi) Характеристичният полином

$$f_C(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-2)^3.$$

Решението $e_1 = \frac{1}{2}(-1,1,1,1)$ на $(C+2E_4)X = 0_{4\times 1}$ е единичен собствен вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = -2$. Собствените вектори e_2, e_3, e_4, отговарящи на трикратната собствена стойност $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$ се избират като ортонормиран базис на пространството от решения на

$$(C-2E_4)X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} X = 0_{4\times 1}.$$

Тази система се свежда до $x_1 = x_2 + x_3 + x_4$. Нека $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)$ е едно ненулево решение. Търсим e_3 като единичен вектор, изпълняващ хомогенната линейна система

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0_{4\times 1}.$$

Например $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,0,2)$. Накрая, $e_4 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-1,1,-3,1)$ е единично решение на

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = 0_{4\times 1}.$$

Операторът φ е симетричен, така че собствените вектори, отговарящи на различни собствени стойности са ортогонални помежду си и e_1, e_2, e_3, e_4 е ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$. Матрицата на φ в този базис е

$$D_6 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4 Задачи с повишена трудност и приложения.

Задача 46. *Нека $E_{ij} \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ са матриците с единствен ненулев елемент 1 в i-ти ред и j-ти стълб, $1 \leq i, j \leq n$. (E_{ij} се наричат матрични единици.) Да се докаже, че:*

(а) $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ е базис на $M_{n\times n}(\mathbb{C})$;

(б) $E_{ij}E_{kl} = \delta_k^j E_{il} = \begin{cases} E_{il} & \text{за } j = k \\ 0 & \text{за } j \neq k. \end{cases}$

(в) ако $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ и $A_{ij} = 0$ за $\forall n \geq i \geq j \geq 1$, то $A^n = 0_{n\times n}$.

Задача 47. *Ако $e_1, \dots, e_n$ е базис на линейното пространство V, а $\varphi : V \to V$ е линеен оператор с $\varphi(e_s) \in l(e_{s+1}, \dots, e_n)$ за $\forall 1 \leq s \leq n$ ($\varphi(e_n) = \mathcal{O}$), да се докаже, че $\varphi^n = \mathcal{O}$ е нулевият оператор.*

Упътване: Матрицата $A \in M_{n,n}(F)$ на φ спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$ е линейна комбинация на матричните единици E_{ij} с $i > j$ от задача 46, т.е

$$A = \sum_{i>j} a_{ij} E_{ij} = \sum_{i=j+1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij} \in l_F(E_{ij} \mid j+1 \leq i \leq n, \ \ 1 \leq j \leq n).$$

С индукция по $1 \leq k \leq n$, оттук следва $A^k = l_F(E_{ij} \mid j+k \leq i \leq n, \ \ 1 \leq j \leq n)$. В частност, $A = 0_{n \times n}$, защото не съществуват матрични единици E_{ij} от ред n с $i - j \geq n$.

Задача 48. *Нека U е n-мерно линейно пространство, а $\varphi : U \to U$ и $\psi : U \to U$ са линейни оператори в U с обратимо произведение $\psi\varphi : U \to U$. Да се намери рангът на оператора φ и рангът на оператора ψ.*

Задача 49. *Линейният оператор $\varphi : U \longrightarrow U$ в крайномерно пространство U има квадрат $\varphi^2 = \mathrm{Id}_U$. Да се докаже, че за всяко естествено число k поне един от операторите $\varphi^k - \mathrm{Id}_U$ или $\varphi^k + \mathrm{Id}_U$ не е обратим.*

Упътване: Използвайте, че произведението на обратими матрици е обратима матрица.

Задача 50. *Нека $\varphi : \mathbb{R}^{n+1}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^n[x]$,*

$$\varphi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$$

е диференцирането на полиноми с реални коефициенти от степен не по-голяма от n.

(а) Да се докаже, че съществува единствено линейно изображение

$$\psi : \mathbb{R}^n[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}[x]$$

с $\varphi\psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n[x]}$.

(б) Да се намерят всички (необезателно линейни) изображения

$$\Psi : \mathbb{R}^n[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}[x]$$

с $\varphi\Psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n[x]}$. Съвкупността на тези Ψ се нарича определен интеграл.

Упътване: Ако $\varphi\Psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n[x]}$ за някакво изображение $\Psi\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right) = \sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j$, то $\sum\limits_{j=1}^{n} j b_j x^{j-1} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ и $b_{s+1} = \frac{a_s}{s+1}$ за $\forall 0 \leq s \leq n-1$. С други думи,

$$\Psi\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right) = b_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{x^{i+1}}{i+1}$$

с произволно $b_0 \in \mathbb{R}$ е интегрирането на полиноми.

Ако $\psi : \mathbb{R}^n[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}[x]$ е линейно изображение, то $\psi(0) = 0$ за тъждествено нулевия полином $0 \in \mathbb{R}^n[x]$ и $\psi\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i \frac{x^{i+1}}{i+1}$.

Задача 51. *Дадени са обратимите линейни оператори $\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\beta : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ и линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Да се докаже, че линейните оператори φ, $\varphi\alpha$, $\beta\varphi$ и $\beta\varphi\alpha$ имат един и същи ранг и дефект.*

Задача 52. *Да се докаже, че за всяко просто p съществуват $(p^3-1)(p^3-p)(p^3-p^2)$ обратими линейни оператора в пространството $\mathbb{Z}_p^3$ на наредените тройки с елементи от полето $\mathbb{Z}_p$ на остатъците при деление с p.*

Упътване: Всеки обратим линеен оператор $\varphi : \mathbb{Z}_p^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_p^3$ се определя еднозначно от образите $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$ на стандартните базисни вектори $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$. Операторът φ е обратим тогава и само тогава, когато векторите $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$ са линейно независими. Векторът $\varphi(e_1) \in M_{3,1}(\mathbb{Z}_p)$ е линейно независим точно когато е ненулев, така че съществуват p^3-1 възможности за $\varphi(e_1) \in M_{3,1}(\mathbb{Z}_p)$. За фиксирано $\varphi(e_1) \in M_{3,1}(\mathbb{Z}_p)$, векторите $\varphi(e_1), \varphi(e_2) \in M_{3,1}(\mathbb{Z}_p)$ са линейно независими тогава и само тогава, когато $\varphi(e_2)$ е извън линейната обвивка $l_{\mathbb{Z}_p}(\varphi(e_1))$ на $\varphi(e_1)$. Понеже $l_{\mathbb{Z}_p}(\varphi(e_1))$ съдържа p елемента, броят на $\varphi(e_2) \in M_{3,1}(\mathbb{Z}_p)$, за които $\varphi(e_1), \varphi(e_2)$ са линейно независими е $p^3 - p$. За фиксирани $\varphi(e_1), \varphi(e_2) \in M_{3,1}(\mathbb{Z}_p)$, векторите $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3) \in M_{3,1}(\mathbb{Z}_p)$ са линейно независими точно когато $\varphi(e_3)$ е извън линейната обвивка $l_{\mathbb{Z}_p}(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$ на $\varphi(e_1)$ и $\varphi(e_2)$. За фиксирани $\varphi(e_1), \varphi(e_2)$ множеството $l_{\mathbb{Z}_p}(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$ съдържа p^2 елемента, така че векторите $\varphi(e_3)$ извън $l_{\mathbb{Z}_p}(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$ са $p^3 - p^2$ на брой.

Задача 53. *В линейното пространство $M_{4\times 1}(\mathbb{Q})$ на наредените четворки рационални числа е дадено изображението $\varphi : M_{4\times 1}(\mathbb{Q}) \longrightarrow M_{4\times 1}(\mathbb{Q})$, $\varphi(x) = Ax$ за някаква матрица $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{Q})$. Да се докаже, че φ е линейно изображение и да се намери $\varphi(x)$ за*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ c & d & a & b \end{pmatrix},$$

където a, b, c, d са последните четири цифри на факултетния Ви номер.

Задача 54. *В линейното пространство V с размерност $\dim V \geq n \geq 2$ да се построи линеен оператор $\varphi : V \longrightarrow V$ с $\dim(\ker(\varphi) \cap \operatorname{im}(\varphi)) \geq 1$.*

Упътване: Избираме базис $e_1, \dots e_k$ на сечението $\ker(\varphi) \cap \operatorname{im}(\varphi)$. Допълваме до базис $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_m$ на $\ker(\varphi)$, базис $e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_l$ на $\operatorname{im}(\varphi)$ и базис $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n$ на V. По Теоремата за ранга и дефекта на φ имаме $m + l = d(\varphi) + \operatorname{rk}(\varphi) = \dim V = n$. Линейният оператор $\varphi : V \to V$ с $\varphi(e_i) = \mathcal{O}$ за $1 \leq i \leq m$, $\varphi(e_j) = e_{j-m}$ за $m+1 \leq j \leq m+k$ и $\varphi(e_p) = f_{p-m}$ за $m+k+1 \leq p \leq m+l = n$ изпълнява необходимите условия.

Задача 55. *В n-мерното линейно пространство V да се построи линеен оператор $\psi : V \longrightarrow V$ с $\dim(\ker(\psi) + \mathrm{im}(\psi)) \leq n - 1$.*

Упътване: Оценете $\dim(\ker(\psi) \cap \mathrm{im}(\psi))$.

Задача 56. *Да се докаже, че множеството L на онези $\mathbb{Q}$-линейните изображения $\varphi : \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^2$, чиито ядра съдържат вектора $(2, 1, 3)$ е 4-мерно линейно пространство над $\mathbb{Q}$ и да се намери базис на L над $\mathbb{Q}$.*

Решение: Нека $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$ е матрицата на φ спрямо стандартния базис $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ на $\mathbb{Q}^3$ и стандартния базис $f_1 = (1, 0)$, $f_2 = (0, 1)$ на $\mathbb{Q}^2$. Тогава условието $(2, 1, 3) = 2e_1 + e_2 + 3e_3 \in \ker(\varphi)$ е еквивалентно на

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} + a_{12} + 3a_{13} \\ 2a_{21} + a_{22} + 3a_{23} \end{pmatrix}.$$

Матриците $A = (a_{ij})$ на търсените линейни изображения образуват 4-мерното пространство от решения L_1 на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{llll} 2a_{11} & +a_{12} & +3a_{13} & = 0 \\ 2a_{21} & +a_{22} & +3a_{23} & = 0 \end{array} \right.$$

с шест променливи a_{ij}, $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq 3$. Общото решение на тази система е

$$\left| \begin{array}{lll} a_{12} = & -2a_{11} & -3a_{13} \\ a_{22} = & -2a_{21} & -3a_{23} \end{array} \right. .$$

Избираме фундаментална система решения

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

или базис на L_1. Той отговаря на базиса $\varphi_1, \dots, \varphi_4$ на L, съставен от линейните изображения $\varphi_j : \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^2$ с матрици A_j спрямо e_1, e_2, e_3 и f_1, f_2.

Задача 57. *За произволни матрици $A, B \in M_{m\times n}(F)$ с елементи от поле F да се докаже, че рангът на сумата не надминава сумата на ранговете,*

$$\mathrm{rk}(A + B) \leq \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B).$$

Решение: Нека $\varphi : F^n \longrightarrow F^m$ и $\psi : F^n \longrightarrow F^m$ са линейните изображения с матрици A, съответно B, спрямо някакъв базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на F^n и някакъв базис $f = (f_1, \dots, f_m)$ на F^m. Тогава $A + B$ е матрицата на $\varphi + \psi : F^n \longrightarrow F^m$ спрямо базиса e на F^n и базиса f на F^m. Но образът на сумата $\varphi + \psi$

$$\mathrm{im}(\varphi + \psi) = \{(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) \ \mid \ x \in F^n\}$$

е подпространство на сумата на образите

$$\mathrm{im}(\varphi) + \mathrm{im}(\psi) = \{\varphi(y) \ \mid \ y \in F^n\} + \{\psi(z) \ \mid \ z \in F^n\} = \{\varphi(y) + \psi(z) \ \mid \ y, z, \in F^n\},$$

така че

$$\operatorname{rk}(\varphi+\psi) = \dim\operatorname{im}(\varphi+\psi) \le \dim[\operatorname{im}(\varphi)+\operatorname{im}(\psi)] =$$

$$= \dim\operatorname{im}(\varphi) + \dim\operatorname{im}(\psi) - \dim[\operatorname{im}(\varphi)\cap\operatorname{im}(\psi)] \le \dim\operatorname{im}(\varphi) + \dim\operatorname{im}(\psi) = \operatorname{rk}(\varphi)+\operatorname{rk}(\psi).$$

Остава да приложим, че $\operatorname{rk}(\varphi+\psi) = \operatorname{rk}(A+B)$, $\operatorname{rk}(\varphi) = \operatorname{rk}(A)$ и $\operatorname{rk}(\psi) = \operatorname{rk}(B)$.

Задача 58. *Ако $X, Y \in M_{n\times n}(F)$ са квадратни матрици с произведение $XY = 0_{n\times n}$, да се докаже, че*

$$\operatorname{rk}(X) + \operatorname{rk}(Y) \le n.$$

Решение: Нека $e_1, \dots, e_n$ е базис на F^n, $\varphi : F^n \longrightarrow F^n$ е операторът с матрица X спрямо този базис, а $\psi : F^n \longrightarrow F^n$ е операторът с матрица Y спрямо този базис. Тогава от $XY = 0_{n\times n}$ следва $\varphi\psi = \mathcal{O}$ за нулевия оператор $\mathcal{O} : F^n \longrightarrow F^n$ с $\mathcal{O}(x) = 0_{n\times 1}$ за $\forall x \in F^n$. С други думи, $\operatorname{im}(\psi) \subseteq \ker(\varphi)$ и по Теоремата за ранга и дефекта на линейно изображение получаваме

$$\operatorname{rk}(\psi) = \dim\operatorname{im}(\psi) \le \dim\ker(\varphi) = \dim F^n - \dim\operatorname{im}(\varphi) = n - \operatorname{rk}(\varphi).$$

Задача 59. *Нека $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(F)$ е квадратна матрица от ранг r, а $A^* = (A_{ij})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(F)$ е матрицата, съставена от адюнгираните количества A_{ij} на елементите a_{ij} на A. За ранга r^* на A^* да се докаже, че:*

(i) $r^* = n$ за $r = n$;

(ii) $r^* = 0$ за $0 \le r \le n-2$;

(iii) $r^* = 1$ за $r = n-1$.

Решение: Ако $r = n$, то $\det(A) \neq 0$ и $A(A^*)^t = (A^*)^t A = \det(A)E_n$. Оттук $\det(A^*)^t = \det(A^*) \neq 0$ и $r^* = n$.

При $r \le n-2$ всички адюнгирани количества $A_{ij} = 0$ се анулират и $A^* = 0_{n\times n}$, $r^* = 0$.

В случая $r = n-1$ използваме $A(A^*)^t = \det(A)E_n = 0_{n\times n}$, за да разглеждаме вектор-стълбовете $c_1, \dots, c_n$ на $(A^*)^t$ като вектори от пространството U на решенията на хомогенната линейна система $AX = 0_{n\times 1}$ с ранг $r = n-1$. За вектор-редовете $c_1^t, \dots, c_n^t$ на A^* имаме

$$r^* = \operatorname{rk}(A^*) = \operatorname{rk}(c_1^t, \dots, c_n^t) = \operatorname{rk}(c_1, \dots, c_n) = \dim l(c_1, \dots, c_n) \le \dim U = n-(n-1) = 1.$$

Но $r = n-1$ означава съществуването на $A_{ij} \neq 0$, така че $r^* \ge 1$, а оттам и $r^* = 1$.

Задача 60. (Неравенство на Силвестър - давана на писмен изпит по Алгебра 1 за специалност Компютърни Науки през 2006г.) *За произволни квадратни матрици $A, B \in M_{n\times n}(F)$ да се докаже, че*

$$\operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(B) - n \le \operatorname{rk}(AB) \le \min(\operatorname{rk}(A), \operatorname{rk}(B)).$$

Решение: Нека $e_1, \dots, e_n$ е базис на F^n, $\varphi : F^n \longrightarrow F^n$ е линейният оператор с матрица A спрямо този базис, а $\psi : F^n \longrightarrow F^n$ е линейният оператор с матрица B спрямо този базис. Неравенството на Силвестър е еквивалентно на

$$\operatorname{rk}(\varphi) + \operatorname{rk}(\psi) - n \le \operatorname{rk}(\varphi\psi) \le \min(\operatorname{rk}(\varphi), \operatorname{rk}(\psi)).$$

За удобство да означим $r = \mathrm{rk}(\varphi)$, $s = \mathrm{rk}(\psi)$.

Избираме базис $b_1, \ldots, b_s$ на образа $\mathrm{im}(\psi) = l(\psi(e_1), \ldots, \psi(e_n))$ на ψ. В резултат, $\varphi\psi(e_j) \in l(\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_s))$ за $\forall 1 \leq j \leq n$ и $\mathrm{im}(\varphi\psi) = l(\varphi\psi(e_1), \ldots, \varphi\psi(e_n))$ е подпространство на $W = l(\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_s))$. Оттук,

$$\mathrm{rk}(\varphi\psi) = \dim \mathrm{im}(\varphi\psi) \leq \dim W \leq s = \mathrm{rk}(\psi).$$

За $\mathrm{rk}(\varphi\psi) \leq \mathrm{rk}(\varphi)$ използваме, че $\psi(e_j) \in l(e_1, \ldots, e_n) = F^n$, откъдето $\varphi\psi(e_j) \in l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = \mathrm{im}(\varphi)$ за $\forall 1 \leq j \leq n$. Следователно $\mathrm{im}(\varphi\psi) = l(\varphi\psi(e_1), \ldots, \varphi\psi(e_n))$ е подпространство на $\mathrm{im}(\varphi)$ и

$$\mathrm{rk}(\varphi\psi) = \dim \mathrm{im}(\varphi\psi) \leq \dim \mathrm{im}(\varphi) = \mathrm{rk}(\varphi).$$

За $\mathrm{rk}(\varphi\psi) \geq r + s - n$ разглеждаме φ като линейно изображение

$$\varphi : \mathrm{im}(\psi) = l(\psi(e_1), \ldots, \psi(e_n)) \longrightarrow F^n$$

на образа $\mathrm{im}(\psi) \simeq F^s$ на ψ. Образът на линейния оператор $\varphi\psi : F^n \longrightarrow F^n$ съвпада с образа на $\varphi : \mathrm{im}(\psi) \longrightarrow F^n$, така че

$$\mathrm{rk}(\varphi\psi) = \dim \mathrm{im}(\psi) - \dim \ker \left(\varphi|_{\mathrm{im}(\psi)}\right) = \mathrm{rk}(\psi) - \dim(\ker(\varphi) \cap \mathrm{im}(\psi)).$$

Съгласно $\mathrm{rk}(\varphi) = r$, ядрото $\ker(\varphi)$ на φ е с $\dim \ker(\varphi) = n - r$. Подпространството $\ker(\varphi) \cap \mathrm{im}(\psi)$ на $\ker(\varphi)$ е с размерност $\dim(\ker \cap \mathrm{im}(\psi)) \leq n - r$ и

$$\mathrm{rk}(\varphi\psi) \geq \mathrm{rk}(\psi) - (n - r) = \mathrm{rk}(\psi) + \mathrm{rk}(\varphi) - n.$$

Задача 61. *Сумата на елементите във всеки стълб на матрицата $A \in M_{n\times n}(\mathbb{Q})$ е 1. Да се докаже, че $\lambda = 1$ е характеристичен корен на A.*

Решение: Трябва да проверим, че $\det(A - E_n) = f_A(1) = 0$. Сумата на елементите на всеки стълб на $A - E_n$ е 0, така че сумата на вектор-редовете на $A - E_n$ е наредената n-торка $0_{1\times n}$ и $A - E_n$ е от ранг $\leq n - 1$. Еквивалентно, $\det(A - E_n) = 0$.

Задача 62. *Нека $\varphi : V \longrightarrow V$ е линеен оператор със собствен вектор $\mathcal{O} \neq v \in V$, отговарящ на собствена стойност λ, а $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i \in F[x]$ е полином с коефициенти от F. Да се докаже, че v е собствен вектор за оператора $g(\varphi)$, отговарящ на собствена стойност $g(\lambda)$.*

Решение: Операторът $g(\varphi) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \varphi^i$ с $\varphi^0 = \mathrm{Id}_V$ действа върху v по правилото

$$g(\varphi)(v) = \sum_{i=0}^{n} (a_i \varphi^i)(v) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi^i(v),$$

съгласно определението за сума на линейни оператори и произведение на линеен оператор с $\lambda \in F$. С индукция по $0 \leq i \leq n$ проверяваме, че $\varphi^i(v) = \lambda^i v$, откъдето $g(\varphi)(v) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \lambda^i v = g(\lambda)v$.

Задача 63. *Да се докаже, че:*

(i) ако линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *в евклидовото пространство* $\mathbb{R}^n$ *запазва дължините,*

$$||\varphi(x)|| = \sqrt{(\varphi(x), \varphi(x))} = \sqrt{(x, x)} = ||x|| \quad \textit{за} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

то φ *е ортогонален оператор.*

(ii) ако изображението $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *на евклидовото пространство* $\mathbb{R}^n$ *изпълнява*

$$(\psi(x), \psi(y)) = (x, y) \quad \textit{за} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

то ψ *е линеен оператор, а оттам и ортогонален линеен оператор.*

Решение: (i) От

$$(\varphi(x), \varphi(x)) + (\varphi(x), \varphi(y)) + (\varphi(y), \varphi(x)) + (\varphi(y), \varphi(y)) =$$
$$= (\varphi(x+y), \varphi(x+y)) = (x+y, x+y) =$$
$$(x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)$$

с $(\varphi(x), \varphi(x)) = (x, x)$, $(\varphi(y), \varphi(y)) = (y, y)$ и от симетричността на скаларното произведение в евклидово пространство, $(\varphi(y), \varphi(x)) = (\varphi(x), \varphi(y))$, $(y, x) = (x, y)$ следва

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \quad \text{за} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) За произволни $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ трябва да докажем, че векторът

$$v = \psi(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m) - \lambda_1 \psi(v_1) - \dots - \lambda_m \psi(v_m)$$

е нулев. Скаларният квадрат

$$(v, v) = \left(\psi\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \right), \psi\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j v_j \right) \right) - \left(\psi\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \right), \sum_{j=1}^m \lambda_j \psi(v_j) \right) -$$
$$- \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \psi(v_i), \psi\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j v_j \right) \right) + \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \psi(v_i), \sum_{j=1}^m \lambda_j \psi(v_j) \right) =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^m \lambda_j v_j \right) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\psi\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \right), \psi(v_j) \right) -$$
$$- \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\psi(v_i), \psi\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j v_j \right) \right) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j (\psi(v_i), \psi(v_j)) =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^m \lambda_j v_j \right) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i, v_j \right) -$$
$$- \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(v_i, \sum_{j=1}^m \lambda_j v_j \right) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j (v_i, v_j) = 0.$$

Задача 64. *Нека V е n-мерно евклидово пространство, а U и W са k-мерни подпространства на V. Да се докаже, че:*

(i) съществува ортогонален оператор $\varphi : V \longrightarrow V$ с $\varphi(U) = W$;

(ii) всеки ортогонален оператор $\varphi : V \longrightarrow V$ с $\varphi(U) = W$ изпълнява $\varphi(U^{\perp}) = W^{\perp}$.

Решение: (i) Избираме ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_k$ на U и допълваме до ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ на V. Аналогично, избираме ортонормиран базис $f_1, \ldots, f_k$ на W и допълваме да ортонормиран базис $f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}, \ldots, f_n$ на V. Линейният оператор $\varphi : V \longrightarrow V$ с $\varphi(e_i) = f_i$ за $\forall 1 \leq i \leq n$ е ортогонален, защото трансформира ортонормиран базис на V в ортонормиран базис на V. Още повече,

$$\varphi(U) = \varphi(l(e_1, \ldots, e_k)) = l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)) = l(f_1, \ldots, f_k) = W.$$

(ii) От една страна, ортогоналните допълнения имат една и съща размерност,

$$\dim(U^{\perp}) = \dim(V) - \dim(U) = n - k = \dim(V) - \dim(W) = \dim(W^{\perp}).$$

От друга страна, ортогоналният оператор φ в крайномерно пространство V е обратим, така че $\dim(\varphi(U^{\perp})) = \dim(U^{\perp}) = \dim(W^{\perp})$. Достатъчно е да проверим, че $\varphi(U^{\perp}) \subseteq W^{\perp}$, за да твърдим съвпадението $\varphi(U^{\perp}) = W^{\perp}$. Наистина, $\forall w \in W$ е образ на $u \in U$, $w = \varphi(u)$. За произволно $x \in U^{\perp}$ е в сила $(\varphi(x), w) = (\varphi(x), \varphi(u)) = (x, u) = 0$, така че $\varphi(U^{\perp}) \subseteq W^{\perp}$.

Втори начин, избираме ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_k$ на U и допълваме до ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ на V. Съгласно задача 41, $e_{k+1}, \ldots, e_n$ е ортонормиран базис на $U^{\perp}$. Под действие на ортогоналния оператор φ получаваме ортонормиран базис $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k), \varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)$ на V. Векторите $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)$ образуват ортонормиран базис на W. Отново от Задача 41, $\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)$ е ортонормиран базис на $W^{\perp}$. Накрая,

$$\varphi(U^{\perp}) = \varphi(l(e_{k+1}, \ldots, e_n)) = l(\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)) = W^{\perp}.$$

Приложение 65. *При пресмятане на границата $\lim\limits_{n \to \infty} A^n$ за матрица A се използват характеристичните корени на A.*

Обяснение: Например,

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

се представя като

$$A = TDT^{-1},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Следователно

$$A^n = (TDT^{-1})(TDT^{-1}) \ldots (TDT^{-1}) = TD^nT^{-1},$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-0.2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-0.2)^n & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(-0.2)^n \\ \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-0.2)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-0.2)^n \end{pmatrix}$$

и границата

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Приложение 66. *Решенията на хомогенно линейно диференциално уравнение образуват линейно пространство.*

Например, множеството от решения $y = y(t)$ на диференциалното уравнение

$$y'' + 4y' + y = 0$$

е линейно пространство над $\mathbb{R}$.

Обяснение: Използваме наготово, че множеството $\mathcal{V}$ на функциите $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с поточково определени събиране $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ и умножение с реално число, $(rf)(x) = rf(x)$ е линейно пространство над $\mathbb{R}$. Ще проверим, че множеството $\mathcal{U}$ от решенията $y = y(t)$ на даденото диференциално уравнение е подпространство на $\mathcal{V}$, а оттам и линейно пространство над $\mathbb{R}$. По-точно, за $\forall y_1, y_2 \in U$ и $\forall r \in \mathbb{R}$ е в сила $y_1 + y_2, ry_1 \in \mathcal{U}$ съгласно

$$(y_1 + y_2)'' + 4(y_1 + y_2)' + (y_1 + y_2) = (y_1'' + 4y_1' + y_1) + (y_2'' + 4y_2' + y_2) = 0,$$

$$(ry_1)'' + 4(ry_1)' + ry_1 + r(y_1'' + 4y_1' + y_1) = 0.$$

Приложение 67. *Ако система диференциални уравнения*

$$\left| \begin{array}{rcll} \frac{dx_1}{dt} & = & \alpha x_1 & +\beta x_2 \\ \\ \frac{dx_2}{dt} & = & \gamma x_1 & +\delta x_2 \end{array} \right.$$

има матрица от коефициенти

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = SDS^{-1} = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S^{-1},$$

с прост спектър, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то решенията на системата имат вида

$$x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

$$x_2(t) = C_3 e^{\lambda_1 t} + C_4 e^{\lambda_2 t},$$

за подходящи реални константи $C_1, \ldots, C_4$.

Обяснение: Полагаме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X = SY = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

или въвеждаме нови променливи $Y = S^{-1}X$ чрез обратима матрица $S \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ с постоянни елементи. Тогава от

$$S\frac{dY}{dt} = \frac{dX}{dt} = AX = A(SY) = (AS)Y$$

следва

$$\frac{dY}{dt} = (S^{-1}AS)Y = DY = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \lambda_2 y_2 \end{pmatrix}.$$

Диференциалните уравнения

$$\frac{dy_j}{dt} = \lambda_j y_j$$

се представят във вида

$$\frac{d}{dt}\ln(y_j) = \frac{dy_j}{y_j} = \lambda_j dt$$

и се интегрират до $\ln(y_j) = \lambda_j t + \ln(y_j(0))$ или $y_j(t) = y_j(0)e^{\lambda_j t}$. Решенията на първоначалната система са

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = X = SY = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0)e^{\lambda_1 t} \\ y_2(0)e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= s_{11}y_1(0)e^{\lambda_1 t} + s_{12}y_2(0)e^{\lambda_2 t} \\ x_2(t) &= s_{21}y_1(0)e^{\lambda_1 t} + s_{22}y_2(0)e^{\lambda_2 t} \end{aligned}.$$

Задачите са взети от

1. Божилов А., Кошлуков Пл., Сидеров Пл., "Задачи по алгебра - линейна алгебра Изд. Веди.

2. Kazdan J. L., "Linear Algebra Problems for Math 504-505".

3. Matthews K. R., "Elementary Linear Algebra".