Допълнително задание 1

Втора група

Октомври 2025

Упътване: Дадена е задача за определимост. След нея ще видите няколко предложения, заедно с инструкции.

Задача: За положителни цели числа n, m с $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ означаваме множеството от матрици с n реда и m стълба, чиито елементи са реални числа. Нека $\mathcal{M}^* = \bigcup_{n,m>0} \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ е множеството от всички матрици с реални елементи.

S е структура за език без формално равенство и с нелогически символи — триместните предикатни символи s и p и едноместния — vec. Универсумът на S е $\mathcal{M}^*$, а интерпретацията на предикатните символи е:

$$p^S(A, B, C) \overset{\text{def}}{\iff} \text{умножението на } A \text{ и } B \text{ е дефинирано и } AB = C$$

$$s^S(A, B, C) \overset{\text{def}}{\iff} A \text{ и } B \text{ са с еднакви размерности и } C = A + B$$

$$\text{vec}^S(A) \overset{\text{def}}{\iff} A \text{ е вектор–ред.}$$

Да се определят:

1. $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$.
2. Матриците от $\langle A, B, C \rangle$, които са вектор редове и C е линейна комбинация на A и B;
3. За всяко $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.
4. За всяко $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\{(v_1, v_2, \ldots, v_n) \mid (v_1, v_2, \ldots, v_n) \text{ е базис от вектор–редове в } \mathbb{R}^n\}.$$

1. Обяснете кои от формулите не определят желаното и докажете формално тази/тези, определящи го. Ако няма такива, напишете. Ако $\mathcal{S} \models \varphi_{1,1}[\![A]\!] \longleftrightarrow A \in M_{1,1}(\mathbb{R})$, то:

- $\varphi_{1,1}(x) \stackrel{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} vec(x) \land \exists y(p(x, y, x))$
- $\varphi_{1,1}(x) \stackrel{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} vec(x) \land \exists y(p(x, y, y))$
- $\varphi_{1,1}(x) \stackrel{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} vec(x) \land \forall y(p(x, y, y))$
- $\varphi_{1,1}(x) \stackrel{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} \exists y(p(x, x, y) \land vec(x))$

2. Покажете кой предикат е подходящ за целта, или дефинирайте собствен, ако няма такъв:
Дефинираме помощен двуместен предикат *samesize*, определящ дали две матрици имат еднакви размери :

- $samesize(x, y) \stackrel{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} \forall z(s(x, y, z))$
- $samesize(x, y) \stackrel{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} \exists z(s(x, y, z))$

3. Обяснете кои от формулите не определят желаното и докажете формално тази/тези, определящи го.
Дефинираме φ_{lcomb}, така че $\mathcal{S} \models \varphi_{lcomb}[\![A, B, C]\!] \longleftrightarrow C \in l(A, B)$;

- $\varphi_{lcomb}(x, y, z) \stackrel{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} vec(x) \land s(x, y, z)$
- $\varphi_{lcomb}(x, y, z) \stackrel{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} vec(x) \land vec(y) \land \exists u \exists u_1 \exists v \exists v_1 (p(u, x, u_1) \land p(v, y, v_1) \land s(u_1, v_1, z))$
- $\varphi_{lcomb}(x, y, z) \stackrel{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} \exists u \exists u_1 \exists v \exists v_1 (\varphi_{1,1}(u) \land \varphi_{1,1}(v) \land p(u, x, u_1) \land p(v, y, v_1) \land s(u_1, v_1, z))$

4. Разширете lcomb до $n + 1$ променливи.

5. Обяснете кои от формулите не определят желаното и докажете формално тази/тези, определящи го. Ако няма такива, напишете. Ако $\mathcal{S} \models \varphi_{1,n}[\![A]\!] \longleftrightarrow A \in M_{1,n}(\mathbb{R})$, то:

- Индуктивно по n дефинираме $\varphi_{1,n}$, като ако разполагаме с $\varphi_{1,1}, \varphi_{1,2}, \ldots, \varphi_{1,n-1}$, дефинираме:

$$\varphi_{1,n}(x) \stackrel{\text{деф.}}{\longleftrightarrow} vec(x) \land \bigwedge_{i=1}^{n} \neg\varphi_{1,i}(x)$$

- $\varphi_{1,n}(x) \xleftrightarrow{\text{деф.}} vec(x) \land \exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_n(\varphi_{lcomb}(y_1, y_2, \ldots y_n, x) \land \forall z(vec(z) \implies \varphi_{lcomb}(y_1, y_2, \ldots, y_n, z)))$

- $$\varphi_{1,n}(x) \xleftrightarrow{\text{деф.}} vec(x) \land \bigwedge_{i=1}^{n} \neg\varphi_{1,i}(x) \land$$
$$\land \exists y_1 \ldots \exists y_n \forall z(samesize(z, x) \implies \varphi_{lcomb}(y_1, y_2, \ldots, y_n, z))$$

6. Определете грешката в следната формула и я поправете:

$$\varphi_{basis}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \xleftrightarrow{\text{деф.}} \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_{1,n}(x_i) \land \forall z(\varphi_{1,n}(z) \land \varphi_{lcomb}(x_1, x_2, \ldots, x_n, z))$$