Цветомир Стайков 2 група 1MI0800469

$M_{n,m}(\mathbb{R})$ $\qquad M^* = \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}^+} M_{n,m}(\mathbb{R})$

S език $\mathcal{L} =$ $\qquad$ Света на S е M^*

н $\mathcal{L}$ $s(a,b,c)$

$p(a,b,c)$

$vec(a)$

$p^S(A,B,C) \Leftrightarrow A.B = C$

$s^S(A,B,C) \Leftrightarrow A$ и B еднакъв ред и $A+B=C$

$vec^S(A) \Leftrightarrow A$ е вектор ред

---

1 зад $\quad P(x) \Leftrightarrow vec(x) \wedge \exists y(p(x,y,x))$

$\boxed{\Rightarrow}$ $x \in M_{1,1}(x) \Rightarrow vec(x)$ е вярно, защото може да се разгледа като

$\langle A, B, C \rangle$ ~~вектор сумата~~ α_1, α_2 (~~x_1~~) $\alpha_1 A + \alpha_2 B = C$)

$y \in M_{r,k}(\mathbb{R})$ $\quad (x_1) \cdot \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y \\ \vdots & & \\ y & \dots & y \end{pmatrix} = (x_1) \Rightarrow y = (y_{11}) \in M_{1,1}(\mathbb{R})$

вярно е само при $r = k = 1$

$\boxed{\Leftarrow}$ $vec(x) \Rightarrow x = (x_1 \dots x_n)$ $\qquad (x_1 \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1k} \\ y_{r1} & & y_{rk} \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n)$

$\exists y(p(x,y,x)) \Leftrightarrow x \cdot y = x$

$y \in M_{r,k}(\mathbb{R})$ това е възможно при $k=1$

$\Rightarrow (x_1 \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{r1} \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n)$

Но $x \notin M_{1,1}(\mathbb{R})$ $\quad$ $\Rightarrow$ ~~не~~ е вярно д) $p(x) \Leftrightarrow vec(x) \& \exists y(p(x,y,y))$

$\boxed{\Rightarrow}$ $x \in M_{1,1}(x) \Rightarrow vec(x)$ е изпълнено.

$\exists y \in M_{n,k}(\mathbb{R})$, $x \circ y = (x)\begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1k} \\ & & \vdots \\ y_{n1} & \dots & y_{nk}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1k} \\ y_{n1} & \dots & y_{nk}\end{pmatrix}$ което е възможно при $n=1$

$= y \in M_{1k}(\mathbb{R})$ но това y съществува

$\boxed{\Leftarrow}$ $vec(x) \& \exists y(p(x,y,y)) \Rightarrow x=(x_1\dots x_n)$ и $\exists y \in M_{mk}$

$(x_1\dots x_n)\cdot\begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & \dots & y_{nk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & \dots & y_{nk}\end{pmatrix}$, но това е възможно само при $m=1$. но тогава y отгдено на „=" где е вектор ред $\Rightarrow k=1$ и $n=1$ $\Rightarrow$ Да, правилно е

в) $f_{1,1}(x) \Leftrightarrow vec(x) \& \forall y(p(x,y,y))$ $\rightarrow$ това е невъзможно, защото гласи че $\forall y \in M_{n,k}(q)$ $x.y=y$, $x\in M_{1,1}(\mathbb{R})$.

не е правилно

г) $f_{1,1}(x) \Leftrightarrow \exists y(p(x,x,y) \& vec(x))$

$\boxed{\Rightarrow}$ $x\in M_{1,1}(\mathbb{R})$, $\exists y \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ $p(x,x,y)$, но $x\cdot x=y$ е във вида $(x_1\dots x_n)(x_1\dots x_n)=(y_1\dots y_n)$, но това е вярно при $n=1 \Rightarrow (x_1)(x_1)=(y_1)$ и $y_1\in M_{1,1}(\mathbb{R})$

$vec(x)$ е вярно защото $(x_1)\in M_{1,1}(\mathbb{R})$ може да се гледа като вектор стълб (x_1), $x_1\in\mathbb{R}$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists y: p(x,x,y) \& vec(x)$

$\Rightarrow$ $x\in M_{1,n}(\mathbb{R})$, $x=(x_1\dots x_n)$ и $(x_1\dots x_n).(x_1\dots x_n)=y$

но това е възможно при $n=1$

2 зад

$\Rightarrow x\in M_{1,1}(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ Да правилно е

при

Same size $(x,y) \leftrightarrow \exists z\,(s(x,y,z))$ е подходящ защото:

$\exists x \in M_{n,m}(\mathbb{R}),\ \exists y \in M_{q,k}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ ако x и y са един и същ размер то $n=q$ и $m=k$

при $s(x,y,z) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1,m} \\ \vdots & & \\ x_{n1} & \dots & x_{n,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{n,m} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & \dots & y_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & \dots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \dots & z_{nm} \end{pmatrix}$

но това е изпълнено за някое $z \in M_{n,m}$

Ако е за $\forall z$, то има да е възможно защо z може да е с други размери $(z \in M_{w,e}(\mathbb{R}))$ $w \neq n,\ e \neq m$

3. $P_{comb}(A,B,C) \Leftrightarrow C \in \ell(A,B)$ $\quad C = \alpha_1 A + \alpha_2 B$ $\quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $A,B,C \in M_{1,k}(\mathbb{R})$

Нека за всяка точка $vec(A)$ & $vec(B)$ & $vec(C)$ е изпълнена

1) $P_{comb}(x,y,z) \leftrightarrow vec(x) \wedge s(x,y,z)$

↳ Това значи че $x+y=z$, което не винаги е вярно

⇒ грешно

2) $P_{comb}(x,y,z) \leftrightarrow vec(x)$ & $vec(y)$ & $\exists u \exists u_1 \exists v \exists v_1$
$(p(u,x,u_1)$ & $p(v,y,v_1)$ & $p(u_1,v_1,z))$

↳ Това не е вярно, защото при $z \in \ell(x,y) \Leftrightarrow u.x + v.y = z$ тук u и v са скалари, а в горния код u, v са вектор стълбове $\begin{pmatrix} u \\ \vdots \\ u \end{pmatrix} \cdot (x \dots x) = (u_1 \dots u_1)$ и не винаги като скалари

⇒ грешно

3) $P_{lcomb}(x,y,z) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists u \exists u_1 \exists v \exists v_1 \big(P_{1,1}(u) \wedge P_{1,1}(v)$
$\wedge\, p(u,x,u_1) \wedge p(v,y,v_1) \wedge s(u_1,v_1,z)\big)$

$\boxed{\Rightarrow}$ $P_{lcomb}(x,y,z) \to \alpha_1 x + \alpha_2 y = z$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

тук α_1 и α_2 може да се разгледат като скаларите

$\to \alpha_1, \alpha_2 \in M_{1,1}(\mathbb{R})$. Нека $\alpha_1 = u, \alpha_2 = v$

$\to u.x = u_1$ или $p(u,x,u_1) \to$ това гласи $vec(u_1)$

$\to$ съгласно за $v.y = v_1 \leftrightarrow p(v,y,v_1) \to vec(v_1)$

$\to s(u_1, v_1, z)$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists u \exists u_1 \exists v \exists v_1$ и $P_{1,1}(u) \wedge P_{1,1}(v) \Rightarrow u$ и v може да се гледат като скалари

и $p(u,x,u_1)$ & $p(v,y,v_1)$ е като $u.x = u_1$ и $v.y = v_1$
и това е вярно при $u, v \in M_{1,1}(\mathbb{R})$

като после $s(u_1, v_1, z)$ е $u_1 + v_1 = z$

$\to u_1 + v_1 = u.x + v.y = z$ където $u, v \in M_{1,1}(\mathbb{R})$

така правилно е представена лин. комб.

$\Rightarrow$ 3) е вярно

4. $P_{lcomb}(x_1, x_2 \dots x_n, z) \leftrightarrow vec(x_1) \& \dots \& vec(x_n)$

$\to \underbrace{\alpha_1 x_1}_{\beta_1} + \underbrace{\alpha_2 x_2}_{\beta_2} + \underbrace{\alpha_3 x_3}_{\beta_3} + \dots + \underbrace{\alpha_n x_n}_{\beta_n} = z$

$\to \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \in M_{1,1}(\mathbb{R})$

$\beta_2' \quad \beta_3' \quad \dots \quad \beta_{n-1}'$

Формално: $P_{lcomb}(x_1 \dots x_n, z) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n \exists \beta_1 \dots \beta_n \exists \beta_2' \dots \beta_{n-1}'$

$\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} P_{1,1}(\alpha_i) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} p(\alpha_i, x_i, \beta_i)$

$\wedge\, s(\beta_1, \beta_2, \beta_2') \wedge \bigwedge_{i=3}^{n-1} s(\beta_{i-1}', \beta_i, \beta_i')$

$\wedge\, s(\beta_{n-1}', \beta_n, z)\Big)$

5. $S \models \varphi_{1,n}[\![A]\!] \Longleftrightarrow A \in M_{1,n}(\mathbb{R})$

1) индукция по n за $\varphi_{1,n}$ ка имаме $\varphi_{1,1}, \varphi_{1,2} \dots \varphi_{1,n-1}$

$\varphi_{1,n}(x) \Longleftrightarrow vec(x) \land \bigwedge_{i=1}^{n} \neg \varphi_{1,i}(x)$ ~~не~~ е възможно защото имаме противоречие

„ $\varphi_{1,n}(x) \Longleftrightarrow \dots \land \neg \varphi_{1,n}(x) \land \dots$ "

→ не е вярно

2) $\varphi_{1,n}(x) \Longleftrightarrow vec(x) \land \exists y_1 \exists y_2 \dots \exists y_n [\varphi_{lcomb}(y_1 \dots y_n, x)) \land \forall z (vec(z) \Rightarrow \varphi_{lcomb}(y_1 \dots y_n, z))]$

тук има проблем че $\forall z$ ако е $vec(z)$ то може да се представи от n на брой променливи.

Ако $n = 2$ и $\forall z \in M_{1,50}(\mathbb{R})$ може да се представи, което е невъзможно → не е вярно

3) $\varphi_{1,n}(x) \Longleftrightarrow vec(x) \land \bigwedge_{i=1}^{n} \neg \varphi_{1,i}(x) \land$

$\forall y_1 \dots \forall y_n \forall z (samesize(x,y) \Rightarrow \varphi_{lcomb}(y_1 \dots y_n, z))$

тук пак имаме противоречие $\varphi_{1,n}(x) \Longleftrightarrow \neg \varphi_{1,n}(x)$

⇒ не е вярно

Друг вариант Нека имаме $\varphi_{1,1} \dots \varphi_{1,n-1}$

$\varphi_{1,n}(x) \Longleftrightarrow vec(x) \land \bigwedge_{i=1}^{n-1} \neg \varphi_{1,i}(x)$

това е нужно

$\land \exists y_1 \dots \exists y_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \neg \varphi_{lcomb}(y_1 \dots y_{i-1}, y_{i+1}, \dots y_n, y_i) \right)$

$\bigwedge_{i=1}^{n} samesize(y_i, x) \land \varphi_{lcomb}(y_1 \dots y_n, x)$

$\land \forall z (samesize(z, x) \Rightarrow \varphi_{lcomb}(y_1 \dots y_n, z))$

Ако може да я имплементираме зад. 5 за упр

$\boxed{\Rightarrow}$ $f_{1,n}(x) \to vec(x)$ и $\neg P_{1,i}(x)$ за $i=1\ldots n-1$ понеже е $x \in M_{1,n}(\mathbb{R})$

$\exists\, y_1 \ldots y_n$ т.ч. $samesize(y_i, x)$ за $i=1\ldots n$

от Основната лема $\Rightarrow$ $Plcomb(y_1 \ldots y_n, x)$

$\Rightarrow \forall z$ което $samesize(z,x) \Rightarrow Plcomb(y_1 \ldots y_n, z)$

$\boxed{\Leftarrow}$ x е вектор-ред с $x=(x_1 \ldots x_k)$ $k > n-1$

понеже $\exists\, y_1 \ldots y_n$ и $samesize(y_i, x)$ за $i=1\ldots n$

и $x \in l(y_1 \ldots y_n)$

и ако $samesize(z,x)$ за $\forall z \in M_{1k}(\mathbb{R}) \to z \in l(y_1 \ldots y_n)$

$\Rightarrow M_{1,k}(\mathbb{R}) \subseteq l(y_1 \ldots y_n)$

и $samesize(y_i,x) \wedge samesize(z,x) \Rightarrow y_i \in M_{1,k}$ за $i=1\ldots n$

$\Rightarrow l(y_1 \ldots y_n) \subseteq M_{1k}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow l(y_1 \ldots y_n) = M_{1k}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow x \in M_{1k}(\mathbb{R})$

6 зад

$$Basis(x_1 \ldots x_n) \leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} P_{1n}(x_i) \wedge \forall z \big(P_{1n}(z) \wedge Plcomb(x_1 \ldots x_n, z)\big)$$

Тук грешката е в конюнкцията

$$P_{1n}(z) \Rightarrow Plcomb(x_1 \ldots x_n, z))$$

защото иначе значи че $\forall z \in M^* \to z \in M_{1,n}$ и в лин. обв. на $x_1 \ldots x_n$