1 Критерий на Раабе - Дюамел

Чрез сравнение с дзета функция може да се установи следният критерий на Раабе - Дюамел:

Критерий 1.1 (критерий на Раабе - Дюамел) *Ако от известно място $n = N$ нататък $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geq q > 1$, където q е константа, то редът с общ член $u_n > 0$ е сходящ.*

Ако, обратно, $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leq 1$, то редът е разходящ.

Доказателство: Наистина, ако от известно място $n = N$ нататък

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \quad > \quad q > 1,$$

то

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \quad > \quad 1 + \frac{q}{n}.$$

Ще покажем, че може да изберем едно положително число δ, така че щом $\mu = 1 + \delta < q$, то от известно място нататък

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \quad > \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\delta}.$$

За тази цел достатъчно е да установим, че

$$1 + \frac{q}{n} \quad > \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\delta}$$

или

$$\frac{q}{n} - \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\delta} - 1\right] \quad > \quad 0.$$

Но главната част на лявата страна на последното равенство е $\frac{q - (1 + \delta)}{n}$, която при достатъчно голямо n определя знака на неравенството.

Без ограничение на общността можем да приемем, че неравенството

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \quad > \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\delta} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\mu}$$

остава в сила още за първите членове. Тогава имаме

$$
\begin{aligned}
1^{\mu}u_1 &> 2^{\mu}u_2,\\
2^{\mu}u_2 &> 3^{\mu}u_3,\\
\dots\ \dots &\ \dots,\\
(n-1)^{\mu}u_{n-1} &> n^{\mu}u_n.
\end{aligned}
$$

Като умножим почленно неравенствата, намираме

$$
u_1 > n^{\mu}u_n \quad \text{или} \quad u_n < u_1 n^{\mu},
$$

което показва, че общият член е по-голям от общия член на обобщения хармоничен ред, който е сходящ при $\mu > 1$.

С това е доказана първата част на критерия.

За да докажем втората част на критерия, виждаме, че от

$$
n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \quad \le \quad 1
$$

следват неравенствата

$$
\begin{aligned}
1u_1 &\le 2u_2,\\
2u_2 &\le 3u_3,\\
\dots\ \dots &\ \dots,\\
(n-1)u_{n-1} &> nu_n,
\end{aligned}
$$

откъдето чрез умножение намираме

$$
u_n \quad \ge \quad \frac{1}{n},
$$

което показва, че редът е мажорантен на хармоничния ред. ■

Следствие 1.1 (гранична форма на критерия на Раабе - Дюамел) *За да приложим критерия на Раабе - Дюамел, най-напред търсим дали* $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ *има граница при* $n \to \infty$. *В този случай критерият ни дава следните заключения:*

1. *Ако* $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \to \ell > 1$, *редът е сходящ.*
2. *Ако* $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \to \ell < 1$, *редът е разходящ.*
3. *Ако* $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \to 1$, *то критерият на Раабе - Дюамел не дава отговор.*

Забележка 1.1 *Критерият на Раабе - Дюамел е по-силен от този на Даламбер, защото ако* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *съществува, то веднага се вижда, че и* $\lim\limits_{n\to\infty} n\alpha_n$ *също съществува (тук се включват и символите* $\pm\infty$ *като граница). При това, ако* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} n\alpha_n = +\infty$ *и редът е сходящ и по двата критерия и ако* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} n\alpha_n = -\infty$ *и редът е разходящ и по двата критерия. Следователно за всички останали случаи на* $\lim\limits_{n\to\infty} n\alpha_n = \ell$ *(без* $\ell = 1$*) освен* $\pm\infty$ *критерият на Раабе - Дюамел дава резултат, а критерият на Даламбер не дава такъв. Затова, когато не може да се приложи критерият на Даламбер, най-често се прилага критерият на Раабе - Дюамел, особено ако е неприложим интегралният критерий на Коши, който ще разгледаме в следващия раздел.*

Например за реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!}{(2n)!}.\dfrac{1}{2n+1}$ критерият на Даламбер е неприложим, понеже

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(2n+1)!}{(2n+2)!}.\dfrac{1}{2n+3}}{\dfrac{(2n-1)!}{(2n)!}.\dfrac{1}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(2n+1)!}{(2n+2)(2n+1)!}.\dfrac{1}{2n+3}}{\dfrac{(2n-1)!}{2n(2n-1)!}.\dfrac{1}{2n+1}} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2n+2}.\dfrac{1}{2n+3}}{\dfrac{1}{2n}.\dfrac{1}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2n.n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(2+\dfrac{2}{n}\right).n\left(2+\dfrac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{\left(2+\dfrac{2}{n}\right)\left(2+\dfrac{3}{n}\right)} = 1.
\end{aligned}$$

Обаче съгласно критерия на Раабе - Дюамел имаме

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right] &= \lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\frac{\dfrac{(2n-1)!}{(2n)!}.\dfrac{1}{2n+1}}{\dfrac{(2n+1)!}{(2n+2)!}.\dfrac{1}{2n+3}}-1\right]\right\} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\frac{\dfrac{(2n-1)!}{2n(2n-1)!}.\dfrac{1}{2n+1}}{\dfrac{(2n+1)!}{(2n+2)(2n+1)!}.\dfrac{1}{2n+3}}-1\right]\right\} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\frac{\dfrac{1}{2n}.\dfrac{1}{2n+1}}{\dfrac{1}{2n+2}.\dfrac{1}{2n+3}}-1\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right] &= \lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\frac{(2n+2)(2n+3)}{2n(2n+1)}-1\right]\right\} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[n.\frac{(2n+2)(2n+3)-2n(2n+1)}{2n(2n+1)}\right] = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[n.\frac{4n^2+6n+4n+6-4n^2-2n}{2n(2n+1)}\right] = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[n.\frac{8n+6}{2n(2n+1)}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[n.\frac{n\left(8+\frac{6}{n}\right)}{2n.n\left(2+\frac{1}{n}\right)}\right] = \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{6}{n}}{2\left(2+\frac{1}{n}\right)} = 2 > 1,
\end{aligned}$$

което показва, че редът е сходящ.

2 Примери за изследване за сходимост на редове с помощта на критерия на Раабе - Дюамел

Пример 2.1 *Като се използва критерия на Раабе - Дюамел, изследвайте за сходимост реда* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!(n+1)}$.

Решение: Ще приложим граничната форма на критерия на Раабе - Дюамел:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right] &= \lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\frac{\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!(n+1)}}{\frac{4^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n+2)!(n+2)}}-1\right]\right\} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\frac{\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!(n+1)}}{\frac{4^n.4^1[(n+1)n!]^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!(n+2)}}-1\right]\right\} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\frac{\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!(n+1)}}{\frac{4^n.4^1(n+1)^2(n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!(n+2)}}-1\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right] &= \lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)(n+2)}}-1\right]\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\frac{(2n+2)(2n+1)(n+2)}{4(n+1)^3}-1\right]\right\} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[n.\frac{(2n+2)(2n+1)(n+2)-4(n+1)^3}{4(n+1)^3}\right] = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[n.\frac{\left(4n^2+2n+4n+2\right)(n+2)-4\left(n^3+3n^2+3n+1\right)}{4\left(n^3+3n^2+3n+1\right)}\right] = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[n.\frac{\left(4n^2+6n+2\right)(n+2)-4n^3-12n^2-12n-4}{4\left(n^3+3n^2+3n+1\right)}\right] = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[n.\frac{4n^3+8n^2+6n^2+12n+2n+4-4n^3-12n^2-12n-4}{4\left(n^3+3n^2+3n+1\right)}\right] = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[n.\frac{2n^2+2n}{4\left(n^3+3n^2+3n+1\right)}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[n.\frac{n^2\left(2+\dfrac{2}{n}\right)}{4n^3\left(1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right)}\right] = \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{2}{n}}{4\left(1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right)} = \frac{1}{2} < 1.
\end{aligned}
$$

Следователно даденият ред е разходящ. ■

Пример 2.2 *Като се използва критерия на Раабе - Дюамел, изследвайте за сходимост реда* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}, a>0.$

Решение: Ще приложим граничната форма на критерия на Раабе - Дюамел:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right] &= \lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\frac{\dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}}{\dfrac{(n+1)!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)(a+n+1)}}-1\right]\right\} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\frac{\dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}}{\dfrac{(n+1)n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)(a+n+1)}}-1\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right] &= \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{1}{\dfrac{n+1}{a+n+1}}-1\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a+n+1}{n+1}-1\right)\right]= \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(n.\frac{a+n+1-n-1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n.\frac{a}{n+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[n.\frac{a}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{1+\dfrac{1}{n}}=a.
\end{aligned}
$$

- Ако $a<1$, то даденият ред е разходящ.
- Ако $a>1$, то даденият ред е сходящ.
- Ако $a=1$, то граничната форма на критерия на Раабе - Дюамел не дава отговор. Но тъй като

$$
u_n \;=\; \frac{n!}{(1+1)(1+2)\dots(1+n)}=\frac{n\dots 3.2.1}{2.3\dots n(1+n)}=\frac{1}{n+1},
$$

(това е хармоничният ред без първия член) (вижте публикацията „Изследване за сходимост на редове с принципите за сравняване“), то даденият ред е разходящ.

■

Пример 2.3 *Като се използва критерия на Раабе - Дюамел, изследвайте за сходимост реда* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(2n-1)!!]^2}{n!3.7.11\dots(4n-1)}$.

Решение: Ще приложим граничната форма на критерия на Раабе - Дюамел:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right] &= \lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\frac{\dfrac{[(2n-1)!!]^2}{n!3.7.11\dots(4n-1)}}{\dfrac{[(2n+1)!!]^2}{(n+1)!3.7.11\dots(4n-1)(4n+3)}}-1\right]\right\}= \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\frac{\dfrac{[(2n-1)!!]^2}{n!3.7.11\dots(4n-1)}}{\dfrac{[(2n+1)(2n-1)!!]^2}{(n+1)n!3.7.11\dots(4n-1)(4n+3)}}-1\right]\right\}= \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\frac{1}{\dfrac{(2n+1)^2}{(n+1)(4n+3)}}-1\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right] &= \lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\frac{(n+1)(4n+3)}{(2n+1)^2}-1\right]\right\}= \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[n.\frac{(n+1)(4n+3)-(2n+1)^2}{(2n+1)^2}\right]= \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[n.\frac{4n^2+3n+4n+3-4n^2-4n-1}{4n^2+4n+1}\right]= \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[n.\frac{3n+2}{4n^2+4n+1}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[n.\frac{n\left(3+\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right]= \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{3}{4}<1.
\end{aligned}$$

Следователно даденият ред е разходящ. ■

Пример 2.4 *Като се използва критерия на Раабе - Дюамел, изследвайте за сходимост реда* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)\dots\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)}$.

Решение: Ще приложим граничната форма на критерия на Раабе - Дюамел:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right] &= \lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\frac{\dfrac{1}{\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)\dots\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)}}{\dfrac{1}{\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)\dots\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(1+\sin\frac{\pi}{n+1}\right)}}-1\right]\right\}= \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{1}{\dfrac{1}{1+\sin\frac{\pi}{n+1}}}-1\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[n\left(1+\sin\frac{\pi}{n+1}-1\right)\right]= \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{\pi}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n.\frac{\pi}{n+1}.\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\frac{\pi}{n+1}}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right] &= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi n}{n+1}.\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi}{n+1}}{\dfrac{\pi}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi n}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}.1 = \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{1+\dfrac{1}{n}} = \pi > 1.
\end{aligned}
$$

Следователно дадeният ред е сходящ. ■

Пример 2.5 *Като се използва критерия на Раабе - Дюамел, изследвайте за сходимост реда* $\sum_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}$.

Решение: Ще приложим граничната форма на критерия на Раабе - Дюамел:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right] &= \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}}{a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}}-1\right)\right] = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}}{a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}.a^{\frac{1}{n+1}}}-1\right)\right] = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{n+1}}}-1\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left(n.\frac{1-a^{\frac{1}{n+1}}}{a^{\frac{1}{n+1}}}\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(n.\frac{1}{n+1}.\frac{1-a^{\frac{1}{n+1}}}{\dfrac{1}{n+1}.a^{\frac{1}{n+1}}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}.\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^{\frac{1}{n+1}}}{\dfrac{1}{n+1}.a^{\frac{1}{n+1}}} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}.\lim_{z\to 0}\frac{1-a^z}{z.a^z} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \\
&= 1.\lim_{z\to 0}\frac{-a^z\ln a}{a^z+z.a^z\ln z} = -\ln a = \ln\frac{1}{a}.
\end{aligned}
$$

- Ако $\ln\dfrac{1}{a} < 1$, т.е. при $\dfrac{1}{a} < e$, или $a > \dfrac{1}{e}$, то дадeният ред е разходящ.
- Ако $\ln\dfrac{1}{a} > 1$, т.е. при $\dfrac{1}{a} > e$, или $a < \dfrac{1}{e}$, то дадeният ред е сходящ.
- Ако $a = \dfrac{1}{e}$, то граничната форма на критерия на Раабе - Дюамел не дава отговор.

■

Пример 2.6 *Като се използва критерия на Раабе - Дюамел, изследвайте за сходимост реда* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2\ln 3\ldots\ln(n+1)}{\ln(2+a)\ln(3+a)\ldots\ln(n+1+a)}, a>0.$

Решение: Ще приложим граничната форма на критерия на Раабе - Дюамел:

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\frac{\dfrac{\ln 2\ln 3\ldots\ln(n+1)}{\ln(2+a)\ln(3+a)\ldots\ln(n+1+a)}}{\dfrac{\ln 2\ln 3\ldots\ln(n+1)\ln(n+2)}{\ln(2+a)\ln(3+a)\ldots\ln(n+1+a)\ln(n+2+a)}}-1\right]\right\}=$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\frac{1}{\dfrac{\ln(n+2)}{\ln(n+2+a)}}-1\right]\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\frac{\ln(n+2+a)}{\ln(n+2)}-1\right]\right\}=$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[n.\frac{\ln(n+2+a)-\ln(n+2)}{\ln(n+2)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[n.\frac{\ln\dfrac{n+2+a}{n+2}}{\ln(n+2)}\right]=$$

$$= \lim_{n\to\infty}\ln\frac{n+2+a}{n+2}.\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln(n+2)}=\ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+2+a}{n+2}\right).\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln(n+2)}=$$

$$= \ln\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{a}{n}\right)}{n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}\right].\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln(n+2)}=$$

$$= \ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{a}{n}}{1+\dfrac{2}{n}}\right).\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln(n+2)}=\ln 1.\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln(n+2)}=0<1.$$

Следователно даденият ред е разходящ. ■

Пример 2.7 *Като се използва критерия на Раабе - Дюамел, изследвайте за сходимост реда* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{e}\right)^n\frac{1}{n!}.$

Решение: Както видяхме в предишна публикация (вижте публикацията „Изследване за сходимост на редове с критерия на Даламбер“), критерият на Даламбер не дава отговор в този случай.

Тъй като

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\left(\dfrac{n}{e}\right)^n.\dfrac{1}{n!}}{\left(\dfrac{n+1}{e}\right)^{n+1}.\dfrac{1}{(n+1)!}}=\frac{\dfrac{n^n}{e^n}.\dfrac{1}{n!}}{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}.\dfrac{1}{(n+1)n!}}=\frac{\dfrac{n^n}{e^n}.\dfrac{1}{n!}}{\dfrac{(n+1)^n.(n+1)^1}{e^n.e^1}.\dfrac{1}{(n+1)n!}}$$

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{u_{n+1}} &= \frac{n^n}{\frac{(n+1)^n}{e}} = \frac{e}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{e}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{e}{e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}} = \\ &= \frac{e}{e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}} = e^{1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\end{aligned}$$

и $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$ при $x \to 0$, то при $n \to \infty$

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{u_{n+1}} &= e^{1-n\left\{\frac{1}{n}-\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2}+o\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2\right]\right\}} = e^{1-n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]} = e^{1-1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = \\ &= e^{\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Тогава, като приложим граничната форма на критерия на Раабе - Дюамел, имаме

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right] &= \lim_{n\to\infty}\left\{n\left[1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]\right\} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}+o(1)\right] = \frac{1}{2} < 1.\end{aligned}$$

Следователно дадeният ред е разходящ. ■

2.1 Задачи за упражнение

1. Като се използва критерия на Раабе - Дюамел, изследвайте за сходимост реда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$.

   Отговор: Сходящ. $\blacksquare$

2. Като се използва критерия на Раабе - Дюамел, изследвайте за сходимост реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{\left(2+\sqrt{1}\right)\ldots\left(2+\sqrt{n}\right)}$.

   Отговор: Сходящ. $\blacksquare$

3. Като се използва критерия на Раабе - Дюамел, изследвайте за сходимост реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^n}{n^{n+\alpha}}$.

   Отговор: Разходящ. $\blacksquare$

4. Като се използва критерия на Раабе - Дюамел, изследвайте за сходимост реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

   Отговор: Разходящ. $\blacksquare$

5. Като се използва критерия на Раабе - Дюамел, изследвайте за сходимост реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!.2^n}{3.7\ldots(4n-1)}$.

   Отговор: Разходящ. $\blacksquare$

6. Като се използва критерия на Раабе - Дюамел, изследвайте за сходимост реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 . \frac{1}{n}$.

   Отговор: Сходящ. $\blacksquare$

Литература

[1] Г. Брадистилов Висша математика, част III, Държавно издателство „Техника“, София, 1958

[2] В. Димова-Нанчева, Попов В., Михов И., Караджов Г., Витанов А., Тодорова С. Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика, част IV, Държавно издателство „Техника“, София, 1967

[3] Е. Любенова, Недевски П., Николов К., Николова Л., Попов В. Ръководство по математически анализ Първа част, Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 1998