22.ОСТ. 2025г.

Упр.: ЛП

I. S.

① $A = \langle \mathbb{N}, p^A \rangle$ $\qquad \langle a,b,c \rangle \in p^A \leftrightarrow a+b=c$

Определение: 1) $\{0\}$ 2) $\{(m,n) \mid m<n\}$
3) $\{n\}$ → за произв. n
4) $\{m \mid 2/m\}$ //m-четно
5) $\{m \mid m \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 5)\}$

1) $\varphi_0(x) \leftrightharpoons \forall y(p(x,y,y))$
1') $\varphi_0(x) \leftrightharpoons p(x,x,x)$

2) $\varphi_<(m,n) \leftrightharpoons \exists z(p(m,z,n) \& \neg\varphi_0(z))$

3) $\varphi_1(x) \leftrightharpoons \exists y \forall z(\varphi_0(y) \Rightarrow \varphi_<(y,x) \wedge \neg\varphi_0(z) \wedge$

$\leftrightharpoons \forall y($

3.1) $\varphi_=(x,y) \leftrightharpoons \forall z \forall t(p(x,z,t) \Leftrightarrow p(y,z,t))$

3.2) $\varphi_1(x) \leftrightharpoons \forall y(\neg\varphi_0(y) \& \neg\varphi_=(x,y) \Rightarrow \varphi_<(x,y))$

3.3) $\varphi_1(x) \leftrightharpoons \forall y(\varphi_<(y,x) \Rightarrow \varphi_0(y)) \& \neg\varphi_0(x)$

$n=2 \Leftrightarrow$ има k, $k=1$, $k+k=2$

$\vdots$

$n=5 \Leftrightarrow$ има k_1, k_2; $k_1=5-1$, $k_2=1$, и $k_1+k_2=5.1+1=5$

$\varphi_2(x) \sim \varphi_n(x)$ (индукция)

3.4) $\varphi_{n+1}(x) \leftrightharpoons \exists y \exists z(\varphi_n(y) \& \varphi_1(z) \& p(y,z,x))$

$A \models \varphi(x,y,z)[a,b,c] \Leftrightarrow c=a-b$

$\varphi_-(x,y,z) \leftrightharpoons \varphi(y,z,x) \qquad z=x-y \Leftrightarrow x=z+y$

4) $2 \mid n \Leftrightarrow n = k + k$ за някое k

$P_{четно}(n) \rightleftharpoons \exists k (p(k, k, n))$

5) $n \equiv 3(5)$ $\quad P_{\equiv 3(5)}(x) \rightleftharpoons P_3(x) \vee P_8(x) \ldots$

до безкрай

$\Rightarrow$ не може така

$\downarrow$

$m = n + 3$

$$P_{\equiv 3(5)}(x) \rightleftharpoons \exists y \exists z (p(y, z, x) \,\&\, P_3(z) \,\&\, P_{дели\ се\ на\ 5}(y))$$

$$P_{дели\ се\ на\ 5}(x) \rightleftharpoons \exists y \exists z \exists t (p(y, y, z) \,\&\, p(z, y, t) \,\&\, p(z, t, x))$$

$$\left.\begin{array}{l} z = 2y \\ t = z + y = 3y \end{array}\right\} x = 2y + 3y = 5y$$

Неопределимост

$M = \langle \mathbb{N}, p^M \rangle \quad (a, b) \in p^M \Leftrightarrow a < b$

Интересува ни дали може да опр A?

Има ли автоморфизъм (изобразява всс свойства), такова че обектите (име) след прилагане се пренасяват не се запазват

$h : M \to M$ // h-биекция

$\langle a, b \rangle \in p^M \Leftrightarrow \langle h(a), h(b) \rangle \in p^M$

Пр. $\langle$ Прави врав, $\perp$ $\rangle$

$a \perp b \leftrightarrow$ а и в сключват 90°

може ли да определим, че 2 прави са строго успоредни?

(предния не и решихме с тази техника)

Друг Пример: $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ $\{0\}$ определено ли е?

Доп. че има $P_0(x)$: $\langle \mathbb{Z}, < \rangle \models P_0[\![a]\!] \leftrightarrow a = 0$

определящо, че едно число е 0

$h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$a < b \leftrightarrow h(a) < h(b)$

биекция (стр.) сл. $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$

сл. $\langle \mathbb{Z}, < \rangle \models P[a_1, a_2 .. a_n] \leftrightarrow \langle \mathbb{Z}, < \rangle \models P[\![h(a_1), h(a_2) .. h(a_n)]\!]$

Автоморфизми

$\hookrightarrow h(x) = x + 1$

- $a < b \leftrightarrow h(a) < h(b)$ (морфизъм)
- биективно е
- $h(0) \neq 0$

$\langle \mathbb{Z}, < \rangle \models P_0[\![0]\!]$

$\leftrightarrow \langle \mathbb{Z}, < \rangle \models P_0[\![h(0)]\!]$

$\overset{\shortparallel}{1}$

$f(x) = -x$

$a < b \overset{?}{\longleftrightarrow} f(a) < f(b)$

не обърна нулата и не е вярно

$f(x) = -\frac{1}{x}, x \neq 0$

Ако $\langle \mathbb{Z}, < \rangle \models P_n[\![n]\!] \leftrightarrow \langle \mathbb{Z}, < \rangle \models P_n[\![h(n)]\!]$

② Разглеждаме: $\mathcal{Z} = \langle \mathbb{Z}, p^{\mathcal{Z}} \rangle$

$\mathcal{Q} = \langle \mathbb{Q}, p^{\mathcal{Q}} \rangle$

$\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, p^{\mathcal{R}} \rangle$

където $p^{A}(a,b,c) \Leftrightarrow a.b = c$

Док. че $\{1\}$ $\{0\}$ $\{-1\}$ са едноб. опред. м-ва

$\mathbb{Q}$ $a.b = c$

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \forall y (p(y,x,y))$ $\qquad x.y = y$ за вс y

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \forall y (p(x,y,x))$

$(-1)^2 = 1 \,\&\, (-1) \neq 1$ $\qquad \varphi_{-1}(x) \leftrightharpoons \exists y (p(x,x,y) \,\&\, \varphi_1(y) \,\&\, \neg \varphi_1(x))$

$g: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ $\qquad g(x) = \frac{1}{x}$, ако $x \neq 0$

$g(0) = 0$

Само $\{1\}$, $\{-1\}$, $\{0\}$ са инварианти

Това не док, че $\{2, \frac{1}{2}\}$ е неопределимо

$h(2) = 3$

$h(3) = 2$

$h(4) = h(2).h(2) = 3^2 = 9$

$h(9) = 4$

$h(108) = h(3^3.2^2) =$

$= h(2^3.3^2) = 72$

$h(6) = 6$

$h(-2) = -3$

$h\left(\frac{4}{9}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$

$h(m.n) = h(m).h(n)$

$m = 2^{\alpha_1}.2^{\alpha_2}.A_m$

$n = 2^{\beta_1}.3^{\beta_2}.A_n$

$h(m.n) = h(2^{\alpha_1+\beta_1}.3^{\alpha_2+\beta_2}.A_m.A_n) =$

$= 3^{\alpha_1+\beta_1}.2^{\alpha_2+\beta_2}.A_n.A_n$

$h(m).h(n) = 3^{\alpha_1}.2^{\alpha_1}.A_m.3^{\beta_1}.2^{\beta_2}.A_n$

$\{2, \frac{1}{2}\} \xrightarrow{h} \{3, \frac{1}{3}\}$

$\{3, 6, 2, 5, 10, 15\}$

$\downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow$

$\cancel{2, 3}$ $\{2, 6, 3, 5, 15, 10\}$

$\frac{2, 101}{107, 101}$ $\{3, 303\}$...

не е в м-вото

Да доп. че има $A \subseteq \mathbb{Z}$ което е определимо и $A \subseteq \{0, 1, -1\}$

Знаем има $k \in \mathbb{Z}$, $|k| > 1$ и $k \in A$, т.е.: k има прост делител p. Също така има просто q; q^+ никой един елем. A

$h(s2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdots p^{\alpha_p} \cdots q^{\alpha_q} \cdots) = s2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdots q^{\alpha_p} \cdots p^{\alpha_q} \cdots$ $s \in \{+, -\}$

h е автоморфизъм в $\langle \mathbb{Z}, \rho^A \rangle \Rightarrow h[A]$ трябва да е определимо със същата ф-ла, т.е. A трябва да е непроменено

Но $h(k) \notin A$, защото $q | h(k)$

3 час

$S = \langle E_2, \rho^S \rangle$

$\llcorner$ точки в Евклид. равнина

$\rho^S(A, B, C, D) \Longleftrightarrow AB$ и CD имат обща точка

Да опр. кои са определими:

а) $\{ \langle A, B, C, D \rangle \mid$ отс AB се съдържа в $CD \}$

б) $\{ \langle A, B, C, D \rangle \mid$ правите AB и CD са усп. $\}$

в) $\{ \langle A, B, C \rangle \mid C$ лежи на отс. $AB \}$

г) $\{ \langle A, B, C, D \rangle \mid ABCD$ - успоредник $\}$

д) $\{ \langle A, B, C \rangle \mid C$ е среда на $AB \}$

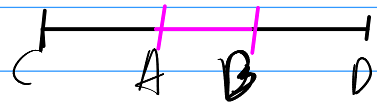
е) $\{ \langle A, B, C \rangle \mid \measuredangle ABC = 60^\circ \}$

? защо $\in$ не $\exists$ защото не е логическа операция?

a) $P_{\subseteq}(x,y,z,t) \leftrightharpoons \forall u \forall v \, (p(u,v,x,y) \Rightarrow p(u,v,z,t))$

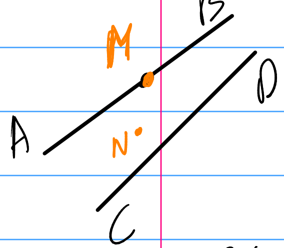
a2) $P_{\subseteq}(x,y,z,t) \leftrightharpoons p(z,t,x,x) \,\&\, p(z,t,y,y)$

d) $AB \subseteq CD$



ясно е, че ако $M \in AB$
$\Rightarrow M \in CD \; (M = EF \cap AB)$

$AB \not\subseteq CD \to$ има точка M: $M \in AB \,\&\, M \notin CD$.

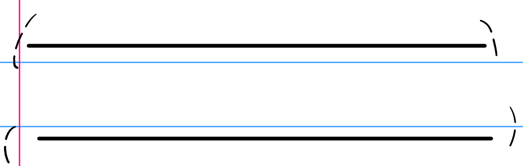


Тогава $MM \cap AB$, но $MM \not\cap CD$.
има друга т. N: $MN \cap AB = M$, но $MN \not\cap CD$

$S \models P_{\subseteq}[\![A,B,C,D]\!] \Leftrightarrow$ за $\forall F$ и E ако $p(F,E,A,B)$, то $p(F,E,C,D)$

$AB \| CD \Leftrightarrow$ нямат обща точка и както и да ги продължим, новите отсечки нямат обща точка

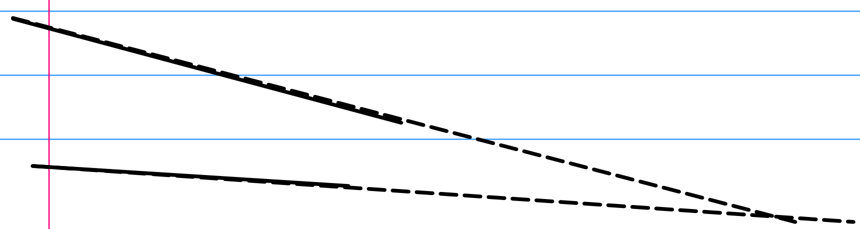
$P_{\|}(x,y,z,t) \leftrightharpoons \neg p(x,y,z,t) \,\&\, \forall x_1, \forall y_1, \forall z_1, \forall t_1$
$(P_{\subseteq}(x,y,x_1,y_1) \,\&\, P_{\subseteq}(z,t,z_1,t_1)$
$\Rightarrow \neg p(x_1,y_1,t_1,z_1))$



$\vee \, (p(x,y,z,t) \,\&\, p(x,t,y,z))$

$\vee \, (p(x,z,y,t) \,\&\, p(x,t,y,z))$

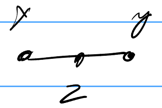
ясно



Решение: $P_{\|}(x,y,z,t) \leftrightharpoons \neg\exists u\, \neg\exists v\,(P_{\leq}(x,y,v,t)$
$\& \; p(u,v,z,t))$

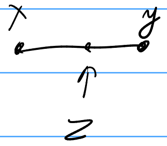
$\& \; \neg\exists u\, \neg\exists v\,(P_{\leq}(z,t,u,v) \;\&\; p(x,y,u,v))$

в) $P_{\in}(x,y,z) \leftrightharpoons \neg p(x,x,z,z) \;\&$
$\neg p(y,y,z,z) \;\&$
$p(x,y,z,z)$



Изподем случай
$AA = \{A\}$?
$AA = \emptyset$

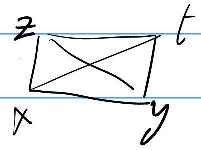
$P_{\in}(x,y,z) \leftrightharpoons P_{\leq}(x,z,x,y) \;\&$
$P_{\leq}(z,y,x,y) \;\&$
$\neg P_{=}(x,z) \;\&\; \neg P_{=}(y,z)$



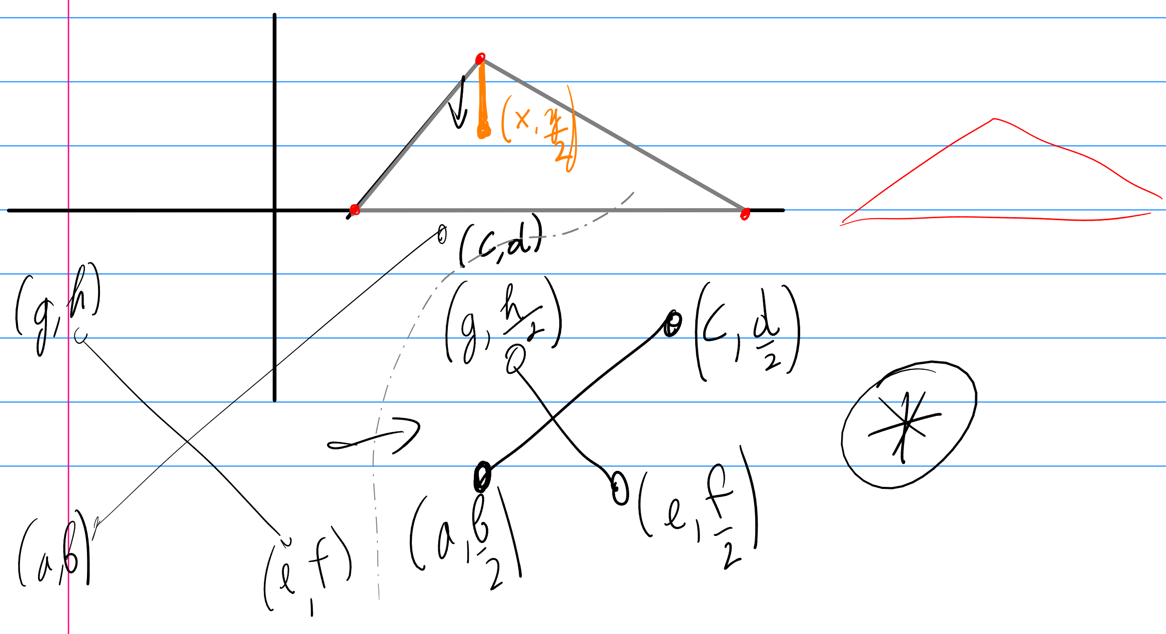
$P(x,y) \leftrightharpoons \underline{\forall z\, \forall t\,(p(x,z,y,t)}$
↳ продол. $z = x$ и $t = y$

$$\forall z\, \forall t\, (p(x,z,x,z) \;\&\; p(x,t,x,t) \Rightarrow p(x,z,y,t))$$

г) $P_{\text{уп.}}(x,y,z,t) \leftrightharpoons P_{\|}^{*}(x,y,z,t) \;\&\; P_{\|}^{*}(x,t,y,z)$



д) $P_{\text{серед}}(x,y,z) \leftrightharpoons P_{\in}(x,y,z) \;\&\; \exists u\, \exists v\, ((P_{\in}(u,v,z))$
$\& \; (x,y,y,v)$



$(x, y) = \lambda (a, b) + (1-\lambda)(c, d)$

$(x, y) = \mu . (e, f) + (1-\mu)(g, h)$

$\Updownarrow$

$\lambda (a, b) + (1-\lambda)(c, d) = \mu . (e, f) + (1-\mu)(g, h)$

$$\left| \begin{array}{l} \lambda a + (1-\lambda) . c = \mu . e + (1-\mu) . g \\ \lambda . b + (1-\lambda) . d = \mu . f + (1-\mu) . h \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \lambda a + (1-\lambda) c = \mu e + (1-\mu) g \\ \lambda \frac{b}{2} + (1-\lambda) \frac{d}{2} = \mu \frac{f}{2} + (1-\mu) \frac{h}{2} \end{array} \right.$$

има реш $\Leftrightarrow$ отс. и пр за $\lambda, \mu \in [0, 1]$

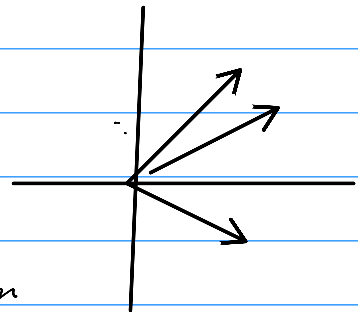
има реш $\Leftrightarrow$ * се пресичат

$h(a, b) = (a, \frac{b}{2})$ е автоморфизъм.

$\{M, P, N\} = \{M, P, N_1\}$ $\quad \sphericalangle MPN = 60^\circ$

$\sphericalangle MPN = 60^\circ \quad \sphericalangle MPN_1 = +60^\circ$

ж) $AB = 1$см



- 1) Еднаквостите запазват и ъгли и дължини (симетрии и ротации)

- 2) Транслациите не запазват дължини, но запазват отношения и ъгли