Комплексни числа, полета

Сайт: learn.fmi.uni-sofia.bg
Курс: Алгебра 1, поток 1, зимен семестър 2023/2024
Книга: Комплексни числа, полета
Разпечатано от: Александър Динев
Дата: неделя, 15 октомври 2023, 15:56

Съдържание

1. Алгебричен вид на комплексни числа

Определение: Нека $\mathbb{C}$ е множеството от наредените двойки реални числа

$$\mathbb{C} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

и за произволни негови елементи $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ се дефинират действия събиране и умножение по следния начин:

$$\begin{array}{rcccl} z_1 + z_2 & = & (a_1,b_1) + (a_2,b_2) & = & (a_1 + a_2\ ,\ b_1 + b_2) \\ z_1 .\, z_2 & = & (a_1,b_1)\ .\ (a_2,b_2) & = & (a_1a_2 - b_1b_2\ ,\ a_1b_2 + b_1a_2) \end{array}$$

Елементите на това множество, разглеждано с тези действия събиране и умножение, се наричат **комплексни числа**.

По този начин дефинирани комплексните числа, в тях не се вижда нищо неестествено или мистично, но въпреки това за комплексното число $z = (a,b)$ първата координата ще наричаме реална част на комплексното число, а втората координата е имагинерната част на комплексното число, което записваме по следния начин $a = \mathtt{Re}(z)$ и $b = \mathtt{Im}(z)$. Също, както при реалните число, ако в един израз с комплексни числа има действия събиране и умножение, то първо се извършват умноженията и след това събиранията, а ако в израза има скоби, тогава първо се извършват действията в скобите.

Пример:

$$\begin{aligned} (-1,2) + (1,3).\,(2,4) &= (-1,2) + (1.2 - 3.4, 1.4 + 3.2) = \\ &= (-1,2) + (-10,10) = (-11,12). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(-1,2) + (1,3)]\ .\ (2,4) &= (0,5).\,(2,4) = \\ &= (0.2 - 5.4, 0.4 + 5.2) = (-20,10). \end{aligned}$$

1.1. Свойства

Твърдение :
Основните свойства на събирането и умножението на комплексните числа са идентични на свойствата на реалните числа и са следните:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$- комутативност на събирането,
2. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$- асоциативност на събирането,
3. $z_1 . z_2 = z_2 . z_1$- комутативност на умножението,
4. $z_1 . (z_2 . z_3) = (z_1 . z_2) . z_3$- асоциативност на умножението,
5. $z_1 . (z_2 + z_3) = z_1 . z_2 + z_1 . z_3$-дистрибутивно свойство.

Доказателство:
Тези свойства на комплексните се доказват чрез директно заместване на действията в тях и затова доказателството е аналогично за всички изброени свойства. При доказателството основно се използва, че са изпълнени аналогичните свойства при реални числа, които също се наричат комутативност, асоциативност и дистрибутивен закон.

Ще проверим, че са в сила асоциативността на събирането и на умножението при произволни комплексни числа, а проверката на останалите свойства оставяме за упражнение.

Нека $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$ и $z_3 = (a_3, b_3)$, тогава:

- *Асоциативност на събирането:*

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= (a_1, b_1) + [(a_2, b_2) + (a_3, b_3)] = \\ &= (a_1, b_1) + (a_2 + a_3, b_2 + b_3) = \\ &= (a_1 + (a_2 + a_3), b_1 + (b_2 + b_3)) = \ (*) \\ &= ((a_1 + a_2) + a_3, (b_1 + b_2) + b_3) = \\ &= [(a_1, b_1) + (a_2, b_2)] + (a_3, b_3) = \\ &= (z_1 + z_2) + z_3 \end{aligned}$$

на мястото отбелязано със (*) сме приложили асоциативността на събирането на реални числа във всяка една от двете координати на комплексното число.

- *Асоциативност на умножението:* Първо пресмятаме произведението на три произволни комплексни числа, като сме разположили скобите по единия начин и получаваме

$$\begin{aligned} z_1 . (z_2 . z_3) &= (a_1, b_1) . [(a_2, b_2) . (a_3, b_3)] = \\ &= (a_1, b_1)(a_2 a_3 - b_2 b_3, a_2 b_3 + b_2 a_3) = \ (**) \\ &= (t_1, u_1), \text{ където } \begin{cases} t_1 = a_1 a_2 a_3 - a_1 b_2 b_3 - b_1 a_2 b_3 - b_1 b_2 a_3 \\ u_1 = a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 a_3 - b_1 b_2 b_3 \end{cases}. \end{aligned}$$

След това се пресмята произведението на същите тези три произволни комплексни числа, но с другото разположение на скобите

$$\begin{aligned} (z_1 . z_2) . z_3 &= [(a_1, b_1) . (a_2, b_2)] . (a_3, b_3) = \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)(a_3, b_3) = \ (**) \\ &= (t_2, u_2), \text{ където } \begin{cases} t_2 = a_1 a_2 a_3 - b_1 b_2 a_3 - a_1 b_2 b_3 - b_1 a_2 b_3 \\ u_2 = a_1 a_2 b_3 - b_1 b_2 b_3 + a_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 a_3 \end{cases}. \end{aligned}$$

На местата, отбелязани със (**) сме използвали дистрибутивния закон при реалните числа, които формират всяка една от координатите на тези комплексни числа. Вижда се, че $t_1 = t_2$ и $u_1 = u_2$, откъдето получаваме, че $(z_1 . z_2) . z_3 = z_1 . (z_2 . z_3)$.

$\square$

Всички формули за съкратено умножение, които се учат в училище, се получават след прилагане на комутативността и асоциативността на събирането и на умножението, както и прилагането на дистрибутивния закон. Понеже тези закони са валидни и за комплесните числа, затова всички формули за съкратено умножение са изпълнени и за комплесните числа.

Свойство:

В множеството на комплексните числа $\mathbb{C}$ има *неутрални елементи* относно събирането и умножението. Тези неутрални елементи са такива, че за произволно комплексно число $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ е изпълнено:

- $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$ и елементът $(0, 0)$ е неутрален относно събирането и се нарича *нула* в $\mathbb{C}$;
- $(a, b).\,(1, 0) = (a - 0, b + 0) = (a, b)$ и елементът $(1, 0)$ е неутрален относно умножението и се нарича *единица* в $\mathbb{C}$.

В комплексните числа може да се дефинира и изваждане, като обратна операция на операцията събиране.

Свойство:

- Изпълнено е равенството $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$. Затова числото $(-a, -b) = -z$ се нарича *противоположно* на комплексното число $z = (a, b)$
- От равенството $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$ можем да видим също и, че противоположното на числото $-z$ е z. Затова е изпълнено $-(-z) = z$.

Използвайки противоположното число, в множеството на комплексните числа може да се дефинира също и действието изваждане, като обратна операция на действието събиране.

Свойство:

Ако $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ са произволни комплексни числа, тогава уравнението $t + z_1 = z_2$ има единствено решение, което е равно на $t = z_2 + (-z_1) = (a_2 - a_1, b_2 - b_1)$. Решението t се нарича *разлика* на числата z_2 и z_1 и се бележи като $t = z_2 - z_1 = (a_2 - a_1, b_2 - b_1)$.

Пример:

Да се реши уравнението $(-3, 2)(4, -1) + t = (2, -7) - (4, -3)$. Последователно пресмятаме

$$\begin{aligned} (-3, 2)(4, -1) + t &= (2, -7) - (4, -3) \\ (-10, 11) + t &= (-2, -4) \\ t &= (-2, -4) - (-10, 11) \\ t &= (8, -15) \end{aligned}$$

1.2. Друг вид алгебрично записване

Вместо наредени двойки реални числа има по-популярен и по-удобен за ръчно пресмятане начин на записване на комплесните числа. Нека да разгледаме подмножеството от тези комплексни числа, които имат нулева имагинерна част $\tilde{R} = \{(k,0) \mid k \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ и да пресметнем сумата и произведението на числа от това множество
$(k,0)+(s,0)=(k+s,0)$ и $(k,0).(s,0)=(k.s-0.0, k.0+0.s)=(ks,0)$. Забелязваме, че се получават пак числа от $\tilde{R}$ и резултатите се получават същите, ако само съберем или умножим реалните части на тези комплексни числа. Затова, за взаимно еднозначното и обратимо изображение

$$\chi : \mathbb{R} \to \ \tilde{R} = \{(k,0) \mid k \in \mathbb{R}\}, \text{където } \chi(k)=(k,0),$$

виждаме, че е изпълнено:

$$\chi(k+s)=(k+s,0)=(k,0)+(s,0)=\chi(k)+\chi(s)$$

$$\chi(k.s)=(k.s,0)=(k,0).(s,0)=\chi(k).\chi(s).$$

Поради тази причина може да считаме че реалните числа $\mathbb{R}$ могат да се идентифицират с подмножеството $\tilde{R} \subset \mathbb{C}$ от комплексните числа и затова ще приемаме, че $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Тези комплексни числа, които са от $\tilde{R}$ ще ги считаме за реални, и ще ги записваме така $(k,0)=k \in \mathbb{R}$.
Тогава за $(k,0)=k \in \mathbb{R}$ е изпълнено:

$$k(a,b)=(k,0).(a,b)=(ka-0.b, 0.a+kb)=(ka,kb).$$

Комплексното число $i=(0,1)$ се нарича *имагинерна единица* и за него е изпълнено, че

$$i^2=(0,1)(0,1)=(0-1,0+0)=(-1,0)=-1 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Тогава, произволно комплексно число, може да се изрази по следния начин

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0).(0,1)=a+bi$$

При този запис умножението на комплексни числа се извършва, като се използват дистрибутивния закон и равенството $i^2=-1$:

$$(a+bi).(c+di)=ac+adi+bci+bd\underbrace{i^2}_{-1}=ac-bd+(ad+bc)i$$

Не е трудно да се пресметнат произволни степени на имагинерната единица:

$$\begin{aligned}&i^2=-1\\&i^3=i^2.i=-1.i=-i\\&i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1\\&i^{59}=i^{4.14}.i^3=(i^4)^{14}i^3=1.i^3=-i\end{aligned}$$

<u>Примери:</u>
Да изръшим следните пресмятания с комплексни числа, като навсякъде където получим i^2 заместваме с -1

- $$\begin{aligned}(1+3i).(2+4i)+(-1+2i) &= 2+4i+6i+12i^2+(-1+2i)=\\&=-10+10i-1+2i=-11+12i\end{aligned}$$
- Може да приложим формулата за повдигане на четвърта степен и да пресметнем
$$(1+i)^4=1+4i+6i^2+4i^3+i^4=1+4i-6-4i+1=-4$$
- За да пресметнем i^{973} ще разделим степента на 4, за да видим какъв остатък се получава $973=4.243+1$. Знаейки, че $i^4=1$, лесно се вижда, че $i^{973}=(i^4)^{243}i=1.i=i$.

- За да решим уравнението $5-4i+2z=(1+2i)^3$ последователно преобразуваме

$$\begin{aligned} 5-4i+2z &= (1+2i)^3 \\ 2z &= (1+6i+12i^2+8i^3)-(5-4i) \\ 2z &= -11-2i-5+4i \\ 2z &= -16+2i \ \mid :2 \\ z &= -8+i \end{aligned}$$

.

1.3. Комплексно спрягане и модул

Определение:

Ако в комплесно число z се смени знака на имагинерната част се получава число, което се нарича негово **комплесно спрегнато** и то се бележи с $\bar{z}$.

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$

Лесно се вижда, че са в изпълнени следните свойства:

Свойства:

- $\bar{\bar{z}} = z$;
- $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$ - това свойство се използва, когато трябва да покажем, че едно комплесно число има нулева имагинерна част (т.е. е реално) ;
- $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\mathtt{Re}(z) \in \mathbb{R}$;
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
- $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$;
- $z . \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$ и за всяко $z \neq 0$ е изпълнено, че $z . \bar{z} > 0$.

Определение:

Реалното, неотрицателно число $\sqrt{z . \bar{z}}$ се нарича модул на комплесното число, като се бележи с $|z|$:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{z . \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ако $z = a + 0i \in \mathbb{R}$, тогава пресмятайки модула се получава $|a + 0i| = \sqrt{a^2} = |a|$ точно абсолютната стойност (модула) на това число разглеждано като реално число. По този начин така въведеното понятие модул на комплесното число е продължение на концепцията абсолютна стойност (модул) при реалните числа.

Свойства:

- Като се използва равенството $z_1 z_2 . \overline{z_1 . z_2} = (z_1 \overline{z_1}) . (z_2 \overline{z_2})$, се получава следното свойство на модулите

$$|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2 .|$$

- Непосредствено се установява и че $|z| = |-z|$.
- Изпълнено е $|z| = |\bar{z}|$

<u>Пример:</u>
Да пресметнем модулите $|1 - i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, и $|3 + 2i| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$. Пресмятаме модула на сумата на тези комплексни числа

$$|(1 - i) + (3 + 2i)| = |4 + i| = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17} \neq |1 - i| + |3 + 2i|.$$

От където установяваме, че при комплесни числа (в общия случай) имаме, че $|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$.

1.4. Деление

Нека $z = a + bi \neq 0$, тогава $z.\bar{z} = |z|^2 \neq 0$ е ненулево реално число и то има обратно число $\frac{1}{|z|^2}$, което е реално число . Да разгледаме равенството

$$z.\left(\frac{1}{|z|^2}.\bar{z}\right) = \frac{1}{|z|^2}.(z.\bar{z}) = \frac{1}{|z|^2}.|z|^2 = 1 = (a+bi).\left(\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right)$$

От това равенство получаваме, че обратното на $z = a + bi \neq 0$ е числото

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}.\bar{z} = (a+bi)^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Това правило лесно се запомня, трябва да се умножат числителя и знаменателя на една дроб с комплесно спрегнатото на знаменателя.

$$\frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3-4i}{9+16} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$$

Свойство:

Ако $z_1 \neq 0$ и z_2 са комплесни числа, тогава уравнението $z_1.t = z_2$ има единствено решение, което е $t = \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2.\overline{z_1}}{|z_1|^2}$. Решението се нарича *частно на комплесните числа* и по този начин се определя действието *деление* (z_2 разделено на z_1).

Пример:

$$\frac{5-2i}{-2+3i} = \frac{(5-2i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} = \frac{-10-15i+4i+6i^2}{4+9} = -\frac{16}{13} - \frac{11}{13}i$$

Виждаме, че в множеството на комплесните числа могат да се дефинират четирите алгебрични операции (действия) - събиране, изваждане, умножение и деление и свойствата на тези операции са същите както свойствата на тези действия при реалните числа, затова множеството на комплесните числа $\mathbb{C}$ се нарича *поле на комплесните числа*.

2. Тригонометричен вид

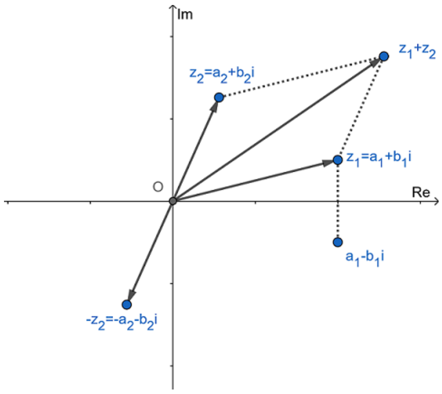
При някои от пресмятанията с комплексни числа е удобно да се използва тяхното представяне в тригонометричен вид, което лесно се получава от геометричното изобразяване на комплексните числа като точки на една равнина.

2.1. Геометрично представяне

Геометричното представяне на реалните числа е като точки от една права, в която е фиксирана една начална точка, взета е единична отсечка за мярка и е избрана положителна посока на правата. При това представяне различните реални числа съответстват на различни точки от правата и всяка точка от правата е геометрично изображение на някое реално число.

Дефинирахме комплесните числа като наредени двойки реални числа и затова тяхното геометрично представяне е като точки в равнината. В равнината се фиксира декартова координатна система, като абцисната ос се нарича реална ос и по нея се отбелязват реалните части на комплексното число, а ординатната ос се нарича имагинерна ос и там се отбелязват имагинерната част на комплесното число. По този начин се получава комплексната равнина, в която еднозначно се изобразяват всички комплксни числа.

Тогава комплексното число $z=(a,b)=a+bi$ съответства на точката с декартови координати $z \to Z(a,b)$, а при някои действия е от значение радис вектора $\overrightarrow{OZ}=(a,b)$ съответстващ на тази точка.



Тогава двойка комплексно спрегнати числа са представляват от симетрични точки относно реалната ос, а противоположните комплексни числа имат противоположни радиус вектори. Сумата на две комплексни числа се намира геометрично по правилото на успоредника като сума на радиус векторите на събираемите.

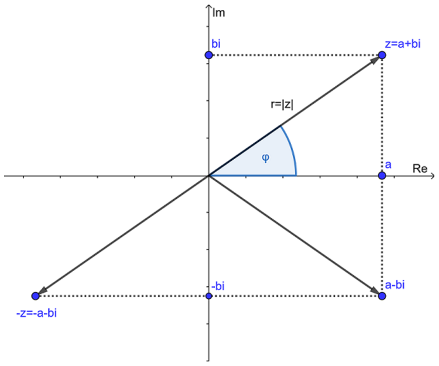
<u>*Забележка:*</u> *Виждаме, че има съответствие между точките на комплексната равнина и комплексните числа. Също, както при точките в равнината, така и при комплексните числа нямаме наредба, т.е. когато имаме две различни комплексни числа не може да се определи кое е по-голямо и кое е по-малко. Две различни комплексни числа биха моли да се сравнят само по някои свои съставни части - например по реалната си част, или пък по по имагинерната си част или по своя модул , но като цялостни комплексни числа те не могат да се сравнят.*

Например, двете числа $z_1=1+2i$ и $z_2=2+i$ имат еднакъв модул, докато реалната част на z_1 е по-малка от реалната част на z_2, докато имагинерната част на z_2 се представя с по-малко число от имагинерната част на z_1.

2.2. Модул и аргумент

Нека комплексните числа са представени геометрично като точки от комплексната равнина и числото $z = a + bi$ съответства на точката с координати $z = (a, b)$.

Използвайки Питагоровата теорема в правоъгълен триъгълник с хипотенуза Oz се получава, че дължината на радиус вектора е равна на $|\overrightarrow{Oz}| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$, което е точно модула на комплексното число.



Следователно модула на едно комплексно число представлява разстоянието от точката, изобразяваща комплексното число, до началото на координатната система в комплексната равнина. По този начин всички комплексни числа, които имат равен модул r геометрично се изобразяват като точките на една окръжност с център началото на координатната система и радиус равен на модула r.

Ако комплексното число $z \neq 0$ е ненулево, тогава точката, съответстваща на това число еднозначно може да се определи от дължината на радиус вектора и ъгъла, който сключва този радиус вектор с положителната посока на реалната ос. Този ъгъл се нарича аргумент на комплексното число и се бележи с $\mathtt{Arg}(z) = \varphi$.

От правоъгълния триъгълник, с хипотенуза радиус-вектора и катет по реалната ос се определя аргумента φ на комплексното число, като $a = r\cos\varphi$ и $b = r\sin\varphi$. Тогава можем да получим следния запис на комплексно число, което има модул $r = |z|$ и аргумент $\mathtt{Arg}(z) = \varphi$.

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Този начин на записване се нарича *тригонометричен вид на комплексното число*. Ясно е, че всяко ненулево комплексно число може да се запише в тригонометричен вид, като само за числото 0 няма начин да бъде определен аргумент и затова 0 няма представяне в тригонометричен вид.

Свойство:
Използвайки, че функциите синус и косинус са переодични с период 2π, получаваме, че едно комплесно число може да бъде записано по различни начини в тригонометричен вид и затова е изпълнено:

- $z_1 = z_2 \;\Leftrightarrow\; |z_1| = |z_2|$ и $\mathtt{Arg}(z_1) - \mathtt{Arg}(z_2) = 2k\pi$, където $k \in \mathbb{Z}$ е някакво цяло число;
- $|z| = |\bar{z}|$ и $\mathtt{Arg}(\bar{z}) = 2k\pi - \mathtt{Arg}(z)$, където $k \in \mathbb{Z}$ е цяло число;
- $|z| = |-z|$ и $\mathtt{Arg}(-z) = (2k+1)\pi + \mathtt{Arg}(z)$, където $k \in \mathbb{Z}$ е цяло число.

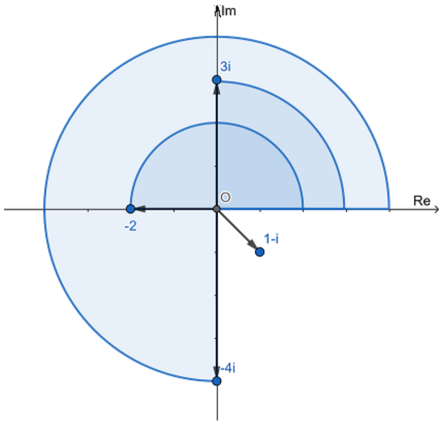
2.3. Определяне на тригонометричен вид

За да се намери тригонометричния вид на едно комплексно число $z = a + bi \neq 0$ е необходимо първо да се пресметне модула на числото $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ и после да се определи аргумента от следните равенства:

$$\mathtt{Arg}(z) = \varphi : \begin{cases} \cos\varphi = \frac{a}{r} \\ \sin\varphi = \frac{b}{r} \end{cases}$$

Да не забравяме, че аргументът е равен на ъгъла между положителната посока на реалната ос и радиус вектора, и участващите в тригонометричния запис на числото функции косинус и синус задължително трърбва да имат един и същи аргумент и това е аргументът на комплексното число.

Понякога аргументът се определя от геометрични съображения, като е в следващия пример.



Примери:

- $\mathtt{Arg}(1) = 0$ и $|1| = 1$, следователно тригонометричния вид е $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$;
- $\mathtt{Arg}(3i) = \frac{\pi}{2}$ и $|3i| = 3$, следователно тригонометричния вид е $3i = 3(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$;
- $\mathtt{Arg}(-2) = \pi$ и $|-2| = 2 \;\Rightarrow\; -2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$;
- $|-4i| = 4$ и $\mathtt{Arg}(-4i) = -\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; -4i = 4(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))$
- $|1-i| = \sqrt{2}$ и $\mathtt{Arg}(1-i) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow 1 - i = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$.

2.4. умножение и деление

Твърдение:

Комплексни числа, записани в тригонометричен вид се умножават по следния начин

$$[r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)].[r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] = r_1.r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

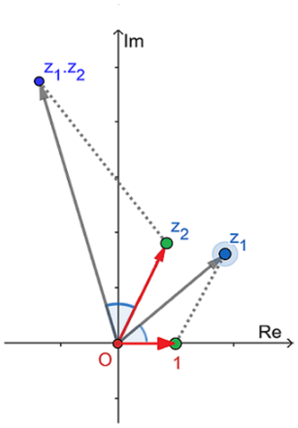
Доказателство:
Разкриват се скобите в произведението и се получава търсената формула, като се използват известните от училище формули за синус и косинус на сума на два ъгъла.

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= r_1.r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1.r_2[\underbrace{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2)}_{=\cos((\varphi_1+\varphi_2))} + i\underbrace{(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}_{=\sin((\varphi_1+\varphi_2))}] = \\ &= r_1.r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)] \end{aligned}$$

По този начин се получава, че

- модулът на произведението е равен на произведението на модулите на двете числа $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$,
- аргументът на произведението е равен на сумата от аргументите на двата множителя $\mathtt{Arg}(z_1.z_2) = \mathtt{Arg}(z_1) + \mathtt{Arg}(z_2)$.

Геометрично, произведението на комплексните числа се получава, така както е показано на графиката.



От свойствата на модула и аргумента на произведението на комплексни числа е лесно да се види, че начертаните на графиката триъгълници са подобни, с коефициент на подобие $|z_2|$.

$\square$

Твърдение:
Делението на комплексни числа, записани в тригонометричен вид се извършва по следния начин:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

Доказателство:
Използваме, че частното може да се получи чрез умножаване по комплексно спрегнатото на знаменателя и след това прилагаме доказаната формулата за умножение на числа в тригонометричен вид

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 .\, \overline{z_2}}{z_2 .\, \overline{z_2}} = \\ &= \frac{r_1 .\, r_2}{r_2^2}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)) = \\ &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))\end{aligned}$$

☐

<u>Пример:</u>
Да се пресметнат изразите:

- $2(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ).3(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 6(\cos 105^\circ + i\sin 105^\circ)$;
- $\dfrac{2(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)}{3(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)} = \dfrac{2}{3}(\cos(-15^\circ) + i\sin(-15^\circ))$;
- $\dfrac{\overline{2(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)}}{-3(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)} = \dfrac{2(\cos(-45^\circ) + i\sin(-45^\circ))}{3(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ)} = \dfrac{2}{3}(\cos(-285^\circ) + i\sin(-285^\circ))$.

2.5. Степенуване

Теорема *(Формула на Моавър):*
Нека $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, тогава за произволно естествено число $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Доказателство:
Доказателството ще проведем по метода на математическата индукция.
База на индукцията: При $n = 1$ твърдението е изпълнено, защото $z^1 = z$ и няма какво да се доказва.
Индукционна стъпка:
Индукционно предположение: предполагаме, че твърдението е изпълнено за някое естествено число n и е в сила равенството

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

При така направеното предположение доказваме, че равенството е изпълнено за следващото естествено число $n + 1$. Затова пресмятаме, като прилагаме доказаната вече формула за произведение на комплексни числа, зададени в тригонометричен вид.

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n.z = \\ &= [r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)]\,.\,[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = \\ &= r^{n+1}(\cos(n\varphi+\varphi) + i\sin(n\varphi+\varphi)) = \\ &= r^{n+1}(\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi) \end{aligned}$$

Получихме, че равенството е изпълнено и за следващото естествено число $n + 1$.
Извод: Прилагайки математическа индукция можем да твърдим, че равенството за степенуване на комплексно число, записано в тригонометричен вид е изпълнено за произволно естествено число .

□

Пример: Да пресметнем $(-1+i)^{543}$.
За целта първо намираме тригонометричния вид на даденото число, което ще повдигаме на степен $|-1+i| = \sqrt{2}$. Търсим аргумента $\texttt{Arg}(-1+i) = \varphi$ на това число, като са ни известни синуса и косинуса на този аргумент

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

По този начин получихме, че тригонометричния вид е

$$-1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}).$$

Тогава прилагаме формулата за степенуване и факта, че косинуса и синуса са переодични функции с период 2π, получаваме

$$\begin{aligned} (-1+i)^{543} &= \sqrt{2}^{543}(\cos\frac{543.3\pi}{4} + i\sin\frac{543.3\pi}{4}) = \\ &= 2^{271}\sqrt{2}(\cos(406\pi + \frac{5\pi}{4}) + i\sin(406\pi + \frac{5\pi}{4})) = \\ &= 2^{271}\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = \\ &= 2^{271}\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \\ &= -2^{271}(1+i) \end{aligned}$$

2.6. Коренуване

Теорема: (*Формули на Моавър*)
Нека $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}, z \neq 0$ и n е естествено число. Тогава уравнението $x^n = z$ има n броя различни корена, които се наричат n-ти корени на z и те са

$$\sqrt[n]{z} = \{\omega_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n})|\ k = 0, 1, \ldots, n-1.\}$$

Доказателство:
Синусът и косинусът са периодични функции с период 2π, поради тази периодичност числото z може да се представи по много начини в тригонометричен вид:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)), \forall k \in \mathbb{Z}$$

Съгласно формулата за степенуване, установяваме че всички числа от вида $\omega_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})$ повдигнати на степен n дават числото z:

$$\begin{aligned} \omega_k^n &= (\sqrt[n]{r}(\cos\tfrac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\tfrac{\varphi+2k\pi}{n}))^n \\ &= r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)) = \\ &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z \end{aligned}$$

За да се опредим колко са $\sqrt[n]{z}$, трябва да установим колко от числата ω_k са различни.
Затова да разгледаме числата ω_s и ω_t за $s, t \in \mathbb{Z}$ и да определим в кои случаи тези числа са рвни. Изпълнено е

$$\begin{gathered} \omega_s = \omega_t \\ \Updownarrow \\ \sqrt[n]{r}(\cos\tfrac{\varphi+2s\pi}{n} + i\sin\tfrac{\varphi+2s\pi}{n}) = \sqrt[n]{r}(\cos\tfrac{\varphi+2t\pi}{n} + i\sin\tfrac{\varphi+2t\pi}{n}) \\ \Updownarrow \\ \tfrac{\varphi+2s\pi}{n} - \tfrac{\varphi+2t\pi}{n} = 2k\pi, \quad \text{за някое } k \in \mathbb{Z} \\ \Updownarrow \\ s - t = k.n, \quad \text{за някое } k \in \mathbb{Z} \\ \Updownarrow \\ s \text{ и } t \quad \text{имат равни остатъци при делене на } n \end{gathered}$$

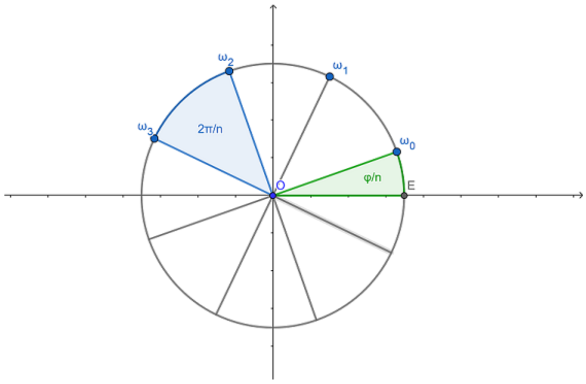
Различните остатъци, които могат да се получат при делене на числото n, са $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Затова n-тите корени на комплексно число са n на брой и например всички те са

$$\sqrt[n]{z} = \{\omega_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n})|\ k = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

Естествено, можем и по друг начин да опишем всички n-тите корени на комплексно число, важното е да вземем такива n броя ω_s, при които остатъците при разделяне s на n са различни.
Интересно е геометричното представяне на n-тите корени на z. Всички числа ω_k имат равен модул $\sqrt[n]{r}$, затова точките, съответстващи на тези комплексни числа се намират на една окръжност с център началото на комплексната равнина и радиус $\sqrt[n]{r}$. Освен това разликата на аргументите на две последователни числа е едно и също число.

$$\mathtt{Arg}(\omega_k) - \mathtt{Arg}(\omega_{k-1}) = \frac{2\pi}{n}$$

От тук получаваме, че ъгъла, който сключват помежду си радиус векторите, съответстващи на две последователни от тези числа е точно $\frac{2\pi}{n}$, откъдето се получава, че n-тите корени на z се изобразяват във върховете на правилен n-ъгълник.

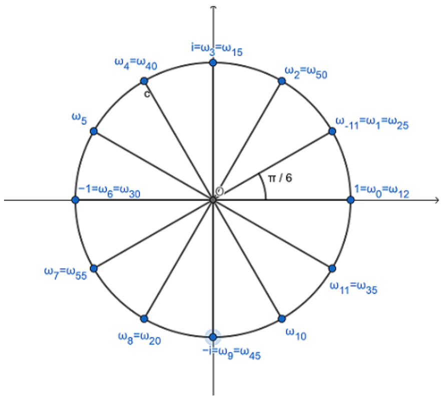


Пример:
Да се определят 12-ти корени на 1, т.е. $\sqrt[12]{1}$. Тригонометричния вид на числото 1 е $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$ и всички корени са

$$\sqrt[12]{1} = \{\omega_k = \cos\frac{2\pi k}{12} + i\sin\frac{2\pi k}{12} \mid k = 0, 1, \ldots, 11\}.$$

От друга страна, всички 12-ти корени на 1 можем да получим ако вземем друг набор от индекси, например

$$\sqrt[12]{1} = \{\omega_k = \cos\frac{2\pi k}{12} + i\sin\frac{2\pi k}{12} \mid k = 1, \ldots, 12\}.$$



От доказателството на теоремата знаем, че

$$\omega_k = \omega_{k+12} = \omega_{k+24} = \ldots = \omega_{k+12t}, \forall t \in \mathbb{Z}$$

При разглеждане внимателно на остатъците, които се получават например, можем да установим че всички 12-ти корени на 1 могат да се опишат също и по следния начин

$$\sqrt[12]{1} = \{\omega_0, \omega_5, \omega_{10}, \omega_{15}, \ldots, \omega_{55}\}.$$

3. Поле

Видяхме, че комплексните числа могат да се събират, изваждат, умножават и делят (при знаменател различен от нула) и резултатът от прилагането на тези операции (действия) също е комплексно число, както и установихме че тези операции изпълняват основните свойства. Такива операции и свойства на тези операции има и при рационалните и при реалните числа. Тези множества са типични примери на понятието поле, което е едно от основните понятия в алгебрата.
Най-общо (но не прецизно) казано поле е множество в което имаме дефинирани четирите алгебрични операции - събиране, изваждане, умножение и деление и са изпълнени основните свойства на тези операции. Точната и пълна дефиниция на понятието поле е следната:

Определение:
Нека M е непразно множество, в което има дефинирани две операции - събиране $" + "$ и умножение $". "$, такива че за произволни елеменнти $a, b \in M$ са дефинирани сума $a + b \in M$ и произведение $a.b \in M$. Казваме, че M е ***поле*** относно въведените операции, когато са изпълнени свойствата:

1. $(a+b)+c = a+(b+c),\ \forall a, b, c \in M$- *асоциативност на събирането*;
2. $a+b = b+a,\ \forall a, b \in M$ - *комутативност на събирането*;
3. съществува нулев елемент 0, за който $a+0 = a,\ \forall a \in M$;
4. за всеки елемент $a \in M$ съществува $b \in M$, за които $a+b = b+a = 0$;
5. $(a.b).c = a.(b.c),\ \forall a, b, c \in M$- *асоциативност на умножението;*
6. $a.b = b.a,\ \forall a, b \in M$ - *комутативност на умножението*;
7. $(a+b).c = a.c + b.c,\ \forall a, b, c \in M$ - *дистрибутивен закон*;
8. съществува единичен елемент $1 \neq 0$, за който $1.a = a,\ \forall a \in M$;
9. за всеки ненулев елемент $0 \neq a \in M$, съществува $c \in M$, за които $a.c = c.a = 1.$

В дефиницията са описани свойствата на операциите събиране и умножение и от нея следва, че всяко поле има поне 2 елемента. Елементът, който е дефиниран съгласно свойство 4 е единствен и се нарича *противоположен* на a, и се бележи с $-a$, като е изпълнено $-a+a = 0 = a+(-a)$. Операцията изваждане се дефинира, като противоположна на събирането и разликата $b-a = b+(-a) = x$ представлява този единствен елемент от полето, за който е изпълнено равенството $a+x = b$.
Използвайки свойство 9 от дефиницията, в полетата може да се дефинира деление. За произволен ненулев елемент a съществува *единствен* елемент,който се нарича негов обратен и се бележи с $a^{-1} = \frac{1}{a}$ и е изпълнено $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$. Операцията деление, като обратна на умножението, се определя по следния начин $b : a = \dfrac{b}{a} = b.(a^{-1}) = z$ и задава единствения елемент от полето, за който е изпълнено $a.z = b$.

3.1. Числово поле

Определение:
Числово поле е поле M, което е подмножество на комплексните числа.

При определянето на поле в дефиницията са използвани основните свойства на числата, известни ни от училище и известните ни числови множества, които са числови полета са - рационалните числа ($\mathbb{Q}$), реалните числа ($\mathbb{R}$) и комплексните числа($\mathbb{C}$).

Множеството на целите числа $\mathbb{Z}$ изпълнява свойствата от дефиницията с номера от 1 до 8. Но в множеството $\mathbb{Z}$ не е изпълнено свойство 9, защото единствените цели числа, на които обратните числа също са цели числа са само $1, -1$, обратните на останалите цели числа са рационални, например $3^{-1} = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$. Поради тази причина целите числа $\mathbb{Z}$ не образуват поле.

Твърдение:
За всяко числово поле F е изпълнено $\mathbb{Q} \subseteq F \subseteq \mathbb{C}$.

Свойствата от определението с номера 1,2,5,6,7 са основни свойства на събирането и умножението на комплексни числа и затова те важат за произволно числово множество. Следвъщото твърдение ни показва кои са основните свойства, които трябва да се проверят за едно числово множество, за да сме сигурни, че това множество е поле.

Твърдение:
Нека $F \subseteq \mathbb{C}$ и в F съществува поне едно ненулево число. F е числово поле, ако са изпълнени свойствата

- $a - b \in F, \forall a, b \in F$;;
- $a.b \in F, \forall a, b \in F$;
- $a^{-1} \in F, \forall a \in F, a \neq 0$.

Пример:
Множеството $\mathbb{Q}(i\sqrt{3}) = \{a + ib\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ е поле, защото е изпълнено

- $(a_1 + ib_1\sqrt{3}) - (a_2 + ib_2\sqrt{3}) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(i\sqrt{3})$;
- $(a_1 + ib_1\sqrt{3}).(a_2 + ib_2\sqrt{3}) = a_1a_2 - 3b_1b_2 + i\sqrt{3}(a_1b_2 + a_2b_1) \in \mathbb{Q}(i\sqrt{3})$;
- Когато $a + ib\sqrt{3} \neq 0$. е изпълнено

$$\frac{1}{a + ib\sqrt{3}} = \frac{a}{a^2 + 3b^2} - i\sqrt{3}\frac{b}{a^2 + 3b^2} \in \mathbb{Q}(i\sqrt{3}).$$

3.2. Пример нечислово поле

Съществуват най-различни полета, които не се съдържат в полето на комплексните числа и това са нечисловите полета.

Пример:
Нека множество $M = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ се състои само от два елемента, които са различни от числата нула и едно и затова са отбелязани с $\overline{0}$ и $\overline{1}$.
M е поле, ако елементите му се събират и умножават, съгласно следните таблици

$$\begin{array}{c|cc} + & \overline{0} & \overline{1} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{c|cc} . & \overline{0} & \overline{1} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \end{array}$$

Виждаме, че $\overline{0}$ е нулевият елемент на полето, и противоположния елемент на $\overline{1}$ е равен на $\overline{1}$. Освен това, елементът $\overline{1}$ е единствения обратим елемент в това поле. Стандартно, в математиката това поле се бележи с $\mathbb{Z}_2$ или с $GF(2)$ и описва начина по който се получават остатъците на сумата и на произведението на две цели числа при делене на числото 2.

По подобен начин, ако се разгледат остатъците при делене на някакво фиксирано **просто число** p и множеството от остатъците се бележи с $\mathbb{Z}_p = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$, може да се получи поле. Сумата и произведението на два остатъка се определят като се вземе остатъка на сумата и произведението на съответните числа, имащи такива остатъци. По-подробно с такъв тип полета ще се запознаем във втората част на алгебрата. *При тази конструкция са получава поле само когато числото p на което делим е просто.*

Пример:
Таблиците за събирането и умножението в полето $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ са:

$$\begin{array}{c|ccccc} + & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{3} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{4} & \overline{4} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{c|ccccc} . & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{4} & \overline{1} & \overline{3} \\ \overline{3} & \overline{0} & \overline{3} & \overline{1} & \overline{4} & \overline{2} \\ \overline{4} & \overline{0} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{2} & \overline{1} \end{array}.$$