Базис, размерност и сума на подпространства

Сайт: learn.fmi.uni-sofia.bg
Курс: Алгебра 1, поток 1, зимен семестър 2023/2024
Книга: Базис, размерност и сума на подпространства
Разпечатано от: Цветомир Стайков
Дата: четвъртък, 16 ноември 2023, 15:07

Съдържание

1. Базис и размерност
1.1. Примери
1.2. безкрайномерно пространство
1.3. крайнопородено пространство
1.4. Размерност
1.5. пример - матрично пространство
1.6. свойства -1
1.7. свойства - 2

2. Координати спрямо базис
2.1. Свойства на координатите

3. Ранг на система вектори
3.1. МЛНП
3.2. Пример
3.3. ранг
3.4. Свойства

4. Сума на подпространства
4.1. Свойства на сумата на подпространства
4.2. размерност на сумата
4.3. Директна сума
4.4. Т (за директна сума)

1. Базис и размерност

Определение:
Нека V е линейно пространство над полето F и $B = \{b_1, \ldots, b_n\} \subset V$. Множеството B е базис на пространството V, ако е изпълнено

- $\ell(b_1, \ldots, b_n) = V$;
- множеството $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ е линейно независимо.

Пример:
Нека да разгледаме пространството от геометрични вектори в равнината $\mathbb{R}^2$. Ако в равнината е зададена декартова координатна система $O\overrightarrow{e}_1\overrightarrow{e}_2$, тогава единичните вектори по координатните оси $\overrightarrow{e}_1$ и $\overrightarrow{e}_2$ образуват базис на това линейно пространството.

Ако разгледаме произволен вектор, $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{OP}$, където координатите на точката са $P = (a, b)$, тогава векторът се представя като следната сума $\overrightarrow{p} = a\overrightarrow{e}_1 + b\overrightarrow{e}_2$.

Известно ни е, че нулевият вектор се представя чрез $\overrightarrow{e}_1$ и $\overrightarrow{e}_2$ единствено като $\overrightarrow{\mathcal{O}} = 0\overrightarrow{e}_1 + 0\overrightarrow{e}_2$. Следователно $\overrightarrow{e}_1$ и $\overrightarrow{e}_2$ са линейно независими и образуват базис на това линейно пространството.

Забележка: Аналогът на понятието базис на линейно пространство в геометрията е координатната система

1.1. Примери

Пример:

Нека да разгледаме множеството на комплексните числа $\mathbb{C}$, като линейно пространство над полето на реалните числа $\mathbb{R}$.
Представянето на комплексно число в алгебричен вид е $z = a + bi$ където a и b са реални числа. Това означава, че всяко комплексно число е линейна комбинация на 1 и i , т.е. принадлежи на линейната обвивка $\ell(1, i)$. Едно комплексно число е равно на нула $z = a + bi = 0$, само когато реалната част a и имагинерната част b на числото са нули, откъдето получаваме че 1 и i са линейно независими. Следователно 1 и i образуват базис на на комплексните числа като линейно пространство над полето на реалните числа.

Пример:

Да разгледаме пространството F^n, състоящо се от n- мерните вектори с координати от поле F. Разглеждаме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, 0) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 0, 1) \end{aligned}$$

където векторът e_i има $n-1$ координати нула и i-та координата е равна на 1. Тогава ако $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ е произволен вектор от F^n, то се вижда че той може да се представа като сума на n вектора, всеки от които има по $n-1$ нулеви координати и е изпълнено:

$$\begin{aligned} A &= (a_1, a_2, \ldots, a_n) = \\ &= (a_1, 0, \ldots, 0) + (0, a_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, a_n) = \\ &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n \end{aligned}$$

От полученото равенство установяваме, че вектора $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ е елемент на линейната обвивка на векторите $e_1, \ldots, e_n$, но тъй като A е произволен вектор от пространството F^n, получавама че $F^n = \ell(e_1, \ldots, e_n)$.
Разглеждаме, кога може да се получи нулевия вектор като линейна комбинация на векторите $e_1, \ldots, e_n$:

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \mathcal{O} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Установихме, че векторите $e_1, \ldots, e_n$ са линейно независими и пораждат цялото n- мерно векторно пространство. Следователно $e_1, \ldots, e_n$ образуват базис на пространството и този базис се нарича *стандартен базис* на F^n.

1.2. безкрайномерно пространство

Определение:
Линейно пространство V над поле F е безкрайномерно, когато за произволно естествено число n и за произволни n на брой вектори от пространството $b_1, \ldots, b_n$ е изпълнено, че $\ell(b_1, \ldots, b_n) \neq V$.

Забележка: Ако V е безкрайномерно линейно пространство и искаме да изберем множество от линейно независими вектори, тогава можем да започнем от произволен ненулев вектор от V и на всяка стъпка да допълваме с вектор, който не е от линейната обвивка на вече избраното множество. Съгласно лемата за линейната независимост, следва че ако пространството V е безкрайномерно, тогава за всяко естествено число n съществува линейно независимо множество от n вектора от пространството V.

Пример:
Разглеждаме полиномите на една променлива с коефициенти от поле F и нека n е произволно естествено число. За всеки избор на n полинома $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ нека k е максималната от степените на тези полиноми. Тогава всяка линейна комбинация от полиномите $\alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x)$ има степен ненадминаваща k и следователно всички полиноми от степен по-голяма от k не принадлежат на линейната обвивка $\ell(f_1(x), \ldots, f_n(x))$. По този начин получаваме, че пространството на полиномите на една променлива с коефициенти от поле е безкрайномерно.

Пример:

Множеството от реалните числа $\mathbb{R}$, разглеждано като линейно пространство над полето на рационалните числа $\mathbb{Q}$ е безкрайномерно линейно пространство. Причината за товае наличието на така наречините трансцендентни числа (най-популярните от тях са π и Неперовото число e), за които е изпълнено че не са корени на полиноми с рационални числа и поради тази причина произволен набор от n на брой степени на едно такова число са линейно независими.

1.3. крайнопородено пространство

Линейно пространство, което не е безкрайномерно може да се нарече *крайнопородено*.

В следващата теорема се показва, че всяко линейно пространство, което е крайнопородено и е различно от нулевото, има базис.

Теорема:
Нека V е ненулево линейно пространство ($V\neq\{\mathcal{O}\}$) над поле F, за което съществуват вектори от пространството $a_1,\ldots,a_t$, чиято линейна обвивка съвпада с цялото пространство $\ell(a_1,\ldots,a_t)=V$. Тогава пространството V има базис $b_1,\ldots,b_n$, който е подмножество на пораждащите го вектори $\{b_1,\ldots,b_n\}\subseteq \{a_1,\ldots,a_t\}$.

Доказателство:
Ненулевото линейно пространство V е породено от векторите $a_1,\ldots,a_t$ и следователно поне един от тези вектори е различен от нулевия вектор. Започваме да строим базис на пространството като за първи вектор , вземаме един ненулев от пораждащите вектори $b_1=a_i$, където $a_i\neq \mathcal{O}$. Започва се процедура по допълване на търсения базис.

- <u>Стъпка 1</u>: Векторът b_1 е линейно независим и имаме една от следните две възможности
  - ако е изпълнено, че $\{a_1,\ldots,a_t\}\subset \ell(b_1)$, тогава завършваме процедурата с определен базис $\{b_1\}$ на пространството V,
  - ако съществува вектор от пораждащото множество, който не е от линейната обвивка $a_l\notin \ell(b_1)$, тогава вземаме за следващ вектор от търсения базис да бъде $b_2=a_l$, като от лемата за линейната независимост получаваме, че векторите b_1,b_2 са линейно независими и продължаваме със втора стъпка.
- <u>Стъпка k</u>- ако сме намерили множеството $\{b_1,\ldots,b_k\}\subset \{a_1,\ldots,a_t\}$ което е линейно независимо, тогава:
  - ако е изпълнено, че $\{a_1,\ldots,a_t\}\subset \ell(b_1,\ldots,b_k)$, тогава завършваме процедурата като сме определили $\{b_1,\ldots,b_k\}$ базис на пространството V
  - ако съществува вектор от пораждащото множество, който не е линейна комбинация на вече определените вектори $a_p\notin \ell(b_1,\ldots,b_k)$, тогава приемаме за следващ вектор от търсения базис да бъде $b_{k+1}=a_p$ и е изпълнено, че векторите $b_1,\ldots,b_k,b_{k+1}$ са линейно независими и продължаваме със следваща стъпка

Описаната процедура е крайна и има най - много t стъпки, колкото е броят векторите в пораждащото множество $a_1,\ldots,a_t$. В момента, когато се завърши процедурата са получени няколко вектора $b_1,\ldots,b_n$ за които е известно следното:
$$\begin{array}{rcl}
b_1,\ldots,b_n &\text {са}& \text{ линейно независими} \\
\{b_1,\ldots,b_n\}&\subseteq &\{a_1,\ldots,a_t\}\\
\{a_1,\ldots,a_t\}&\subseteq& \ell(b_1,\ldots,b_k)\\
\end{array}$$
Използваме свойството на линейните обвивки че $V=\ell(a_1,\ldots,a_t)\subseteq\ell(b_1,\ldots,b_k)$, откъдето получаваме че $V= \ell(b_1,\ldots,b_k)$, следователно линейно независимото множество $\{b_1,\ldots,b_k\}$ е базис на пространството V.

$\square$

1.4. Размерност

Теорема:
Нека $e_1,\ldots,e_n$ и $g_1,\ldots,g_k$ са два базиса в едно линейно пространство V. Тогава бройките на векторите в двата базиса съвпадат, т.е. $n=k.$

Доказателство:
Векторите $e_1,\ldots,e_n$ са базис и следователно $g_i\in V=\ell(e_1,\ldots,e_n), \ i=1,\ldots,k$. Ако допуснем,че $k>n$ от Основната лема на линейната алгебра ще получим, че $g_1,\ldots,g_k$ са линейно зависими, което е противоречие с факта, че то образуват базис на пространството, следователно $k\leq n$.

По аналогичен начин, от това че $g_1,\ldots,g_k$ е базис, и $e_1,\ldots,e_n\in \ell\{g_1,\ldots,g_k\}$ са линейно независими вектори $\Rightarrow$$n\leq k$.

По този начин се установява, че $n=k$ и всички базиси, които има едно пространство имат по равен брой вектори.

$\square$

Определяйки, че всички базиси на едно пространство имат по един и същи брой вектори, получаваме че броят на векторите в един базис е характерен белег на пространството, независещ от конкретния избор на базисните вектори и благодарение на този факт може да се дефинира понятието размерност.

Определение:

Размерността на едно линейно пространство V над поле F е равна на броя на векторите n в произволен базис на пространството. Когато пространството V има размерност n над полето F записваме по следния начин $\dim_F V=n=dim V$.
За нулевото пространство, казваме, че има нулева размерност $\dim \{\mathcal{O}\}=0$.

От тази дефиниция следва, че всяко линейно пространство е или безкрайномерно или *крайномерно* с размерност $n\geq 0$. От крайномерните линейни пространство само нулевото пространство$V=\{\mathcal{O}\}$ няма базис, защото в него няма линейно независими вектори.

Например, комплексните числа, като линейно пространство над полето на реалните числа има базис $1,i$ и размерността на това пространство е $2=\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. От друга страна само 1 образува базис на комплексните числа, като линейно пространство над полето на комплексните числа и $1=\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}.$

Размерността на n-мерното векторно пространство F^n е равна на $n=\dim F^n$, защото стандартния базис $e_1,\ldots,e_n$ на пространството има n вектора.

1.5. пример - матрично пространство

Пример:

За да определим размерността на матричното пространство \(M_{n\times k}(F)\) ще намерим базис на пространството, като потърсим аналог от матрици на стандартния базис на \(F^n\). За целта разглеждаме матриците \(E_{ij}\) при които всички елементи са нулеви с изключение на един ненулев елемент, който е 1 и се намира на \(i\) -ти ред и \(j\)-ти стълб. Например в случая на \(2\times 2\) матрици имаме $$E_{11}=\left(\begin{array}{cc} 1&0\\0&0\\\end{array} \right),\ E_{12}=\left(\begin{array}{cc} 0&1\\0&0\\\end{array} \right),\ E_{21}=\left(\begin{array}{cc} 0&0\\1&0\\\end{array} \right),\ E_{22}=\left(\begin{array}{cc} 0&0\\0&1\\\end{array} \right). $$ Съобразява се, че както има изразяване на следната матрица $$A=\left(\begin{array}{cc} 3&7\\-2&5\\\end{array} \right)=3E_{11}+7E_{12}-2E_{21}+5E_{22},$$ така и всяка матрица от матричното пространство \(M_{n\times k}(F)\) е линейна комбинация на матриците \(B=\{E_{ij}\ |\ 1\leq i\leq n;\ \ 1\leq j\leq k \}\).

Проверяваме по какви начини нулевата матрица може да се получи като линейна комбинация на тези матрици
$$\sum_{\begin{array}{c} 1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq k \end{array}}\lambda_{ij}E_{ij}=\left(\begin{array}{cccc}
\lambda_{11}&\lambda_{12}&\ldots&\lambda_{1k}\\
\lambda_{21}&\lambda_{22}&\ldots&\lambda_{2k}\\
\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\
\lambda_{n1}&\lambda_{n2}&\ldots&\lambda_{nk}\\
\end{array} \right) =
\left(\begin{array}{cccc}
0&0&\ldots&0\\
0&0&\ldots&0\\
\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\
0&0&\ldots&0\\
\end{array} \right) $$ Получава се, че това равенство е изпълнено когато всичките скалари \(\lambda_{ij}=0\) са нулеви, откъдето, се вижда че матриците \(B=\{E_{ij}\ |\ 1\leq i\leq n;\ \ 1\leq j\leq k \}\) са линейно независими и следователно те образуват базис на матричното пространство и \(\dim (M_{n\times k}(F))=n.k\)

Матриците \(B=\{E_{ij}\ |\ 1\leq i\leq n;\ \ 1\leq j\leq k \}\) се наричат *матрични единици*.

1.6. свойства -1

Следващото свойство често се използва, когато определяме базис в крайномерно пространство с известна размерност.

Свойства:

- Всеки n линейно независими вектора в n мерно линейно пространство образуват базис.
- Всеки $n+1$ вектора в n мерно линейно пространство са линейно зависими.

Доказателство:
Нека V е линейно пространство с размерност $n=\dim V$ и $e_1,\ldots,e_n$ е базис на това пространство. Тогава произволни $n+1$ вектора $a_1,\ldots,a_{n+1}$ от пространството принадлежат на линейната обвивка на базисните вектори $\{a_1,\ldots,a_{n+1}\}\subset V=\ell(e_1,\ldots,e_n)$ и от основната лема на линейната алгебра, получаваме че $a_1,\ldots,a_{n+1}$ са линейно зависими.

Нека $b_1,\ldots,b_n$ са линейно независими вектори от n мерно линейно пространство и $c\in V$ е произволен вектор от пространството. Тогава векторите $b_1,\ldots,b_n,c$ са линейно зависими и следователно $c\in \ell(b_1,\ldots,b_n)$. Тъй като c е произволен вектор от пространствота, следователно $V=\ell(b_1,\ldots,b_n)$, откъдето получаваме че $b_1,\ldots,b_n$ е базис на V.

$\square$

Пример:
В един от примерите от предната глава, получихме че матриците с комплексни елементи $A=\left(\begin{array}{rr} 1&1\\1&0\\ \end{array} \right)$, $B=\left(\begin{array}{rr} i&i\\0&i\\ \end{array} \right)$, $C=\left(\begin{array}{rr} -i&0\\-i&-i\\ \end{array} \right)$ и $D=\left(\begin{array}{rr} 0&5\\5&5\\ \end{array} \right)$ са линейно независи. Тъй като $\dim(M_{2\times 2}(\mathbb{C}))=4$, следователно матриците A,B,C,D образуват базис на $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

1.7. свойства - 2

Твърдение:
Нека V е крайномерно линейно пространство и $\dim V=n$

- Всяко линейно независимо множество вектори от V може да се допълни до базис на пространството;
- Всяко собствено подпространство L на крайномерното пространство V има по-малка от n размерност $\dim L<\dim V.$

Доказателство:
Нека $a_1,\ldots,a_s$ е линейно независимо множество от вектори на крайномерното пространство V и нека $e_1,\ldots,e_n$ е един базис на това пространство. Всички тези вектори пораждат цялото пространство $\ell(a_1,\ldots,a_s,e_1,\ldots,e_n)=V$ и измежду тях може да се определи базис. По описаната преди процедура, определяме базис на пространството, но започвайки с дадените линейно независими вектори $b_i=a_i,\ i=1,\ldots,s$, от доказаното твърдение следва че можем да определим още $n-k$ вектора измежду $e_1,\ldots,e_n$, така че да се получи базис $b_1,\ldots,b_n$. По този начин се допълва линейно независимата система до базис на пространството.

Ако L е собствено подпространство на пространството $L\neq V$ и ако $b_1,\ldots,b_k$ е базис на подпространството L, тогава $\ell(b_1,\ldots,b_k)\subsetneqq V$ и $b_1,\ldots,b_k$ може да се допълни до базис на пространството (който има поне един вектор в повече). От това се получава, че $\dim L<\dim V.$

$\square$

Пример:
В четиримерното векторно пространство $\mathbb{R}^4$ разглеждаме линейно независимите вектори $a_1=(1,-3,0,4)$ и $a_2=(5,1,0,7)$. Допълваме ги до базис на пространството, като прилагаме описаната процедура при крайнопородените пространство:

- Изпълнено е, че $e_1\notin \ell(a_1,a_2)$ вземаме за следващ вектор от базиса да бъде e_1, като се получават линейно независимите вектори a_1,a_2,e_1;
- Вижда се че $e_2\in \ell(a_1,a_2,e_1)$, така че e_2 не може да се добави към вече определените a_1,a_2,e_1;
- Ясно е, че $e_3\notin \ell(a_1,a_2,e_1)$ и се получава че векторите a_1,a_2,e_1,e_3 са линейно независими.

По този начин, се получава че векторите a_1,a_2,e_1,e_3 образуват базис на четиримерното векторно пространство. Ясно е, че този базис не е единствения който съдържа векторите a_1,a_2.

Твърдение:
Нека V е крайномерно ненулево пространство. Тогава е изпълнено, че
$$\dim v=n\ \ \Leftrightarrow\ \ \left\lbrace \begin{array}{l}
\text{ съществуват }\ n \ \text{ линейно независими вектора във }V\\
\text{ всеки }\ n+1\ \text{вектора от}\ V \text{са линейно зависими}
\end{array}\right.
$$

Доказателство:
От доказаните свойства имаме, че е изпълнена едната посока на твърдението.

Нека $b_1,\ldots,b_n$ са линейно независими вектори от пространството и всеки $n+1$ вектора от V са линейно зависими. Тогава за произволен вектор $c\in V$ е изпълнено, че $b_1,\ldots,b_n,c$ са линейно зависими и следователно $c\in \ell (b_1,\ldots,b_n)$. Тъва се отнася за всеки вектор от пространството и следователно $V\subseteq \ell(b_1,\ldots,b_n)$, откъдето се получава че $b_1,\ldots,b_n$ е базис на V и затова размерността е $\dim V=n$.

$\square$

2. Координати спрямо базис

Теорема:
Множеството от вектори $\{b_1,\ldots,b_n\}$ е базис за пространството V, тогава и само тогава когато всеки вектор c от пространството по единствен начин се изразява като линейна комбинация на векторите $b_1,\ldots,b_n$.

Доказателство:
$\boxed{\Rightarrow}$ Нека $\{b_1,\ldots,b_n\}$ е базис за пространството и да разгледаме два начина, по които се представя произволен вектор $c\in V=\ell(b_1,\ldots,b_n)$ като линейна комбинация на базисните вектори
$$\left. \begin{array}{rcrcr}
c&=&\alpha_1b_1+&\ldots+&\alpha_nb_n\\
c&=&\beta_1b_1+&\ldots+&\beta_nb_n\\
\end{array}\right\rbrace \Rightarrow \
\mathcal{O}=(\alpha_1-\beta_1)b_1+\ldots+(\alpha_n-\beta_n)b_n.
$$
Базисните вектори $b_1,\ldots,b_n$ са линейно независими и затова се получава, че
$$\begin{array}{c}
\alpha_1-\beta_1=0,\ \ldots,\ \alpha_n-\beta_n=0\\
\alpha_1=\beta_1,\ \ldots,\ \alpha_n=\beta_n\\
\end{array}$$
От това получаваме, че представянето на всеки вектор като линейна комбинация на базиса е единствено.

$\boxed{\Leftarrow}$ Нека произволен вектор от пространството се представя по единствен начин като линейна комбинация на векторите $b_1,\ldots,b_n$. Нека е изпълнено, че $\lambda_1b_1+\ldots+\lambda_nb_n=\mathcal{O}$, и знаем че винаги е изпълнено и равенството $\mathcal{O}=0b_1+\ldots+0b_n$. Тогава от единствеността на представянето на нулевия вектор получаваме, че $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$ и следователно векторите $b_1,\ldots,b_n$ са линейно независими и тъй като $V= \ell(b_1,\ldots,b_n)$ получихме, че $b_1,\ldots,b_n$ образуват базис на пространството V.

$\square$

Определение:
Нека $B=[b_1,\ldots, b_n]$ е базис (разглеждан с наредбата на векторите) на линейното пространство V. Ако за елементът на линейното пространство $a\in V$ е изпълнено, че
$a=\alpha_1b_1+\ldots+\alpha_nb_n$, тогава n- мерния вектор, съставен от коефициентите на тази линейна комбинация се нарича координати на a, спрямо наредения базис B:
$$ \sigma_B(a)=\sigma(a)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in F^n $$

<u>Пример:</u>
Например, ако разглеждаме пространството от 2×2 матрици спрямо базиса $B=[E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}],$, освен това този базис можем да го подредим по друг начин, като $C=[E_{21},E_{22},E_{12},E_{11}]$. Тогава координатите спрямо двата подредени базиса на една и съща матрица са, например $$A=\left(\begin{array}{cc} 3&7\\-2&5\\\end{array} \right)\ \Longrightarrow\
\begin{array}{c}
\sigma_B(A)=(3,7,-2,5),\\
\\
\sigma_C(A)=(-2,5,7,3).
\end{array}$$ Освен това, лесно се вижда, че A,E_{12}, E_{21},E_{22} са линейно независими матрици и може да се разгледа наредения базис $D=[E_{12}, E_{21},A,E_{22}]$ и спрямо този нареден базис кординатите на матрицата A са следните $\sigma_D(A)=(0,0,1,0).$

2.1. Свойства на координатите

Нека е фиксиран един базис $B=[b_1,\ldots, b_n]$ на линейното пространство V над полето F, тогава вземането на координатите спрямо фоксирания базис на векторите от пространството, задава взаимно еднозначно съответствие (биекция) между линейното пространство и n-мерното векторно пространство F^n: $$\sigma_B: V\rightarrow F^n,\ \ \ a=\alpha_1b_1+\ldots+\alpha_nb_n \xrightarrow{\sigma_B}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n})$$ Биективното съответствие " координати спрямо фиксиран базис" се съгласува с операциите събиране и умножение със скалар.

Твърдение:
Нека $B=[b_1,\ldots, b_n]$ е нареден базис на пространството V и нека векторите $a,c\in V$ имат координати спрямо този базис $\sigma(a)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и $\sigma(c)=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$. Тогава за координатите на сумата и на произведението със скалар е изпълнено:

- $\sigma(a+c)=\sigma(a)+\sigma(b)$,
- $\sigma (\lambda a)=\lambda \sigma(a)$, където $\lambda\in F$.

Доказателство:
Знаейки координатите $\sigma(a)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и $\sigma(c)=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ спрямо базиса $B=[b_1,\ldots, b_n]$, следователно
$a=\alpha_1b_1+\ldots+\alpha_nb_n$ и $c=\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_nb_n$ и непосредствено се получава $$\begin{array}{rcl}
a+c&=&\alpha_1b_1+\ldots+\alpha_nb_n+\gamma_1b_1+\ldots+\gamma_nb_n=\\
&=&(\alpha_1+\gamma_1)b_1+\ldots+(\alpha_n+\gamma_n)b_n\\
&\Downarrow&\\
\sigma(a+c)&=&(\alpha_1+\gamma_1\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha_n+\gamma_n)\\
&=&\sigma(a)+\sigma(c)
\end{array}$$ Също така, за произволен скалар $\lambda\in F$ и за всеки вектор $a\in V$ е изпълнено $$\begin{array}{rcl}
\lambda a&=&\lambda(\alpha_1b_1+\ldots+\alpha_nb_n)=\\
&=&\lambda\alpha_1b_1+\ldots+\lambda\alpha_nb_n\\
&\Downarrow&\\
\sigma(\lambda a)&=&(\lambda\alpha_1\ ,\ \ldots\ ,\ \lambda\alpha_n)\\
&=&\lambda\sigma(a).
\end{array}$$

$\square$

3. Ранг на система вектори

Понятието ранг на система вектори е аналог на размерността, и се използва когато говорим за подмножество от вектори (обикновено крайно), а не за цяло линейно пространство.

3.1. МЛНП

Определение:
Нека V е линейно пространство над полето F и $A_1,\ldots,A_k$ са набор от вектори на пространството. Казваме, че подмножеството $\{A_{i_1},\ldots, A_{i_r}\}\subset\{A_1,\ldots,A_k\}$ е максимално линейно независима подсистема (МЛНП) на $\{A_1, \ldots,A_k\}$, когато

- $\{A_{i_1},\ldots, A_{i_r}\}$ са линейно независими,
- всеки вектор от $\{A_1,\ldots,A_k\}$ е линейна комбинация на $\{A_{i_1},\ldots, A_{i_r}\}$, т.е. $A_j\in \ell(A_{i_1},\ldots, A_{i_r}),\ \ \forall j=1,\ldots,k$.

Твърдение:
Всеки ненулев набор от вектори на линейното пространство V има максимално линейно независима подсистема.

Доказателство:
Нека V е линейно пространство над полето F и $A_1,\ldots,A_k$ са набор от вектори на пространството, като поне един $A_i\neq \mathcal{O}$.
Тогава, ако $U=\ell(A_1,\ldots,A_k)$ имаме, че U е крайнопородено ненулево линейно подпространство на V. От доказаната теорема за крайнопородените пространства, следва че съществува базис $A_{i_1},\ldots, A_{i_r}$ на U, който е подмножество на ${A_1,\ldots,A_k}$. Системата ${A_{i_1},\ldots, A_{i_r}}$ е линейно независима и всеки вектор от ${A_1,\ldots,A_k}$ е линейна комбинация на този базис. Следователно системата от вектори ${A_{i_1},\ldots, A_{i_r}}$ е максимално линейно независима подсистема на ${A_1,\ldots,A_k}$.

$\square$

3.2. Пример

Разглеждаме 3- мерното пространство \(\mathbb{Q}^3\) и следния набор от вектори \(A_1=(3,1,-4)\), \(A_2=(-1,-2,3)\), \(A_3=(-4,-1,5)\), \(A_4=(7,-7,0)\), \(A_5=(2,4,-6)\) и \(A_6=(-7,2,5)\). Преобразуваме векторите $$\begin{array}{ccc}
\left(\begin{array}{rrrr}
A_1:&3&1&-4\\
A_2:&-1&-2&3\\
A_3:&-4&-1&5\\
A_4:&7&-7&0\\
A_5:&2&4&-6\\
A_6:&-7&2&5\\
\end{array} \right)&\rightarrow&
\left(\begin{array}{rrrr}
A_1:&3&1&-4\\
A_2+2A_1:&5&0&-5\\
A_3+A_1:&-1&0&1\\
A_4+7A_1:&28&0&-28\\
A_5-4A_1:&-10&0&10\\
A_6-2A_1:&-13&0&13\\
\end{array} \right)\\
\end{array} $$
Установяваме, че:

- \(A_1,A_2\) са линейно независими,
- \(A_1,A_2,A_3\) са линейно зависими и следователно \(A_3\in\ell(A_1,A_2)\),
- \(A_1,A_2,A_4\)\(\Rightarrow\) \(A_4\in\ell(A_1,A_2)\),
- \(A_5\in\ell(A_1,A_2)\) защото \(A_1,A_2,A_5\),
- \(A_6\in\ell(A_1,A_2)\) защото \(A_1,A_2,A_6\).

Получихме, че   \(A_1,A_2\) е максимално линейно независима подсистема на \(\{A_1,\ldots,A_6\}.\)

3.3. ранг

Твърдение:
Ако и двете системи ${A_{i_1},\ldots, A_{i_r}}$ и ${A_{j_1},\ldots, A_{j_s}}$ са максимално линейни подсистеми на векторите $A_1, \ldots,A_k$ от линейно пространство V, тогава $r=s$.

Доказателство:
Да допуснем, че едното от двете числа е по-голямо, например $r>s$. Тъй като $A_{i_1},\ldots, A_{i_r}\in \ell (\{A_{j_1},\ldots, A_{j_s}\})$, от основната лема на линейната алгебра следва, че $\{A_{i_1},\ldots, A_{i_r}\}$ са линейно зависими, което е в противоречие с факта, че те образуват МЛНП, следователно допускането не е вярно и следователно $r= s.$

$\square$

Определение:
Рангът на система вектори $A_1,\ldots,A_k$ е равен на броя на векторите в една максимално линейно независима подсистема, и се записва $r(A_1,\ldots,A_k)=r$.

$$r(A_1,\ldots,A_k)=r\ \Leftrightarrow\ \exists\ \{A_{i_1},\ldots, A_{i_r}\} \text{- МЛНП}$$

3.4. Свойства

Свойства:

Нека $A_1,\ldots,A_k$ е набор от вектори от линейно пространство V. Тогава:

1. Линейната обвивка на набора от вектори и на максимално линейно независима му подсистема съвпадат,
2. $r(A_1,\ldots,A_k)=r=\dim \ell(A_1,\ldots,A_k),$
3. $r(A_1,\ldots,A_k)=r$ $\Leftrightarrow$ в набора от вектори има r линейно независими вектора и всеки $r+1$ вектора са линейно зависими.

Доказателство:

Нека $\{A_{i_1},\ldots, A_{i_r}\}$ е МЛНП за $A_1,\ldots,A_k$.

1. Да разгледаме техните линейни обвивки $U=\ell(A_{i_1},\ldots, A_{i_r})$ и $W=\ell(A_1,\ldots,A_k)$. МЛНП $\{A_{i_1},\ldots, A_{i_r}\}$ е подмножество на изходната система $\Rightarrow$ $U\subset W$. Всеки вектор от изходната система е линейна комбинация $A_j\in \ell(A_{i_1},\ldots, A_{i_r}),\ \ \forall j=1,\ldots,k$ $\Rightarrow$ $W\subset U$ откъдето получаваме, че $W=U$.
2. Получихме, че $\ell(A_{i_1},\ldots, A_{i_r})=W=\ell(A_1,\ldots,A_k)$ и векторите $\{A_{i_1},\ldots, A_{i_r}\}$ са линейно независими $\Rightarrow$те образуват базис на $\ell(A_1,\ldots,A_k)$, откъдето получаваме че $r(A_1,\ldots,A_k)=r=\dim \ell(A_1,\ldots,A_k).$

$\square$

4. Сума на подпространства

Знаем, че в ненулево линейно пространство V има различни подпространства и освен това ако се вземе сечението на две подпространство се получава пак подпространство.
Непосредствено се вижда, че обединението на две подпространство *не е* подпространство. За да се опише подпространството, което съдържа обединението на две подпространства се използва конструкцията на сума на подпространства.

Определение:
Нека V е линейно пространство над полето F и U и W са подпространства на V. Сума на подпространствата U и W се нарича: $$U+W=\{a+b\ |\ a\in U,\ b \in W\}.$$

Пример:
Нека в 4 мерното векторно пространство $\mathbb{R}^4$ разгледаме подпространствата $U=\ell(a_1,a_2)$ и $W=\ell(b_1,b_2)$, където
$$\begin{array}{cc}
a_1=(1,1,0,0), & a_2=(0,0,1,1) \\
b_1=(1,0,1,0), & b_2=(0,1,0,1)\\
\end{array}$$
Описанието на подпространствата може да бъде направено по следния начин $U=\{(x,x,y,y)\ |\ x,y \in \mathbb{R}\}$ и $W=\{(z,t,z,t)\ |\ z,t \in \mathbb{R}\}$. Тогава сумата на подпространствата е множеството $$U+W=\{(x+z,x+t,y+z,y+t)\ |\ x,y,z,t\in \mathbb{R} \}.$$

Забележка: По подобен начин може да се определи сума на повече от две подпространства. Ако V е линейно пространство и $U_1,\ldots,U_k$ са подпространства на V, тогава
$$U_1+\ldots+U_k=\{a_1+\ldots+a_k\ |\ a_i\in U_i,\ \ i=1,\ldots,k \}.$$

4.1. Свойства на сумата на подпространства

Твърдение:
Нека V е линейно пространство, като U и W са негови подпространства. Тогава е изпълнено:

1. $U+W$ е подпространство на V,
2. Изпълнено е, че $\ell(a_1,\ldots,a_k)+\ell(b_1,\ldots,b_s)=\ell(a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_s)$,
3. ако за подпространството T е в сила, че $U\subset T$ и $W\subset T$, тогава е изпълнено $U+W\subset T$,
4. сумата на подпространствата U и W е равна на сечението на всички подпространства на V, които съдържат обединението $U\cup W$ $$U+W=\bigcap_{ \{ U\cup W\}\subset T<V}T.$$

Доказателство:

1. Нека да разгледаме два произволни елемента от сумата на подпространствата $a=u_1+w_1$ и $b=u_2+w_2$. Тъй като U и W, като подпространства са затворени относно операциите, е изпълнено $\lambda a=\lambda u_1+\lambda w_1\in U+W$, както и $$a+b=(u_1+w_1)+(u_2+w_2)=(\underbrace{u_1+u_2}_{\in U})+(\underbrace{w_1+w_2}_{\in W})\in U+W$$По този начин получаваме, че $U+W$ е подпространство.
2. Нека да резгледаме по един елемент от всяка една от двете линейни обвивки $u \in U=\ell(a_1,\ldots,a_k)$, където $u=\lambda_1a_1+\ldots+\lambda_ka_k$, също и $w \in W=\ell(b_1,\ldots,b_s)\Rightarrow w=\mu_1b_1+\ldots+\mu_sb_s$. Тогава имаме $$\begin{array}{ccl} u+w&=&\lambda_1a_1+\ldots+\lambda_ka_k+\mu_1b_1+\ldots+\mu_sb_s\\ &\Downarrow&\\ U+W&\subset&\ell(a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_s)\\ \end{array}$$ От друга страна за произволен вектор $t\in\ell(a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_s)$ е изпълнено, че $$\begin{array}{c} \begin{array}{rcl} t&=&\underbrace{\beta_1a_1+\ldots+\beta_ka_k}_{\in \ell(a_1,\ldots,a_k)}+ \underbrace{\gamma b_1+\ldots+\gamma_sb_s}_{\in \ell(b_1,\ldots,b_s)}\\ \\ t&\in& \ell(a_1,\ldots,a_k)+\ell(b_1,\ldots,b_s)\\ \end{array}\\ \Downarrow\\ \ell(a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_s)\subset U+W\\ \end{array} $$Следователно $$\ell(a_1,\ldots,a_k)+\ell(b_1,\ldots,b_s)=\ell(a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_s)$$
3. Ако $T<V$ е подпространство, което съдържа и двете подпространства $U\subset T$, също и $W\subset T$, тогава за произволен елемент от сумата $U+W$ е изпълнено $$a=u+w\in U+W,\ \ \text{където }\ u\in U\subset T \text{ и } w\in W\subset T \Rightarrow a=u+w\in T\ \Rightarrow U+W\subset T. $$
4. Сумата $U+ W$ се съдържа във всички подпространства T , които съдържат $U\cup W$, затова $U+ W$ се съдържа в сечението на всички такива подпространства $$U\cup W\subset T\Rightarrow U+W\subset T \Rightarrow U+W \subset \bigcap_{(U\cup W)\subset T}T $$ Ако $L=U+W$, тогава L съдържа обединението $U\cup W$: $$\left. \begin{array}{c} u\in U\Rightarrow u=u+\underbrace{\mathcal{O}}_{\in W}\in U+W\\ w\in W\Rightarrow w=\underbrace{\mathcal{O}}_{\in U}+w\in U+W\\ \end{array}\right \rbrace \Rightarrow \{U\cup W\}\subset U+W$$ Получаваме, че $L=U+W$ е едно от подпространствата, които участват в сечението и следователно $\bigcap_{T\supset U,W}T\subset U+W$. По този начин установихме, че $$ U+W = \bigcap_{(U\cup W)\subset T}T $$

$\square$

4.2. размерност на сумата

Теорема:
Нека V е линейно пространство над полето F, U и W са крайномерни подпространства на V. Тогава е изпълнено
$$\dim(U+W)=\dim U +\dim W-\dim (U\cap W).$$

Доказателство:
Тъй като U и W са крайномерни пространства, затова и тяхното сечение $U\cap W$ също е крайномерно и нека $e_1,\ldots,e_s$ е базис на $U\cap W$ и $\dim (U\cap W)=s$. Ако сечението е нулевото пространство $U\cap W=\{\mathcal{O}\}$, тогава не се взема никакъв вектор за сечението.

Допълва се базиса на сечението веднъж до базис на подпространството U и от друга страна се допълва до базис на W:
$$\begin{array}{ccc}
e_1,\ldots,e_s,a_1,\ldots a_m & \text{- базис на } U, &\dim U=s+m,\\
e_1,\ldots,e_s,b_1,\ldots b_k & \text{- базис на } W, &\dim W=s+k.\\
\end{array}$$
Ще докажем, че $e_1,\ldots,e_s,a_1,\ldots a_m,b_1,\ldots b_k$ образува базис на сумата на подпространствата $U+W$.

- За векторите от разглежданите базиси е изпълнено $e_i\in U\cap W \subset U+W$, освен това $a_j\in U\subset U+W$, както и $b_l\in W \subset U+W$. Следователно $\ell(e_1,\ldots,e_s,a_1,\ldots a_m,b_1,\ldots b_k)\subset U+W$. Нека разгледаме произволен елемент от сумата $t=u+w\in U+W$, където $u=\lambda_1e_1+\ldots+\lambda_se_s+\alpha_1a_1+\ldots+\alpha_ma_m\in U$ и $w=\mu_1e_1+\ldots+\mu_se_s+\beta_1b_1+\ldots+\beta_kb_k\in W$. От това изразяване, получаваме $$\begin{array}{rcl} t&=&u+w=\\ &=&(\lambda_1+\mu_1)e_1+\ldots+(\lambda_s+\mu_s)e_s+\\ &&\ \ \ +\alpha_1a_1+\ldots+\alpha_ma_m+\\ &&\ \ \ +\beta_1b_1+\ldots+\beta_kb_k.\\ &\Downarrow&\\ t&\in&\ell(e_1,\ldots,e_s,a_1,\ldots a_m,b_1,\ldots b_k) \end{array}$$ По този начин се получи, че $U+W\subset \ell(e_1,\ldots,e_s,a_1,\ldots a_m,b_1,\ldots b_k)$. Следователно $U+W = \ell(e_1,\ldots,e_s,a_1,\ldots a_m,b_1,\ldots b_k).$
- Ще докажем, че векторите $e_1,\ldots,e_s,a_1,\ldots a_m,b_1,\ldots b_k$ са линейно независими. За целта разглеждаме едно изразяване на нулевия вектор $$\underbrace{\gamma_1e_1+\ldots+\gamma_se_s}_{=x\in U\cap W } +\underbrace{\delta_1a_1+\ldots+\delta_ma_m}_{=y\in U}+\underbrace{\nu_1b_1+\ldots \nu_k b_k}_{=z\in W} =\mathcal{O}$$ За векторите $x\in U\cap W$, $y\in U$ и $z\in W$ е изпълнено $x+y+z=\mathcal{O}$, следователно $x+y=-z$. Изпълнено е, че $x+y\in U$, както и $-z\in W$ и тъй като те са равни, затова тези вектори са от сечението на двете подмножества $x+y=-z\in U\cap W$. Следователно тези вектори могат да се представят като линейна комбинация на базисните вектори на $U\cap W$ и затова можем да напишем $x+y=-z=\omega_1e_1+\ldots+\omega_se_s$. Изразяваме по следния начин $$\omega_1e_1+\ldots+\omega_se_s+\nu_1b_1+\ldots \nu_k b_k=\mathcal{O}.$$ Векторите $e_1,\ldots,e_s,b_1,\ldots b_k$ са линейно независими, защото са базис на подпространството W и затова всички коефициенти на тази линейна комбинация са нули $\omega_1=0,\ldots,\omega_s=0,\nu_1=0,\ldots \nu_k=0$, следователно е изпълнено $x+y=\mathcal{O}$. По този начин установяваме и за останалите коефициенти, че са равни на нула $\gamma_1=0,\ldots,\gamma_s=0$, както и $\delta_1=0,\ldots,\delta_m=0$. Следователно $e_1,\ldots,e_s,a_1,\ldots a_m,b_1,\ldots b_k$ са линейно независими.

По този начин установихме, че $e_1,\ldots,e_s,a_1,\ldots a_m,b_1,\ldots b_k$ е базис на $U+W$. Следователно е изпълнено
$$\begin{array}{ccl}
\dim(U+W)&=&s+m+k=\\
&=&(s+m)+(s+k)-s=\\
&=&\dim U+\dim W-\dim(U\cap W).
\end{array}$$

$\square$

<u>Пример:</u>
В разгледания на предната страница пример в $\mathbb{R}^4$, където $U=\ell(a_1,a_2)$ и $W=\ell(b_1,b_2)$, където $$\begin{array}{cc}
a_1=(1,1,0,0), & a_2=(0,0,1,1) \\
b_1=(1,0,1,0),& b_2=(0,1,0,1)\\
\end{array}$$ Елементите на подпространствата се изразяват по следния начин
$U=\{(x,x,y,y)\ |\ x,y \in \mathbb{R}\}$ и $W=\{(z,t,z,t)\ |\ z,t \in \mathbb{R}\}$
Тогава $$\begin{array}{ccl}
U+W&=&\{(x+z,x+t,y+z,y+t)\ |\ x,y,z,t\in\mathbb{R} \}=\\
&=&\ell(a_1,a_2,b_1,b_2)
\end{array}$$ Сечението на двете подпространства е едномерно и $U\cap W=\ell(c),$ където $c=(1,1,1,1)$. Можем да определим размерността на сумата $\dim (U+W)=2+2-1=3.$
Следвайки начина на доказване на теоремата, можем да намерим базис на сумата на подпространствата. Имаме следните базиси

$\{c,a_1\}$ образува базис на U,
$\{c,b_1\}$ образува базис на W,
$\{c,a_1,b_1\}$ образува базис на $U+W$.

4.3. Директна сума

Определение:
Нека U и W са подпространства на линейното пространство V. Сумата на подпространствата $U+W$ се нарича директна сума - когато всеки вектор $a\in U+W$ може да се изрази **по единствен начин** във вид $a=u+w, \ u\in U,\ w\in W$.
Когато сумата на подпространствата е директна сума, записваме $U\oplus W.$

Пример:
Нека линейно пространство V има базис $b_1,\ldots,b_n$ и нека $1\leq k<n$.
За подпространствата $U=\ell(b_1,\ldots,b_k)$ и $W=\ell(b_{k+1},\ldots,b_n)$ е вярно, че сумата на тези подпространства е директна сума.

- Нека $a\in U+W$ е представено като $a=u_1+w_1$ и освен това като $a=u_2+w_2$, където $u_1,u_2\in U$ и $w_1,w_2\in W$.
  Тогава е изпълнено, че $$u_1+w_1=u_2+w_2 \ \Rightarrow\ u_1-u_2=w_2-w_1\in U\cap W $$
  - Нека $t\in U\cap W,$ следва че $t=\lambda_1b_1+\ldots+\lambda_kb_k=\mu_{k+1}b_{k+1}+\ldots+\mu_nb_n$, откъдето получаваме, че $\lambda_1b_1+\ldots+\lambda_kb_k-\mu_{k+1}b_{k+1}-\ldots-\mu_nb_n=\mathcal{O}$. Векторите $b_1,\ldots,b_n$ са линейно независими, откъдето получаваме, че $\lambda_1=0,\ldots,\lambda_k=0,\mu_{k+1}=0,\ldots,\mu_n=0$ и следователно $U\cap W=\{\mathcal{O}\}$.
- От това получаваме, че $u_1-u_2=w_2-w_1=\mathcal{O}$.

Получихме, че всеки вектор от $U+W$ по единствен начин се представя като вектор от U плюс вектор от W, следователно сумата на подпространствата е директна сума и е изпълнено, че $U\oplus W=V.$

4.4. Т (за директна сума)

Начина, по който се доказа, че имаме директна сума в предния пример, е валиден за произволни пространства. В сила е следната теорема:

Теорема:
Нека U и W са подпространства на линейното пространство V. Сумата $U+W$ е директна сума, тогава и само тогава когато $U\cap W=\{\mathcal{O}\}$.

Доказателство:

$\boxed{\Rightarrow}$ Нека сумата на двете подпространства е директна сума $U+W=U\oplus W$. За произволен елемент от сечението $x\in U\cap W$, има две очевидни представяния като сума на елемент от подпространството U плюс елемент от W и щом сумата на подпространствата е директна, трябва тези две представяния да изразяват едно и също:

$$\left. \begin{array}{ccc}
x=x+\mathcal{O},& \text{където } x\in U,&\mathcal{O}\in W\\
x=\mathcal{O}+x,& \text{където }\mathcal{O}\in U,& x\in W\\
\end{array}\right\rbrace \Rightarrow x=\mathcal{O}
$$

Получихме, че единственият елемент от сечението може да бъде нулевия вектор $U\cap W=\{\mathcal{O}\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Нека е изпълнено $U\cap W=\{\mathcal{O}\}$ и да разгледаме произволен елемент от сумата на подпространствата $a\in U+W$. Ако е изпълнено
$a=u_1+w_1$ и $a=u_2+w_2$, тогава е изпълнено $$u_1+w_1=u_2+w_2 \ \Rightarrow\ u_1-u_2=w_2-w_1\in U\cap W=\{\mathcal{O}.\}$$
Получихме, че $u_1=u_2$ и $w_1=w_2$, следователно векторът a по единствен начин се представя като сума на вектори от U и W.

$\square$

Следствие:

Ако U и W са крайномерни подпространства на линейното пространство V и тяхната сума е директна сума, тогава $$\dim (U\oplus W)=\dim U+\dim W.$$