$M_{n,m}(\mathbb{R})$ $\qquad M^* = \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}^+} M_{n,m}(\mathbb{R})$

S език def = $\qquad$ Света на S е M^*

и L $s(a,b,c)$

$p(a,b,c)$

$vec(a)$

$p^S(A,B,C) \iff A \cdot B = C$

$s^S(A,B,C) \iff A$ и B еднакви ред и $A+B=C$

$vec^S(A) \iff A$ е вектор ред?

Определение

1) $M_{1,1}(\mathbb{R}) \overset{def}{\Rightarrow} \forall a \forall b \exists c (vec^S(a) \& vec^S(b) \& vec^S(c)) \& p^S(a,b,c))$

2) $\langle A,B,C \rangle$ // $\exists \alpha_1, \alpha_2 \; (\alpha_1 A + \alpha_2 B = C)$ //

$\exists \alpha_1 \exists \alpha_2 \in M_{1,1}(\mathbb{R})$ //скалар// $\Rightarrow \exists A' \exists B' \; (p^S(\alpha_1, A, A') \& p^S(\alpha_2, B, B') \& (A' \in M_{1,1}(\mathbb{R}) \& A \in M_{1,1}(\mathbb{R}))$

$\langle A,B,C \rangle \iff (\forall \alpha_1 \forall \alpha_2)(\exists A' \exists B')(((\alpha_1 \in M_{1,1}(\mathbb{R}) \& \alpha_2 \in M_{1,1}(\mathbb{R})) \& (p^S(\alpha_1, A, A') \& p^S(\alpha_2, B, B')) \& s^S(A', B', C)))$

3) $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $M_{1,n}(\mathbb{R})$

$M_{1,n}(\mathbb{R}) \iff \forall A \in M_{1,n}(\mathbb{R}), \forall B \in M_{1,n}(\mathbb{R}) \exists C \exists D$

$vec\, A \;\&\; vec\, B \;\&\; (p^S(A,B,C) \& C \in M_{1,1}(\mathbb{R})) \& (s^S(A,B,D) \& vec(D))$

4) $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\{(v_1 \ldots v_n) \mid (v_1 \ldots v_n)$ дължина вектор-ред на $\mathbb{R}^n\} = B$

$//\mathbb{R}^n = (v_1 \ldots v_n)//$

$B \Leftrightarrow \alpha_1 \in B$

---

1 зад $P(x) \Leftrightarrow vec(x) \wedge \exists y(p(x,y,x))$

$\boxed{\Rightarrow}$ $x \in M_{1,1}(x) \Rightarrow vec(x)$ е вярно, защото може да се разгледа като вектор стълб (x_1)

$y \in M_{r,k}(\mathbb{R})$ $\quad (x_1) \cdot \begin{pmatrix} y_{11} & \ldots & y \\ \vdots & & \\ y & \ldots & y \end{pmatrix} = (x_1) \Rightarrow y = (y_{11}) \in M_{1,1}(\mathbb{R})$

вярно е само при $r = k = 1$

$\boxed{\Leftarrow}$ $vec(x) \Rightarrow x = (x_1 \ldots x_n)$ $\quad (x_1 \ldots x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_{11} & \ldots & y_{1k} \\ y_{r1} & & y_{rk} \end{pmatrix} = (x_1 \ldots x_n)$

$\exists y(p(x,y,x)) \Leftrightarrow x \cdot y = x$

$y \in M_{r,k}(\mathbb{R})$ това е възможно при $k = 1$

$\Rightarrow (x_1 \ldots x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{r1} \end{pmatrix} = (x_1 \ldots x_n)$

Но $x \notin M_{1,1}(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ не е вярно

д) $P(x) \Leftrightarrow vec(x) \& \exists y(p(x,y,y))$

$\boxed{\Rightarrow}$ $x \in M_{1,1}(x) \Rightarrow vec(x)$ е изпълнено.

$\exists y \in M_{n,k}(\mathbb{R})$, $\quad x \circ y = (x) \begin{pmatrix} y_{11} & \ldots & y_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & \ldots & y_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & \ldots & y_{1k} \\ y_{n1} & \ldots & y_{nk} \end{pmatrix}$ което е възможно при $n = 1$

$= y \in M_{1k}(\mathbb{R})$ но това y съществува

$\boxed{\Leftarrow}$ $vec(x) \& \exists y(p(x,y,y)) \Rightarrow x = (x_1 \ldots x_n)$ и $\exists y \in M_{mk}$

$(x_1 \ldots x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_{11} & \ldots & y_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & \ldots & y_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & \ldots & y_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & \ldots & y_{mk} \end{pmatrix}$, но това е възможно само при $m = 1$.

, но тогава y отдясно на „$=$" ще е вектор ред

$\Rightarrow k = 1$ и $n = 1$ $\Rightarrow$ Да, правилно е

в) $f_{1,1}(x) \Leftrightarrow vec(x) \& \forall y(p(x,y,y))$ $\rightarrow$ това е невъзможно, защото значи че $\forall y \in M_{n,k}(q)$ $\; x \cdot y = y$, при $x \in M_{1,1}(\mathbb{R})$.

не е правилно

2) $P_{1,1}(X) \Leftrightarrow \exists y (p(x,x,y) \& vec(x))$

$\boxed{\Rightarrow}$ $X \in M_{1,1}(\mathbb{R})$, $\exists y \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ $p(x,x,y)$, но $x . x = y$ е във вида $(x_1 .. x_n)(x_1 .. x_n) = (y_1 .. y_n)$, но това е вярно при $n = 1$ $\Rightarrow (x_1)(x_1) = (y_1)$ и $y_1 \in M_{1,1}(\mathbb{R})$

$vec(X)$ е вярно защото $(x_1) \in M_{1,1}(\mathbb{R})$ може да се гледа като вектор стълб (x_1), $x_1 \in \mathbb{R}$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists y : p(x,x,y) \& vec(x)$

$\Rightarrow$ $X \in M_{1,n}(\mathbb{R})$, $X = (x_1 .. x_n)$ и $(x_1 .. x_n).(x_1 .. x_n) = y$
но това е възможно при $n = 1$

2 зад $\Rightarrow X \in M_{1,1}(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ Да правилно

Same size $(x,y) \leftrightarrow \exists z (s(x,y,z))$ е подходящ защото:

$\exists x \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, $\exists y \in M_{q,k}(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ ако x и y са един и същ размер то $n = q$ и $m = k$

при $s(x,y,z) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1,m} \\ \vdots & & \\ x_{n1} & \dots & x_{n,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{n,m} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & \dots & y_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & \dots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \dots & z_{nm} \end{pmatrix}$

но това е изпълнено за някое $z \in M_{n,m}$

Ако е за $\forall z$, то няма да е възможно защото z може да е с други размери $(z \in M_{w,e}(\mathbb{R}))$ $w \neq n$, $e \neq m$

3. $P_{lcomb}(A,B,C) \iff C \in \ell(A,B)$

$C = \alpha_1 A + \alpha_2 B$ $\quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $A,B,C \in M_{1,k}(\mathbb{R})$

Нека за всяка точка $vec(A) \& vec(B) \& vec(C)$ е изпълнена

1) $P_{lcomb}(x,y,z) \iff vec(x) \wedge s(x,y,z)$

↳ Това значи че $x + y = z$, което не винаги е вярно

⇒ грешно

2) $P_{lcomb}(x,y,z) \iff vec(x) \& vec(y) \& \exists u \exists u_1 \exists v \exists v_1 \, (p(u,x,u_1) \& p(v,y,v_1) \& p(u_1,v_1,z))$

↳ Това не е вярно, защото при $z \in \ell(x,y) \iff u.x + v.y = z$ тук u и v са скалари, а в горната дефиниция u, v са вектор стълбове $\begin{pmatrix} u \\ \vdots \\ u \end{pmatrix} . (x \dots x) = (u_1 \dots u_1)$ и не винаги като скалари

⇒ грешно

3) $P_{lcomb}(x,y,z) \overset{def}{\iff} \exists u \exists u_1 \exists v \exists v_1 \, (P_{1,1}(u) \wedge P_{1,1}(v) \wedge p(u,x,u_1) \wedge p(v,y,v_1) \wedge s(u_1,v_1,z))$

$\boxed{\Rightarrow}$ $P_{lcomb}(x,y,z) \to \alpha_1 x + \alpha_2 y = z$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

тук α_1 и α_2 може да се разгледат като скаларите

$\to \alpha_1, \alpha_2 \in M_{1,1}(\mathbb{R})$. Нека $\alpha_1 = u$, $\alpha_2 = v$

$\to u.x = u_1$ или $p(u,x,u_1) \to$ това значи $vec(u_1)$

$\to$ аналогично за $v.y = v_1 \iff p(v,y,v_1) \to vec(v_1)$

$\to s(u_1, v_1, z)$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists u \exists u_1 \exists v \exists v_1$ и $P_{1,1}(u) \wedge P_{1,1}(v) \to$ u и v може да се гледат като скалари

и $p(u,x,u_1) \& p(v,y,v_1)$ е като $u.x = u_1$ и $v.y = v_1$ и това е вярно при $u, v \in M_{1,1}(\mathbb{R})$

като после $s(u_1,v_1,z)$ е $u_1 + v_1 = z$

$\to u_1 + v_1 = u.x + v.y = z$ където $u, v \in M_{1,1}(\mathbb{R})$

тогава правилно е предишната лин. обв.

⇒ 3) е вярно

4. $Lecomb(x_1, x_2 \dots x_n, Z) \Leftrightarrow vec(x_1) \& \dots \& vec(x_n)$
$\rightarrow \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = Z$
$\rightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \in M_{1,1}(\mathbb{R})$

Формально: $Lecomb(x_1 \dots x_n, Z) \xleftrightarrow{def} \exists \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n \, \exists \alpha_1' \dots \alpha_n'$

$(P_{1,1}(\alpha_1) \& P_{1,1}(\alpha_2) \& \dots \& P_{1,1}(\alpha_n)) \& p(\alpha_1, x_1, \alpha_1') \& p(\alpha_2, x_2, \alpha_2') \dots$
$\& p(\alpha_n, x_n, \alpha_n')$

...