# 导数综合 1-40

1．设函数 $f\left(x\right)=mx-\mathrm{e}^{x}+2,\left(m\in\mathrm{R}\right)$，$f'\left(x\right)$ 为 $f\left(x\right)$ 的导数．

(1)讨论函数 $f\left(x\right)$ 的最值；

(2)若 $a$ 为整数，$m=1$，且 $\forall x\in\left(0,+\infty\right)$，不等式 $\left(x-a\right)f'\left(x\right)<x+1$ 恒成立，求 $a$ 的最大值．

2．已知函数 $f\left(x\right)=\left(x-a\right)\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{2}x^{2}+x$．

(1)当 $a=2$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间和极值；

(2)当 $a=1,x\geq 0$ 时，证明：$f(x)\geq x-\frac{1}{3}x^{3}-1$；

(3)当 $a=1,x\geq 1$ 时，$f\left(x\right)\geq x-\frac{1}{2}x^{2}+\mathrm{e}x-\mathrm{e}+m\left(x\ln x-x+1\right)$ 恒成立，求实数 $m$ 的取值范围.

3．已知函数 $f(x)=\ln x-ax+1$．

(1)若 $f(x)\leq 0$ 恒成立，求实数 $a$ 的取值范围；

(2)证明：当 $x\geq 1$ 时，$e^{x}>x+1+2x\ln x$．

4．已知函数 $f\left(x\right)=x\cdot e^{x}$，$g\left(x\right)=x+\ln x$，

(1)求函数 $f\left(x\right)=x\cdot e^{x}$ 的最值；

(2)若 $f\left(x\right)-g\left(x\right)\geq\left(b-2\right)x+1$ 恒成立，求 $b$ 的取值范围.

5．已知函数 $f\left(x\right)=x^{2}-a\mathrm{e}^{x}$ .

(1)当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 过点 $\left(0,-1\right)$ 的切线方程；

(2)若函数 $f\left(x\right)$ 有 2 个极值点 $x_1$， $x_2$，且 $x_1<x_2$ .

（i）求实数 $a$ 的取值范围；

（ii）求证： $x_1+3x_2>4$ .

6．已知函数

$f\left(x\right)=2\mathrm{e}^{x}-x^{2}+mx-1\left(m\in\mathrm{R}\right)$，$g\left(x\right)=f\left(x\right)+x^{2}$.

(1)当 $m=-2$ 时，求 $g\left(x\right)$ 的极值；

(2)若对 $\forall x\in\left(0,+\infty\right)$,不等式 $f\left(x\right)\geq 0$ 恒成立，求 $m$ 的取值范围；

(3)若 $g\left(x\right)$ 有两个零点 $x_1$，$x_2$，且 $x_1<x_2$,证明：

$2\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}+m>0$ .

7．已知函数 $f\left(x\right)=x\ln x-ax+1$.

(1)求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

(2)若函数 $f\left(x\right)$ 有且仅有两个零点，求实数 $a$ 的取值范围；

(3)若 $x_1,x_2$ 是两个不相等的正数，证明：

$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)>2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

8．已知函数 $f\left(x\right)=x-\ln x-m$ .

(1)若 $f\left(x\right)$ 有两个零点 $x_1,x_2$，且 $x_2>x_1$，求 $m$ 的取值范围；

(2)在（1）的条件下，求证：$x_1+x_2>\frac{2\left(m-1\right)}{\ln m}$ .

9．已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$， $g(x)=\ln x$ .

(1)设 $h(x)=xf(x)$，求函数 $h(x)$ 的极值；

(2)若 $kf(kx)\geq g(x)$ 恒成立，求实数 $k$ 的取值范围；

(3)若直线 $l$ 与曲线 $f(x),g(x)$ 分别相切于点 $\left(x_1,f\left(x_1\right)\right),\left(x_2,g\left(x_2\right)\right)$，且 $x_1>1$．求证： $x_1-x_2>1$ .

10．已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1+2\ln x}{x^2}$.

(1)设函数 $g\left(x\right)=\mathrm{e}^{kx}-\dfrac{1}{kx}\left(k>0\right)$，若 $f\left(x\right)\leq g\left(x\right)$ 恒成立，求 $k$ 的最小值；

(2)若方程 $f\left(x\right)=m$ 有两个不相等的实根 $x_1$ 、 $x_2$，求证：

$\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}<\dfrac{2\left(1-\ln m\right)}{m}$.

11．已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-ax$.

(1)求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

(2)若 $f\left(x\right)$ 存在两个不同的零点 $x_1$， $x_2$ 且 $x_1<x_2$.求证：

$\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}<\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

12．已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax$ （e是自然对数的底数）.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $g(x)=\mathrm{e}^x(x-1)-a\ln x+f(x)$ 有两个零点分别为

$x_1,x_2$.

①求实数 $a$ 的取值范围；

②求证： $x_1x_2>\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^{x_1+x_2}}$.

13．已知函数 $f(x)=\dfrac{e^{x-1}}{x}$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)当 $x>0$ 时，$x^2f(x)\geq(a+1)x+\ln x$ 恒成立，求实数 $a$ 的取值范围；

(3)设 $m$，$n$ 是两个不相等的正数，且 $m+\ln n=n+\ln m$，证明：$m+n+\ln(mn)>2$.

14．已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\cos x}{x},g\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-ax$.

(1)求函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程；

(2)若函数 $f\left(x\right)$ 和函数 $g\left(x\right)$ 的图象没有公共点，求实数 $a$ 的取值范围.

15．已知函数 $f\left(x\right)=ax+\cos x\left(0\le x\le\pi,\ a\in\mathbf{R}\right)$.

(1)当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，求 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间；

(2)若函数 $f\left(x\right)$ 恰有两个极值点，记极大值和极小值分别为 $m,n$，求 $2m-n$ 的取值范围.

16．已知函数 $f\left(x\right)=x+a\sin x$.

(1)当 $a=-\sqrt{2}$ 时，求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

(2)当 $a=1$ 时.

（i）证明：$\forall x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$，$f\left(x\right)<3x-\tan x$；

（ii）当 $x\ge0$ 时，$f\left(x\right)\ge2x\left(1-\dfrac{tx}{\pi}\right)$，求实数 $t$ 的取值范围.

17．(1)证明：$\cos 2x+2x<\frac{\pi}{2}$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上恒成立.

(2)若$n>2$，证明：函数$f\left(x\right)=\frac{2}{\cos 2x}-n$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上恰有1个零点.

(3)试讨论函数$g\left(x\right)=\mathrm{e}^{2x}-\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$上的零点个数.

18．已知函数$f(x)=9\cos x+a\ln(x+1)(a>0)$.

(1)当$a=1$时，求$f(x)$的图象在$x=0$处的切线方程；

(2)若$f(x)$在区间$\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$内存在极值点$x_0$，求$a$的取值范围；

(3)证明：当$0<a<6$时，$f(x)$在区间$\left(-1,\frac{3\pi}{2}\right)$内有且仅有3个零点.

参考数据：$\ln\left(\pi+1\right)\approx 1.42$.

19．已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}+a\cos x$．

(1)若函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上恰有两个极值点，求实数 $a$ 的取值范围；

(2)当 $a\geq 1$ 时．

证明：（i）若 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $f(x)>2+x$ 恒成立；

（ii）若 $a\leq \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-2-\dfrac{\pi}{2},x\in(0,+\infty)$，则 $f(x)>2+x$ 恒成立．

20．已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}\left(\sin x+\cos x\right)-a,a\in\mathbf{R}$．

(1)求 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 的最大值和最小值；

(2)当 $a>0$ 时，讨论定义在 $\left[0,\pi\right]$ 上的函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\mathrm{e}^{x}\cos x-ax+a$ 的单调区间的个数，并求 $g\left(x\right)$ 的零点个数的最大值；

(3)求证：当 $a>\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$ 时，对于 $\forall n\in\mathbf{N}^{*},\mathrm{e}\sin 1+\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\sin\dfrac{1}{2}+\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}\sin\dfrac{1}{3}+\cdots+\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\sin\dfrac{1}{n}<a\left(1+\ln n\right)$．

21．函数 $f(x)=-a^{2}\ln x+x^{2}+ax$ ， $a\in\mathrm{R}$ .

(1)方程 $f(x)=m$ 有两解 $x_{1}$， $x_{2}$，求证： $f'\left(\frac{x_{1}+x_{2}}{2}\right)>0$；

(2)证明： $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}<\frac{1}{2}\ln n\left(n\geq 2,n\in\mathbf{N}^{*}\right)$.

22．已知函数 $f(x)=x-a\ln x-a,g(x)=x-\ln(x+1)+m$ .

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2)若对 $0<a<1$，函数 $F(x)=g(x)-f(x)-a$ 恰有两个零点，求实数 $m$ 的取值范围;

(3)求证:对于任意正整数 $n$,有 $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}<\ln(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

23．已知函数 $f\left(x\right)=x\ln x$， $g\left(x\right)=\dfrac{ax^{2}-1}{2}\left(a>0\right)$.

(1)直线 $l$ 过点 $P\left(0,-1\right)$ 且与 $y=f\left(x\right)$ 相切，求直线 $l$ 的方程；

(2)若 $f\left(x\right)<g\left(x\right)$ 对 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 恒成立，求 $a$ 的取值范围；

(3)证明： $\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{4n}}>2\left(n\in\mathbf{N}^{*}\right)$.

24．函数 $f\left(x\right)=a\ln x+\dfrac{1}{2}x^{2}-\left(a+1\right)x+\dfrac{3}{2}(a>0)$.

(1)求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

(2)当 $a=1$ 时，若 $f\left(x_{1}\right)+f\left(x_{2}\right)=0$，求证： $x_{1}+x_{2}\geq 2$；

(3)求证：对于任意 $n\in\mathbf{N}^{*}$ 都有 $2\ln(n+1)+\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i-1}{i}\right)^{2}>n$ .

25．已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}\sin x$， $g(x)=\ln(x+1)$ .

(1)求函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处的切线方程；

(2)求证：当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时， $f\left(x\right)>\mathrm{e}^{x}g\left(x\right)$；

(3)求证：

$\frac{1}{2}\ln\left(n+1\right)<\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{4}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}<\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)($

.

26．设函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x^{2}-a\ln x$，其中 $a\in\mathrm{R}$ .

(1)若函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 上单调递增，求实数 $a$ 的取值范围；

(2)设正实数 $\lambda_1$， $\lambda_2$ 满足 $\lambda_1+\lambda_2=1$，当 $a>0$ 时，求证：对任意的两个正实数 $x_1$， $x_2$，总有

$f\left(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2\right)\le\lambda_1f\left(x_1\right)+\lambda_2f\left(x_2\right)$ 成立；

(3)当 $a=2$ 时，若正实数 $x_1$， $x_2$， $x_3$ 满足 $x_1+x_2+x_3=3$，求 $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)$ 的最小值.

27．已知函数 $f\left(x\right)=\frac{a}{x^{2}},g\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}$.

(1)若 $h\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)$ 在 $\left[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$ 单调递增，求实数 $a$ 的取值范围；

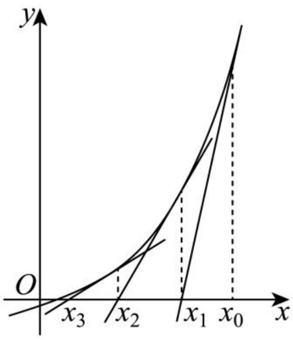
(2)若 $g\left(x\right)$ 的极值点为 $x_0$，设 $\varphi\left(x\right)=x\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]$，且 $\varphi\left(x_1\right)=\varphi\left(x_2\right)=3,\left(x_1\neq x_2\right)$ 证明：$x_0x_1x_2<a\mathrm{e}^{3}$.

28. 已知 $a>1$，$x_0$ 是函数 $f\left(x\right)=x\mathrm{e}^{x}-a\sin x$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的极值点.

(1)若函数 $y=-\mathrm{e}^{x}\tan x$ 的图象过点 $\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$，求 $x_0$；

(2)求证：$f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,+\infty\right)$ 上存在两个零点 $x_1,x_2$，且 $x_1+x_2<2x_0$.

29．牛顿在《流数法》一书中，给出了代数方程的一种数值解法——牛顿法. 具体做法如下：如图，设 $r$ 是 $f(x)=0$ 的根，首先选取 $x_0$ 作为 $r$ 的初始近似值，若 $f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与 $x$ 轴相交于点 $(x_1,0)$，称 $x_1$ 是 $r$ 的一次近似值；用 $x_1$ 替代 $x_0$ 重复上面的过程，得到 $x_2$，称 $x_2$ 是 $r$ 的二次近似值；一直重复，可得到一列数：$x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$．在一定精确度下，用四舍五入法取值，当 $x_{n-1},x_n\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$ 近似值相等时，该值即作为函数 $f(x)$ 的一个零点 $r$．




(1)若 $f(x)=x^3+3x^2+x-3$，当 $x_0=0$ 时，求方程 $f(x)=0$ 的二次近似值（保留到小数点后两位）；

(2)牛顿法中蕴含了“以直代曲”的数学思想，直线常常取为曲线的切线或割线，求函数 $g(x)=\mathrm{e}^x-3$ 在点 $(2,g(2))$ 处的切线，并证明：$\ln 3<1+\frac{3}{\mathrm{e}^2}$；

(3)若 $h(x)=x(1-\ln x)$，若关于 $x$ 的方程 $h\left(x\right)=a$ 的两个根分别为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，证明：$x_2-x_1>\mathrm{e}-\mathrm{e}a$．

30．已知函数 $f\left(x\right)=\left(1-x\right)\mathrm{e}^{ax}$．

(1)当 $a=1$ 时，求证：$f\left(x\right)-1\le 0$；

(2)当 $a=2$ 时，已知 $x_1$，$x_2$ 是两个不相等的正数且 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，求证：$1-\frac{1}{\mathrm{e}}<x_1+x_2<1$．

31．已知函数 $f(x)=ae^x-x^2(a\in R)$ ，若 $f(x)$ 有两个不同的极值点 $x_1$， $x_2$，且 $x_1<x_2$.

（1）求实数 $a$ 的取值范围；

（2）证明： $x_2<\frac{2}{a}$；

（3）证明： $\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}<\frac{2}{a}-1$.

32．已知函数 $f(x)=x\ln x, g(x)=x^2-1$.

(1)求证：当 $a\geq\frac{1}{2}$ 时，$|f(x)|\leq a|g(x)|$;

(2)已知函数 $h(x)=|f(x)|-b$ 有 3 个不同的零点 $x_1,x_2,x_3\left(x_1<x_2<x_3\right)$，

（i）求证：$x_1^2+x_2^2>\frac{2}{\mathrm{e}^2}$;

（ii）求证：$\sqrt{1+2b}-\sqrt{1-2b}<x_3-x_2<b\,\mathrm{e}$($\mathrm{e}=2.71828\cdots$是自然对数的底数).

33．设 $a_n$ 是函数 $f_n\left(x\right)=x^n+nx-1$ 的零点，$n\in N^*$，$x\in\left(0,+\infty\right)$

（I）求证：$a_n\in\left(0,1\right)$，且 $a_{n+1}<a_n$；

（II）求证：$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2<1$

34．已知函数 $f\left(x\right)=x\mathrm{e}^{x-1}-a$ .

(1)若 $a\in\mathrm{R}$，讨论 $f\left(x\right)$ 的零点的个数；

(2)若 $a$ 为正整数 $n$，记此时 $f\left(x\right)$ 的唯一零点为 $x_n$，证明：

（i）数列 $\left\{x_n\right\}$ 是递增数列；

（ii）$2\left(\sqrt{n+1}-1\right)<\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}$ .

35．已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{1-x}-ax$， $a\in\mathbf{R}$．

(1)讨论 $f\left(x\right)$ 的零点个数；

(2)若 $a$ 为正整数 $n$，记此时 $f\left(x\right)$ 的零点为 $x_n$.证明：

$2\ln\frac{n+2}{2}<x_1+x_2+\cdots+x_n<2\sqrt{n}$．

36．已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x$．

(1)若对任意的 $x$， $af\left(x\right)\geq x$，求实数 $a$ 的取值范围；

(2)设 $g_n\left(x\right)=xf\left(x-1\right)-n$，

（i）对任意正整数 $n$，证明：函数 $g_n\left(x\right)$ 有唯一的零点 $x_n$；

（ii）证明：$2\left(\sqrt{n+1}-1\right)<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\leq\frac{1}{2}\left(n+1+\ln n\right)$.

37．已知$a$、$b\in\left(0,+\infty\right)$，函数$f\left(x\right)=e^{x-a}-\sqrt{2}\sin x$，$g\left(x\right)=b\sqrt{2x}$．

(1)求$f\left(x\right)$在$x=\dfrac{\pi}{4}$处切线的斜率；

(2)对任意$x\geq 0$，都有$f(x)\geq 0$，求$a$的取值范围；

(3)若$\exists x_0>0$，使得$f\left(x_0\right)=g\left(x_0\right)$，求证：$2e^{2a}\left(b^2+1\right)>e$.

38．双曲正余弦函数是数学中重要的超越函数，其定义基于指数函数的线性组合：双曲正弦函数定义为$\sin h\left(x\right)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，双曲余弦函数定义为$\cos h\left(x\right)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$．

(1)求双曲余弦函数$\cos h\left(x\right)$在$x=0$处的切线方程；

(2)令$f\left(x\right)=\cos h\left(x\right)-\cos x$，请讨论$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$的单调性；

(3)证明：$2\tan\dfrac{1}{2}\cos h\left(\dfrac{1}{2}\right)+3\tan\dfrac{1}{3}\cos h\left(\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+n\tan\dfrac{1}{n}\cos h\left(\dfrac{1}{n}\right)>n+\dfrac{1}{6n}-\dfrac{7}{6}\left(n>1,n\in\mathbf{N}^*\right)$.

39．已知函数$f\left(x\right)=\dfrac{\ln x-mx}{x},g\left(x\right)=-2x^2\ln x-m$.

(1)当$m<0$时，过原点的直线与曲线$y=f\left(x\right)$相切于点$\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$，证明：$-mx_0+2\ln x_0$为定值.

(2)已知$f\left(x\right)$恰有两个零点$x_1,x_2,g\left(x\right)$恰有两个零点$x_3,x_4$，且$x_3<x_4<x_1<x_2$.

（i）求$m$的取值范围；

（ii）证明：$x_1+x_2+x_3+x_4>2\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

40．已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x-x^2$．求证：当$x>0$时，$\dfrac{\mathrm{e}^x+(2-\mathrm{e})x-1}{x}\ge\ln x+1$.