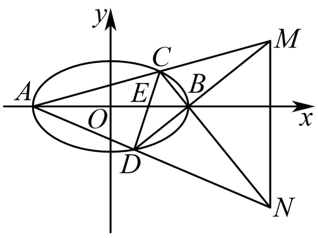
解析几何与概率统计

1．已知椭圆$G:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，左、右顶点分别为$A$，$B$，点$E$的坐标为$\left(1,0\right)$，且$E$为$OB$的中点.



(1)求椭圆G的方程；

(2)斜率不为0的动直线l过点E交椭圆G于C，D两点，直线AC，BD交于点M，直线AD，BC交于点N.

（i）设直线BC的斜率为k_1，直线BD的斜率为k_2，证明k_1k_2为定值；

（ii）以MN为直径的圆被x轴所截得的弦长是否为定值?如果是定值，请求出定值；如果不是定值，请说明理由.

2．已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的右焦点$F_2$的坐标为$\left(\sqrt{5},0\right)$，双曲线$C$的一条渐近线方程为$2x-y=0$.

(1)求双曲线C的标准方程；

(2)记双曲线C的左、右顶点分别为A,B，过点$T\left(2,0\right)$的直线l交双曲线C于点P,Q，（点P在第一象限），记直线AP的斜率为k_1，直线BQ的斜率为k_2，求证：$\frac{k_1}{k_2}$为定值.

3．已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$F_1$，$F_2$分别为椭圆的左、右焦点，点 P 是椭圆 E 上在第一象限内的一个动点，且$\triangle PF_1F_2$的周长为$2+2\sqrt{2}$．

(1)求椭圆 E 的标准方程；

(2)若直线PF_1，PF_2分别交椭圆 E 于点 A，B，M 是线段 AB 的中点．

（i）求证：直线 AB 和 OM 的斜率乘积为定值；

（ii）若分别记 OP，AB 的斜率为k_1，k_2，求$\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_1}$的最大值．

4．在平面直角坐标系中，让任意一点 A 绕一固定点旋转一个定角，变成另一点A'，如此产生的变换称为平面上的旋转变换，已知点$A\left(a,b\right)$绕原点逆时针旋转θ后得点$A'\left(a',b'\right)$，且旋转变换的表达式为$\begin{cases}a'=a\cos\theta-b\sin\theta\\b'=a\sin\theta+b\cos\theta\end{cases}$，曲线的旋转变换也如此．

(1)将点$A\left(1,1\right)$绕原点逆时针旋转$\frac{3\pi}{4}$得到点A'，求点A'坐标；

(2)已知曲线$C:y=\frac{1}{x}$，绕原点逆时针旋转$\frac{3\pi}{4}$得到曲线C'．

（i）求曲线C'的方程；

（ii）P 为曲线C'上一点，P 不在 x 轴上，过 P 作 $PB\perp PD$ 交曲线C'于 B，D 两点，求证：BD 与曲线C'在 P 点处的切线垂直．

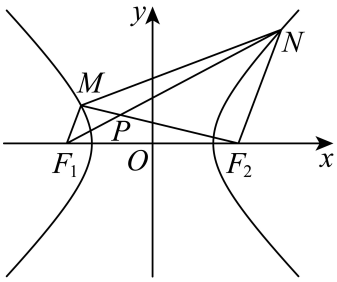
5．已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，其中双曲线$C$的一条渐近线方程为$y=4x$，$\left|F_1F_2\right|=2\sqrt{17}$.

(1)求双曲线C的标准方程；

(2)设M是双曲线C左支上一点，$N\left(0,4\right)$，求$\triangle MNF_2$的周长的最小值；

(3)过直线$x=\frac{1}{2}$上任意一点T作两条倾斜角分别为θ_1，θ_2的直线l_1，l_2，若直线l_1，l_2与双曲线C的右支分别交于A、B两点和P、Q两点，且满足：$\frac{|TA|}{|TP|}=\frac{|TQ|}{|TB|}$，求$\theta_1+\theta_2$.

6．如图，F_1，F_2分别为双曲线$C:x^2-y^2=2$的左、右焦点.M,N分别为双曲线左、右支上位于x轴上方的点，且满足$MF_1//NF_2$，设直线F_1N与F_2M相交于点P.



(1)若$|NP|=3|PF_1|$，求直线MF_1的斜率；

(2)当点M,N在双曲线上运动时，

（i）证明：$\frac{1}{|MF_1|}+\frac{1}{|NF_2|}$为定值；

（ii）证明：点P在一个椭圆上运动，并求出该椭圆方程.

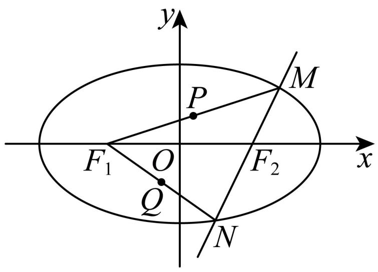
7．设椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的离心率为$\frac{1}{2}$，且过点$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{2}\right)$，左、右焦点分别为$F_1,F_2$.

(1)求C的方程；

(2)若直线$l:x=my+4(m\neq 0)$与C交于不同的M,N两点，证明：直线F_2M和F_2N的倾斜角互补.

(3)点A为C上动点（不与C的左、右顶点重合），点D在线段F_1F_2上，且$\triangle ADF_1$和$\triangle ADF_2$的内切圆面积相等，试问$|AD|$是否为定值?若是，求出该定值；若不是，请说明理由.

8．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的短轴长为2，左、右焦点分别为$F_1,F_2$，过点$F_2$的直线$l$与椭圆$C$交于$M$，$N$两点，其中$M$，$N$分别在$x$轴上方和下方，点$P$、$Q$分别是$MF_1$和$NF_1$的中点，$G_1$、$G_2$分别是$\triangle MF_1F_2$和$\triangle NF_1F_2$的重心．

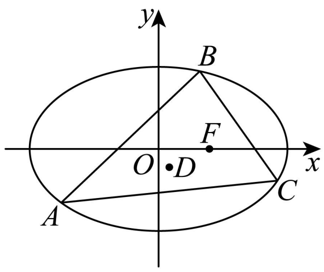


(1)若$M\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，求椭圆$C$的方程；

(2)在（1）的条件下，过点F_2并垂直于x轴的直线交椭圆C于点B，椭圆上不同的两点A，D满足$|F_2A|,|F_2B|,|F_2D|$成等差数列，求弦AD的中垂线的纵截距的取值范围；

(3)若$4S_{\triangle MNG_2}\le 3S_{\triangle NF_1G_1}\le 5S_{\triangle MNG_2}$总成立，求实数$a$的取值范围．

9．已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的右焦点为$F\left(2,0\right)$，长轴长为$8$．



(1)求椭圆E的方程；

(2)已知A、B、C是椭圆E上的三个不同点．

①若$A\left(-a,0\right)$，且$\triangle ABC$是等边三角形，求$|BC|$；

②若D（异于原点O）是$\triangle ABC$的外心，直线AB、BC、CA、OD的斜率均存在，并分别记为k_1、k_2、k_3、k_4，求$k_1k_2k_3k_4$的值．

10．已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的左顶点为$A\left(-1,0\right)$，右焦点为$F$，点$P$在$C$的右支上，$PF\perp AF$且$\left|PF\right|=\left|AF\right|$，直线$l:y=-x+m$不过$A$点，与$C$交于$M,N$两点.

(1)求C的方程；

(2)①若$AM\perp AN$，求直线l的方程；

②经过A,M,N三点的动圆E是否过异于A的定点，若存在，求出定点坐标；若不存在，请说明理由.

11．已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率$e=\frac{\sqrt{7}}{2}$，右焦点$F$到渐近线的距离为$\sqrt{3}$.

(1)求双曲线C的标准方程；

(2)已知点$A(4,1)$，过点$(1,0)$的直线与双曲线C的左、右两支分别交于点M，N，直线AN与双曲线C交于另一点P，设直线AM，AN的斜率分别为k_1，k_2.

（i）求证：k_1+k_2为定值；

（ii）求证：直线MP过定点，并求出该定点的坐标.

12．设F_1,F_2分别是椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的左、右焦点，过$F_1$且斜率为1的直线与$E$相交于$A,B$两点，且$\left|AF_2\right|,\left|AB\right|,\left|BF_2\right|$成等差数列.

(1)求E的离心率；

(2)若点$P\left(0,-\frac{2}{3}\right)$满足$\left|PA\right|=\left|PB\right|$.

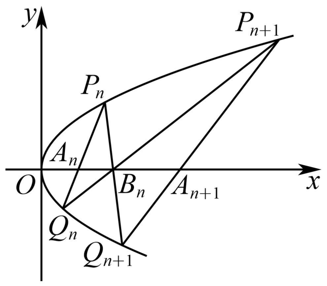
①求E的方程；

②设$S\left(2,\sqrt{2}\right)$，点M,N在E上，且$SM\perp SN,SD\perp MN,D$为垂足.试探究，是否存在定点Q，使得$\left|DQ\right|$为定值，若存在，求出定点Q的坐标；若不存在，说明理由.

13．已知抛物线$E: y^2=2px\left(p>0\right)$的准线与圆$C: x^2+\left(y-2\right)^2=1$相切.

(1)求抛物线E的方程；

(2)依次构造点列$A_n\left(a_n,0\right)$，$B_n\left(b_n,0\right)$，$P_n\left(x_n,y_n\right)$，$Q_n\left(x_n',y_n'\right)\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$. 设$a_1=1$，$b_n=2a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，过点$A_n$作斜率为$\frac{1}{k_n}$的直线与曲线$E$分别交于点$P_n$，$Q_n$，直线$P_nB_n$与曲线$E$交于另一点$Q_{n+1}$，直线$Q_nB_n$与曲线$E$交于另一点$P_{n+1}$，直线$P_{n+1}Q_{n+1}$与$x$轴交于点$A_{n+1}$.



（i）求数列$\left\{a_n\right\}$和$\left\{b_n\right\}$的通项公式；

（ii）记$\triangle P_nQ_nB_n$的面积为S_n，当$k_1=1$时，求证：$\sum_{k=1}^{n}\frac{7}{2\sqrt{2}S_k-1}<\frac{8}{7}$.

14．如图 1，F_1,F_2 分别是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左、右焦点，过点 F_2 作直线 l，与 C 交于 M，N 两点，且 $\triangle F_1MN$ 的周长为 8，$\left|F_1F_2\right|=2$.

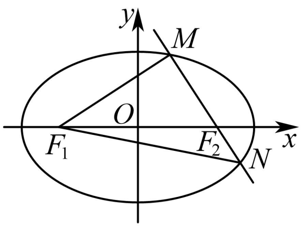


图1

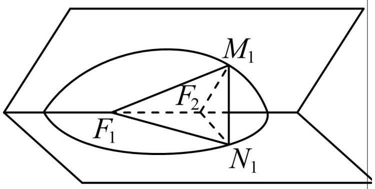


图2

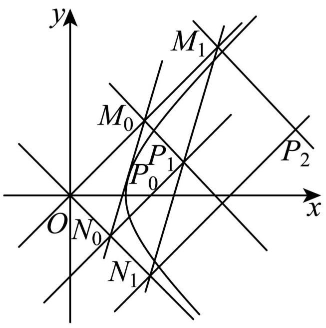
(1)求 C 的方程；

(2)如图 2，把 $\triangle MF_1F_2$ 沿 F_1F_2 翻折为 $\triangle M_1F_1F_2$，使得二面角 $M_1-F_1F_2-N_1$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$.

（i）若直线 MN 的斜率为 -1，求 $\left|M_1N_1\right|$；

（ii）求三棱锥 $M_1-N_1F_1F_2$ 体积的最大值.

15．已知双曲线C过点$P_0(4,3)$，且直线$\sqrt{3}x-2y=0$为其一条渐近线.



(1)求双曲线C的标准方程；

(2)如图，由P_0作双曲线的切线交两条渐近线于M_0,N_0，过M_0,N_0分别作两条渐近线的平行线交于点P_1，过P_1作直线M_0N_0的平行线交两条渐近线于M_1,N_1，过M_1,N_1分别作两条渐近线的平行线交于点P_2，重复以上操作，得到一串点列$P_0,P_1,P_2,\cdots,P_n$.

①求证：$P_0,P_1,P_2,\cdots,P_n$在一条直线上，并求该直线的方程；

②对任意$n\geq1$，设S_n为$\triangle P_{n-1}M_nN_n$的面积，S_n的前n项和记为T_n，求证：$\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{T_n}<\frac{\sqrt{3}}{9}$.

16．已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的一条渐近线的倾斜角为150°，且$C$经过点$\left(-2,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

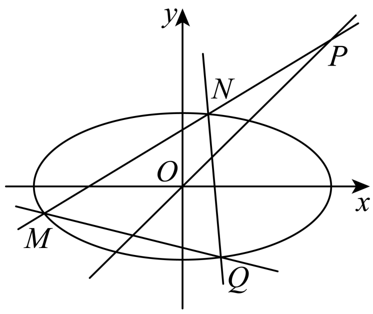
(1)求双曲线C的标准方程；

(2)设O为坐标原点，动点M满足过M能作出C的两条互相垂直的切线，记切点分别为点A，B.

（i）求动点M的轨迹方程；

（ii）若记$\triangle AOB$的面积为S_1，$\triangle AMB$的面积为S_2，求$\left|S_2-S_1\right|$的最大值.

17．已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，过点$P\left(2,2\right)$的直线l交椭圆C于M，N两点．Q为椭圆C上异于M，N的一点，满足弦MQ的中点在直线OP上．试判断直线NQ是否过定点？若是，求出定点坐标；若不是，请说明理由



18．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$.定义第$n\left(n\geq 1,n\in\mathbf{N}\right)$次操作为：经过$C$上的点$A_n\left(x_n,y_n\right)$作斜率为$k$的直线与$C$交于另一点$B_n$，记$B_n$关于$x$轴的对称点为$A_{n+1}$，若$A_{n+1}$与$B_n$重合，则操作停止；否则一直继续下去.

(1)若$a=2,b=1,A_1\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),k=\frac{1}{2}$，求$x_2,y_2$；

(2)若$a=5,b=4$，点P是椭圆C上一点，且位于x轴的上方，F_1、F_2是椭圆C的两个焦点，$\triangle PF_1F_2$是等腰三角形，求点P的坐标；

(3)若$k=-\frac{b}{a},A_1$是C在第一象限与$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$不重合的一点，求证：$\triangle A_nA_{n+1}A_{n+2}$的面积为定值，并求出该定值.

19. 已知$F(1,0)$是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点，过$F$作直线$l$交椭圆于$A,B$两点，其中$A$在$x$轴上方.当$AB\perp x$轴时，$|AB|=3$.

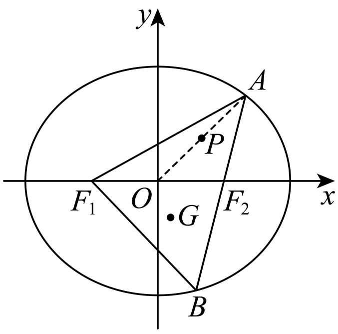
(1)求椭圆C的标准方程；

(2)设$P(4,0)$，

（i）求证：$\angle APF=\angle BPF$；

（ii）设点M在椭圆C上，点N是$\triangle FMP$的外接圆与椭圆C的另一个交点（异于M），若MF平分$\angle AMB$，且$\frac{1}{|NA|}+\frac{1}{|NB|}=\frac{\sqrt{3}}{|NF|}$，求$\cos\angle ANB$的值.

20．已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别为$F_1$，$F_2$，其长轴长为$4$，离心率为$\frac{1}{2}$，过点$F_2$的直线$l$交椭圆于$A$，$B$两点，点$A$在$x$轴上方，线段$OA$的中点为$P$，$\triangle BF_1F_2$的重心为$G$.



(1)求椭圆C的方程；

(2)若$\overrightarrow{AF_2}=\lambda\overrightarrow{F_2B}$，$\triangle BF_1P$和$\triangle ABG$面积分别为$S_1$，$S_2$.

（i）求λ的取值范围；

（ii）求$\frac{S_1}{S_2}$的取值范围.

21．在平面直角坐标系中，分别以 x 轴和 y 轴为实轴和虚轴建立复平面，已知复数 $z=x+yi\left(x,y\in R\right)$，在复平面内满足 $\left|z+1\right|+\left|z-1\right|$ 为定值的点 z 的轨迹为曲线 Γ．且点 $P\left(2,0\right)$ 在曲线 Γ 上．

(1)求 Γ 的方程；

(2) AB 是过 Γ 右焦点的弦（AB 不是长轴），AB 的中点为 G，过点 A，B 分别作直线 l：$x=4$ 的垂线，垂足分别为 C，D，l 与 x 轴的交点为 E．

（i）证明：$AE\parallel GD$；

（ii）记 CG 与 AE 的交点为 M，DG 与 BE 的交点为 N，求四边形 $MGNE$ 面积的最大值．

22．在边长为1cm的正方形$ABCD$中，一点从A处出发沿着边移动.掷一枚骰子，若向上的点数等于6，则该点沿平行于BC的方向（正反方向均可）移动1cm；若向上的点数小于6，则该点沿平行于AB的方向（正反方向均可）移动1cm.设掷$2n\left(n\in\mathbf{N}\right)$次骰子后，该点回到$A$，$B$，$C$处的概率分别为$a_n$，$b_n$，$c_n$.

(1)求a_1.

(2)设掷4次骰子，该点经过C处的次数为X，求X的分布列.

(3)若随机变量X_i服从两点分布，且$P\left(X_i=1\right)=1-P\left(X_i=0\right)=q_i$，$i=1,2,\cdots,n$，则$E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}q_i$，记掷前$2n$次骰子（即从第1次到第$2n$次掷骰子）的过程中，该点经过$C$处的次数为$Y$，求$E\left(Y\right)$.

23．体育赛事中，常有“3局2胜制”、“5局3胜制”、⋯、“$(2k+1)$局$(k+1)$胜”制，$k\in\mathbf{N}^*$．现有甲、乙两队比赛，甲获胜的概率为$p(0<p<1)$，各局比赛结果相互独立，且无平局．为鼓励提高比赛水平及厂商的广告需要，比赛结束后参加一项抽奖活动．箱中共有6张奖券，其中有2张奖券金额各10万元，另外4张奖券无奖金．若赛完，某队某场获胜且每局都赢，则由该队在该箱中一次性抽4张奖券，而另一队不参与抽奖；若赛完，某场比赛的局数中各有输赢，则先由甲队任取2张后，再由乙队从余下奖券中任抽2张．

(1)当$k=1$，$p=\dfrac{2}{3}$时，求甲获胜的概率；

(2)当$k=2$，$p=\dfrac{2}{3}$时，求乙队获得奖金金额X（万元）的分布列与期望；

(3)在“$2k+1$局$k+1$胜”$(k\in\mathbf{N}^*)$制比赛中，随着k增大，甲、乙谁获胜的可能性更大？证明你的结论．

24．2025年多哈世界乒乓球锦标赛，中国队组合王楚钦、孙颖莎以3:1战胜日本队组合吉村真晴、大藤沙月，连续第三次夺得世乒赛混双冠军.假设2026年的一次乒乓球比赛中，S组合与D组合相遇.每局比赛必须决出胜负，已知每局比赛D组合获胜的概率为$\dfrac{1}{5}$，每局比赛胜负结果相互独立，规定先达到净胜3局者获得比赛胜利并结束比赛（规定：净胜m局指的是一方比另一方多胜m局）．

(1)分别求恰好3局比赛结束时D组合获得比赛胜利的概率$P(A)$，恰好5局比赛结束时D组合获得比赛胜利的概率$P(B)$；

(2)若规定比赛总局数达到7局时无论是否分出胜负都直接结束比赛，求结束比赛时双方对战的总局数X的分布列；

(3)若比赛局数不限，求D组合获得比赛胜利的概率.

25．近年来，购买盲盒成为当下年轻人的潮流之一.2025年初，中国动画电影《哪吒2》火爆上映，引发观影热潮.随后，某手办店乘势推出一系列单价相同、款式各异的手办盲盒，其中开出哪吒手办的概率是$\frac{3}{5}$，开出敖丙手办的概率是$\frac{2}{5}$.

(1)若张三到该店购买3个盲盒，设其开出哪吒手办的个数为X，求X的分布列和期望；

(2)若张三到该店购买8个盲盒，求其开出的哪吒盲盒最有可能的数量；

(3)若该店开展活动，当顾客在购买手办盲盒过程中，连续开出2个哪吒手办时，可获赠1个齐天大圣手办.已知手办盲盒单价为9元，那么平均花多少钱能获得1个齐天大圣手办?

26．设$n\in\mathrm{N}$，数对(X_n,Y_n)按照如下方式生成：①规定$(X_0,Y_0)=(1,1)$；②抛掷一枚质地均匀的硬币，当硬币正面朝上时，$X_{n+1}=X_n+1$，$Y_{n+1}=\begin{cases}Y_n+1, X_n>Y_n\\ Y_n, X_n\le Y_n\end{cases}$；当硬币反面朝上时，$Y_{n+1}=Y_n+1$，$X_{n+1}=\begin{cases}X_n+1, Y_n>X_n\\ X_n, Y_n\le X_n\end{cases}$

(1)写出数对(X_2,Y_2)的所有可能结果；

(2)当$n\ge1$时，记$X_n=Y_n$的概率为P_n.

（i）求P_n及P_n的最大值；

（ii）设X_n的数学期望为E_n，求E_n.

27. 进位制是人们为了计数和运算方便而约定的记数系统，约定满二进一，就是二进制；满十进一就是十进制；满十六进一，就是十六进制等.一般地，若 k 是一个大于1的整数，那么以 k 为基数的 k 进制数可以表示为一串数字符号连写在一起的形式 $a_na_{n-1}\cdots a_1a_{0(k)}$，其中 a_n， a_{n-1}， $\cdots$， $a_0\in\{0,1,2,\cdots,k-1\}$，且 $a_n\neq 0$，

$a_na_{n-1}\cdots a_1a_{0(k)}=a_nk^n+a_{n-1}k^{n-1}+\cdots+a_1k+a_0$ ，如 $22=2\times3^2+1\times3+1$，所以22在三进制下可写为 $211_{(3)}$.

(1)将五进制数 $211_{(5)}$ 转化成三进制数.

(2)对于任意两个不同的 $n+1$ 位二进制数 $a_na_{n-1}\cdots a_1a_{0(2)}$， $b_nb_{n-1}\cdots b_1b_{0(2)}$， $a_n=b_n=1$，记 $X=\sum_{i=0}^{n}|a_i-b_i|$.

①若 $n=3$，求随机变量 X 的分布列与数学期望；

②证明： $E(X)>\frac{n}{2}$.

28．n维空间中点的坐标可以表示为$\left(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\right)$，其中$x_i\left(i=1,2,3,\cdots,n\right)$为该点的第$i$个坐标．定义$n$维空间中任意两点$A\left(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\right)$，$B\left(y_1,y_2,y_3,\cdots,y_n\right)$之间的平均离差二乘距离$d\left(A,B\right)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-y_i\right)^2$．设$n$维空间点集$M=\{\left(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\right)\mid x_i=0$或$1$，其中$i=1,2,3,\cdots,n\}\left(n\geq 2\right)$．

(1)若$n=3$，$A,B\in M$，且点$A\left(0,1,0\right)$，$d\left(A,B\right)=\dfrac{2}{3}$，写出所有的点$B$的坐标；

(2)任取n维空间中的不同两点$P,Q\in M$．

（i）若$n=4$，求$d\left(P,Q\right)=\dfrac{1}{2}$的概率；

（ii）记随机变量$X=d\left(P,Q\right)$，求$E\left(X^2\right)$的最大值．

29．乒乓球比赛有两种赛制，其中就有“5局3胜制”和“7局4胜制”,“5局3胜制”指5局中胜3局的一方取得胜利，“7局4胜制”指7局中胜4局的一方取得胜利．

(1)甲、乙两人进行乒乓球比赛，若采用5局3胜制，比赛结束算一场比赛，甲获胜的概率为0.8；若采用7局4胜制，比赛结束算一场比赛，甲获胜的概率为0.9．已知甲、乙两人采用两种赛制各共进行了$m\left(m\in \mathbf{N}^*\right)$场比赛，请根据小概率值$\alpha=0.010$的$K^2$独立性检验，来推断赛制是否对甲获胜的场数有影响．

(2)若甲、乙两人采用5局3胜制比赛，设甲每局比赛的胜率均为p，没有平局．记事件“甲只要取得3局比赛的胜利比赛结束且甲获胜”为A，事件“两人赛满5局，甲至少取得3局比赛胜利且甲获胜”为B，试证明：$P(A)=P(B)$．

(3)甲、乙两人进行乒乓球比赛，每局比赛甲的胜率都是$p(p>0.5)$，没有平局．若采用“赛满$2n-1$局，胜方至少取得n局胜利”的赛制，甲获胜的概率记为$P(n)$．若采用“赛满$2n+1$局，胜方至少取得$n+1$局胜利”的赛制，甲获胜的概率记为$P(n+1)$，试比较$P(n)$与$P(n+1)$的大小．

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$．

$P\left(K^2\ge k_0\right)$	0.05	0.025	0.010
k_0	3.841	5.024	6.635

30．有编号为$1,2,\cdots,n$的n个空盒子$\left(n\geq 2,n\in \mathrm{N}\right)$，另有编号为$1,2,\cdots,k$的$k$个球$\left(2\leq k\leq n,k\in \mathrm{N}\right)$，现将$k$个球分别放入$n$个盒子中，每个盒子最多放入一个球．放球时，先将1号球随机放入n个盒子中的其中一个，剩下的球按照球编号从小到大的顺序依次放置，规则如下：若球的编号对应的盒子为空，则将该球放入对应编号的盒子中；若球的编号对应的盒子为非空，则将该球随机放入剩余空盒子中的其中一个．记k号球能放入k号盒子的概率为$P\left(n,k\right)$．

(1)求$P\left(3,3\right)$；

(2)当$n\geq 3$时，求$P\left(n,3\right)$；

(3)求$P\left(n,k\right)$．

31．口袋中有大小、形状、质地相同的两个白球和三个黑球．现有一抽奖游戏规则如下：抽奖者每次有放回的从口袋中随机取出一个球，最多取球$2n+1(n\in N^{*})$次．若取出白球的累计次数达到$n+1$时，则终止取球且获奖，其它情况均不获奖．记获奖概率为P_n．

（1）求P_1；

（2）证明：$P_{n+1}<P_n$．