

1. Rozkłady macierzy: rozkład LU, LLT oraz rozkład QR - sposoby wyznaczania tych rozkładów.

Rozkłady macierzy stosuje się w celu uzyskania dwóch macierzy, których iloczyn daje w wyniku macierz wejściową.

Rozkład LU – rozkłada dowolną macierz kwadratową A na dwie macierze: L (trójkątna dolna) oraz U (trójkątna górna). $A = L \cdot U$. Składa się z iteracji, w trakcie których następny element powstaje z pomnożenia macierzy L_n przez element poprzedni (na początku macierz A), w wyniku których uzyskuje się macierz U oraz fragmenty macierzy L.

Rozkład LLT – rozkłada kwadratową, symetryczną i dodatnio określoną macierz A na dwie macierze: macierz L (trójkątna dolna) oraz LT (trójkątna górna, transpozycja macierzy L). $A = L \cdot L^T$.

Rozkład QR – rozkłada dowolną macierz kwadratową A na dwie macierze, nazwane Q i R. Ich części uzyskuje się, ekstrahując pionowe wektory z macierzy A i przeprowadzając na nich ortogonalizację Grama-Schmidta. Powstałe wektory ortogonalne, po zapisaniu ich jako sumy odpowiednich iloczynów, ustalają zawartość macierzy wynikowych.

2. Iteracyjne metody znajdowania rozwiązania układu równań liniowych. Metoda Jacobiego oraz metoda Gaussa-Seidla.

Układy równań liniowych w metodach numerycznych przyjmują postać: $A \cdot x = b$, gdzie: A – kwadratowa macierz współczynników równania, b – wektor wyrazów wolnych, x – wektor rozwiązań. Metody iteracyjne, znajdujące elementy x, wyliczają je na podstawie równości:

$$x_{n+1} = B^{-1} \cdot (B - A) x_n + B^{-1} \cdot b$$

gdzie B jest macierzą wybraną zależnie od metody iteracyjnej.

W metodzie Jacobiego, B jest macierzą podobną do identyczności z tą różnicą, że na jej przekątnej znajdują się wyrazy a_{ii} macierzy A. W metodzie Gaussa-Seidla B jest macierzą trójkątną dolną, w której niezerowe elementy odpowiadają tym z macierzy A.

3. Zadanie interpolacji Lagrange'a - sformułowanie zadania, istnienie i jednoznaczność rozwiązania, metody wyznaczania rozwiązania zadania interpolacji (metoda ilorazów różnicowych).

Interpolacja Lagrange'a rozwiązuje problem odwzorowania funkcji na podstawie zbioru punktów, do której należą. Jej celem jest skonstruowanie takiego wielomianu

interpolacyjnego W , opartego o funkcję wejściową f , który zawiera te właśnie punkty, a w miarę możliwości przyjmuje zbliżone wartości również dla innych argumentów tej funkcji.

Istnieją różne rodzaje interpolacji. Interpolacja Lagrange'a konstruuje wielomianową funkcję interpolacyjną, ale możliwe jest tworzenie takich funkcji w oparciu o inne grupy funkcji, jak na przykład funkcje trygonometryczne.

Dokładność interpolacji Lagrange'a na początku rośnie, ale później spada wraz ze wzrostem liczby punktów wejściowych, co stanowi poważne jej ograniczenie.

Przeprowadzenie interpolacji Lagrange'a wymaga obliczenia tzw. ilorazów różnicowych. Obliczenia są dzielone na kilka kolumn, a w każdej kolumnie obliczany jest zbiór ilorazów dwóch różnic: różnicy wartości funkcji pierwotnej i różnicy jej argumentów (zarówno wartości, jak i argumenty brane są ze współrzędnych punktów wejściowych). Indeksy argumentów branych do różnicy argumentów są tym większe, im wyższy jest numer kolumny obliczeń. Pierwsza wartość funkcji oraz pierwsze wyniki obliczeń z każdej kolumny stanowią współczynniki wielomianu interpolacyjnego, zapisywanego w postaci Newtona.

4. Zadanie aproksymacji w przestrzeniach unitarnych - sformułowanie zadania, istnienie i jednoznaczność rozwiązania, metody wyznaczania rozwiązania zadania aproksymacji.

Aproksymacja w przestrzeniach unitarnych polega na obliczeniu tzw. elementu optymalnego h^* , uzyskanego z wektora wejściowego f , oraz wektorów f_i rozpinających daną podprzestrzeń. Wynikiem jest również wektor.

Zadanie to rozwiązuje się m. in. metodą ortonormalizacji oraz metodą układu równań normalnych. W pierwszej metodzie, wektory rozpinające poddaje się ortogonalizacji Grama-Schmidta i uzyskuje element optymalny z odpowiedniej sumy iloczynów otrzymanych w trakcie obliczeń. W drugiej metodzie rozwiązuje się równanie liniowe $A \cdot x = B$, gdzie A – macierz iloczynów skalarnych odpowiednich par wektorów rozpinających podprzestrzeń, B – wektor iloczynów skalarnych wektorów f oraz f_i , przy czym $i = \{1, 2, \dots, n\}$, x – wektor rozwiązań. Element optymalny jest sumą iloczynów postaci $x_i \cdot f_i$, gdzie x_i jest i -tym elementem wektora x .

5. Kwadratury. Kwadratury interpolacyjne, rząd kwadratury. Kwadratury Newtona-Cotesa. Kwadratury o maksymalnym rzędzie - istnienie i sposób wyznaczania.

Kwadratura – wzór pozwalający obliczyć przybliżenie całki oznaczonej. Kwadratura interpolacyjna – obliczenie całki wziętej nie z funkcji pierwotnej, lecz z jej wielomianu interpolacyjnego.

Proste kwadratury Newtona-Cotesa mają postać sumy iloczynów wartości funkcji dla określonych punktów oraz pewnych liczb-wag. Charakteryzują się rzędem – jest to taka liczba n , dla której dana kwadratura jest poprawna, gdy za jej pomocą wyliczane są przybliżenia całek z wielomianów stopnia co najwyżej $(n-1)$.

Aby uzyskać kwadraturę możliwie wysokiego rzędu, znając granice całki oraz całkowaną funkcję, należy najpierw przeprowadzić ortogonalizację Grama-Schmidta na funkcjach postaci x^i , gdzie $i = \{0, 1, \dots, n-1\}$ i znaleźć miejsca zerowe ostatniej funkcji wynikowej, które będą punktami, w których należy obliczać kwadraturę. Następnie należy znaleźć współczynniki-wagi, rozwiązując układ równań, przy czym dla każdego równania za $f(x)$ przyjmuje się x^i .

6. Metody rozwiązywania równań nieliniowych: metoda bisekcji, reguła fałsi, metoda siecznych, metoda Newtona.

Rozwiązywanie równań nieliniowych sprowadza się do znajdowania miejsc zerowych funkcji nieliniowych, a w przypadku metod numerycznych – ich przybliżeń.

Metoda bisekcji polega na podziale przedziału argumentów (a, b) na pary przedziałów i wybieraniu do następnej iteracji tego przedziału, który zawiera miejsce zerowe (wartości funkcji na jego krańcach powinny mieć przeciwne znaki).

Reguła fałsi opiera się o metodę bisekcji, lecz jako punkt podziału przedziału nie wybiera jego środka, ale odpowiedni iloraz dwóch różnic.

Metoda siecznych wykorzystuje regułę fałsi do wyliczania kolejnych wartości ciągu punktów przy użyciu w każdej iteracji dwóch poprzednich.

Metoda Newtona oblicza następne wyrazy ciągu na podstawie wartości poprzednich, odejmując od nich iloraz wartości funkcji oraz jej pochodnej.