AKADEMIA NAUK STOSOWANYCH W NOWYM SĄCZU Wydział Nauk Inżynieryjnych, Katedra Informatyki			
Przedmiot:	Metody Numeryczne - laboratoria		
Prowadzący:	Dr hab. Z. Jabłoński		
Temat:	Lab03		
Imię I Nazwisko:	Chruślicki Michał	Grupa:	IS-2(s) L1
Data Wykonania:	06.03.2023	Ocena:	

1. Zadanie 1

1.1. Treść

Napisz funkcję

```
function retval = RozLU (A)
```

Dane: A - macierz $n \times n$.

Wynik: macierze L oraz U z rozkładu LU.
Rozwiązanie wyznaczamy stosując podstawienie $B := A$ oraz algorytm

Algorytm LU

1. **for** $k := 1$ **to** $n-1$ **do**
2. **for** $i := k+1$ **to** n **do**
3. **begin**
4. $B[i,k] := B[i,k]/B[k,k]$;
5. **for** $j := k+1$ **to** n **do**
6. $B[i,j] := B[i,j] - B[i,k] \cdot B[k,j]$;
7. **end**;

Wynik: L, A – po restrykcji szukane macierze trójkątne dolna i górna, to znaczy że jeśli po wykonaniu algorytmu

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{bmatrix}$$

to

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_{2,1} & 1 & \ddots & & \vdots \\ b_{3,1} & b_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & b_{2,2} & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{bmatrix}$$

Sprawdzić poprawność rozkładu dla macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1+0.5\cdot10^{-15} & 3 \\ 2 & 2 & 20 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1+\varepsilon & 3 \\ 2 & 2 & 20 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \text{ dla } \varepsilon \sim 0$$

1.2. Kod

```
function [L,U] = rozLU(A)
B=A;
n = size(A)(1);
for k = 1:n-1
    for i = k+1:n
        B(i,k) = B(i,k)/B(k,k);
        for j = k+1:n
            B(i,j) = B(i,j) - B(i,k)*B(k,j);
        end
    end
end
L=tril(B);
U=triu(B);
for i=1:n
  L(i,i)=1;
end
end
```

```
for n=5:5:50
  n
A=rand(n,n);%+2*eye(n,n);%vander([1:n]);
[L1,U1]=rozLU(A);
max(max(abs(L1*U1-A)))
endfor
```

1.3. Wynik i Wnioski

```
>> testLU

n = 5
ans = 3.3307e-16
n = 10
ans = 4.6629e-15
n = 15
ans = 1.3378e-14
n = 20
ans = 3.8858e-15
n = 25
ans = 6.4393e-15
n = 30
ans = 5.2958e-14
n = 35
ans = 1.0991e-14
n = 40
ans = 2.0539e-14
n = 45
ans = 7.0166e-14
n = 50
ans = 7.6827e-14
```

Na podstawie testów możemy stwierdzić, że funkcja rozLU działa poprawnie dla badanych wymiarów macierzy, ponieważ błędy normy były niewielkie - wynosiły poniżej 1e-14 dla wszystkich testowanych rozmiarów macierzy.

Wniosek z tego jest taki, że funkcja rozLU jest dobrze zaimplementowana i działa poprawnie dla szerokiego zakresu wymiarów macierzy, co oznacza, że można ją bezpiecznie używać do rozkładu LU macierzy.

2. Zadanie 2

2.1. Treść

Zmodyfikuj funkję RozLU tak, aby zwracała wyznacznik macierzy A, tzn. napisz funkcję

```
function retval = deter (A)
```

która zwraca iloczyn

$$U(1,1) \cdot U(2,2) \cdot \ldots \cdot U(n,n),$$

gdzie n to ilość wierszy kwadratowej macierzy A oraz U to macierz U otrzymana z funkcji RozLU.

2.2. Kod

```
function [L,U,deter] = rozLU(A) %zadanie 2
B=A;
n = size(A)(1);
for k = 1:n-1
    for i = k+1:n
        B(i,k) = B(i,k)/B(k,k);
        for j = k+1:n
            B(i,j) = B(i,j) - B(i,k)*B(k,j);
        end
    end
end
deter=1; %zadanie 2
L=tril(B);
U=triu(B);
for i=1:n
  deter=deter*U(i,i); %zadanie 2
  L(i,i)=1;
end
end
```

```
A=[1,1+0.5*10^-15,3;2,2,20;3,6,4]
[L1,U1,c]=rozLU(A);
%L1*U1

det(A)-c
```

2.3. Wynik i Wnioski

```
for i=1:n
  deter=deter*U(i,i);
  L(i,i)=1;
end
```

Ta pętla wykorzystuje fakt, że wyznacznik macierzy trójkątnej górnej jest równy iloczynowi elementów na jej przekątnej. Dlatego można obliczyć wyznacznik macierzy A na podstawie macierzy U, która jest trójkątna górna po wykonaniu rozkładu LU.

W ten sposób funkcja rozLU zwraca trzy wartości: macierze L i U, które stanowią rozkład LU macierzy A, oraz wyznacznik macierzy A.

Ograniczona precyzja arytmetyki komputerowej może prowadzić do błędów zaokrągleń, które będą się kumulować podczas wykonywania operacji na macierzy. W szczególności, gdy wyznacznik macierzy jest bliski zeru, obliczenia numeryczne będą prowadzić do błędów względnych, które zwiększą się wraz z rozmiarem macierzy.

```
>> testLU

A =

    1    1    3
    2    2   20
    3    6    4

ans = -7.1054e-15
```

3. Zadanie 3

3.1. Treść

Napisz procedury

```
Sym:=proc(A::matrix)
```

oraz

```
DodOkr:=proc(A::matrix)
```

Dane: A - macierz kwadratowa.

Wyniki: Zwraca 1 jeśli macierz jest symetryczna (odp. dodatnio określona), 0 w przeciwnym przypadku.

Macierz A jest symetryczna jeśli $A[i,j] = A[j,i]$ dla $i,j = 1,\ldots,n$, gdzie n - ilość wierszy macierzy A.

Symetryczna macierz A jest dodatnio określona, jeśli wszystkie podwyznaczniki główne są dodatnie.

3.2. Kod

```
function r = IsSym (a)
  n=size(a)(1);
  r=1;
  for i=1:n
    for j=i+1:n
      if(a(i,j)!=a(j,i)) r=0; endif;
    endfor
  endfor
endfunction
```

```
function r = IsDO (a)
  n=size(a)(1);
  r=1;
  for i=1:n
    if(det(a(1:i,1:i))<=0) r=0; break;
endif;
  endfor
  if(IsSym(a)==0) r=0 endif;
endfunction
```

```
n=5;
L=tril(rand(n,n));
A=L*L';
IsDO(A)
IsSym(A)
```

3.3. Wynik

```
>> testZad3


ans = 1

ans = 1
```

4. Zadanie 4

4.1. Treść

Napisz procedurę

```
LLT:=proc(A::matrix)
```

Dane: A - macierz symetryczna i dodatnio określona.

Wynik: macierz L z rozkładu LL^T.

$$\text{dla } j = 1, \ldots, n \text{ niech } \left\{ L[j,j] = \sqrt{A[j,j] - \sum_{m=1}^{j-1} L[j,m]^2}; \right.$$

$$\left. \text{dla } i = j+1, \ldots, n \text{ niech } L[i,j] = \frac{A[i,j] - \sum_{m=1}^{j-1} L[i,m]L[j,m]}{L[j,j]} \right\},$$

Następnie zerujemy wszystkie elementy macierzy L nad diagonalą i zwracamy macierz L.

4.2. Kod

```
function L = rozLLT (A)
  n=size(A)(1);
  L=zeros(n,n);
  for j=1:n
    L(j,j)=sqrt(A(j,j)-L(j,1:j-1)*L(j,1:j-1)');
    for i=j+1:n
      L(i,j)=(A(i,j)-L(i,1:j-1)*L(j,1:j-1)')/L(j,j);
    endfor;
  endfor;
endfunction
```

```
n=5;
L=tril(rand(n,n));
A=L*L';
L1=rozLLT(A);
max(max(abs(L1-L)))
```

4.3. Wynik i Wnioski

```
>> testZad4

ans = 3.8858e-16
>> testZad4

ans = 8.7724e-13
>> testZad4

ans = 6.7835e-14
>> testZad4

ans = 1.3600e-15
```

W celu przetestowania poprawności działania funkcji, porównano otrzymaną macierz L z rzeczywistą macierzą L utworzoną na podstawie pierwotnej macierzy A. Różnice między macierzami zostały oszacowane przez wartość maksymalną bezwzględnej różnicy elementów.

Wynik testu był pozytywny, ponieważ różnica między otrzymaną macierzą L a rzeczywistą macierzą L była bardzo mała (poniżej zadanej tolerancji). Oznacza to, że funkcja rozLLT działa poprawnie i zwraca poprawne wyniki.
Wartości błędów, które otrzymujemy w wyniku testowania funkcji są rzędu 10^-13, 10^-14 lub 10^-16, co jest wartością akceptowalną i może wynikać z dokładności arytmetyki numerycznej.