

# Projekt robota trójnożnego

Jakub Mazur

8 września 2022

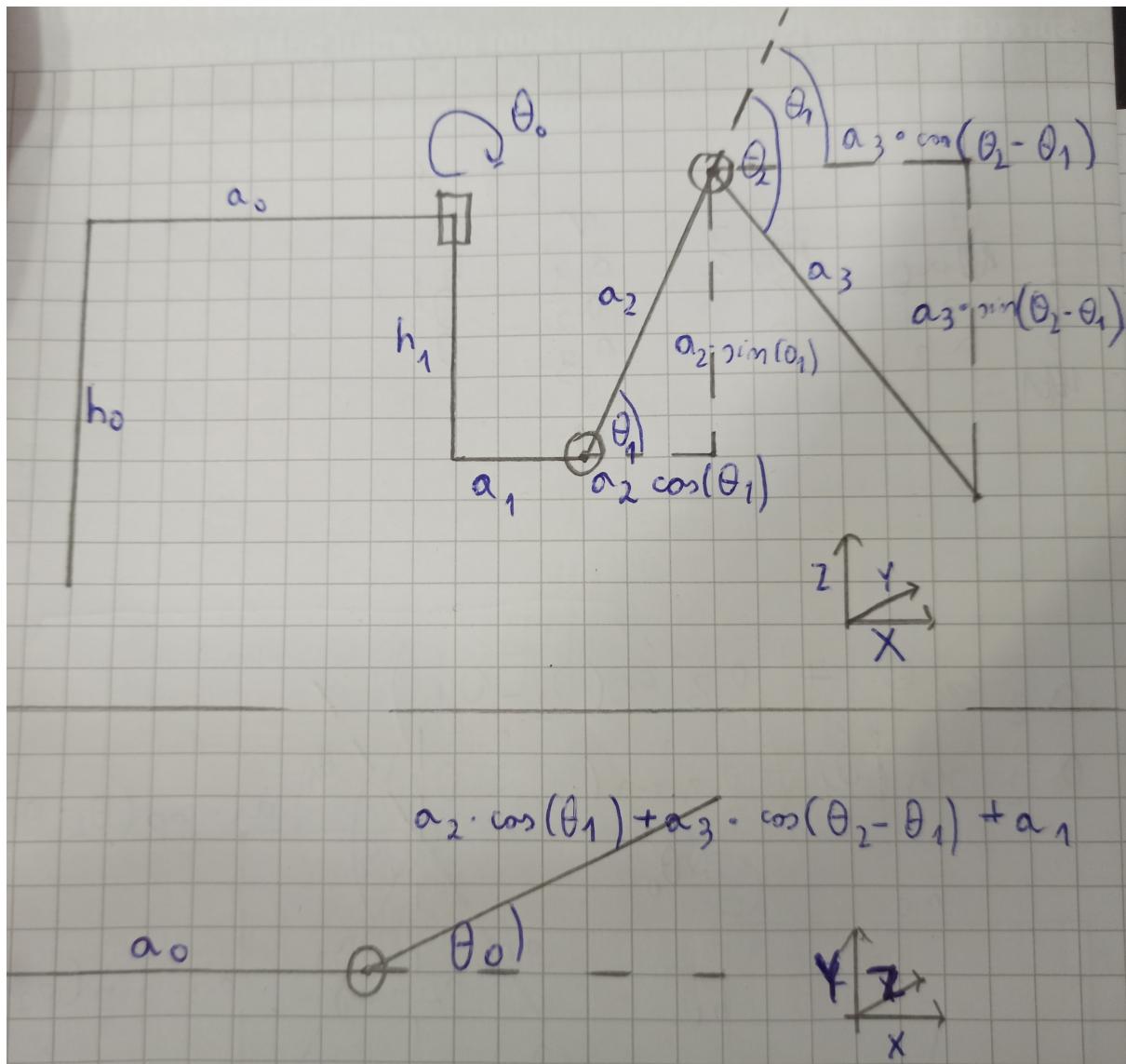
## Spis treści

<b>1 Noga robota</b>	<b>1</b>
1.1 Model matematyczny . . . . .	2
1.1.1 Forward kinematics . . . . .	2
1.1.2 Forward kinematics - denavit hartenberg [1] . . . . .	3
1.1.3 Invert kinematics . . . . .	4

## 1 Noga robota

Noga ma 3 stopnie swobody. Wszystkie są typu obrotowego, przy czym dwie obracają się dookoła osi poziomej, a jedna dookoła osi pionowej. Są to te same osi obrotu co w przypadku ramienia robotycznego typu antromorficznego.

## 1.1 Model matematyczny w przestrzeni kartezjańskiej

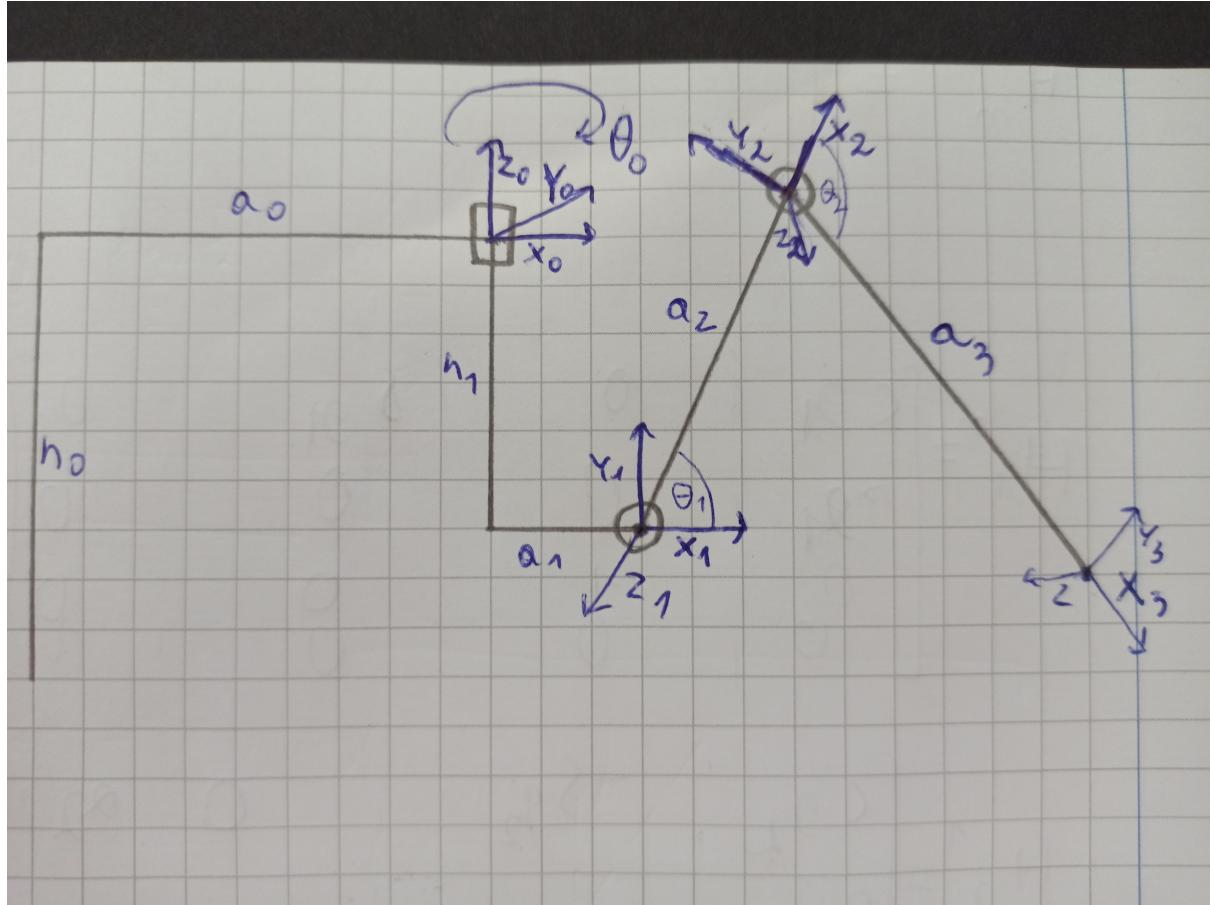


Rysunek 1: Model Matematyczny

### 1.1.1 Forward kinematics

$$\begin{aligned}
 a_{temp} &= a_2 \cos \theta_1 + a_3 \cos (\theta_2 - \theta_1) + a_1 \\
 Y &= a_{temp} \cdot \sin \theta_0 \\
 X &= a_{temp} \cdot \cos \theta_0 + a_0 \\
 Z &= h_0 - h_1 + a_2 \sin \theta_1 - a_3 \sin (\theta_2 - \theta_1)
 \end{aligned} \tag{1}$$

### 1.1.2 Forward kinematics - denavit hartenberg [1]



Rysunek 2: Model Denavit Hartenberg

Joint $i$	$\theta_i$	$\alpha_i$	$r_i$	$d_i$	
1	$\theta_0$	$\frac{\pi}{2}$	$a_1$	$h_1$	
2	$\theta_1$	0	$a_2$	0	
3	$\theta_2$	0	$a_3$	0	

(2)

Gdzie:

$\theta_i$  - angle from  $x_{n-1}$  to  $x_n$  around  $z_{n-1}$

$\alpha_i$  - angle from  $z_{n-1}$  to  $z_n$  around  $x_n$

$r_i$  - distance between the origin of the  $n-1$  frame and the origin of the  $n$  frame along the  $x_n$  direction.

$d_i$  - distance from  $x_{n-1}$  to  $x_n$  along the  $z_{n-1}$  direction

Następnie macierze przejść pomiędzy ramkami  $n-1$  i  $n$  oblicza się zgodnie z następującym wzorem:

$$H_n^{n-1} = \left[ \begin{array}{ccc|c} R & & & T \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cdot \cos \alpha_i & \sin \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] [2] \quad (3)$$

Gdzie  $R$  oznacza macierz Rotacji a  $T$  macierz Transformacji.

A macierz przejścia pomiędzy ramką 0 a ramką 3 zgodnie z następującym wzorem:

$$H_n^{n-1} = H_1^0 \cdot H_2^1 \cdot H_3^2 =$$

$$\begin{bmatrix} c\theta_0 \cdot (c\theta_1 \cdot c\theta_2 - s\theta_1 \cdot s\theta_2) & -c\theta_0 \cdot (c\theta_1 \cdot s\theta_2 + s\theta_1 \cdot c\theta_2) & s\theta_0 & c\theta_0 \cdot (a_1 + a_2 \cdot c\theta_1 + a_3 \cdot (c\theta_1 \cdot c\theta_2 - s\theta_1 \cdot s\theta_2)) \\ s\theta_0 \cdot (c\theta_1 \cdot c\theta_2 - s\theta_1 \cdot s\theta_2) & -s\theta_0 \cdot (c\theta_1 \cdot s\theta_2 + s\theta_1 \cdot c\theta_2) & -c\theta_0 & s\theta_0 \cdot (a_1 + a_2 \cdot c\theta_1 + a_3 \cdot (c\theta_1 \cdot c\theta_2 - s\theta_1 \cdot s\theta_2)) \\ c\theta_1 \cdot s\theta_2 + s\theta_1 \cdot c\theta_2 & c\theta_1 \cdot c\theta_2 - s\theta_1 \cdot s\theta_2 & 0 & h_1 + a_2 \cdot s\theta_1 + a_3 \cdot (c\theta_1 \cdot s\theta_2 + s\theta_1 \cdot c\theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} c\theta_0 \cdot c(\theta_1 + \theta_2) & -c\theta_0 \cdot s(\theta_1 + \theta_2) & s\theta_0 & c\theta_0 \cdot (a_1 + a_2 \cdot c\theta_1 + a_3 \cdot c(\theta_1 + \theta_2)) \\ s\theta_0 \cdot c(\theta_1 + \theta_2) & -s\theta_0 \cdot s(\theta_1 + \theta_2) & -c\theta_0 & s\theta_0 \cdot (a_1 + a_2 \cdot c\theta_1 + a_3 \cdot c(\theta_1 + \theta_2)) \\ c\theta_1 \cdot s\theta_2 + s\theta_1 \cdot c\theta_2 & c(\theta_1 + \theta_2) & 0 & h_1 + a_2 \cdot s\theta_1 + a_3 \cdot s(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Następnie, aby otrzymać właściwe równania, należy z równania 4 wziąć część odpowiedzialną za transformację.

$$\begin{aligned} X &= c\theta_0 \cdot (a_1 + a_2 \cdot c\theta_1 + a_3 \cdot c(\theta_1 + \theta_2)) \\ Y &= s\theta_0 \cdot (a_1 + a_2 \cdot c\theta_1 + a_3 \cdot c(\theta_1 + \theta_2)) \\ Z &= h_1 + a_2 \cdot s\theta_1 + a_3 \cdot s(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (5)$$

### 1.1.3 Invert kinematics

Odwrotną kinematykę można obliczyć poprzez rozwiązywanie równań kinematyki prostej.

Najprościej jest wyprowadzić wzór na  $\theta_0$ , można to zrobić na podstawie wzoru 1, łącząc wzór na  $X$  i  $Y$ :

$$\begin{cases} Y = a_{temp} \cdot \sin \theta_0 + a_0 \\ X = a_{temp} \cdot \cos \theta_0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} Y = a_{temp} \cdot \sin \theta_0 \\ a_{temp} = \frac{X - a_0}{\cos \theta_0} \end{cases} \quad (7)$$

$$Y = \frac{X - a_0}{\cos \theta_0} \cdot \sin \theta_0 \quad (8)$$

$$\theta_0 = \arctan \frac{Y}{X - a_0} \quad (9)$$

Wzór na  $\theta_2$  można wyprowadzić także z równania 1

$$Z = (h_0 - h_1) + a_2 \cdot \sin \theta_1 - a_3 \sin (\theta_2 - \theta_1)$$

$$Z - (h_1 + h_0) = a_2 \cdot \sin \theta_1 - a_3 \sin (\theta_2 - \theta_1)$$

$$\frac{(h_1 + h_0) - Z - a_2 \cdot \sin \theta_1}{a_3} = \sin (\theta_2 - \theta_1)$$

$$\theta_2 = \arcsin \left( \frac{(h_1 + h_0) - Z - a_2 \cdot \sin \theta_1}{a_3} \right) + \theta_1 \quad (10)$$

Równanie 10 jest nadal uzależnione od  $\theta_1$ , które należy wyznaczyć.

Pod równanie 1 na  $a_{temp}$  podstawiam obliczone równanie 10 i otrzymuję równanie 11

$$a_{temp} = a_2 \cos \theta_1 + a_3 \cos \left( \arcsin \left( \frac{(h_1 + h_0) - Z - a_2 \cdot \sin \theta_1}{a_3} \right) \right) + a_1 \quad (11)$$

Do fragmentu  $a_3 \cos \left( \arcsin \left( \frac{(h_1 + h_0) - Z - a_2 \cdot \sin \theta_1}{a_3} \right) \right)$  można zastosować wzór  $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ . Daje to wzór 12

$$a_{temp} = a_2 \cos \theta_1 + \sqrt{a_3^2 - (a_2 \sin \theta_1 + h_0 - h_1 - Z)^2} + a_1 \quad (12)$$

Niestety wzór 12 nie pozwala jednoznacznie wyznaczyć jawnego  $\theta_1$ . Przybliżanie metodą Taylora także się w tym przypadku nie sprawdzi.

## **1.2 Model matematyczny w przestrzeni cylindrycznej**

### **Literatura**

- [1] How to Find Denavit-Hartenberg Parameter Tables, blogpost by Automatic Addison
- [2] Homogeneous Transformation Matrices Using Denavit-Hartenberg, blogpost by Automatic Addison
- [3] Matlab Denavit Hartenberg calculations
- [4] Alexander Wallen Kiessling, Niclas Maatta (2020) Anthropomorphic Robot Arm