Лабораторна робота №3.

Тема: "Обчислення функцій з використанням їхнього розкладу в степеневий ряд"

Мета: Практика в організації ітераційних й арифметичних циклів.

1. Короткі теоретичні відомості

Дійсна функція f(x) називається аналітичної в точці ε, якщо в деякому околі |x-ε|<R цієї точки функція розкладається в степеневий ряд (ряд Тейлора):

$$f(x) = f(\varepsilon) + f'(\varepsilon)(x-\varepsilon) + \frac{f''(\varepsilon)}{2!}(x-\varepsilon)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(\varepsilon)}{n!}(x-\varepsilon)^n + \ldots \qquad (1)$$

При ε=0 отримаємо ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + \ldots \qquad (2)$$

Різниця $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\varepsilon)}{k!}(x-\varepsilon)^k$ (3)

називається залишковим членом і є помилкою при заміні функції f(x) поліномом Тейлора.

Для ряду Маклорена

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta \cdot x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$ де 0<θ<1. (4)

Таким чином, обчислення значення функції можна звести до обчислення суми числового ряду

$a_1+a_2+ \ldots +a_n+ \ldots$. (5)

Відомо, що числовий ряд називається збіжним, якщо існує границя послідовності його часткових сум:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n, \qquad (6)$$

де $S_n= a_1+a_2+ \ldots +a_n+ \ldots$.

Число S називається сумою ряду.

З формули (13) отримаємо $S=S_n+R_n$,

де R_n - залишок ряду, причому $R \to 0$ при $n \to \infty$.

Для знаходження суми S збіжного ряду (5) із заданою точністю ε потрібно вибрати число доданків n настільки великим, щоб виконувалась нерівність

$|R_n|<\varepsilon$.

Тоді часткова сума S_n приблизно може бути прийнята за точну суму S ряду (5).

Приблизно n вибрати так, щоб виконувалась нерівність $|S_{n+1}-S_n|<\varepsilon$ або $a_n<\varepsilon$.

Завдання зводиться до заміни функції степеневим рядом і знаходженню суми деякої кількості доданків $S=\sum a_n(x,n)$ при різних параметрах підсумовування x. Кожен доданок суми залежить від параметра x і номера n, що визначає місце цього доданка в сумі.

Зазвичай формула загального члена суми належить одному з таких трьох типів:

а) $\frac{x^n}{n!}$; $(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $\frac{x^{2n}}{(2n)!}$;

б) $\frac{\cos(nx)}{n}$; $\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$; $\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$;

в) $\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$; $(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2}$; $\frac{n^2+1}{n!}(\frac{x}{2})^n$.

У випадку а) для обчислення члена суми a_n доцільно використовувати рекурентні співвідношення, тобто представляти наступний член суми через попередній: $a_{n+1}=\psi(x, n)a_n$. Це дозволить істотно скоротити обсяг обчислювальної роботи. Крім того, обчислення члена суми за загальною формулою в деяких випадках неможливо (наприклад через наявність n!).

У випадку б) застосування рекурентних співвідношень недоцільно. Обчислення будуть найбільш ефективними, якщо кожен член суми обчислювати за загальною формулою $a_n=\phi(x, n)$.

У випадку в) член суми доцільно представити у вигляді двох співмножників, один із яких обчислюється за рекурентним співвідношенням, а інший безпосередньо $a_n=\phi(x, n)*c_n(x,n)$, де $c_n=c_{n-1}\psi(x,n)$.

2. Постановка завдання

Для x, що змінюється від a до b з кроком (b-a)/k, де (k=10), обчислити функцію f(x), використовуючи її розклад в степеневий ряд у двох випадках:

а) для заданого n;

б) для заданої точності ε (ε=0.0001).

Для порівняння знайти точне значення функції.

3. Варіанти

№	функція	діапазон зміни аргументу	n	сума
1	$y=3^X$	$0{,}1\le x\le 1$	10	$S=1+\frac{\ln 3}{1!}x+\frac{\ln^2 3}{2!}x^2+\ldots+\frac{\ln^n 3}{n!}x^n$
2	$y=-\ln\left\|2\sin\frac{x}{2}\right\|$	$\frac{\pi}{5}\le x\le\frac{9\pi}{5}$	40	$S=\cos x+\frac{\cos 2x}{2}+\ldots+\frac{\cos nx}{n}$
3	$y=\sin X$	$0{,}1\le x\le 1$	10	$S=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
4	$y=X\mathrm{arctg}X-$ $-\ln\sqrt{1+x^2}$	$0{,}1\le x\le 0{,}8$	10	$S=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$
5	$y=e^x$	$1\le x\le 2$	15	$S=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$
6	$y=e^{x\cos\pi/4}\cdot$ $\cos(x\sin\pi/4)$	$0{,}1\le x\le 1$	25	$S=1+\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{1!}x+\ldots+\frac{\cos n\frac{\pi}{4}}{n!}x^n$
7	$y=\cos x$	$0{,}1\le x\le 1$	10	$S=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

8	$y=\dfrac{x\sin\pi/4}{1-2x\cos\pi/4+x^2}$	$0{,}1\le x\le 0{,}8$	40	$S=x\sin\dfrac{\pi}{4}+x^2\sin 2\dfrac{\pi}{4}+\ldots.+x^n\sin n\dfrac{\pi}{4}$
9	$y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+$ $+\dfrac{1}{2}arctgX$	$0{,}1\le x\le 0{,}8$	3	$S=x+\dfrac{x^5}{5}+\ldots..+\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$
10	$y=e^{\cos x}\cos(\sin x)$	$0{,}1\le x\le 1$	20	$S=1+\dfrac{\cos x}{1!}+\ldots.+\dfrac{\cos nx}{n!}$
11	$y=(1+2x^2)e^{x^2}$	$0{,}1\le x\le 1$	10	$S=1+3x^2+\ldots..+\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$
12	$y=-\dfrac{1}{2}\ln(1-$ $-2x\cos\dfrac{\pi}{3}+x^2)$	$0{,}1\le x\le 0{,}8$	35	$S=\dfrac{x\cos\frac{\pi}{3}}{1}+\dfrac{x^2\cos 2\frac{\pi}{3}}{2}+\ldots.+\dfrac{x^n\cos n\frac{\pi}{3}}{n}$
13	$y=\dfrac{1}{2}\ln x$	$0{,}2\le x\le 1$	10	$S=\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3+\ldots..+\dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$
14	$y=\dfrac{1}{4}(x^2-\dfrac{\pi^2}{3})$	$\frac{\pi}{5}\le x\le\pi$	20	$S=-\cos x+\dfrac{\cos 2x}{2^2}+\ldots.+(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2}$
15	$y=\dfrac{1+x^2}{2}arctgX-\dfrac{x}{2}$	$0{,}1\le x\le 1$	30	$S=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{15}+\ldots..+(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$
16	$y=\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{\pi}{4}\lvert x\rvert$	$\frac{\pi}{5}\le x\le\pi$	40	$S=\cos x+\dfrac{\cos 3x}{3^2}+\ldots+\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$
17	$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$	$0{,}1\le x\le 1$	10	$S=1+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots.+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$
18	$y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}\lvert\sin x\rvert$	$0{,}1\le x\le 0{,}8$	50	$S=\dfrac{\cos 2x}{3}+\dfrac{\cos 4x}{15}+\ldots.+\dfrac{\cos 2nx}{4n^2-1}$
19	$y=e^{2x}$	$0{,}1\le x\le 1$	20	$S=1+\dfrac{2x}{1!}+\ldots..+\dfrac{(2x)^n}{n!}$
20	$y=(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{2}+1)e^{x/2}$	$0{,}1\le x\le 1$	30	$S=1+2\dfrac{x}{2}+\ldots.+\dfrac{n^2+1}{n!}(\dfrac{x}{2})^n$
21	$y=arctgX$	$0{,}1\le x\le 1$	40	$S=x-\dfrac{x^3}{3}+\ldots.(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$
22	$y=(1-\dfrac{x^2}{2})\cos x-$ $-\dfrac{x}{2}\sin x$	$0{,}1\le x\le 1$	35	$S=1-\dfrac{3}{2}x^2+\ldots..+(-1)^n\dfrac{2n^2+1}{(2n)!}x^{2n}$

23	$y = 2(\cos^2 x - 1)$	$0,1 \le x \le 1$	15	$S = -\frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + \ldots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$
24	$y = \ln(\frac{1}{2 + 2x + x^2})$	$-2 \le x \le -0,1$	40	$S = -(1+x)^2 + \frac{(1+x)^4}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{(1+x)^{2n}}{n}$
25	$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$0,1 \le x \le 1$	20	$S = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

4. Методичні вказівки

1. Алгоритм розв'язання завдання зводиться до трьох циклів, причому два з них вкладені в третій. Внутрішні цикли підсумують доданки при фіксованому параметрі x, один (арифметичний для заданого n), інший (ітераційний для заданої точності ε. При організації цих циклів варто звернути увагу на правильний вибір формули для обчислення елемента ряду a_n і правильне присвоєння початкових значень змінним циклу. Зовнішній цикл організує зміну параметра x.
2. Результати розрахунків надрукувати у такому вигляді:

Обчислення функції

```
X=......     SN=......     SE=.....     Y=......
X=......     SN=......     SE=.....     Y=......
             ..........
X=......     SN=......     SE=.....     Y=......
```

Тут X- значення параметра; SN- значення суми для заданого n; SE- значення суми для заданої точності; Y-точне значення функції.

5. Зміст звіту

1. Постановка завдання.
2. Варіант завдання.
3. Математична модель (формули, за якими виконуються обчислення доданків ряду).
4. Програма.
5. Отримані результати.