

# EXERCICES DE CALCUL STOCHASTIQUE

## M2IF Evry

Monique Jeanblanc  
Université d'EVRY

Mars 2009



# Contents

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Rappels</b>                               | <b>7</b>  |
| 1.1      | Tribu . . . . .                              | 7         |
| 1.2      | Variables gaussiennes . . . . .              | 8         |
| 1.3      | Espérance conditionnelle . . . . .           | 9         |
| 1.4      | Martingales . . . . .                        | 11        |
| 1.5      | Temps d'arrêt . . . . .                      | 12        |
| 1.6      | Changement de probabilité . . . . .          | 13        |
| 1.7      | Algèbre bêta-Gamma . . . . .                 | 13        |
| 1.8      | Divers . . . . .                             | 14        |
| <b>2</b> | <b>Mouvement Brownien</b>                    | <b>15</b> |
| 2.1      | Propriétés élémentaires . . . . .            | 15        |
| 2.2      | Processus Gaussiens . . . . .                | 17        |
| 2.3      | Brownien Multidimensionnel . . . . .         | 18        |
| 2.4      | Temps d'atteinte . . . . .                   | 19        |
| 2.5      | Scaling . . . . .                            | 22        |
| 2.6      | Compléments . . . . .                        | 22        |
| 2.7      | Finance . . . . .                            | 24        |
| 2.8      | Problème . . . . .                           | 24        |
| 2.8.1    | Partie I : Résultats préliminaires . . . . . | 24        |
| 2.8.2    | Partie II . . . . .                          | 25        |
| 2.8.3    | Partie III . . . . .                         | 26        |
| <b>3</b> | <b>Intégrale d'Itô</b>                       | <b>29</b> |
| 3.1      | Intégrale de Wiener . . . . .                | 30        |
| 3.2      | Formule d'Itô . . . . .                      | 31        |
| 3.3      | Cas multidimensionnel . . . . .              | 36        |
| 3.4      | Compléments . . . . .                        | 37        |
| 3.5      | Brownien géométrique et extensions. . . . .  | 38        |
| 3.6      | Le crochet . . . . .                         | 39        |
| 3.7      | Finance . . . . .                            | 40        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>4 Exemples</b>                                | <b>45</b> |
| 4.1 Processus de Bessel . . . . .                | 45        |
| 4.2 Processus de Bessel carré . . . . .          | 46        |
| 4.3 Autres processus. . . . .                    | 49        |
| 4.4 Des calculs . . . . .                        | 50        |
| <b>5 Equations différentielles stochastiques</b> | <b>51</b> |
| 5.1 Equation linéaire . . . . .                  | 51        |
| 5.2 Processus affines . . . . .                  | 55        |
| 5.3 Autres équations . . . . .                   | 55        |
| 5.4 Finance . . . . .                            | 56        |
| 5.5 Equations différentielles . . . . .          | 57        |
| <b>6 Girsanov</b>                                | <b>59</b> |
| 6.1 Résultats élémentaires. . . . .              | 59        |
| 6.2 Crochet. . . . .                             | 61        |
| 6.3 Processus. . . . .                           | 61        |
| 6.4 Cas multidimensionnel . . . . .              | 65        |
| 6.5 Temps d'arrêt. . . . .                       | 66        |
| 6.6 Finance . . . . .                            | 68        |
| <b>7 Compléments</b>                             | <b>75</b> |
| 7.1 Théorème de Lévy. . . . .                    | 75        |
| 7.2 Equations rétrogrades . . . . .              | 76        |
| 7.3 Théorèmes de représentation . . . . .        | 78        |
| 7.4 Temps local. . . . .                         | 79        |
| 7.5 Lois . . . . .                               | 80        |
| 7.6 Filtrations . . . . .                        | 81        |
| 7.7 Options barrières . . . . .                  | 82        |
| 7.8 Méandres, ponts, excursions . . . . .        | 82        |
| 7.9 Divers . . . . .                             | 82        |
| <b>8 Processus à sauts</b>                       | <b>85</b> |
| 8.1 Processus de Poisson . . . . .               | 85        |
| 8.2 Poisson composé . . . . .                    | 86        |
| 8.3 Formule d'Itô . . . . .                      | 87        |
| 8.4 Temps de Défaut . . . . .                    | 88        |
| 8.5 Marché complets, incomplets . . . . .        | 88        |
| <b>1 Rappels, Corrigés</b>                       | <b>91</b> |
| 1.1 Tribu . . . . .                              | 91        |
| 1.2 Variables gaussiennes. . . . .               | 92        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 1.3      | Espérance conditionnelle . . . . .                       | 94         |
| 1.4      | Martingales . . . . .                                    | 96         |
| 1.5      | Temps d'arrêt . . . . .                                  | 97         |
| 1.6      | Temps discret . . . . .                                  | 98         |
| 1.7      | Algèbre bêta-gamma . . . . .                             | 98         |
| 1.8      | Divers . . . . .   | 98         |
| <b>2</b> | <b>Mouvement Brownien, Corrigés</b>                      | <b>101</b> |
| 2.1      | Propriétés élémentaires . . . . .                        | 101        |
| 2.2      | Processus Gaussien . . . . .                             | 105        |
| 2.3      | Multidimensionnel . . . . .                              | 107        |
| 2.4      | Temps d'atteinte . . . . .                               | 107        |
| 2.5      | Scaling . . . . .  | 109        |
| 2.6      | Compléments . . . . .                                    | 109        |
| 2.7      | Finance . . . . .  | 111        |
| <b>3</b> | <b>Intégrale d'Itô, Corrigés</b>                         | <b>113</b> |
| 3.1      | Intégrale de Wiener . . . . .                            | 113        |
| 3.2      | Formule d'Itô . . . . .                                  | 114        |
| 3.3      | Cas multidimensionnel . . . . .                          | 118        |
| 3.4      | Compléments . . . . .                                    | 118        |
| 3.5      | Brownien géométrique et extensions . . . . .             | 119        |
| 3.6      | Le crochet . . . . .                                     | 122        |
| 3.7      | Finance . . . . .  | 122        |
| <b>4</b> | <b>Exemples, Corrigés</b>                                | <b>125</b> |
| 4.1      | Processus de Bessel . . . . .                            | 125        |
| 4.2      | Processus de Bessel carré . . . . .                      | 126        |
| 4.3      | Autres processus . . . . .                               | 127        |
| 4.4      | Des Calculs . . . . .                                    | 127        |
| <b>5</b> | <b>Equations différentielles stochastiques, Corrigés</b> | <b>129</b> |
| 5.1      | Equation Linéaire . . . . .                              | 129        |
| 5.2      | Processus affines . . . . .                              | 132        |
| 5.3      | Finance . . . . .  | 132        |
| 5.4      | Equations différentielles . . . . .                      | 134        |
| <b>6</b> | <b>Girsanov, Corrigés</b>                                | <b>135</b> |
| 6.1      | Résultats élémentaires . . . . .                         | 135        |
| 6.2      | Crochet . . . . .  | 135        |
| 6.3      | Processus . . . . .                                      | 136        |
| 6.4      | Cas multidimensionnel . . . . .                          | 138        |

|          |                                       |            |
|----------|---------------------------------------|------------|
| 6.5      | Temps d'arrêt . . . . .               | 138        |
| 6.6      | Finance . . . . .                     | 139        |
| <b>7</b> | <b>Compléments, Corrigés</b>          | <b>141</b> |
| 7.1      | Théorème de Lévy. . . . .             | 141        |
| 7.2      | Equations rétrogrades . . . . .       | 141        |
| 7.3      | Théorèmes de représentation . . . . . | 142        |
| 7.4      | Temps local. . . . .                  | 142        |
| 7.5      | <b>Lois</b> . . . . .                 | 143        |
| 7.6      | Filtrations . . . . .                 | 144        |
| 7.7      | Options barrières . . . . .           | 144        |
| 7.8      | Méandres, ponts, excursions . . . . . | 145        |
| <b>8</b> | <b>Sauts, Corrigés.</b>               | <b>149</b> |
| 8.1      | Processus de Poisson . . . . .        | 149        |
| 8.2      | Poisson composé . . . . .             | 150        |
| 8.3      | Marché complets, incomplets . . . . . | 152        |

# Chapter 1

## Rappels

### 1.1 Tribu

#### Exercice 1.1.1 Ensembles appartenant à une tribu.

1. Montrer que si  $\mathcal{F}$  est une tribu, et si  $A$  et  $B$  appartiennent à  $\mathcal{F}$  avec  $A \subset B$ , alors  $B - A \in \mathcal{F}$  où  $B - A$  est l'ensemble des éléments de  $B$  qui ne sont pas dans  $A$ .
2. Montrer que si  $C$  et  $D$  appartiennent à  $\mathcal{F}$ , alors  $C \Delta D \stackrel{def}{=} \{C \cap D^c\} \cup \{C^c \cap D\}$  appartient à  $\mathcal{F}$ .

#### Exercice 1.1.2 Exemples de tribus.

1. Décrire la tribu engendrée par un ensemble  $A$ .
2. Décrire la tribu engendrée par deux ensembles  $A$  et  $B$  disjoints.

#### Exercice 1.1.3 Fonctions indicatrices.

On note  $\mathbb{1}_A$  la v.a. qui vaut 1 pour  $\omega \in A$  et 0 sinon.

1. Montrer que  $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$ .
2. Montrer que, si  $A \cap B = \emptyset$ , on a  $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ .
3. Montrer que  $\mathbb{1}_{B-A} = \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A$ .
4. Montrer que  $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$ .

#### Exercice 1.1.4 Union et intersection.

Soit  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  deux tribus. Montrer que  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$  est une tribu. Montrer qu'en général  $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$  n'est pas une tribu.

#### Exercice 1.1.5 Tribu grossie par un ensemble.

Soit  $\mathcal{F}$  une tribu et  $A$  n'appartenant pas à  $\mathcal{F}$ . Montrer que la tribu engendrée par  $\mathcal{F}$  et  $A$  (c'est-à-dire la plus petite tribu contenant  $\mathcal{F}$  et  $A$ ) est composée des ensembles  $B$  tels que il existe  $C$  et  $D$  appartenant à  $\mathcal{F}$  vérifiant  $B = (C \cap A) \cup (D \cap A^c)$ .

#### Exercice 1.1.6 Tribu engendrée par une v.a.

Soit  $X$  une v.a. sur un espace  $(\Omega, \mathcal{G})$ . La tribu engendrée par  $X$ , notée  $\sigma(X)$ , est la plus petite sous tribu  $\mathcal{F}$  telle que  $X$  soit mesurable de  $(\Omega, \mathcal{F})$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ . Elle est engendrée par  $\mathcal{C} = \{F \subset \Omega, | F = X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$ . Montrer que  $\mathcal{C}$  est une tribu. Vérifier que si  $Y = h(X)$  avec  $h$  borélienne, alors  $Y$  est  $\sigma(X)$  mesurable. On admettra que la réciproque est vraie.

**Exercice 1.1.7 Lois de v.a.**

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables indépendantes et  $(Z, T)$  deux variables indépendantes telles que  $X \stackrel{\text{loi}}{=} Z$  et  $Y \stackrel{\text{loi}}{=} T$ .

1. Soit  $f$  une fonction borélienne (bornée) de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Comparer  $\mathbb{E}(f(X))$  et  $\mathbb{E}(f(Z))$ .
2. Soit  $h$  une fonction borélienne (bornée) de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ . Comparer  $\mathbb{E}(h(X, Y))$  et  $\mathbb{E}(h(Z, T))$ .

**1.2 Variables gaussiennes**

On note  $\mathcal{N}$  la fonction de répartition de la loi gaussienne standard:  $\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$  et  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  la loi d'une v.a. gaussienne d'espérance  $m$  et de variance  $\sigma^2$ .

**Exercice 1.2.1 Moments.**

Soit  $X$  une v.a.r. de loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

1. Calculer  $\mathbb{E}(X^3)$ ,  $\mathbb{E}(X^4)$ ,  $\mathbb{E}(|X|)$  et  $\mathbb{E}(|X^3|)$ .
2. Calculer  $\mathbb{E}(\exp\{\lambda X^2 + \mu X\})$  pour  $1 - 2\lambda\sigma^2 \geq 0$ .
3. Montrer que  $\mathbb{E}(\exp \frac{1}{2}a^2 X^2) = \mathbb{E}(\exp(aXY))$  où  $Y$  est indépendante de  $X$  et de même loi.

**Exercice 1.2.2 Somme de variables gaussiennes indépendantes.**

Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a. gaussiennes indépendantes. Montrer que  $X + Y$  est une variable gaussienne. Précisez sa loi.

**Exercice 1.2.3 Transformée de Laplace.**

Soit  $X$  une v.a.r. de loi  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ .

1. Quelle est la loi de  $\frac{X-m}{\sigma}$  ? Calculer  $\mathbb{E}|X - m|$ .
2. Montrer que  $\mathbb{E}(e^{\lambda X}) = \exp(\lambda m + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2)$ . Calculer  $\mathbb{E}(Xe^{\lambda X})$ .
3. Dans le cas où  $X$  est v.a. gaussienne standard montrer que  $\mathbb{E}(\exp \frac{a^2}{2} X^2) = \mathbb{E}(\exp aXX')$  avec  $X$  et  $X'$  i.i.d.
4. Soit  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ . Calculer, dans le cas  $m = 0$  et  $\sigma = 1$  la valeur de  $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X \leq b} \exp \lambda X)$  en fonction de  $(\Phi, \lambda, b)$ .
5. Montrer que  $\mathbb{E}(e^{\theta X} f(X)) = e^{m\theta + \sigma^2\theta^2/2} \mathbb{E}(f(X + \theta\sigma^2))$  pour  $f$  continue bornée.
6. Montrer que, si  $f$  est "régulière"  $\mathbb{E}(f(X)(X - m)) = \sigma^2 \mathbb{E}(f'(X))$ .

**Exercice 1.2.4 Convergence.**

Soit  $(X_n, n \geq 1)$  une suite de v.a. gaussiennes qui converge dans  $L^2$  vers  $X$ . Quelle est la loi de  $X$ ?

**Exercice 1.2.5 Vecteur gaussien.** Soit  $X$  un vecteur gaussien à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  et  $A$  une matrice  $(p, n)$ . Montrer que  $AX$  est un vecteur gaussien. Préciser son espérance et sa variance.

**Exercice 1.2.6 Vecteur Gaussien.** Soit  $(X, Y)$  un vecteur gaussien centré tel que  $\mathbb{E}(XY) = 0$ . Montrer que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.



**Exercice 1.2.7 Projection.**(\*)

Rappel : projection dans  $L^2$  : Soit  $\mathcal{A}$  un sous espace de  $L^2(\Omega)$  engendré par les variables aléatoires  $Y_1, \dots, Y_n$ , c'est-à-dire si  $Z \in \mathcal{A}$ , il existe  $(a_i)$  réels tels que  $Z = \sum_i a_i Y_i$ . Soit  $X \in L^2$ . On appelle projection de  $X$  sur  $\mathcal{A}$  l'unique élément  $PrX$  de  $\mathcal{A}$  tel que

$$\mathbb{E}((X - PrX)Z) = 0, \forall Z \in \mathcal{A}$$

Soit  $(X_1, X_2, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_n)$  un vecteur gaussien centré dans  $\mathbb{R}^{d+n}$ . Montrer que  $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$  et  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  sont deux vecteurs gaussiens centrés.

On suppose  $d = 1$ . Montrer que  $PrX$  est une v.a. gaussienne  $\sigma(Y)$  mesurable, telle que  $X - PrX$  et  $Y$  sont indépendantes.

**Exercice 1.2.8 Caractérisation de vecteur gaussien.** Soit  $(X, Y)$  deux v.a.r. telles que  $Y$  est gaussienne et la loi conditionnelle de  $X$  à  $Y$  est gaussienne de moyenne  $aY + b$  et de variance indépendante de  $Y$ , c'est-à-dire que  $\mathbb{E}(\exp(\lambda X) | Y = y) = \exp(\lambda(ay + b) + \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2)$ . Montrer que le couple  $(X, Y)$  est gaussien.

## 1.3 Espérance conditionnelle

On travaille sur un espace  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  muni d'une sous-tribu de  $\mathcal{F}$  notée  $\mathcal{G}$ .

**Exercice 1.3.1** Montrer que, si  $X$  et  $Y$  sont bornées

$$\mathbb{E}(Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) = \mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}))$$

Montrer que si  $X$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable et  $Y$  est indépendante de  $\mathcal{G}$ , pour toute fonction borélienne bornée  $\Phi$ ,

$$\mathbb{E}(\Phi(X, Y) | \mathcal{F}) = \Psi(X)$$

où  $\Psi(x) = \mathbb{E}(\Phi(x, Y))$ .

**Exercice 1.3.2** Montrer que si  $X \in L^2$ ,  $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = Y$  et  $\mathbb{E}(X^2|\mathcal{G}) = Y^2$  alors  $X = Y$ .

**Exercice 1.3.3** Soit  $(X, Y)$  indépendantes,  $X$  strictement positive et  $Z = XY$ . Calculer  $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{Z \leq t} | X)$  en utilisant la fonction de répartition de  $Y$ .

**Exercice 1.3.4** Soit  $(X, Y)$  indépendantes, équidistribuées et  $M = \max(X, Y)$ . Calculer  $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X \leq t} | M)$ .

**Exercice 1.3.5 Conditionnement et indépendance.**

Soit  $X, Y$  deux v.a. telles que la v.a.  $X - Y$  est indépendante de  $\mathcal{G}$ , d'espérance  $m$  et de variance  $\sigma^2$ . On suppose que  $Y$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable. Calculer  $\mathbb{E}(X - Y | \mathcal{G})$ . En déduire  $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$ . Calculer  $\mathbb{E}((X - Y)^2 | \mathcal{G})$ . En déduire  $\mathbb{E}(X^2 | \mathcal{G})$ .

**Exercice 1.3.6 Vecteur gaussien** (\*) *Suite de l'exercice 1.2.7*

Soit  $(X, Y_1, \dots, Y_n)$  un vecteur gaussien centré dans  $\mathbb{R}^{1+n}$ . Montrer que  $\mathbb{E}(X | Y) = PrX$ .

On suppose  $n = 1$ . Montrer que  $\mathbb{E}(X | Y) = \alpha Y$ . Déterminer  $\alpha$ .

**Exercice 1.3.7** Soit  $X = X_1 + X_2$ . On suppose que  $X_1$  est indépendante de  $\mathcal{G}$ , que  $X_2$  est  $\mathcal{G}$  mesurable et que  $X_1$  est gaussienne.

1. Calculer  $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$  et  $\text{var}(X | \mathcal{G})$ .

2. Calculer  $\mathbb{E}(e^{\lambda X}|\mathcal{G})$ .

**Exercice 1.3.8 Covariance conditionnelle.** Soit  $Z_1, Z_2$  deux variables aléatoires de carré intégrable. On définit

$$\text{Cov}(Z_1, Z_2|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(Z_1 Z_2|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(Z_1|\mathcal{G})\mathbb{E}(Z_2|\mathcal{G}).$$

Montrer que

$$\text{Cov}(Z_1, Z_2|\mathcal{G}) = \mathbb{E}[(Z_1 - \mathbb{E}(Z_1|\mathcal{G})) (Z_2 - \mathbb{E}(Z_2|\mathcal{G}))|\mathcal{G}].$$

**Exercice 1.3.9 Tribu grossie.**

Soit  $A \notin \mathcal{G}$  et  $A \in \mathcal{F}$  et  $X$  une v.a. intégrable. On note  $\mathcal{H}$  la tribu engendrée par  $\mathcal{G}$  et  $A$ . (Voir exercice 1.1.5). On admettra que les v.a.  $Z$  qui sont  $\mathcal{H}$  mesurables s'écrivent  $Z = Y_1 \mathbb{1}_A + Y_2 \mathbb{1}_{A^c}$ , où les v.a.  $Y_i$  sont  $\mathcal{G}$ -mesurables. Montrer que

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = \frac{\mathbb{E}(X \mathbb{1}_A|\mathcal{G})}{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{G})} \mathbb{1}_A + \frac{\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{A^c}|\mathcal{G})}{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A^c}|\mathcal{G})} \mathbb{1}_{A^c}$$

**Exercice 1.3.10 Linéarité.** Soit  $Z = \alpha Y + \beta$ , avec  $\alpha \neq 0$ . Montrer que  $\mathbb{E}(aX + b|Z) = a\mathbb{E}(X|Y) + b$ .

**Exercice 1.3.11 Grossissement progressif** Soit  $\mathcal{F}$  une tribu. On considère la tribu  $\mathcal{G}$  engendrée par  $\tau \wedge 1$  où  $\tau$  est une v.a. à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ .

1. Montrer que toute v.a.  $\mathcal{G}$  mesurable s'écrit  $h(\tau \wedge 1)$  où  $h$  est borélienne.
2. Montrer que, si  $X$  est une v.a.  $\mathcal{F}$  mesurable,  $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathbb{1}_{1 \leq \tau} = A\mathbb{1}_{1 \leq \tau}$  où  $A$  est une constante. Montrer que  $A = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{1 \leq \tau})/\mathbb{P}(1 \leq \tau)$ .

**Exercice 1.3.12 Conditionnement et indépendance 1.** Soit  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$  deux  $\sigma$ -algèbres indépendantes,  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \vee \mathcal{G}_2$  et  $(X_i, i = 1, 2)$  deux variables aléatoires bornées telles que  $X_i$  est  $\mathcal{G}_i$  mesurable. Montrer que  $\mathbb{E}(X_1 X_2|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X_1|\mathcal{G}_1)\mathbb{E}(X_2|\mathcal{G}_2)$ .

**Exercice 1.3.13 Conditionnement et indépendance 2.** Montrer que si  $\mathcal{G}$  est indépendante de  $\sigma(X) \vee \mathcal{F}$ ,  $\mathbb{E}(X|\mathcal{G} \vee \mathcal{F}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ .

**Exercice 1.3.14 Formule de Bayes.** Soit  $d\mathbb{Q} = Ld\mathbb{P}$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  et  $\mathcal{G}$  une sous-tribu de  $\mathcal{F}$ . Montrer que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{G}) = \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z|\mathcal{G})} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(ZX|\mathcal{G}).$$

Montrer que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X|\mathcal{G}), \forall X \in \mathcal{F}$$

si et seulement si  $L$  est  $\mathcal{G}$  mesurable.

**Exercice 1.3.15** Soit  $f$  et  $g$  deux densités strictement positives sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $X$  une v.a. de densité  $f$  sur un espace  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Montrer qu'il existe une probabilité  $\mathbb{Q}$  sur cet espace telle que  $X$  soit de densité  $g$ .

**Exercice 1.3.16 Indépendance conditionnelle** Soit  $(\mathcal{F}_t)$  et  $(\mathcal{G}_t)$  deux filtrations.

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.
  - (H1) pour tout  $t$ , les tribus  $\mathcal{F}_{\infty}$  et  $\mathcal{G}_t$  sont conditionnellement indépendantes par rapport à  $\mathcal{F}_t$ .
  - (H2)  $\forall F \in \mathcal{F}_{\infty}, \forall G_t \in \mathcal{G}_t, \mathbb{E}(FG_t|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(F|\mathcal{F}_t)\mathbb{E}(G_t|\mathcal{F}_t)$
  - (H3)  $\forall t, \forall G_t \in \mathcal{G}_t, \mathbb{E}(G_t|\mathcal{F}_{\infty}) = \mathbb{E}(G_t|\mathcal{F}_t)$
  - (H4)  $\forall t, \forall F \in \mathcal{F}_{\infty}, \mathbb{E}(F|\mathcal{G}_t) = \mathbb{E}(F|\mathcal{F}_t)$ .

2. Soit  $\mathbb{F}$  et  $\mathbb{G}$  deux filtrations telles que  $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$ . Montrer que  
(H) Toute  $\mathbb{F}$ -martingale de carré intégrable est une  $\mathbb{G}$ -martingale équivaut à (H1).
3. Dans le cas  $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(t \wedge \tau)$  où  $\tau$  est un temps aléatoire, montrer que (H1) équivaut à  
**(H5)**  $\forall s \leq t, \mathbb{P}(\tau \leq s | \mathcal{F}_\infty) = \mathbb{P}(\tau \leq s | \mathcal{F}_t)$ .

## 1.4 Martingales

L'espace  $\Omega$  est muni d'une filtration  $(\mathcal{F}_t)$ .

Un processus  $M$  est une martingale si

- pour tout  $t$ ,  $M_t$  est intégrable;
- pour tout  $t > s$ ,  $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$ , p.s.

On dit que  $M$  est une surmartingale si

- $M_t$  est adapté, intégrable;
- $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) \leq M_s$ ,  $\forall s \leq t$ .

Le processus  $M$  est une sousmartingale si  $-M$  est une surmartingale.

**Exercice 1.4.1 Exemple de base.** Soit  $X$  une v.a. intégrable. Montrer que  $(\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_t), t \geq 0)$  est une martingale.

**Exercice 1.4.2 Surmartingale.**

1. Montrer que si  $M$  est une martingale et  $A$  un processus croissant adapté ( $A_s \leq A_t$ ,  $\forall s \leq t$ ) alors  $M - A$  est une surmartingale.
2. Soit  $M$  une martingale. Que peut-on dire de  $M^2$ ?
3. Soit  $M$  une martingale telle que  $\mathbb{E}(M_\infty^2) < \infty$ . Montrer que  $\sup_t \mathbb{E}(M_t^2) < \infty$ .
4. Montrer qu'une surmartingale telle que  $\mathbb{E}(Z_T) = \mathbb{E}(Z_0)$  est une martingale sur  $[0, T]$ .

**Exercice 1.4.3 Martingale locale.** Montrer qu'une martingale locale positive est une surmartingale.

**Exercice 1.4.4 Martingale en fonction de la valeur terminale.** Soit  $X$  une martingale telle que  $X_T = \zeta$ . Exprimer  $X_t$  en fonction de  $\zeta$  pour  $t < T$  au moyen d'une espérance conditionnelle.

**Exercice 1.4.5 Un lemme.** On trouve dans la littérature (Duffie) le lemme suivant:

Lemma: Let  $\phi$  be an adapted bounded process. Then  $(Y_t = M_t - \int_0^t \phi_s ds, 0 \leq t \leq T)$  for some martingale  $M$  if and only if

$$Y_t = \mathbb{E}[\int_t^T \phi_s ds + Y_T | \mathcal{F}_t]$$

Donner une démonstration de ce lemme.

**Exercice 1.4.6 Martingale de carré intégrable.** Soit  $(M_t, t \geq 0)$  une  $\mathcal{F}_t$ -martingale de carré intégrable (telle que  $M_t^2$  soit d'espérance finie, pour tout  $t$ ). Montrer que

1.  $\mathbb{E}((M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(M_t^2 | \mathcal{F}_s) - M_s^2$  pour  $t > s$ .
2.  $\mathbb{E}((M_t - M_s)^2) = \mathbb{E}(M_t^2) - \mathbb{E}(M_s^2)$  pour  $t > s$ .
3. La fonction  $\Phi$  définie par  $\Phi(t) = \mathbb{E}(M_t^2)$  est croissante.

**Exercice 1.4.7 Projection de martingale.** Montrer que si  $M$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale, c'est aussi une martingale par rapport à sa propre filtration  $\mathcal{G}_t = \sigma(M_s, s \leq t)$ . Soit  $\mathcal{H}_t \subset \mathcal{F}_t$ . Montrer que  $Y_t = \mathbb{E}(M_t | \mathcal{H}_t)$  est une  $\mathcal{H}_t$ -martingale.

**Exercice 1.4.8 Une sousmartingale.** Soit  $\tau$  une v.a. positive. Montrer que  $Z_t = \mathbb{P}(\tau \leq t | \mathcal{F}_t)$  est une sousmartingale.

**Exercice 1.4.9 Processus à accroissements indépendants.** Soit  $X$  un PAI (processus à accroissements indépendants, c'est-à-dire tel que, pour  $t > s$ , la v.a.  $X_t - X_s$  est indépendante de  $\sigma(X_u, u \leq s)$ ). Montrer que, si, pour tout  $t$ , la v.a.  $X_t$  est intégrable,  $X$  est une martingale et que si  $X$  est de carré intégrable,  $X_t^2 - \mathbb{E}(X_t^2)$  est une martingale. Montrer que, si  $e^{\lambda X_t}$  est intégrable,

$$Z_t = \frac{e^{\lambda X_t}}{\mathbb{E}(e^{\lambda X_t})}$$

est une martingale.

**Exercice 1.4.10** Soit  $M$  une martingale positive continue uniformément intégrable et  $\tau = \inf\{t : M_t = 0\}$ . Montrer que  $M$  est nulle sur  $t > \tau$ .

**Exercice 1.4.11** Soit  $X$  un processus  $\mathbb{F}$ -adapté, positif à trajectoires continues et  $\mathbb{G} \subset \mathbb{F}$ . Montrer que  $\mathbb{E}(\int_0^t X_s ds | \mathcal{G}_t) - \int_0^t \mathbb{E}(X_s | \mathcal{G}_s) ds$  est une  $\mathbb{G}$ -martingale.

## 1.5 Temps d'arrêt

**Exercice 1.5.1 Tribu associée à un temps d'arrêt.** Soit  $\tau$  un temps d'arrêt. Montrer que  $\mathcal{F}_\tau$  est une tribu.

**Exercice 1.5.2** Soit  $T$  un temps d'arrêt et  $X$  une variable aléatoire appartenant à  $\mathcal{F}_T$ , vérifiant  $X \geq T$ . Montrer que  $X$  est un temps d'arrêt.

**Exercice 1.5.3 Exemple de processus adapté.** Soit  $T$  un temps d'arrêt. Montrer que le processus  $X_t = \mathbb{1}_{[0, T]}(t)$  est adapté.

**Exercice 1.5.4 Comparaison de tribus.** Soit  $S$  et  $T$  deux temps d'arrêt tels que  $S \leq T$ . Montrer que  $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$ .

**Exercice 1.5.5 Propriété de mesurabilité.** Soit  $S$  un temps d'arrêt. Montrer que  $S$  est  $\mathcal{F}_S$ -mesurable.

**Exercice 1.5.6** Soit  $S$  et  $T$  deux temps d'arrêt. Montrer que  $\{S \leq T\}, \{T \leq S\}$  appartiennent à  $\mathcal{F}_S$ .

**Exercice 1.5.7 Exemple de processus càdlàg.** Soit  $S$  et  $T$  deux temps d'arrêt tels que  $S < T$ . Montrer que le processus  $Z_t = \mathbb{1}_{[S, T]}(t)$  (égal à 1 si  $S \leq t < T$  et à 0 sinon) est un processus càdlàg.

**Exercice 1.5.8 Exemple trivial de temps d'arrêt.** Montrer qu'une constante  $\tau$  est un temps d'arrêt. Quelle est dans ce cas la tribu  $\mathcal{F}_\tau$ ?

**Exercice 1.5.9 Opérations sur les temps d'arrêt.** Montrer que l'inf (resp. le sup) de deux temps d'arrêt est un temps d'arrêt.

**Exercice 1.5.10 Caractérisation de martingale.**

1. Soit  $s < t$ ,  $A \in \mathcal{F}_s$  et  $T = t\mathbb{1}_{A^c} + s\mathbb{1}_A$ . Montrer que  $T$  est un temps d'arrêt.
2. Montrer que si  $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$  pour tout temps d'arrêt  $T$ , alors le processus  $X$  est une martingale.

**Exercice 1.5.11 Théorème d'arrêt.** Soit  $M$  une martingale continue telle que  $M_0 = a$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t = 0$ . Montrer que  $\sup M_t \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{a}{U}$  où  $U$  est une v.a. de loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

**1.6 Changement de probabilité**

Ce thème sera central en vue d'application à la finance.

Deux probabilités  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Q}$  définies sur le même espace  $(\Omega, \mathcal{F})$  sont dites équivalentes si elles ont mêmes ensembles négligeables, c'est à dire si

$$\mathbb{P}(A) = 0 \iff \mathbb{Q}(A) = 0.$$

On admet le résultat: Si  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Q}$  sont équivalentes, il existe une variable  $Y$ , strictement positive,  $\mathcal{F}$ -mesurable, d'espérance 1 sous  $\mathbb{P}$  appelée densité de Radon-Nikodym telle que  $d\mathbb{Q} = Y d\mathbb{P}$  ou encore  $\mathbb{Q}(A) = \int_A Y d\mathbb{P}$ . On écrit également cette relation sous la forme  $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Y$ . Réciproquement, si  $Y$  est une v.a. strictement positive,  $\mathcal{F}$ -mesurable, d'espérance 1 sous  $\mathbb{P}$ , la relation  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Z) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(ZY)$  définit une probabilité  $\mathbb{Q}$  équivalente à  $\mathbb{P}$ . Elle est facile à mémoriser par la règle de calcul formel suivante:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Z) = \int Z d\mathbb{Q} = \int Z \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} d\mathbb{P} = \int ZY d\mathbb{P} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(ZY)$$

On a aussi  $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = \frac{1}{Y}$ .

**Exercice 1.6.1** Montrer que si  $\mathbb{P}$  est une probabilité et  $Z$  une v.a., telle que l'égalité  $d\mathbb{Q} = Z d\mathbb{P}$  (soit  $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z\mathbb{1}_A)$ ) définit une probabilité, alors  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z) = 1$  et  $\mathbb{P}(Z < 0) = 0$ .

**Exercice 1.6.2** 1. Soit  $U$  une variable de Bernoulli sous  $\mathbb{P}$  définie par

$$\mathbb{P}(U = 0) = 1 - p, \quad \mathbb{P}(U = 1) = p.$$

Soit  $Y$  la variable définie par  $Y = \lambda U + \mu(1 - U)$ . Dans quels cas cette variable est elle d'espérance 1? Soit  $d\mathbb{Q} = Y d\mathbb{P}$ , Calculer  $\mathbb{Q}(U = 1)$ . Quelle est la loi de  $U$  sous  $\mathbb{Q}$ ?

2. Soit  $X$  est une v.a. de loi  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  sous  $\mathbb{P}$  et soit  $Y = \exp\{h(X - m) - \frac{1}{2}h^2\sigma^2\}$ . Soit  $d\mathbb{Q} = Y d\mathbb{P}$ . Calculer  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\{\exp(\lambda X)\} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\{Y \exp(\lambda X)\}$ . En déduire la loi de  $X$  sous  $\mathbb{Q}$  (utiliser l'exercice 1.2.1).
3. Soit  $X$  est un vecteur gaussien sous  $\mathbb{P}$  et  $U$  une variable telle que le vecteur  $(X, U)$  soit gaussien. On pose  $d\mathbb{Q} = Y d\mathbb{P}$  avec  $Y = \exp(U - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(U) - \frac{1}{2}\text{Var}_{\mathbb{P}}(U))$ . Montrer que  $X$  est gaussien sous  $\mathbb{Q}$ , de même covariance que sous  $\mathbb{P}$ .

**1.7 Algèbre bêta-Gamma**

**Exercice 1.7.1 Loi Arc sinus** Une variable aléatoire  $A$  a une loi Arc Sinus si sa densité est  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-t}} \mathbb{1}_{t \in [0,1]}$ . Montrer que  $\cos^2(\Theta) \stackrel{\text{loi}}{=} A$  si  $\Theta$  est uniforme sur  $[0, 2\pi]$ .

Soit  $N$  et  $N'$  deux variables  $\mathcal{N}(0, 1)$  indépendantes. Montrer que  $\frac{N^2}{N^2 + N'^2} \stackrel{\text{loi}}{=} A$ .

Soit  $C = \frac{N}{N'}$ . Montrer que  $C$  a une loi de Cauchy et que  $\frac{1}{1 + C^2}$  a une loi Arc sinus.

## 1.8 Divers

**Exercice 1.8.1** Soit  $X$  un processus at  $M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} X_s$ . On note  $\tau$  une v.a. de loi exponentielle de paramètre  $\theta$  indépendante de  $X$ . Montrer que

$$\mathbb{E}(\exp(-\lambda M_\tau)) = 1 - \lambda \mathbb{E} \left( \int_0^\infty du e^{-\lambda u} e^{-\theta T_u} \right)$$

où  $T_u = \inf\{t : X_t \geq u\}$ .

**Exercice 1.8.2 Transformée de Laplace et indépendance.** Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a. indépendantes. Justifier que  $\mathbb{E}(e^{\lambda(X+Y)}) = \mathbb{E}(e^{\lambda X})\mathbb{E}(e^{\lambda Y})$ . La réciproque est-elle vraie?

**Exercice 1.8.3 Transformée de Laplace et moments.** Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a. bornées telles que  $\mathbb{E}(e^{\lambda X}) = \mathbb{E}(e^{\lambda Y})$  pour tout  $\lambda$ . Montrer que  $X$  et  $Y$  ont même moments.

**Exercice 1.8.4 Markov.** Soit  $X$  un processus de Markov fort et  $T_a = \inf\{t : X_t = a\}$ . Montrer que, pour  $t < T$

$$\mathbb{P}(X_T \in dx | X_t = a) = \mathbb{P}(X_T \in dx | T_a = t).$$

**Exercice 1.8.5 Propriété de Markov** Soit  $B$  un mouvement Brownien et  $f$  une fonction. On note  $T^f = \inf\{t : B_t = f(t)\}$ . Montrer que

$$\mathbb{P}(B_t \geq f(s) | T^f = s) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{s < t}.$$

Si  $f$  est croissante, montrer que  $\mathbb{P}(T^f \leq t) = 2\mathbb{P}(B_t \geq f(T^f))$ .

## Chapter 2

# Mouvement Brownien

Dans tout ce qui suit,  $(B_t, t \geq 0)$  est un mouvement Brownien réel (un processus à accroissements indépendants issu de 0, tel que pour  $t > s$ ,  $B_t - B_s$  est une v.a. gaussienne centrée de variance  $t - s$ ) et on note  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$  sa filtration naturelle.

Dans certains exercices, il sera précisé que  $B$  est issu de  $x$ .

On rappelle que si  $X$  est un processus continu issu de 0, c'est un mouvement Brownien si et seulement si  $X$  et  $(X_t^2 - t, t \geq 0)$  sont des martingales.

Le mouvement Brownien est un processus de Markov fort: pour tout temps d'arrêt  $\tau$  fini

$$\mathbb{E}(f(B_{t+\tau})|\mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}(f(B_{t+\tau})|B_\tau).$$

### 2.1 Propriétés élémentaires

**Exercice 2.1.1 Caractérisation.** Montrer qu'un processus  $X$  est un mouvement Brownien si et seulement si

- Pour tout  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , le vecteur  $(X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  est un vecteur gaussien centré
- $\mathbb{E}(X_t X_s) = s \wedge t$
- $X_0 = 0$

**Exercice 2.1.2 Caractérisation 2.** Montrer qu'un processus continu  $X$  est un mouvement Brownien si et seulement si, pour tout  $\lambda$  le processus  $\exp(\lambda X_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t)$  est une martingale.

**Exercice 2.1.3 Calcul d'espérances.**

- Calculer pour tout couple  $(s, t)$  les quantités  $\mathbb{E}(B_s B_t^2)$ ,  $\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s)$ ,  $\mathbb{E}(B_t|B_s)$  et  $\mathbb{E}(e^{\lambda B_t}|\mathcal{F}_s)$ .
- Calculer  $\mathbb{E}(\int_0^t B_u du|\mathcal{F}_s)$  avec  $t > s$  et  $\mathbb{E}(\int_0^t B_u du|B_s)$
- On a vu, dans Exercice 1.2.1, que si  $Z$  est une v.a. gaussienne centrée de variance  $\sigma^2$ , on a  $\mathbb{E}(Z^4) = 3\sigma^4$ . Calculer  $\mathbb{E}(B_t^2 B_s^2)$ .
- Quelle est la loi de  $B_t + B_s$ ?
- Soit  $\theta_s$  une variable aléatoire bornée  $\mathcal{F}_s$ -mesurable. Calculer pour  $t \geq s$ ,  $\mathbb{E}(\theta_s(B_t - B_s))$  et  $\mathbb{E}[\theta_s(B_t - B_s)^2]$ .
- Calculer  $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_t \leq a})$  et  $\mathbb{E}(B_t \mathbb{1}_{B_t \leq a})$ .
- Calculer  $\mathbb{E}(\int_0^t \exp(B_s) ds)$  et  $\mathbb{E}(\exp(\alpha B_t) \int_0^t \exp(\gamma B_s) ds)$ .
- Calculer  $\mathbb{E}(e^{B_t}|\mathcal{F}_s)$  et  $\mathbb{E}((ae^{B_t} - b)^+|\mathcal{F}_s)$ .

**Exercice 2.1.4 Lois.** Montrer que  $\mathbb{E}(f(B_t)) = \mathbb{E}(f(G\sqrt{u} + B_{t-u}))$  avec  $G$  v.a. indépendante de  $B_{t-u}$  et de loi gaussienne centrée réduite. En déduire le calcul de  $\mathbb{E}(f(B_t)|\mathcal{F}_s)$ .

**Exercice 2.1.5** Soit  $\Theta$  une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre  $\theta$  (soit  $P(\Theta \in dx) = \theta e^{-\theta x} \mathbb{1}_{x>0} dx$ ) indépendante de  $B$ . Quelle est la loi de  $B_\Theta$ ?

**Exercice 2.1.6 Des martingales.** Parmi les processus suivants, quels sont ceux qui sont des martingales. (On pourra utiliser, sans démonstration, que  $\mathbb{E}[\int_0^t B_u du | \mathcal{F}_s] = \int_0^t \mathbb{E}[B_u | \mathcal{F}_s] du$ .)

1.  $M_t = B_t^3 - 3 \int_0^t B_s ds$ .
2.  $Z_t = B_t^3 - 3tB_t$ .
3.  $X_t = tB_t - \int_0^t B_s ds$ .
4.  $U_t = \sin B_t + \frac{1}{2} \int_0^t \sin(B_s) ds$ .
5.  $Y_t = t^2 B_t - 2 \int_0^t B_s ds$ .

**Exercice 2.1.7 Exponentielle de Brownien.** Calculer  $\mathbb{E}(e^{x+B_t})$  et  $\mathbb{E}(\sin(x+B_t))$  en utilisant

$$\mathbb{E}(f(x+B_t)) = f(x) + \frac{1}{2} \int_0^t \mathbb{E}(f''(x+B_s)) ds.$$

**Exercice 2.1.8 Changement de temps.** Soit  $Z_t = B_{A(t)}$  où  $A$  est une fonction déterministe continue strictement croissante.

1. Calculer l'espérance et la variance de  $Z_t$ . Ce processus est-il une martingale par rapport à  $\mathbb{F}$ ?
2. On définit  $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{A(t)}$ . Montrer que  $Z$  est une  $\mathbb{G}$ -martingale.
3. Déterminer le processus croissant  $C$  tel que  $(Z_t)^2 - C_t$  soit une  $\mathbb{G}$ -martingale.
4. Soit un processus  $M$  tel que  $M$  est une martingale et il existe  $A$ , fonction déterministe continue strictement croissante telle que  $M_t^2 - A(t)$  est une martingale. On note  $C$  l'inverse de  $A$ , c'est-à-dire la fonction telle que  $C(A(t)) = t$ . Montrer que  $W_t = M_{C(t)}$  est un mouvement Brownien.

**Exercice 2.1.9 Calcul d'espérance.** Comment calculer  $\mathbb{E}_x(f(B_t)g(B_s))$ ?

**Exercice 2.1.10** Calculer

$$\mathbb{E}((\lambda \int_0^1 du B_u + \mu B_1)^2)$$

**Exercice 2.1.11 Calcul de transformée de Laplace.** Calculer  $\mathbb{E}_x(\exp(-\lambda W_t^2))$ .

**Exercice 2.1.12 Comportement limite.**

1. Montrer que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{t} = 0$
2. Montrer que  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_x(B_t < 0) = 1/2$ . En déduire que pour tout  $x > 0$ , si  $T_0 = \inf\{t : B_t = 0\}$ , on a  $P_x(T_0 < \infty) \geq 1/2$ . (En fait, on peut montrer que  $T_0$  est fini ps.)

**Exercice 2.1.13** Montrer que l'intégrale  $\int_0^1 \frac{B_s}{s} ds$  est convergente.



**Exercice 2.1.14 Tribu triviale.** On admettra qu'un ensemble appartenant à la filtration  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0^+$  a pour probabilité 0 ou 1.

Si  $\tau = \inf\{t \geq 0 : B_t > 0\}$ , montrer que  $P(\tau \leq t) \geq \frac{1}{2}$ . En déduire que  $P(\tau = 0) = 1$ .

**Exercice 2.1.15 Applications de la propriété de Markov.** Montrer que

$$\mathbb{E}_x \left( \int_0^t h(r, B_r) dr | \mathcal{F}_s \right) = \int_0^s h(r, B_r) dr + \mathbb{E}_{B_s} \left( \int_0^{t-s} h(s+u, B_u) du \right)$$

**Exercice 2.1.16** Soit  $\tau$  un temps d'arrêt,  $\lambda > 0$  et  $u$  une fonction continue bornée. On pose  $g(x) = \mathbb{E}_x \left( \int_0^\tau e^{-\lambda t} u(B_t) dt \right)$  et  $f(x) = \mathbb{E}_x \left( \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(B_t) dt \right)$  où comme d'habitude l'indice  $x$  précise que le Brownien est issu de  $x$ .

1. Montrer que  $g$  et  $f$  sont définies.
2. Montrer que

$$\mathbb{E}_x \left( \int_\tau^\infty e^{-\lambda t} u(B_t) dt \right) = \mathbb{E}_x \left( \mathbb{1}_{\tau < \infty} e^{-\lambda \tau} f(B_\tau) \right).$$

3. Montrer que si  $\tau = T_0$ , alors  $g(x) = f(x) - f(0)\varphi(x)$  où on explicitera  $\varphi$ .

**Exercice 2.1.17 Polynômes d'Hermite.** Les polynômes d'Hermite  $H_k$  sont définis par  $e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}} = \sum \frac{\alpha^k}{k!} H_k(x)$ . Montrer qu'il existe  $H_k(x, t)$ , polynômes en les deux variables  $(t, x)$  tels que  $e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}t} = \sum \frac{\alpha^k}{k!} H_k(x, t)$ . En déduire la valeur de  $\mathbb{E}(B_t^k | \mathcal{F}_s)$ .

**Exercice 2.1.18 Des gaussiennes.** Soit  $S_t = \exp(\mu t + \sigma B_t)$ . Calculer l'espérance et la variance de  $\int_0^T S_t dt$  et  $\int_0^T \ln S_t dt$ . Ces variables sont-elles gaussiennes?

**Exercice 2.1.19 Zeros.** Montrer que

$$\mathbb{P}(B_u \neq 0, \forall u \in ]s, t]) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s}{t}}$$

**Exercice 2.1.20 Filtration.** Soit  $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(B_1)$ . Vérifier que  $B$  n'est pas une  $\mathbb{G}$ -martingale.

## 2.2 Processus Gaussiens

**Exercice 2.2.1** Montrer que le processus  $Y_t = \int_0^t B_u du$  est gaussien. Calculer son espérance et sa covariance.

**Exercice 2.2.2** Expliciter la solution de

$$dX_t = -aX_t dt + e^{bt} dB_t$$

Calculer  $\mathbb{E}(X_t)$  et  $Var(X_t)$ .

**Exercice 2.2.3 Non-existence de processus.** Montrer qu'il n'existe pas de processus "régulier"  $X$  tel que  $\forall(s, t), s \neq t$ , les variables  $X_t$  et  $X_s$  soient indépendantes, centrées gaussiennes, et  $\mathbb{E}(X_t^2)$  localement borné. On considérera  $\int_0^t X_s ds$  et on montrera que ce processus serait Gaussien, on calculera son espérance et sa variance.

**Exercice 2.2.4 Le pont Brownien.** On définit un pont Brownien par

$$Z_t = B_t - tB_1, 0 \leq t \leq 1.$$

1. Montrer que  $Z$  est un processus gaussien indépendant de  $B_1$ . Préciser sa loi, c'est-à-dire sa moyenne et sa fonction de covariance.
2. Montrer que le processus  $\tilde{Z}$  avec  $\tilde{Z}_t = Z_{1-t}$  a même loi que  $Z$ .
3. Montrer que le processus  $Y$  avec  $Y_t = (1-t)B_{\frac{t}{1-t}}, 0 < t < 1$  a même loi que  $Z$ .
4. Montrer que  $(Z_t \stackrel{loi}{=} (B_t | B_1 = 0))$ .

**Exercice 2.2.5 Un exemple surprenant.** Montrer que  $Z_t = B_t - \int_0^t \frac{B_s}{s} ds$  est un processus gaussien. Calculer sa variance et sa covariance. En déduire que  $Z$  est un mouvement Brownien. Montrer que  $Z$  n'est pas une  $\mathbb{F}^B$ -martingale, où  $\mathbb{F}^B$  est la filtration naturelle de  $B$ .

**Exercice 2.2.6 Pont.** Soit  $B$  un MB et  $\Gamma_t$  l'espace Gaussien engendré par  $(B_u - \frac{u}{t}B_t, u \leq t)$ . Montrer que  $\Gamma_t$  est croissant en  $t$ . Montrer que  $\Gamma(B_u, u \leq t) = \Gamma_t \oplus \Gamma(B_t)$  où  $\Gamma(G)$  est l'espace engendré par  $G$ .

**Exercice 2.2.7 Changement de probabilité.** Soit  $B$  un MB,  $L_t = \exp(mB_t - \frac{m^2}{2}t)$ , et  $Q$  définie sur  $\mathcal{F}_T$  par  $dQ = L_T d\mathbb{P}$ . Montrer que  $\tilde{B}_t = B_t - mt$  est, sous  $Q$ , un processus gaussien à accroissements indépendants. Montrer que  $\tilde{B}_t$  est un  $Q$ -mouvement Brownien.

**Exercice 2.2.8** Soit  $B$  un mouvement Brownien,  $p > 1$  et  $\tau$  une v.a. positive. On admettra que

$$\mathbb{E}(\sup_t (|B_t| - t^{p/2})) < \infty$$

1. Montrer que

$$\mathbb{E}(\sup_t (|B_t| - \mu t^{p/2})) = \lambda \mathbb{E}(\sup_s (|B_s| - s^{p/2}))$$

$$\text{avec } \lambda = \left(\frac{1}{\mu}\right)^{1/(p-1)}.$$

2. Montrer que  $\mathbb{E}(|B_\tau|) \leq \mathbb{E}(\sup_t (|B_t| - \mu t^{p/2})) + \mu \mathbb{E}(\tau^{p/2})$ .
3. Montrer que

$$\forall p > 1, \exists C_p, \forall \tau, \quad \mathbb{E}(|B_\tau|) \leq C_p \|\tau^{1/2}\|_p$$

## 2.3 Brownien Multidimensionnel

**Exercice 2.3.1** Deux mouvements Browniens  $B$  et  $W$  sont corrélés si le processus  $(W_t B_t - \rho t, t \geq 0)$  est une martingale. Soit deux mouvements Browniens  $B$  et  $W$  corrélés de coefficient de corrélation  $\rho$ . Montrer, sans utiliser la formule d'Itô pour des processus corrélés, qu'il existe un Brownien  $Z$ , indépendant de  $W$  tel que  $B = \rho W + \sqrt{1 - \rho^2} Z$ .

**Exercice 2.3.2 Somme de browniens.** Soit  $W$  un mouvement brownien indépendant de  $B$  et  $\rho \in [0, 1]$ . Montrer que  $(Z_t = \rho W_t + \sqrt{1 - \rho^2} B_t, t \geq 0)$  est un mouvement Brownien.

Soient  $B$  et  $W$  deux browniens indépendants et  $(\sigma_i, i = 1, 2)$  deux fonctions déterministes. Montrer qu'il existe une fonction  $\sigma_3$  telle que le processus  $Z$  défini par

$$\sigma_3(t) dZ_t = \sigma_1(t) dB_t + \sigma_2(t) dW_t$$

est un Brownien.

**Exercice 2.3.3** Soit  $B$  un Brownien  $n$ -dimensionnel. Soit  $f$  une fonction borélienne bornée. Montrer que, pour  $0 < s < t$   $\mathbb{E}_x(f(B_t) | \mathcal{F}_s) = \Phi(B_s)$  avec  $\Phi(x) = \mathbb{E}_x[f(B_{t-s})]$ . En déduire que  $B^i B^j$  est une martingale pour  $i \neq j$ .

**Exercice 2.3.4 Mouvement Brownien dans  $\mathbb{R}^2$ .**

1. Soit  $W_1$  et  $W_2$  deux mouvements Browniens indépendants. Le processus  $W_t = W_1(t) + W_2(t)$  est-il un mouvement Brownien? Si oui, justifiez la réponse, sinon, expliquez pourquoi. Même question avec  $\alpha W_1(t) + \beta W_2(t)$ .
2. Soit  $W_1$  et  $W_2$  deux processus. Soit  $c$  un réel donné. Montrer que si

$$\left( \exp \left\{ aW_1(t) + bW_2(t) - \frac{t}{2} [a, b] \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\}, t \geq 0 \right)$$

est une martingale pour tout couple  $(a, b)$ ,  $W_1$  et  $W_2$  sont des MB. Calculer  $\mathbb{E}[\exp(aW_1(t) + bW_2(t))]$ .

**Exercice 2.3.5 Brownien  $n$ -dimensionnel** Soit  $B$  un MB  $n$ -dimensionnel et  $U$  une matrice telle que  $UU^T = I$ . Montrer que  $(UB_t, t \geq 0)$  est un MB.

## 2.4 Temps d'atteinte

Dans tous ces exercices,  $a \in \mathbb{R}$  et  $T_a = \inf\{t : B_t = a\}$ .

**Exercice 2.4.1 Transformée de Laplace.** Montrer que  $T_a$  est un temps d'arrêt. Calculer  $\mathbb{E}(e^{-\lambda T_a})$  pour tout  $\lambda$  réel. Montrer que  $\mathbb{P}(T_a < \infty) = 1$  et que  $\mathbb{E}(T_a) = \infty$ .  
Mêmes questions avec  $\tau_a = \inf\{t : S_t = a\}$  où  $S_t = \exp(\sigma B_t)$ .

**Exercice 2.4.2** Soit  $a < 0 < b$  et  $T = T_a \wedge T_b$ . Calculer  $\mathbb{P}(T_a < T_b)$  et  $\mathbb{E}(T)$ .

**Exercice 2.4.3 Temps d'atteinte.**

1. Soit  $f(t) = \mathbb{E}(e^{-rT_a} \mathbb{1}_{T_a < t})$ . On ne cherchera pas à calculer  $f$  ici.  
Calculer en fonction de  $f$  la quantité  $\mathbb{E}(e^{-r \inf(T, T_a)})$  où  $T$  est un nombre positif.
2. Montrer que si  $0 < a < b$ ,  $T_b - T_a$  est indépendant de  $T_a$  et a même loi que  $T_{b-a}$ . Montrer (sans calculs) que pour  $b > a > 0$ , la v.a.  $T_b - T_a$  est indépendante de  $T_a$ . Quelle est la loi de  $T_b - T_a$ ? Que peut-on dire du processus  $(T_a, a > 0)$ ?
3. Soit  $T$  un nombre réel. Calculer  $Z_t = \mathbb{P}(T_a > T | \mathcal{F}_t)$ . On rappelle que  $\sup_{u \leq t} B_u \stackrel{loi}{=} |B_t|$ .
4. Calculer  $\mathbb{E}(e^{-\lambda T_a})$  avec  $T_a = \inf\{t : X_t = a\}$  et  $X_t = \nu t + W_t$ . Calculer  $\mathbb{E}(e^{-\lambda T})$  pour  $T = T_a \wedge T_b$ .
5. Montrer qu'il existe  $c$  tel que  $T_r \stackrel{loi}{=} cT_r + X$  avec  $X$  indépendante de  $c$ .

6. Mêmes questions si  $T_a = \inf\{t; \nu t + B_t = a\}$ .
7. Soit  $S$  un brownien géométrique (soit  $S_t = x \exp(\nu t + \sigma W_t)$ ) et  $\tau_a = \inf\{t : S_t = a\}$ . Calculer  $\mathbb{E}(\int_0^\infty e^{-rt} S_t dt)$  et  $\mathbb{E}(\int_0^{\tau_b} e^{-rt} S_t dt)$ . *TROP DIFFICILE*  
 Montrer que si  $0 < a < b$ ,  $\tau_b - \tau_a$  est indépendant de  $\tau_a$  et a même loi que  $\tau_{b-a}$ .  
 Calculer  $\mathbb{E}(e^{-r\tau_K} \mathbb{1}_{\tau_K < T} \mathbb{1}_{\tau_H - \tau_K > t})$ .

**Exercice 2.4.4** On suppose  $b < 0 < a$ . Montrer que  $(a - B_t)(B_t - b) + t$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale. En déduire  $\mathbb{E}(T_{a,b})$  où  $T_{a,b} = T_a \wedge T_b$ .

**Exercice 2.4.5 Premier instant.** Soit  $B$  un MB issu de 0 et  $T^d = d + \inf\{t : B_{t+d} = 0\}$ . Calculer  $\mathbb{E}(e^{-\lambda T^d})$  et  $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_d \leq a} e^{-\lambda T^d})$ .  
 Soit  $T^* = d$  si  $B_d \geq -a$  et  $T^* = d + T^d$  si  $B_d \leq -a$ ,  $B_{d+T^d} \geq -a$ . Calculer  $\mathbb{E}(e^{-\lambda T^*})$ .

**Exercice 2.4.6** Soit  $\tilde{T}_a$  et  $\hat{T}_a$  deux v.a. indépendantes de même loi que  $T_a$ . Quelle est la loi de  $\frac{\tilde{T}_a}{\tilde{T}_a + \hat{T}_a}$  (Sans faire de calculs).

**Exercice 2.4.7 Loi de l'inf.** Soit  $I = -\inf_{s \leq T_1} B_s$ . Montrer que  $\mathbb{P}(I \in dx) = \frac{dx}{1+x^2}$ .

**Exercice 2.4.8** Soit  $T_a^* = \inf\{u : M_u - B_u > a\}$  avec  $M_u = \sup_{t \leq u} B_t$ . Montrer que  $M_{T_a^*}$  a une loi exponentielle.

**Exercice 2.4.9 Temps d'atteinte** Soit  $A$  et  $B$  deux nombres positifs. On note  $X_t = \mu t + \sigma B_t$  et  $h(x) = \frac{\exp(-2\mu x/\sigma^2) - \exp(2\mu B/\sigma^2)}{\exp(-2\mu A/\sigma^2) - \exp(2\mu B/\sigma^2)}$ . Vérifier que  $h(X_t)$  est une martingale. Le temps d'arrêt  $\tau$  est défini par

$$\tau = \inf\{t : X_t = A \text{ ou } X_t = -B\}.$$

Calculer  $\mathbb{P}(X_\tau = A)$ .

**Exercice 2.4.10** Soit  $f$  une fonction borélienne bornée et

$$u(x) = \mathbb{E}_x(\exp[-\frac{\theta^2}{2} T_0 + \int_0^{T_0} du f(B_u)])$$

où  $B$  est un mouvement Brownien issu de  $x$ . Montrer que  $u$  est solution de

$$\frac{1}{2}u'' = (\frac{\theta^2}{2} + f)u, \quad u(0) = 1$$

**Exercice 2.4.11** Soient  $a, d$  deux nombres réels positifs.

1. Calculer  $\mathbb{E}(e^{-|B_d|\sqrt{2\lambda}} \mathbb{1}_{B_d \leq -a})$ .
2. Soit  $T_1 = \inf\{t \geq d : B_t = 0\}$ . Montrer que  $T_1$  est un temps d'arrêt. Calculer  $\mathbb{E}(e^{-\lambda T_1})$  et  $\mathbb{E}(e^{-\lambda T_1} \mathbb{1}_{B_d \leq -a})$ . Montrer que  $B_{T_1+d}$  est indépendant de  $B_d$  et de  $T_1$ .
3. On introduit la v.a.  $\tau_1$  suivante : si  $B_d \leq -a$ , on pose  $\tau_1 = d$ . Si  $B_d > -a$  et si  $B_{T_1+d} \leq -a$ , on pose  $\tau_1 = T_1 + d$ , sinon on pose  $\tau_1 = \infty$ .  
 Calculer pour  $\lambda > 0$  la transformée de Laplace de  $\tau_1$ , soit  $\mathbb{E}(e^{-\lambda \tau_1})$ .
4. On continue. Si  $B_d \leq -a$ , on pose  $\tau_2 = d$ . Si  $B_d > -a$  et si  $B_{T_1+d} \leq -a$ , on pose  $T_2 = T_1 + d$ , sinon on définit  $T_2 = \inf\{t \geq T_1 + d : B_t = 0\}$ . Si  $B_{T_2+d} \leq -a$  on pose  $\tau_2 = T_2 + d$ . Dans tous les autres cas, on pose  $\tau_2 = \infty$ .

- (a) Montrer que  $B_{T_2+d}$  est indépendant de  $(B_{T_1+d}, B_d)$  et de  $T_2$ .
  - (b) Calculer la transformée de Laplace de  $\tau_2$ .
5. On utilise la même procédure pour définir par itération  $\tau_n$  et on pose  $\tau = \tau_\infty$ .
- (a) Montrer que  $\tau$  est fini en utilisant, après l'avoir justifié que

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = \prod_i \mathbb{P}(B_{T_i+d} < -a)$$

- (b) Calculer la transformée de Laplace de  $\tau$ .
- (c) Calculer la transformée de Laplace de  $B_\tau$ .
- (d) Montrer que  $B_\tau$  est indépendant de  $\tau$ .

**Exercice 2.4.12** On trouve parfois (voir exercice précédent, ou les temps d'atteinte d'un niveau) des temps d'arrêt  $\tau$  tels que  $\tau$  et  $B_\tau$  sont indépendants. Ceci n'est cependant pas très courant. Dans ce qui suit on admettra le résultat (non trivial) suivant (Cramer) *Si  $X$  et  $Y$  sont deux v.a. indépendantes telles que  $X + Y$  est une v.a. gaussienne, alors  $X$  et  $Y$  sont des gaussiennes.*

Le but de cet exercice est de montrer : si  $\tau$  est borné par  $K$  et si  $\tau$  et  $B_\tau$  sont indépendants, alors  $\tau$  est une constante.

1. Montrer que si  $s > K$ ,

$$B_s = B_\tau + \widehat{B}_{s-\tau}$$

avec  $\widehat{B}$  un mouvement Brownien indépendant de  $\mathcal{F}_\tau$ .

2. Montrer que  $B_\tau$  et  $\widehat{B}_{s-\tau}$  sont des v.a. indépendantes.
3. Calculer l'espérance et la variance de  $B_\tau$ . (Attention, ce n'est pas trivial. Penser au cas où  $\tau = T_a$ .)
4. Montrer que  $\widehat{B}_{s-\tau}$  est une v.a. Gaussienne.
5. Montrer que l'on obtient  $\sqrt{K - \tau} G \stackrel{\text{loi}}{=} \sqrt{K - \mathbb{E}(\tau)} G$  où  $G$  est une v.a. gaussienne réduite centrée.
6. Conclure.

**Exercice 2.4.13** Soit  $a$  et  $\mu$  deux constantes strictement positives et  $T_1 = \inf\{t : B_t \geq a - \mu t\}$ ,  $T_2 = \inf\{t : B_t \leq -a + \mu t\}$ . On pose, pour tout  $\lambda a \geq 0$ ,  $\Phi(\lambda) = \mathbb{E}(\exp[-\lambda\tau])$  avec  $\tau = T_1 \wedge T_2$ .

1. Montrer que  $T_1 \stackrel{\text{loi}}{=} T_2$  et que  $(T_1, T_2) \stackrel{\text{loi}}{=} (T_2, T_1)$ .
2. Vérifier que  $\Phi$  est bien définie et donner un majorant et un minorant simples de  $\Phi$  (S'aider par un dessin).
3. Montrer que  $\Phi(\lambda) = 2\mathbb{E}(\exp(-\lambda T_1)\mathbb{1}_{T_1 < T_2})$ .
4. Montrer que

$$e^{\lambda a} \Phi(-\lambda\mu - \lambda^2/2) + e^{-\lambda a} \Phi(\lambda\mu - \lambda^2/2) = 2$$

**Exercice 2.4.14** Soit  $X_t = \nu t + \sigma B_t$ . Montrer que, pour tout  $\lambda$

$$\exp(\lambda X_t + \beta t), t \geq 0$$

est une martingale pour un paramètre  $\beta$  que l'on déterminera.

On note  $T_a = \inf\{t : X_t \geq a\}$ . Calculer  $\mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}T_a\right)\right)$  et  $\mathbb{P}(T_a < \infty)$ .

**Exercice 2.4.15** Calculer  $\mathbb{P}(M_t \leq y | B_t = x)$  où  $M_t = \sup(B_s, s \leq t)$ .

## 2.5 Scaling

**Exercice 2.5.1** Montrer que le calcul de  $\mathbb{E}(\int_0^t \exp(\nu s + \sigma B_s) ds)$  se déduit de  $\mathbb{E}(\int_0^T \exp(2(\mu s + B_s)) ds)$ . On ne demande pas de faire ce calcul.

**Exercice 2.5.2** Soit  $T_1 = \inf\{t : B_t = 1\}$ . Utiliser le scaling du MB pour établir les égalités en loi suivantes

1.  $T_1 \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{1}{S_1^2}$  avec  $S_1 = \sup(B_u, u \leq 1)$
2.  $T_a \stackrel{\text{loi}}{=} a^2 T_1$  avec  $T_a = \inf\{t : B_t = a\}$ .
3.  $g_t \stackrel{\text{loi}}{=} t g_1, d_t \stackrel{\text{loi}}{=} t d_1$  où  $g_t = \sup\{s \leq t : B_s = 0\}$  et  $d_t = \inf\{s \geq t : B_s = 0\}$ . Montrer que  $\{g_t < u\} = \{d_u > t\}$ . En déduire  $g_t \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{t}{d_1} \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{1}{d(1/t)}$ .
4. On suppose que  $A$  est un processus croissant continu tel que, pour tout  $c$

$$(B_{ct}, A_{ct}, t \geq 0) \stackrel{\text{loi}}{=} (\sqrt{c} B_t, c A_t; t \geq 0)$$

On note  $\Delta_a = \inf\{t : A_t \geq a\}$ . Montrer que  $d_{\Delta_a} \stackrel{\text{loi}}{=} a d_{\Delta_1}$ . En déduire  $A_g \stackrel{\text{loi}}{=} 1/d_{\Delta_1}$ .

5. Montrer que  $A_t = \sup_{s \leq t} B_s^2$  vérifie les conditions précédentes.

**Exercice 2.5.3** Montrer que

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |B_t| \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{1}{\sqrt{T_1^*}}$$

où  $T_1^* = \inf\{t \geq 0 : |B_t| = 1\}$ .

**Exercice 2.5.4** Soit  $A$  une fonctionnelle du mouvement brownien. On dit que  $A$  a la propriété (hom) s'il existe  $r \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $c$ ,

$$(B_{ct}, A_{ct}; t \geq 0) \stackrel{\text{loi}}{=} (\sqrt{c} B_t, c^{r+1} A_t; t \geq 0)$$

Pour quelle valeur de  $r$  la fonctionnelle  $A_t = \int_0^t \mathbb{1}_{(B_s > 0)} ds$  a-t-elle la propriété (hom)? Même question pour le temps local (voir la définition plus loin)

## 2.6 Compléments

**Exercice 2.6.1 Projection d'un Brownien.** Soit  $B$  un MB dans sa filtration  $\mathbb{F}$  et  $\mathbb{G}$  une filtration plus petite que  $\mathbb{F}$ . On suppose que  $\mathbb{E}(B_t | \mathcal{G}_t) = \widehat{B}_t$  est un MB. Montrer que  $\widehat{B}_t = B_t$ .

**Exercice 2.6.2 Filtration de carrés de Browniens.** Soit  $Y_t = aB_t^2 + bW_t^2$  avec  $a \neq b$  et  $a$  et  $b$  non nuls,  $W$  et  $B$  étant des Browniens indépendants. Montrer que  $\sigma(Y_s, s \leq t) = \sigma(B_s, W_s, s \leq t)$ . Généraliser au cas de  $n$  carrés.

**Exercice 2.6.3 Représentation prévisible.** Soit  $B^{(i)}, i = 1, 2, 3$  trois MB, avec  $B^{(i)}, i = 1, 2$  indépendants. Montrer qu'il n'est pas possible d'avoir  $\sigma(B_s^{(3)}, s \leq t) = \sigma(B_s^{(1)}, B_s^{(2)}, s \leq t)$ . On utilisera le théorème de représentation prévisible pour représenter  $B_t^{(1)}, B_t^{(2)}$  en terme de  $B^{(3)}$ .

**Exercice 2.6.4 Ponts, suite de ex. 2.2.6** Pour chaque  $t$  on définit la tribu

$$\mathcal{F}_t^\beta = \sigma\{(B_s - \frac{s}{t} B_t, s \leq t)\}$$

1. Montrer que la famille  $\mathcal{F}_t^\beta$  est croissante en  $t$ .
2. Soit  $f \in L^2(\mathbb{R}_+, ds)$ . Calculer la projection  $\widehat{F}_t$  sur  $L^2((\mathcal{F}^\beta)_t)$  de  $F_t = \int_0^t f(s)dB_s$ .
3. Montrer que le processus  $\widehat{B}_t = B_t - \int_0^t du \frac{B_u}{u}$  est un  $(\mathcal{F}_t^\beta)$ -mouvement Brownien et que

$$\mathcal{F}_t^\beta = \sigma\{\widehat{B}_u, u \leq t\}$$

4. Montrer que  $\widehat{F}_t = \int_0^t \widehat{f}(s)d\widehat{B}_s$ , avec  $\widehat{f}(t) = f(t) - \frac{1}{t} \int_0^t f(u)du$ .

**Exercice 2.6.5** Soit  $B$  un MB réel,  $T_0 = \inf\{t : B_t = 0\}$ ,  $g = \sup\{t < 1 : B_t = 0\}$  et  $d = \inf\{t > 1 : B_t = 0\}$ . Montrer que  $\mathbb{P}_x(d > 1+t) = \int p(1, x; y)\mathbb{P}_y(T_0 > t)dy$  et que  $\mathbb{P}_0(g \leq t) = \int p(t, 0; y)\mathbb{P}_y(T_0 > 1-t)dy$ .

**Exercice 2.6.6 Loi de  $g_t$ .** Montrer que

$$\mathbb{P}(\sup_{s \leq u \leq t} B_u > 0, B_s < 0) = 2\mathbb{P}(B_t > 0, B_s < 0) = 2[\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s}{t}}]$$

En déduire la loi de  $g_t = \sup\{s \leq t : B_s = 0\}$

**Exercice 2.6.7 Représentation prévisible.** Trouver un processus  $f$  prévisible tel que  $F = \mathbb{E}(F) + \int_0^T f_s dB_s$  pour

1.  $F = B_T$ ,
2.  $F = \int_0^T B_s ds$ ,
3.  $F = B_T^2$ ,
4.  $F = \exp B_T$ .

**Exercice 2.6.8** Le mouvement Brownien  $B$  est issu de 0. Soit  $W$  un second mouvement Brownien issu de 0 indépendant de  $B$  et

$$X_t = (1-t) \int_0^t \frac{W_s}{(1-s)^2} ds + (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s} dB_s.$$

1. Montrer que  $\int_0^t \frac{W_s}{1-s} ds - \int_0^t ds \int_0^s \frac{W_u}{(1-u)^2} du = (1-t) \int_0^t \frac{W_s}{(1-s)^2} ds$ .
2. En admettant que si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions déterministes on peut intervertir le sens des intégrales dans  $\int_0^t ds f(s) \int_0^s g(u) dB_u$ , montrer que

$$B_t - \int_0^t ds \int_0^s \frac{1}{1-u} dB_u = (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s} dB_s$$

3. Vérifier que  $X$  est solution de

$$X_t = B_t + \int_0^t \frac{W_s - X_s}{1-s} ds.$$

4. (sans utiliser ce qui précède) Montrer que  $X_t = (1-t) \int_0^t \frac{dB_s - dW_s}{1-s} + W_t$ .

5. Calculer  $\mathbb{E}(X_s X_t)$ .

**Exercice 2.6.9** Soit  $\mathbb{G}$  une filtration,  $W$  un  $\mathbb{G}$  mouvement brownien. Soit  $\mathbb{H}$  une filtration plus petite que  $\mathbb{G}$ . Montrer que le processus  $M_t = \mathbb{E}(W_t | \mathcal{H}_t)$  est une martingale. (on précisera par rapport à quelle filtration). Soit  $X_t = W_t + \int_0^t Y_u du$  où  $Y$  est un processus  $\mathbb{G}$  adapté. On note  $\mathbb{F}^X$  la filtration de  $X$  et  $\hat{Y}_u = \mathbb{E}(Y_u | \mathcal{F}_u^X)$ . Vérifier que  $Z_t = (X_t - \int_0^t \hat{Y}_u du, t \geq 0)$  est une  $\mathbb{F}^X$ -martingale (on calculera l'espérance conditionnelle de  $Z_t$  par rapport à  $\mathbb{F}_s^X$ ).

**Exercice 2.6.10** Let  $X$  be a Brownian motion with drift  $\mu$  and  $M_t^X = \sup_{\{s \leq t\}} X_s$ . Prove that

$$\mathbb{E}(M_T^X | \mathcal{F}_t) = M_t^X + \int_{M_t^X - X_t}^{\infty} (1 - F(T-t, u)) du$$

where  $F(T-t, u) = \mathbb{P}(M_{T-t}^X \leq u)$

## 2.7 Finance

**Exercice 2.7.1 Black et Scholes.** Calculer  $\mathbb{E}(e^{-at}(S_t - K)^+)$  quand

$$S_t = xe^{bt} \exp(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t)$$

Ecrire la formule obtenue quand  $a = b = r$  et quand  $a = r, b = r - \delta$ . Calculer  $\mathbb{E}(e^{-rt}(S_t - K)^+ | \mathcal{F}_s)$  pour  $s < t$ .

**Exercice 2.7.2 Options reset** Une option reset est caractérisée par une suite de dates  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Le payoff de cette option est

$$A = \sum_i (S_T - S_{t_i})^+ \mathbb{1}_{S_{t_i} = \inf\{K, S_{t_1}, S_{t_2}, \dots, S_{t_n}\}} + (S_T - K)^+ \mathbb{1}_{K = \inf\{K, S_{t_1}, S_{t_2}, \dots, S_{t_n}\}}$$

Calculer le prix d'une telle option, c'est-à-dire calculer  $\mathbb{E}(e^{-rT} A)$  quand

$$S_t = xe^{rt} \exp(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t)$$

.

## 2.8 Problème

### 2.8.1 Partie I : Résultats préliminaires

Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement Brownien standard sur un espace de probabilit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . On note  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  la filtration naturelle de  $B$ .



Etant donné un processus continu  $(X_t)_{t \geq 0}$  à valeurs réelles, on pose pour  $t > 0$ ,

$$M_t^X = \sup_{s \leq t} X_s,$$

$$m_t^X = \inf_{s \leq t} X_s.$$

Si  $a$  est un nombre réel strictement positif, on définit également

$$T_a^X = \inf\{t \geq 0; X_t = a\}, \quad \tilde{T}_a^X = \inf\{t \geq 0; |X_t| = a\}.$$

Il est connu que  $T_a^B$  est un temps d'arrêt relativement à  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , fini p.s., tel que  $\mathbb{E}(T_a^B) = \infty$  et pour  $\lambda \geq 0$ ,

$$\mathbb{E}[\exp(-\lambda T_a^B)] = \exp(-a\sqrt{2\lambda}).$$

1. En inversant la transformée de Laplace de  $T_a^B$ , montrer que la densité de la loi de  $T_a^B$  est donnée par

$$\frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right) 1_{(t>0)}.$$

2. Démontrer que pour  $\lambda \geq 0$ ,

$$\mathbb{E}[\exp(-\lambda \tilde{T}_a^B)] = \left(\cosh(a\sqrt{2\lambda})\right)^{-1}.$$

3. Prouver que  $\tilde{T}_a^B$  est intégrable et calculer  $\mathbb{E}(\tilde{T}_a^B)$ .

4. Soient  $c$  et  $d$  deux nombres réels strictement positifs et posons  $T^B = T_c^B \wedge T_{-d}^B$ . Montrer que pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} T^B 1_{(T^B=T_c^B)}\right)\right] &= \frac{\sinh(\lambda d)}{\sinh(\lambda(c+d))}, \\ \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} T^B\right)\right] &= \frac{\cosh(\lambda(c-d)/2)}{\cosh(\lambda(c+d)/2)}. \end{aligned}$$

5. En utilisant la propriété de Markov forte, démontrer que si  $c \geq 0, b \leq c$ ,

$$\mathbb{P}[B_t \leq c, M_t^B > c] = \mathbb{P}[B_t > 2c - b].$$

6. En-déduire que pour chaque  $t > 0$ , les variables aléatoires  $M_t^B$  et  $|B_t|$  ont la même loi.

7. Vérifier que pour chaque  $t > 0$ , la densité de la loi du couple  $(B_t, M_t^B)$  est donnée par

$$\frac{2(2c-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2c-b)^2}{2t}\right) 1_{\{0 \leq c\}} 1_{\{b \leq c\}}.$$

8. Retrouver alors la densité de la loi de  $T_a^B$  explicitée au 1..

## 2.8.2 Partie II

On considère le processus  $(Y_t)_{t \geq 0}$  défini par :  $\forall t \geq 0, Y_t = \mu t + B_t$ , où  $\mu \in \mathbb{R}$ .

1. Montrer qu'il existe une mesure de probabilité  $\mathbb{P}^\mu$  sous laquelle  $(Y_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement Brownien standard.
2. En utilisant le résultat de la question I.7., en-déduire que pour chaque  $t > 0$ , la densité de la loi du couple  $(Y_t, M_t^Y)$  est donnée par

$$\frac{2(2c-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2c-b)^2}{2t}\right) \cdot \exp\left(\mu b - \frac{1}{2}\mu^2 t\right) 1_{\{0 \leq c\}} 1_{\{b \leq c\}}.$$

### 2.8.3 Partie III

Soit  $(S_t)_{t \geq 0}$  le processus tel que :  $\forall t \geq 0, S_t = x \exp \left[ \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right]$ , où  $x, r$  et  $\sigma$  sont des nombres réels strictement positifs. Dans la suite, on désignera par  $N$  la fonction de répartition de la loi normale centrale réduite.

1. Expliciter la probabilité  $\mathbb{P}^\theta$  qui fait de  $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$  un mouvement Brownien standard, avec  $\tilde{B}_t = \theta t + B_t$  et  $\theta = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$ .
2. Trouver une relation entre  $M_t^S$  et  $M_t^{\tilde{B}}$  et entre  $m_t^S$  et  $m_t^{\tilde{B}}$  pour chaque  $t > 0$ .

Dans ce qui suit,  $H$  et  $K$  désigne des nombres réels strictements positifs.

3. Montrer que

$$\mathbb{P} [S_t \leq K, M_t^S \leq H] = N(d_1) - \left( \frac{H}{x} \right)^{(2r/\sigma^2)-1} N(d_2),$$

avec

$$\begin{aligned} d_1 &= \left( \log \left( \frac{K}{x} \right) - \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right) / \sigma \sqrt{t}, \\ d_2 &= \left( \log \left( \frac{Kx}{H^2} \right) - \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right) / \sigma \sqrt{t}. \end{aligned}$$

4. Montrer que

$$\mathbb{P} [S_t \geq K, m_t^S \geq H] = N(d_3) - \left( \frac{H}{x} \right)^{(2r/\sigma^2)-1} N(d_4),$$

avec

$$\begin{aligned} d_3 &= \left( \log \left( \frac{x}{K} \right) + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right) / \sigma \sqrt{t}, \\ d_4 &= \left( \log \left( \frac{H^2}{xK} \right) + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right) / \sigma \sqrt{t}. \end{aligned}$$

5. Dédire de la question 3. que ( $\mathbb{E}$  désignant l'espérance sous  $\mathbb{P}$ )

$$\mathbb{E} \left[ S_t 1_{\{S_t \leq K, M_t^S \leq H\}} \right] = x e^{rt} \left( N(d_5) - \left( \frac{H}{x} \right)^{(2r/\sigma^2)+1} N(d_6) \right),$$

avec

$$\begin{aligned} d_5 &= \left( \log \left( \frac{K}{x} \right) - \left( r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right) / \sigma \sqrt{t}, \\ d_6 &= \left( \log \left( \frac{Kx}{H^2} \right) - \left( r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right) / \sigma \sqrt{t}. \end{aligned}$$

6. En utilisant le résultat de la question 4., vérifier que

$$\mathbb{E} \left[ S_t 1_{\{S_t \geq K, m_t^S \geq H\}} \right] = x e^{rt} \left( N(d_7) - \left( \frac{H}{x} \right)^{(2r/\sigma^2)+1} N(d_8) \right),$$

avec

$$\begin{aligned} d_7 &= \left( \log \left( \frac{x}{K} \right) + \left( r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right) / \sigma \sqrt{t}, \\ d_8 &= \left( \log \left( \frac{H^2}{Kx} \right) + \left( r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right) / \sigma \sqrt{t}. \end{aligned}$$

7. On pose  $v_1(x, T) = \mathbb{E} \left[ e^{-rT} (S_T - K)_+ 1_{\{m_T^S \geq H\}} \right]$ .

Montrer que

$$v_1(x, T) = x \left[ N(d_7) - \left( \frac{H}{x} \right)^{(2r/\sigma^2)+1} N(d_8) \right] - e^{-rT} K \left[ N(d_3) - \left( \frac{H}{x} \right)^{(2r/\sigma^2)-1} N(d_4) \right] .$$

Déterminer la quantité  $\frac{\partial}{\partial x} v_1(x, T - t)$ .

8. On pose  $v_2(x, T) = \mathbb{E} \left[ e^{-rT} (S_T - K)_+ 1_{\{M_T^S \leq H\}} \right]$ . Donner une formule explicite pour  $v_2(x, T)$  et  $\frac{\partial}{\partial x} v_2(x, T - t)$ .

9. On pose

$$v_3(x, T) = \mathbb{E} \left[ e^{-rT} (S_T - K)_+ 1_{\{M_T^S \geq H\}} \right] ,$$

$$v_4(x, T) = \mathbb{E} \left[ e^{-rT} (S_T - K)_+ 1_{\{m_T^S \leq H\}} \right] ,$$

$$v(x, T) = \mathbb{E} \left[ e^{-rT} (S_T - K)_+ \right] .$$

Donner une relation entre  $v_2(x, T), v_3(x, T)$  et  $v(x, T)$  d'une part et entre  $v_1(x, T), v_4(x, T)$  et  $v(x, T)$  d'autre part.



## Chapter 3

# Intégrale d'Itô

Dans tout ce chapitre,  $B$  est un mouvement Brownien dont la filtration est notée  $\mathbb{F}$ .

On considère un processus  $\theta$ ,

$ff$ -adapté continu à gauche, et admettant des limites à droite, tel que

$$\int_0^\infty \theta_t^2 dt < \infty, \text{ a.s.}$$

on montre qu'il existe des processus  $\theta^n$  de la forme  $\theta_t^n = \sum \theta^{i,n} \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}$  avec  $\theta^{i,n} \in L^2(\Omega)$  et  $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurables, convergeant vers  $\theta$  dans  $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$  (au sens où  $\|\theta - \theta^n\|^2 \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ ). On définit  $\int_0^t \theta_s dB_s$ , comme la limite de  $\sum_{j=1}^{k(n)} \tilde{\theta}^{j,n} (B(t_{j+1}) - B(t_j))$

Le processus  $I(\theta)_t = \int_0^t \theta_s dB_s$  a les propriétés suivantes. Si

$$\mathbb{E} \left( \int_0^\infty \theta_t^2 dt \right) < \infty, \forall t$$

le processus  $I(\theta)$  est une martingale, dans les autres cas, c'est une martingale locale.

Si

$$\mathbb{E} \left( \int_0^\infty \theta_t^2 dt \right) < \infty, \forall t$$

le processus

$$(I(\theta)_t - \int_0^t \theta_s^2 ds, t \geq 0)$$

est une martingale.

**Intégrale de Wiener:** Si  $f$  est une fonction déterministe, de carré intégrable sur tout intervalle  $[0, t]$ , le processus  $(I(f)_t, t \geq 0)$  est un processus gaussien.

**Crochet:** Le crochet d'une martingale de carré intégrable continue  $M$  est l'unique processus croissant  $\langle M \rangle$  tel que  $M_t^2 - \langle M \rangle_t$  soit une martingale.

Le crochet de  $I(\theta)$  est par définition  $\langle I(\theta) \rangle_t = \int_0^t \theta_s^2 ds$ . Si  $X$  et  $Y$  sont deux martingales continues leur crochet  $\langle X, Y \rangle$  est l'unique processus à variation bornée tel que  $XY - \langle X, Y \rangle$  est une martingale. Le crochet de deux intégrales stochastiques est  $\langle I(\theta), I(\psi) \rangle = \int_0^t \theta_s \psi_s ds$ . Si  $X$  et  $Y$  sont deux semi-martingales continues leur crochet est le crochet des parties martingales

**Processus d'Itô:** On appelle processus d'Itô un processus  $X$  admettant une décomposition de la forme

$$X_t = x + \int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

où  $a$  et  $\sigma$  sont des processus  $\mathbb{F}$ -adaptés, vérifiant  $\int_0^t |a_s| ds < \infty$  et  $\int_0^t \sigma_s^2 ds < \infty$ .

**Formule d'intégration par parties:** Soit  $X$  et  $Y$  deux processus d'Itô

$$\begin{aligned} dX_t &= a_t dt + \sigma_t dB_t \\ dY_t &= b_t dt + \nu_t dB_t \end{aligned}$$

relatifs au même mouvement Brownien  $B$ , alors

$$d(XY)_t = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y \rangle_t$$

**Formule d'Itô:** Si  $f$  est une fonction  $C^{1,2}$

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \mathcal{A}(s, X_s) ds + \int_0^t \partial_x f(s, X_s) dB_s$$

où

$$\mathcal{A}f(t, x) = \partial_t f(t, x) + b(t, x) \partial_x f(t, x) + \frac{1}{2} \partial_{xx} f(t, x)$$

Cette formule s'écrit aussi

$$df(t, X_t) = \partial_t f(t, X_t) dt + \partial_x f(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \partial_{xx} f(t, X_t) d\langle X \rangle_t$$

Les crochets se calculent formellement de la façon suivante  $d\langle X, Y \rangle = dX dY$ , avec la table de multiplication suivante

$$dt \cdot dt = 0, \quad dt \cdot dB_t = 0, \quad dB_t \cdot dB_t = dt$$

### 3.1 Intégrale de Wiener

**Exercice 3.1.1** Soit  $Y_t = tB_t$ . Calculer  $dY_t$ , l'espérance de la v.a.  $Y_t$  et la covariance  $\mathbb{E}(Y_t Y_s)$ .

**Exercice 3.1.2** 1. Montrer que la v.a.  $X_t = \int_0^t (\sin s) dB_s$  est définie.

2. Montrer que  $X$  est un processus gaussien.

Calculer son espérance et sa covariance  $\mathbb{E}(X_s X_t)$ .

3. Calculer  $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s]$ .

4. Montrer que  $X_t = (\sin t) B_t - \int_0^t (\cos s) B_s ds$ .

**Exercice 3.1.3** Montrer que  $(Y_t = \sin(B_t) + \frac{1}{2} \int_0^t \sin(B_s) ds, t \geq 0)$  est une martingale. Calculer son espérance et sa variance.

**Exercice 3.1.4** 1. Montrer que le processus  $(Y_t = \int_0^t (\tan s) dB_s, 0 \leq t < \frac{\pi}{2})$  est défini.

2. Montrer que  $Y$  est un processus gaussien, calculer son espérance, sa covariance et l'espérance conditionnelle

$E(Y_t | \mathcal{F}_s)$ .

3. Montrer que  $Y_t = (\tan t) B_t - \int_0^t \frac{B_s}{\cos^2 s} ds$ .

**Exercice 3.1.5 Pont Brownien.** On considère l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX_t &= \frac{X_t}{t-1} dt + dB_t; 0 \leq t < 1 \\ X_0 &= 0 \end{cases}$$

et l'on admet l'existence d'une solution.

1. Montrer que

$$X_t = (1-t) \int_0^t \frac{dB_s}{1-s}; 0 \leq t < 1.$$

2. Montrer que  $(X_t, t \geq 0)$  est un processus gaussien. Calculer son espérance et sa covariance.  
3. Montrer que  $\lim_{t \rightarrow 1} X_t = 0$ .

**Exercice 3.1.6** Montrer que, si  $f$  est une fonction déterministe de carré intégrable

$$\mathbb{E}(B_t \int_0^\infty f(s) dB_s) = \int_0^t f(s) ds.$$

**Exercice 3.1.7 Calculs de moments.**

Soit  $t_1 < t_2$ . Calculer  $A = \mathbb{E}(\int_{t_1}^{t_2} (B_t - B_{t_1}) dt | \mathcal{F}_{t_1})$ . Montrer que  $\int_{t_1}^{t_2} (B_t - B_{t_1}) dt = \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - t) dB_t$ .

Utiliser cette égalité pour calculer  $A$  d'une autre manière. Calculer  $\text{Var} \left[ \int_{t_1}^{t_2} (B_t - B_{t_1}) dt | \mathcal{F}_{t_1} \right]$ .

## 3.2 Formule d'Itô

**Exercice 3.2.1** Ecrire les processus suivants comme des processus d'Itô en précisant leur drift et le coefficient de diffusion

1.  $X_t = B_t^2$
2.  $X_t = t + e^{B_t}$
3.  $X_t = B_t^3 - 3tB_t$
4.  $X_t = 1 + 2t + e^{B_t}$
5.  $X_t = [B_1(t)]^2 + [B_2(t)]^2$
6.  $X_t = (B_t + t) \exp(-B_t - \frac{1}{2}t)$
7.  $X_t = \exp(t/2) \sin(B_t)$

**Exercice 3.2.2 Intégration par parties.** Soit  $X_t = \exp \left( \int_0^t a(s) ds \right)$  et

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \left[ b(s) \exp \left( - \int_0^s a(u) du \right) \right] dB_s$$

où  $a$  et  $b$  sont des fonctions boréliennes intégrables. On pose  $Z_t := X_t Y_t$ . Montrer que  $dZ_t = a(t)Z_t dt + b(t)dB_t$ .

**Exercice 3.2.3 Intégration par parties.** Soit  $Y_t = tX_1(t)X_2(t)$  avec

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= f(t) dt + \sigma_1(t) dB_t \\ dX_2(t) &= \sigma_2(t) dB_t \end{aligned}$$

Calculer  $dY_t$ .

**Exercice 3.2.4 Equation différentielle.** On admet que le système suivant admet une solution

$$\begin{cases} X_t = x + \int_0^t Y_s dB_s \\ Y_t = y - \int_0^t X_s dB_s \end{cases}$$

Montrer que  $X_t^2 + Y_t^2 = (x^2 + y^2)e^t$ .

**Exercice 3.2.5 Formule d'Itô.** Soit  $Y_t = \int_0^t e^s dB_s$  et  $Z_t = \int_0^t Y_s dB_s$ .

1. Ecrire l'EDS vérifiée par  $Z_t$ .
2. Calculer  $\mathbb{E}(Z_t)$ ,  $\mathbb{E}(Z_t^2)$  et  $\mathbb{E}(Z_t Z_s)$ .

**Exercice 3.2.6** On suppose que  $X$  est un processus d'Itô de drift  $a(K_t - X_t)$ , que  $X_t = f(K_t)$  et que  $K_t = bt + \sigma B_t$  où  $a, b, \sigma$  sont des constantes et  $B$  un mouvement brownien. Quelle est la forme de  $f$  ?

**Exercice 3.2.7 Exponentielle.** Soit  $\sigma$  un processus adapté continu de  $L^2(\Omega \times \mathbb{R})$  et

$$X_t = \int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds.$$

On pose  $Y_t := \exp X_t$  et  $Z_t = Y_t^{-1}$ .

1. Expliciter la dynamique de  $Y$ , c'est-à-dire exprimer  $dY_t$ .
2. Montrer que  $Y$  est une martingale locale. Donner une condition sur  $\sigma$  pour que ce soit une martingale.
3. Calculer  $\mathbb{E}(Y_t)$  dans ce cas. Expliciter les calculs quand  $\sigma = 1$ .
4. Calculer  $dZ_t$ .

**Exercice 3.2.8** Soit  $(a, b, c, z)$  des constantes et

$$Z_t = e^{(a-c^2/2)t+cB_t} \left( z + b \int_0^t e^{-(a-c^2/2)s-cB_s} ds \right)$$

Quelle est l'EDS vérifiée par  $Z$  ?

**Exercice 3.2.9** On considère le processus de dynamique

$$dS_t = S_t((r - q + h_t)dt + \sigma dB_t)$$

où  $(h_t, t \geq 0)$  est un processus adapté.



1. On se place dans le cas  $h_t = 0, \forall t$ . Montrer que  $(M_t = S_t e^{-(r-q)t}, t \geq 0)$  est une martingale positive. On définit une probabilité  $Q$  par  $dQ|_{\mathcal{F}_t} = \frac{M_t}{M_0} dP|_{\mathcal{F}_t}$ . Comment se transforme le MB B?
2. Dans le cas  $h$  non nul, expliciter  $S_t$ .
3. On suppose que  $h_t = h(S_t)$  où  $h$  est une fonction continue. On admet qu'il existe une solution de l'EDS correspondante. Montrer que

$$e^{-rT} \mathbb{E}(e^{-\int_0^T h(S_s) ds} \Psi(S_T)) = e^{-qT} S_0 \mathbb{E}_Q(S_T^{-1} \Psi(S_T))$$

4. On se place maintenant dans le cas  $h_t = S_t^{-p}$ , avec  $p$  réel. On admet qu'il existe une solution de l'EDS. On pose  $Z_t = S_t^p$ .
  - (a) Quelle est la dynamique de  $Z$ ?
  - (b) Vérifier, en utilisant l'exercice 4 que l'on peut expliciter  $Z$ .
  - (c) Pour quelles fonctions  $f$ , le processus  $f(Z)$  est-il une martingale (locale)?

**Exercice 3.2.10 Processus d'Ornstein Uhlenbeck.** Soit  $X$  tel que  $dX_t = (a - bX_t)dt + dB_t$

1. Montrer que  $Z_t = \exp\left(c \int_0^t X_s dB_s - \frac{c^2}{2} \int_0^t X_s^2 ds\right)$  est une martingale locale.
2. Soit  $U_t = X_t^2$ . Ecrire  $dU_t$  puis la variable  $U_t$  comme une somme d'intégrales.
3. Montrer que  $\int_0^t X_s dB_s = \frac{1}{2}(X_t^2 - X_0^2 - t) - a \int_0^t X_s ds + b \int_0^t X_s^2 ds$ .

**Exercice 3.2.11** Soit  $Z$  le processus défini par

$$Z_t = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \exp\left(-\frac{B_t^2}{2(1-t)}\right).$$

1. Montrer que  $Z$  est une martingale et que  $Z_t$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers 1..
2. Calculer  $\mathbb{E}(Z_t)$ .
3. Ecrire  $Z_t$  sous la forme

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t \Phi_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \Phi_s^2 ds\right)$$

où  $\Phi$  est un processus que l'on précisera.

**Exercice 3.2.12 Moments d'une exponentielle stochastique.** Soit  $L$  le processus solution de

$$dL_t = L_t \phi dB_t, \quad L_0 = 1$$

où  $\phi$  est une constante. Le processus  $L$  est l'exponentielle de Doléans-Dade de  $\phi B$  et se note  $L_t = \mathcal{E}(\phi B)_t$ .

1. Déterminer la fonction  $\Gamma$  telle que, pour  $a \in \mathbb{R}$ , le processus  $(L_t)^a \exp(-\Gamma(a)t)$  est une martingale.
2. En déduire le calcul de  $\mathbb{E}[(L_t)^a]$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 3.2.13 Démonstration de l'unicité de l'écriture d'un processus d'Itô.**

Soit  $dX_t = a_t dt + \sigma_t dB_t$ . On souhaite démontrer que si  $X \equiv 0$ , alors  $a \equiv 0, \sigma \equiv 0$ .

1. Appliquer la formule d'Itô à  $Y_t = \exp(-X_t^2)$ .
2. En déduire le résultat souhaité.

**Exercice 3.2.14** Soit  $V = KX$  avec

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t(\mu - k - s \ln X_t)dt + \sigma X_t dB_t \\ dK_t &= K_t(r + k)dt \end{aligned}$$

Calculer  $dV_t$  et  $d \ln X_t$ .

**Exercice 3.2.15** Montrer que

$$M_t = \exp\left(-\int_0^t B_s^2 ds\right) \exp\left(-\frac{B_t^2}{2} \tanh(T-t)\right) \frac{1}{(\cosh(T-t))^{1/2}}$$

est une martingale locale.

**Exercice 3.2.16** Soit  $A_t = \int_0^t \exp(B_s + \nu s) ds$  et  $dS_t = S_t(rdt + \sigma dB_t)$ . Montrer que le processus  $f(t, S_t, A_t)$  est une martingale si  $f$  vérifie une équation aux dérivées partielles à coefficients déterministes que l'on précisera.

**Exercice 3.2.17** Soit  $dX_t = dB_t + \frac{1}{X_t} dt$ . Montrer que  $\frac{1}{X_t}$  est une martingale (locale). Quelles sont les fonctions  $f$  telles que  $f(t, X_t)$  soit une martingale locale?.

**Exercice 3.2.18** Soit  $B$  et  $W$  deux browniens corrélés et

$$\begin{aligned} dr_t &= [a(b - r_t) - \lambda \sigma r_t]dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t \\ dV_t &= (r_t - \delta)V_t dt + \sigma_V V_t dB_t \end{aligned}$$

On pose  $X_t = \sqrt{r_t}$  et  $Y_t = \ln V_t - \alpha X_t$  avec  $\alpha = 2\rho\sigma_V/\sigma$ . Calculer  $dX$  et  $dY$ .

**Exercice 3.2.19** Soit  $T$  fixé et  $B(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, u) du\right)$  avec

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dB_t, \forall t < T$$

Montrer que

$$dB(t, T) = (r_t - \tilde{\alpha}(t, T) + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}(t, T))B(t, T)dt - \tilde{\sigma}(t, T)B(t, T)dB_t$$

où on a noté  $\tilde{\alpha}(t, T) = \int_t^T \alpha(u, T)du$

**Exercice 3.2.20** Soit

$$dr_t = (a - br_t)dt - \sigma \sqrt{r_t}(dB_t + \lambda dt)$$

et  $W$  un mouvement Brownien indépendant de  $B$ . Soit  $\lambda_1$  une constante et  $H$  le processus

$$H_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t (\lambda_1^2 + \lambda r_s) ds + \int_0^t \lambda_1 dW_s + \int_0^t \lambda \sqrt{r_s} dB_s\right)$$

Montrer que le calcul de  $\mathbb{E}(\exp(H_T^\alpha) | \mathcal{F}_t)$  se réduit à celui de  $\mathbb{E}(\exp(-\eta r_T - \mu \int_t^T r_s ds) | \mathcal{F}_t)$ .

**Exercice 3.2.21 Fonction d'échelle.** Soit  $X$  un processus d'Itô. Une fonction  $s$  est une fonction d'échelle si  $s(X)$  est une martingale locale. Déterminer les fonctions d'échelle des processus suivants:

1.  $B_t + \nu t$
2.  $X_t = \exp(B_t + \nu t)$
3.  $X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s$ . Identifier le processus croissant  $A$  tel que  $s(X_t) = \beta_{A_t}$  où  $\beta$  est un MB.

**Exercice 3.2.22** Soit

$$d\Psi_t = (1 - r\Psi_t)dt + \sigma\Psi_t dB_t$$

Soit  $u$  une solution de

$$\frac{\sigma^2}{2}x^2u''(x) + (1 - rx)u'(x) - \lambda u(x) = 0$$

On définit  $x^*$  comme solution de  $x^*u'(x^*) = u(x^*)$  et  $v(x) = \frac{x^*}{u(x^*)}u(x)$ . On admettra que  $v''(x) \geq 0$ .

Soit enfin  $V$  définie par

$$\begin{cases} V(x) &= v(x), & 0 \leq x \leq x^* \\ &= x, & x > x^* \end{cases}$$

Montrer que  $1 - (r + \lambda)x^* \leq 0$ .

Ecrire la formule d'Itô pour  $e^{-\lambda t}V(\Psi_t)$ . Il apparaît un terme  $LV(x) - \lambda V(x)$  avec

$$LV(x) = (1 - rx)V'(x) + \frac{\sigma^2}{2}x^2V''(x)$$

Montrer que sur  $x > x^*$  on a  $LV(x) - \lambda V(x) \leq 0$  et que sur  $x \leq x^*$ , on a  $LV(x) - \lambda V(x) = 0$

En déduire que

$$V(\Psi_0) \geq \tilde{\mathbb{E}}(e^{-\lambda T}V(\Psi_T))$$

(en admettant que l'intégrale stochastique est une martingale).

**Exercice 3.2.23** Reprendre l'exercice 2.6.8 en utilisant la formule d'Itô.

**Exercice 3.2.24 Pont Brownien** Calculer  $P(\sup_{0 \leq s \leq t} B_s \leq y, B_t \in dx)$ . En déduire que, pour un pont brownien  $b$ , issu de  $x$  à l'instant 0, qui doit se trouver en  $z, z > 0$  à l'instant  $t$ , on a pour  $y > z$

$$P(\sup_{0 \leq s \leq t} b_s \leq y) = \exp\left(-\frac{(z + x - 2y)^2}{2t} + \frac{(z - x)^2}{2t}\right).$$

Quelle est la valeur de  $P(\sup_{0 \leq s \leq t} b_s \leq y)$  pour  $y < z$ ?

**Exercice 3.2.25 Formule de Clark-Ocone** Soit  $f$  une fonction bornée de classe  $C^1$ . Justifier rapidement qu'il existe une fonction  $\psi$  telle que, pour  $t \leq 1$

$$\mathbb{E}(f(B_1)|\mathcal{F}_t) = \psi(t, B_t).$$

Expliciter  $\psi(t, x)$  sous la forme d'une espérance (non conditionnelle). Ecrire la formule d'Itô pour  $\psi$  en faisant les simplifications qui s'imposent. Montrer que

$$\psi(t, B_t) = \mathbb{E}(f(B_1)) + \int_0^t \mathbb{E}(f'(B_1)|\mathcal{F}_s)dB_s.$$

### 3.3 Cas multidimensionnel

**Exercice 3.3.1** On considère deux processus  $S_1$  et  $S_2$  définis par

$$dS_i(t) = S_i(t)(r dt + \sigma_i dB_t^i), \quad i = 1, 2 \quad (3.1)$$

où  $B^1$  et  $B^2$  sont deux Browniens indépendants et où les coefficients  $r, \sigma_i$  sont constants.

1. On pose  $S_3(t) \stackrel{def}{=} \frac{S_1(t) + S_2(t)}{2}$ . Ecrire l'équation différentielle stochastique vérifiée par  $S_3$ .

2. Soit  $S_4(t) \stackrel{def}{=} \sqrt{S_1(t)S_2(t)}$ . Ecrire l'équation différentielle stochastique vérifiée par  $S_4$ .

**Exercice 3.3.2 Formule d'Itô multidimensionnelle.** Soient  $(B_1(t), t \geq 0)$  et  $(B_2(t), t \geq 0)$  deux mouvements Browniens indépendants. Soit  $(L_i(t), i = 1, 2, t \geq 0)$  les processus définis par

$$dL_i(t) = \theta_i(t)L_i(t)dB_i(t), \quad L_i(0) = 1$$

où  $(\theta_i(t), i = 1, 2)$  sont des processus adaptés continus bornés. Soit  $Z_t = L_1(t)L_2(t)$ . Ecrire  $dZ_t$ . Montrer que  $L_1(t)L_2(t)$  est une martingale.

**Exercice 3.3.3** Soit  $(B_1(t), t \geq 0)$  et  $(B_2(t), t \geq 0)$  deux mouvements Browniens indépendants et  $\rho$  une constante telle que  $|\rho| \leq 1$ .

1. Montrer que le processus  $(W_t, t \geq 0)$  défini par  $W_t = \rho B_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} B_2(t)$  est un mouvement Brownien.

2. Soit  $(\phi_i(t), t \geq 0; i = 1, 2)$  deux processus continus adaptés de carré intégrable (tels que  $\forall T \geq 0, \mathbb{E}(\int_0^T \phi_i^2(t) dt) < \infty$ ).

(a) On définit  $(Z_t, t \geq 0)$  par  $dZ_t = \phi_1(t)dB_1(t) + \phi_2(t)dB_2(t)$  et  $Z_0 = z$ . Montrer que  $Z$  est une martingale.

(b) Soit  $\Psi(t) = \phi_1^2(t) + \phi_2^2(t)$ . On suppose que  $\Psi(t) > 0$ . On définit  $(Y_t, t \geq 0)$  par

$$dY_t = \frac{\phi_1(t)}{\sqrt{\Psi(t)}} dB_1(t) + \frac{\phi_2(t)}{\sqrt{\Psi(t)}} dB_2(t), \quad Y_0 = y.$$

Ecrire l'équation vérifiée par  $Y_t^2$ .

Montrer que  $(Y_t, t \geq 0)$  est un mouvement Brownien.

3. On définit  $R_t = B_1^2(t) + B_2^2(t)$ . Ecrire l'équation différentielle vérifiée par  $R$  et celle vérifiée par  $U_t = \sqrt{R_t}$ . On montrera que

$$dU_t = \frac{a}{U_t} dt + b dB_3(t)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes et  $B_3$  un mouvement Brownien.

**Exercice 3.3.4** Soit  $dS_t^{(i)} = S_t^{(i)}(\mu_t^{(i)} dt + \sigma_t^{(i)} dB_t^{(i)})$  où  $B^{(i)}, i = 1, 2$  sont deux MB corrélés. Déterminer  $k_i, i = 1, 2$  pour que  $e^{-rt}(S_t^{(1)})^{k_1}(S_t^{(2)})^{k_2}$  soit une martingale.

### 3.4 Compléments

**Exercice 3.4.1 Formule de Tanaka.** Soit  $f$  une fonction et  $F$  définie par

$$F(x) = \int_{-\infty}^x dz \int_{-\infty}^z f(y) dy$$

Vérifier que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - y)^+ f(y) dy$$

et que  $F'(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \mathbb{1}_{x > y} dy$ .

Montrer, en appliquant la formule d'Itô à  $F$  que

$$\int_0^t f(B_s) ds = 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left( (B_t - y)^+ - (B_0 - y)^+ - \int_0^t \mathbb{1}_{B_s > y} dB_s \right) dy.$$

**Exercice 3.4.2 Egalité de Bougerol.** Soit  $B_1$  et  $B_2$  deux mouvements browniens indépendants.

1. Appliquez la formule d'Itô aux processus

$$X_t \stackrel{def}{=} \exp(B_1(t)) \int_0^t \exp(-B_1(s)) dB_2(s), \quad Z_t \stackrel{def}{=} \sinh B_1(t)$$

2. Montrer que  $dZ_t = \int_0^t \phi(Z_s) dB_1(s) + \int_0^t \psi(Z_s) ds$ .
3. Vérifier que  $M_t \stackrel{def}{=} B_2(t) + \int_0^t X_s dB_1(s)$  est une martingale. Calculer  $\mathbb{E}(M_t^2)$ . En admettant que  $M_t = \int_0^t \gamma_s dB_3(s)$ , où  $B_3$  est un mouvement brownien, identifier  $\gamma$ .
4. En déduire une relation entre  $X_t$  et  $Z_t$ .

**Exercice 3.4.3** Soit  $dr_t = \delta dt + 2\sqrt{r_t} dB_t$  et  $f(t, x)$  une fonction de  $C_b^{1,2}$ .

1. Quelle condition doit vérifier la fonction  $s$  pour que  $s(r_t)$  soit une martingale ?
2. Quelle condition doit vérifier la fonction  $f$  pour que  $f(t, r_t)$  soit une martingale ?
3. Soit  $Z_t = r_t^2$  et  $\rho_t = \sqrt{r_t}$ . Ecrire les EDS vérifiées par  $Z_t$  et par  $\rho_t$ .
4. Soit  $dr_t^1 = \mu_1 dt + 2\sqrt{r_t} dB_t^1$  et  $dr_t^2 = \mu_2 dt + 2\sqrt{r_t} dB_t^2$  deux processus, avec  $B^1$  et  $B^2$  deux browniens indépendants. On admettra que  $r^1$  et  $r^2$  sont indépendants. On note  $R$  le processus défini par  $R_t = r_t^1 + r_t^2$ . Montrer que  $R$  s'écrit sous la forme (4.1).

**Exercice 3.4.4 Temps d'atteinte.** Soit  $\tau = T_a = \inf\{t : B_t = a\}$ . On a calculé  $Z_t = P(\tau > t | \mathcal{F}_t)$ . Quelle est la dynamique du processus  $Z$ ?

**Exercice 3.4.5 Exponentielle.** Soit  $X$  et  $Y$  deux martingales de la forme  $dX_t = H_t dB_t$ ,  $dY_t = K_t dB_t$ . On note  $M_t$  l'unique solution de l'équation  $dM_t = M_t dX_t$ ,  $M_0 = 1$ . Montrer que la solution de  $dZ_t = dY_t + Z_t dX_t$ ,  $Z_0 = z$  est

$$Z_t = M_t \left( z + \int_0^t \frac{1}{M_s} (dY_s - H_s K_s ds) \right)$$

Quelle est la solution de  $dZ_t = dY_t + Z_t dX_t$  lorsque  $dX_t = H_t dB_t^1$ ,  $dY_t = K_t dB_t^2$  où  $B^1$  et  $B^2$  sont deux MB éventuellement corrélés?

### 3.5 Brownien géométrique et extensions.

Dans cette section, nous étudions le Brownien géométrique, processus de dynamique

$$dS_t = S_t(b dt + \sigma dB_t), \quad S_0 = x \quad (3.2)$$

où  $b$  et  $\sigma$  sont des constantes.

#### Exercice 3.5.1 Existence et unicité de la solution de 3.2)

1. Soit  $\tilde{S}_t = e^{-bt} S_t$ . Vérifier par

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dB_t. \quad (3.3)$$

En déduire que  $\tilde{S}$  est une martingale. Vérifier que  $\tilde{Y}_t = x e^{\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$  est solution de (3.3) puis que  $Y_t = x e^{bt} e^{\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$  est solution de (3.3)

2. Soit  $S$  une autre solution de (3.3). Quelle est l'EDS vérifiée par  $S/Y$ . Résoudre cette équation et en déduire (3.3) admet une unique solution.
3. Calculer  $\mathbb{E}(S_t)$  et la valeur de  $\mathbb{E}(S_t|\mathcal{F}_s)$  pour tous les couples  $(t, s)$ .
4. Montrer que  $S_T = S_0 \exp[(b - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma B_T]$ , puis que  $S_T = S_t \exp[(b - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(B_T - B_t)]$ .
5. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par  $(S_t)^{-1}$ .

#### Exercice 3.5.2 Changement de probabilité.

1. Soit  $dL_t = -L_t \theta_t dB_t$  où  $\theta_t$  est un processus adapté continu de  $L^2(\Omega \times \mathbb{R})$ . On pose  $Y_t = S_t L_t$ . Calculer  $dY_t$ .
2. Soit  $r$  une constante et  $\zeta_t$  défini par

$$d\zeta_t = -\zeta_t(r dt + \theta_t dB_t)$$

Montrer que  $\zeta_t = L_t \exp(-rt)$ . calculer  $d\zeta_t^{-1}$ .

3. Calculer  $d(S_t \zeta_t)$ . Comment choisir  $\theta$  pour que  $\zeta S$  soit une martingale ? La probabilité obtenue est telle que le processus  $S$  actualisé par le taux sans risque  $r$  (soit  $\zeta_t e^{-rt}$  est une martingale. Cette (unique=) probabilité est la probabilité risque neutre (ou le mesure martingale équivalente)

**Exercice 3.5.3** Soit  $A_t = \frac{1}{t} \int_0^t \ln S_s ds$ .

1. Montrer que  $\ln S_s = \ln S_t + (b - \frac{\sigma^2}{2})(s - t) + \sigma(B_s - B_t)$  pour  $s \geq t$ .
2. Montrer que  $A_t$  est une variable gaussienne.
3. Soit  $G(t, T) = \frac{1}{T} \int_t^T (B_s - B_t) ds$ . Montrer que

$$A_T = \frac{t}{T} A_t + (1 - \frac{t}{T}) [\ln S_t + \frac{1}{2}(b - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)] + \sigma G(t, T)$$

4. Montrer que  $G(t, T)$  est une variable gaussienne indépendante de  $\mathcal{F}_t$ , dont on calculera l'espérance conditionnelle et la variance conditionnelle (par rapport à  $\mathcal{F}_t$ ).
5. En déduire que  $A_T = Z_t + U$  où  $Z_t$  est  $\mathcal{F}_t$  mesurable et  $U$  une variable gaussienne indépendante de  $\mathcal{F}_t$ . Montrer que  $\alpha(t) e^{Z_t} = \mathbb{E}(e^{A_T} | \mathcal{F}_t)$ , où l'on précisera la valeur de  $\alpha$ .

**Exercice 3.5.4** Soit  $V_T = \frac{1}{h} \int_{T-h}^T S_u du$  où  $h$  est un nombre réel donné tel que  $0 < h < T$ . Soit  $X$  le processus défini par

$$e^{-bt} X_t = \mathbb{E}[e^{-bT} V_T | \mathcal{F}_t].$$

1. Quelle est la valeur de  $X_T$ ?
2. Exprimer  $X_t$  en fonction de  $S_t$  pour  $t \leq T - h$ .
3. Exprimer  $X_t$  en fonction de  $S_t$  et de  $(S_u, T - h \leq u \leq t)$  pour  $T - h \leq t \leq T$ .
4. Montrer que  $dX_t = X_t b dt + \sigma S_t \gamma_t dB_t$  avec  $\gamma_t = \mathbb{1}_{\{t < T-h\}} \frac{1 - e^{-bh}}{bh} + \mathbb{1}_{\{T-h < t < T\}} \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{bh}$ .

**Exercice 3.5.5** Soit  $Y_t = S_t^a$  avec  $a \geq 2$ . Quelle est l'EDS satisfaite par  $Y$ ? Calculer  $\mathbb{E}(Y_t)$ .

**Exercice 3.5.6** Soit  $\delta$  une fonction borélienne bornée et

$$dS_t = S_t((r - \delta(t))dt + \sigma dB_t), S_0 = x.$$

Les questions qui suivent peuvent être traitées dans un ordre différent.

1. Montrer que  $e^{-rt} S_t + \int_0^t \delta(s) e^{-rs} S_s ds$  est une martingale locale.
2. Ecrire explicitement la solution  $S$  en fonction de  $S_0, r, \sigma, \delta$  et  $B$ .
3. Calculer espérance et variance de  $S$ .
4. Calculer avec le minimum de calculs (on peut utiliser des résultats connus),  $\mathbb{E}((S_T - K)^+)$  dans le cas  $\delta$  constant.

## 3.6 Le crochet

Soit  $M$  une martingale continue de carré intégrable. On admet qu'il existe un processus croissant  $A$  tel que  $M_t^2 - A_t$  est une martingale. On note  $A_t = \langle M, M \rangle_t = \langle M \rangle_t$  ce processus que l'on appelle le crochet de  $M$ .

**Exercice 3.6.1 Calcul de crochets.**

1. Calculer  $\langle M \rangle$  pour  $M = B$ .
2. Calculer  $\langle M \rangle$  pour  $M_t = \int_0^t \sigma_s dB_s$

**Exercice 3.6.2 Crochet de martingales.** Soit  $M$  et  $N$  deux martingales. On pose, par analogie avec  $2ab = (a + b)^2 - a^2 - b^2$

$$2\langle M, N \rangle = \langle M + N, M + N \rangle - \langle M, M \rangle - \langle N, N \rangle$$

Montrer que  $MN - \langle M, N \rangle$  est une martingale.

**Exercice 3.6.3 Utilisation de crochets.** Ecrire la formule d'Itô en utilisant le crochet.

### 3.7 Finance

Nous considérons un marché financier comportant un actif sans risque de dynamique

$$dS_t^0 = S_t^0 r_t dt$$

où  $r$  est un processus  $\mathbb{F}$ -adapté (très souvent, une fonction déterministe ou une constante) et des actifs risqués dont les prix sont donnés par des processus d'Itô, sous une probabilité  $\mathbb{P}$  dite historique. Si  $S$  est un prix, la quantité  $S(S^0)^{-1}$  est le prix actualisé. Une mesure martingale équivalente est une mesure de probabilité  $\mathbb{Q}$ , équivalente à la probabilité historique  $\mathbb{P}$  telle que les prix actualisés sont des martingales (locales). Un marché est sans arbitrage s'il existe au moins une mesure martingale équivalente, complet si cette mme est unique. Dans le cas d'un marché complet sans arbitrage le prix d'un actif contingent  $H$  (une variable aléatoire) est

$$V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(HS_T^0/S_T^0|\mathcal{F}_t)$$

Un portefeuille est un couple  $(\alpha, \beta)$  de processus adaptés et la valeur du portefeuille est le processus  $(V_t, t \geq 0)$

$$V_t = \alpha_t S_t^0 + \beta_t S_t.$$

Le portefeuille est dit autofinanciant si

$$dV_t = \alpha_t dS_t^0 + \beta_t dS_t.$$

Voir Poncet et Portait pour de plus amples explications.

#### Exercice 3.7.1

On considère un marché financier où deux actifs sont négociés: un actif sans risque, de taux constant  $r$ , un actif risqué dont le prix  $S$  suit la dynamique

$$dS_t = S_t(\mu(t)dt + \sigma(t)dB_t)$$

les coefficients  $\mu$  et  $\sigma$  étant des fonctions déterministes.

1. Ecrire la valeur de  $S_t$  en fonction de  $S_0$ , des fonctions  $\mu, \sigma$ , et du MB  $B$ .
2. Déterminer le(s) mesure(s) martingale(s) équivalente(s).
3. Justifier que ce marché est complet, sans arbitrage. On notera  $\mathbb{Q}$  la mme.
4. Quelle est la dynamique de  $\tilde{S}$  sous  $\mathbb{P}$  et sous  $\mathbb{Q}$ ?
5. Calculer, pour tout couple  $(s, t)$   $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_t|\mathcal{F}_s)$  et  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_t|\mathcal{F}_s)$ .
6. On considère l'actif contingent versant  $h(S_T)$  à la date  $T$ , où  $h$  est une fonction (déterministe).
  - (a) Quel est le prix de cet actif à la date  $t$ ? Montrer que ce prix peut être obtenu sous forme d'une intégrale déterministe.
  - (b) Ecrire l'EDP d'évaluation.
  - (c) Comment couvrir cet actif en utilisant l'actif sans risque et l'actif  $S$ ? Expliquer en particulier comment déterminer le nombre de parts d'actifs  $S$  et le montant de cash (on ne demande pas de calcul explicite)
  - (d) Quels seraient les modifications à apporter si  $r$  est une fonction déterministe? un processus?
7. On se place dans le cas  $h(x) = x^2$ . Expliciter le prix à la date  $t$  et le portefeuille de couverture. Même question pour  $h(x) = ax + b$  où  $a$  et  $b$  sont des constantes.



**Exercice 3.7.2 Portefeuille auto-financiant**

1. Quelle serait la richesse d'un agent qui détiendrait à chaque instant  $t$ , un nombre de parts d'actif risqué égal à  $t$ , en utilisant une stratégie autofinancante
2. Quelle serait la richesse terminale (à l'instant  $T$ ) d'un agent de richesse initiale  $x$  qui souhaite avoir un montant de cash égal à  $(T - t)x$  à chaque instant  $t$  en utilisant une stratégie autofinancante (on donnera le résultat sous forme d'un intégrale stochastique dont tous les coefficients sont explicites)

**Exercice 3.7.3 Autofinancement** Cet exercice important montre que la définition de l'autofinancement est invariante par changement de numéraire. Question préliminaire: Soit  $X$  et  $Y$  deux processus d'Itô continus (on ne précisera pas leur dynamique, c'est inutile pour ce qui suit). Rappeler la formule d'intégration par parties pour  $d(XY)$ . En déduire que

$$X_t d\left(\frac{1}{X_t}\right) + \frac{1}{X_t} dX_t + d\left\langle X, \frac{1}{X} \right\rangle_t = 0.$$

On considère un marché comportant deux actifs dont les prix sont des processus d'Itô  $S^1$  et  $S^2$  tels que  $S^1$  est strictement positif. Un portefeuille de valeur  $V_t = \pi_t^1 S_t^1 + \pi_t^2 S_t^2$  est autofinanciant si

$$dV_t = \pi_t^1 dS_t^1 + \pi_t^2 dS_t^2.$$

On choisit comme numéraire le premier actif et on note  $\tilde{V}_t = V_t/S_t^1$ ,  $\tilde{S}_t^2 = S_t^2/S_t^1$ , d'où

$$\tilde{V}_t = V_t/S_t^1 = \pi_t^1 + \pi_t^2 \tilde{S}_t^2.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la notion d'autofinancement ne dépend pas du choix de numéraire, c'est-à-dire que

$$dV_t = \pi_t^1 dS_t^1 + \pi_t^2 dS_t^2 \tag{3.4}$$

implique

$$d\tilde{V}_t = \pi_t^2 d\tilde{S}_t^2. \tag{3.5}$$

1. Calculer  $d\langle V, \frac{1}{S^{(1)}} \rangle_t$  en fonction de  $d\langle S^{(1)}, \frac{1}{S^{(1)}} \rangle_t$  et  $d\langle S^{(2)}, \frac{1}{S^{(1)}} \rangle_t$
2. Montrer que  $dV_t^1 = \pi_t^2 \left( S_t^{(2)} d\frac{1}{S_t^{(1)}} + \frac{1}{S_t^{(1)}} dS_t^{(2)} + d\langle S^{(2)}, \frac{1}{S^{(1)}} \rangle_t \right)$
3. Montrer que  $dV_t^1 = \pi_t^2 d\left(\frac{S_t^{(2)}}{S_t^{(1)}}\right)$ .

**Exercice 3.7.4** Dans un marché incomplet, il existe des actifs contingents duplicables. En particulier, montrer que  $\int_0^T (aS_s + b)ds$  est duplicable lorsque  $S$  est un processus d'Itô.

**Exercice 3.7.5 Equation d'évaluation.** Soit  $dS_t = rS_t dt + S_t \sigma(t, S_t) dB_t$ , où  $r$  est une constante.

1. Montrer que  $\mathbb{E}(\Phi(S_T)|\mathcal{F}_t)$  est une martingale pour toute fonction  $\Phi$  borélienne bornée.
2. Justifier que  $\mathbb{E}(\Phi(S_T)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\Phi(S_T)|S_t)$
3. Soit  $\varphi(t, x)$  la fonction définie par  $\varphi(t, S_t) = \mathbb{E}(\Phi(S_T)|S_t)$ . Ecrire  $dZ_t$  avec  $Z_t = \varphi(t, S_t)$ .

4. En utilisant que  $\varphi(t, S_t)$  est une martingale, et en admettant que  $\varphi$  est  $C^{1,2}$ , montrer que pour tout  $t > 0$  et tout  $x > 0$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) + rx \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) x^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, x) = 0.$$

Quelle est la valeur de  $\varphi(T, x)$ ?

**Exercice 3.7.6 Options Européennes et Américaines.** On rappelle l'inégalité de Jensen : si  $\Phi$  est une fonction convexe et  $\mathcal{G}$  une tribu,  $\mathbb{E}(\Phi(X)|\mathcal{G}) \geq \Phi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))$ .

On admettra que si  $\tau$  est un temps d'arrêt borné par  $T$  et  $Z$  une sous-martingale,  $\mathbb{E}(Z_T) \geq \mathbb{E}(Z_\tau)$ . On note  $dS_t = S_t(rdt + \sigma_t dB_t)$  le prix d'un actif où  $\sigma$  est un processus adapté borné. Soit  $C = \mathbb{E}(e^{-rT}(S_T - K)^+)$  le prix d'un call Européen et  $C^{Am} = \sup_\tau \mathbb{E}(e^{-r\tau}(S_\tau - K)^+)$  le prix d'un call Américain, le sup étant pris sur tous les temps d'arrêt à valeurs dans  $[0, T]$ . On note  $P = \mathbb{E}(e^{-rT}(Ke^{rT} - S_T)^+)$  et  $P^{Am} = \sup_\tau \mathbb{E}(e^{-r\tau}(Ke^{r\tau} - S_\tau)^+)$  les prix de puts à strike actualisés.

1. Montrer que  $(e^{-rt}S_t - K)^+$  est une sous-martingale.
2. Soit  $g$  une fonction convexe de classe  $C^2$  telle que  $g(0) = 0$ . Montrer que

$$\forall x, \forall \alpha \geq 1, g(x) \leq \frac{1}{\alpha} g(\alpha x)$$

En déduire que

$$\mathbb{E}(e^{-ru}g(S_u)|\mathcal{F}_t) \leq \mathbb{E}(e^{-rT}g(S_T)|\mathcal{F}_t)$$

pour tout  $t < u \leq T$ . Montrer que  $C = C^{Am}$ .

3. Montrer que  $P = P^{Am}$ .

**Exercice 3.7.7 Volatilité stochastique** Soit  $r$  un réel et  $(\sigma_t, t \geq 0)$  un processus aléatoire  $(\mathcal{F}_t)$  adapté tel que  $\sigma_1 \leq \sigma_t \leq \sigma_2$  où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont des constantes.

1. On note  $\mathcal{V}_1$  la fonction  $\mathcal{V}_1(t, x)$  définie par  $\mathcal{V}_1(t, x) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}(h(X_T)|X_t = x)$  lorsque  $dX(t) = X(t)(r dt + \sigma_t dB_t)$ . Montrer que  $e^{-rt}\mathcal{V}_1(t, X_t)$  est une martingale.
2. Ecrire l'EDS vérifiée par le processus  $\mathcal{V}_1(t, X_t)$ . En déduire que la fonction  $\mathcal{V}_1$  satisfait une EDP. Dans la suite, on suppose  $\mathcal{V}_1$  convexe en  $x$ .
3. Soit  $dS_1(t) = S_1(t)(r dt + \sigma_t dB_t)$ . Ecrire la formule d'Itô pour  $e^{-rt}\mathcal{V}_1(t, S_t)$ . En déduire  $e^{-rT}\mathcal{V}_1(t, S_T)$  en fonction de  $e^{-rt}\mathcal{V}_1(t, S_t)$ , d'une intégrale en  $dt$  dont on donnera le signe et d'une intégrale stochastique.
4. Montrer que  $e^{-rt}\mathcal{V}_1(t, S_t) \leq \mathbb{E}(e^{-rT}h(S_T)|\mathcal{F}_t) \leq e^{-rt}\mathcal{V}_2(t, S_t)$ .

**Exercice 3.7.8 Heath-Jarrow-Morton.** Soit  $T$  fixé et  $(r_t, 0 \leq t \leq T)$  une famille de processus (dépendant du paramètre  $T$ ) que l'on notera, comme dans toute la littérature sur les taux  $(r(t, T), 0 \leq t \leq T)$  telle que, pour tout  $T$  fixé

$$dr(t, T) = \sigma(t, T)\Sigma(t, T)dt + \sigma(t, T)dB_t$$

où  $\frac{\partial}{\partial T}\Sigma(t, T) = \sigma(t, T)$ .

1. On pose  $X_t = \int_T^{T+a} r(t, u)du$ . Montrer que l'on peut écrire

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \phi_s dB_s$$

où on explicitera  $\mu$  et  $\phi$ .

2. En déduire la dynamique de  $Y_t = \exp X_t$ .

**Exercice 3.7.9 Portefeuille de marché.** On considère un marché comportant un actif sans risque de taux  $r$  et un actif risqué de dynamique

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dB_t).$$

1. Montrer qu'un portefeuille autofinancé est caractérisé par le couple  $(v, \beta)$  tel que

$$dV_t = r_t V_t dt + \beta_t (dS_t - r_t S_t dt), V_0 = v.$$

On utilise très souvent le processus  $H$  défini par

$$dH_t = -H_t(r_t dt + \theta_t dB_t)$$

avec  $\theta = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}$ .

2. Montrer que  $M_t = (H_t)^{-1}$  est la valeur d'un portefeuille autofinancé dont on précisera la valeur de  $\alpha$  et de  $\beta$ . Ce portefeuille est appelé portefeuille de marché.

**Exercice 3.7.10 Dividendes.** Soit

$$dS_t = S_t([r - \delta]dt + \sigma dB_t), S_0 = x \quad (3.6)$$

1. Montrer que  $S_t = S_0 \exp(at + cB_t)$  où on explicitera  $a, c$ . Montrer que

$$S_t e^{-rt} = \mathbb{E}(S_T e^{-rT} + \int_t^T \delta S_s e^{-rs} ds | \mathcal{F}_t),$$

2. Montrer qu'il existe  $\beta$  tel que  $S^\beta$  soit une  $Q$ -martingale.
3. On suppose que  $dY_t = Y_t(rdt + \nu dB_t)$ ,  $Y_0 = y$ . Soit  $\gamma$  une constante. Montrer que  $Y^\gamma$  vérifie une équation du type (3.6) où l'on précisera la valeur de  $\delta$  et de  $\sigma$ .
4. Calculer  $\mathbb{E}((S_T - K)^+)$ .

**Exercice 3.7.11 Assurance de portefeuille.**

1. Soit  $M$  une martingale telle que  $M_T \geq 0$ . Montrer que  $M_t \geq 0$  pour  $t < T$ . Cette propriété s'étend-elle au cas  $t > T$ ? Si oui, donner une démonstration, sinon, donner un contre exemple. Soit  $\tau$  un temps d'arrêt borné par  $T$ . On suppose que  $M_\tau = 0$ . Montrer qu'alors  $M_s = 0$  pour  $s \in [\tau, T]$ .
2. Soit  $V$  la valeur d'un portefeuille autofinancé dans un modèle Black-Scholes. On rappelle que  $d(R_t V_t) = \pi_t R_t \sigma V_t dB_t$  avec  $R_t = e^{-rt}$ . Montrer que si  $V_T \geq K$  alors  $V_t \geq e^{-r(T-t)} K$ . Montrer que s'il existe  $\tau < T$  tel que  $V_\tau = e^{-r(T-\tau)} K$ , alors  $V_t = e^{-r(T-t)} K$  pour  $t \in [\tau, T]$ .
3. Un agent de richesse initiale  $x$  souhaite former un portefeuille tel que  $V_T > K$ . Quelle condition sur  $x$  cela implique t'il? Comment peut-il réaliser cet objectif? (on donnera plusieurs solutions)

**Exercice 3.7.12** Soit  $dX_t = \sqrt{\frac{Y_t}{T-t}} X_t dB_t$  et  $dY_t = g_t dB_t + \mu dt$ . On note  $C(T-t, x, \sigma)$  la fonction de Black-Scholes. Donner une relation entre  $g, \mu$  pour que  $C(T-t, X_t, \sqrt{\frac{Y_t}{T-t}})$  soit une martingale.

**Exercice 3.7.13** Calcul de  $\mathbb{E}(\exp - \int_0^T r_s ds | \mathcal{F}_t)$  avec  $r_t = f(t) + \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t$

**Exercice 3.7.14** On considère un marché dans lequel sont négociés trois actifs Un actif sans risque dont la dynamique est  $dS_t^0 = S_t^0 r dt$  et DEUX actifs risqués

$$dS_t^i = S_t^i (\mu_i dt + \sigma dB_t)$$

avec  $\mu_1 \neq \mu_2$  et le même mouvement Brownien uni-dimensionnel  $B$ . Les actifs contingents sont choisis dans  $\mathcal{F}_T = \sigma(S_s^1, S_s^2, s \leq T) = \sigma(B_s, s \leq T)$ .

1. Montrer que le marché est complet.
2. Montrer que la marché admet des opportunités d'arbitrage.
3. Construire EXPLICITEMENT une telle opportunité d'arbitrage, c'est-à-dire expliciter un triplet  $(\pi_0, \pi_1, \pi_2)$  de processus adaptés tels que le portefeuille associé soit autofinancant et  $V_0 = 0, V_T > 0$ . On pourra se restreindre à une OA statique, c'est-à-dire telle que  $(\pi_0, \pi_1, \pi_2)$  soient des constantes.

**Exercice 3.7.15** On considère un modèle Black et Scholes et on note  $\mathbb{Q}$  l'unique mme.

1. On note  $Y_t = \int_0^t S_u du$ . Quel est le prix, à la date  $t$  du payoff  $Y_T$  (versé en  $T$ )?
2. Expliciter la stratégie de couverture de  $Y_T$
3. On considère le payoff  $h(Y_T, S_T)$ , versé en  $T$ , où  $h$  est une fonction borélienne (bornée)
  - Montrer que le prix à la date  $t$  de  $h(Y_T, S_T)$  s'écrit  $\varphi(t, Y_t, S_t)$  et montrer comment obtenir  $\varphi(t, y, x)$  par un calcul d'espérance (non conditionnelle)
  - Quelle est l'EDP satisfaite par  $\varphi$ ?
  - Déterminer la stratégie de couverture associée.

On considère  $c$  et  $\pi$  deux processus adaptés et  $X^{\pi, c}$  la solution de

$$dX_t = rX_t dt + \pi_t(dS_t - rS_t dt) - c_t dt, \quad X_0 = x$$

- Montrer que  $(e^{-rt}X_t + \int_0^t e^{-rs}c_s ds, t \geq 0)$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale.
- Montrer que, pour  $t < T$ ,

$$\begin{aligned} X_t e^{-rt} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_T e^{-rT} + \int_t^T e^{-rs} c_s ds | \mathcal{F}_t) \\ X_t e^{-rt} \zeta_t &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_T e^{-rT} \zeta_T + \int_t^T \zeta_s e^{-rs} c_s ds | \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

- Soit  $\psi$  et  $\vartheta$  deux processus adaptés. On souhaite que les relations  $\pi_t = \psi_t X_t$  et  $c_t = \vartheta_t X_t$  soient satisfaites. Quelle sera dans ce cas la solution  $X_t^{\pi, c}$  (l'expliciter en terme des processus  $\psi, \vartheta, B$ )?
- On admet que le processus  $X$  représente la richesse d'un agent financier investissant  $\pi$  sur l'actif risqué et consommant  $c_t dt$  durant l'intervalle de temps  $t, t + dt$ . Montrer, en utilisant cette interprétation que pour obtenir une richesse terminale (en  $T$ ) positive et avoir une consommation positive, l'agent doit avoir une richesse initiale positive et que sa richesse sera positive à chaque instant  $t$ .

## Chapter 4

# Exemples

Dans tout ce chapitre,  $B$  est un mouvement Brownien dont la filtration est notée  $\mathbb{F}$ .

### 4.1 Processus de Bessel

**Exercice 4.1.1** Soit  $B_1$  et  $B_2$  deux mouvements Browniens indépendants et

$$Z_t = B_1^2(t) + B_2^2(t).$$

1. Ecrire l'EDS vérifiée par  $Z$ .
2. On pose  $Y_t = \sqrt{Z_t}$ . Ecrire l'EDS vérifiée par  $Y$ .
3. Ecrire l'EDS vérifiée par  $1/Y$ .

**Exercice 4.1.2 Formule d'Itô** On considère les processus de la forme

$$dr_t = \mu dt + 2\sqrt{r_t}dB_t \tag{4.1}$$

On admet que  $r_t \geq 0$  presque partout (par rapport à  $t$  et à  $\omega$ .)

1. Soit  $f(t, x)$  une fonction de  $C_b^{1,2}$ . Quelle condition doit vérifier la fonction  $f$  pour que  $f(t, r_t)$  soit une martingale ?
2. Soit  $Z_t = r_t^2$  et  $\rho_t = \sqrt{r_t}$ . Ecrire les EDS vérifiées par  $Z_t$  et par  $\rho_t$ .
3. Soit  $dr_t^1 = \mu_1 dt + 2\sqrt{r_t}dB_t^1$  et  $dr_t^2 = \mu_2 dt + 2\sqrt{r_t}dB_t^2$  deux processus, avec  $B^1$  et  $B^2$  deux browniens indépendants. On admettra que  $r^1$  et  $r^2$  sont indépendants. On note  $R$  le processus défini par  $R_t = r_t^1 + r_t^2$ . Montrer que  $R$  s'écrit sous la forme (4.1).

**Exercice 4.1.3 Processus de Bessel de dimension 3.** Soit  $R$  le processus solution de

$$dR_t = \frac{1}{R_t}dt + dW_t, \quad R_0 = 0.$$

1. Montrer que  $Z_t = \frac{1}{R_t}$  est une martingale locale.
2. Montrer que  $(U_t = \exp(-\frac{\lambda^2 t}{2}) \frac{\sinh \lambda R_t}{\lambda R_t}, t \geq 0)$  est une martingale locale. On admettra que c'est une martingale.

3. En déduire la valeur de  $\mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{\lambda^2 T_m}{2}\right)\right)$  où  $T_m = \inf\{t : R_t = m\}$ , avec  $m > 0$ .
4. Soit  $f$  une fonction continue bornée et  $a$  un nombre réel. Quelles conditions doit vérifier la fonction  $v$  pour que

$$v(R_t) \exp\left[-at - \int_0^t f(R_s) ds\right]$$

soit une martingale?

5. Supposons que  $v$  est explicitée. Comment calculerez vous

$$\mathbb{E}(\exp[-aT_m - \int_0^{T_m} f(R_s) ds])?$$

**Exercice 4.1.4 Processus de Bessel de dimension 2.** Soit  $dR_t = dW_t + \frac{1}{2R_t} dt$ .

1. Montrer que  $Z = \ln R$  est une martingale locale.
2. Soit  $\nu$  un nombre réel positif. Montrer que  $L_t = [R_t]^\nu \exp(-\frac{\nu^2}{2} \int_0^t \frac{ds}{R_s^2})$  est une martingale locale.

**Exercice 4.1.5 Processus de Bessel de dimension  $\delta$ .** Soit  $R$  le processus solution de  $dR_t = dB_t + \frac{\delta-1}{2R_t} dt$ .

1. Pour quelles fonctions  $s$  le processus  $s(R_t)$  est-il une martingale locale?
2. Quelle est la dynamique de  $Y_t = R_t^2$ ?
3. Montrer que  $Z_t \stackrel{\text{def}}{=} \exp(-\frac{\mu}{2}(Y_t - \delta t) - \frac{\mu^2}{2} \int_0^t Y_u du)$  est une martingale.
4. Soit  $dQ = Z dP$ . Quelle est la dynamique de  $Y$  sous  $Q$ ?

**Exercice 4.1.6 Minimum d'un Bessel**

Quelle est la loi de  $\inf_{s \leq t} X_s$  lorsque  $X$  est un processus de Bessel?

## 4.2 Processus de Bessel carré

**Exercice 4.2.1** Soit  $\alpha, \sigma$  deux constantes et  $dX(t) = -\frac{1}{2}\alpha X(t) dt + \frac{1}{2}\sigma dW(t)$ . Soit  $Y_t = X_t e^{\alpha t/2}$ . Ecrire  $dY_t$ .

1. En déduire la forme de la solution  $X(t)$ .
2. On suppose que  $(W_1, W_2, \dots, W_n)$  sont des Browniens indépendants et on note  $X_i$  la solution de  $dX_i(t) = -\frac{1}{2}\alpha X_i(t) dt + \frac{1}{2}\sigma dW_i(t)$ . Soit  $r$  le processus défini par  $r(t) = X_1^2(t) + \dots + X_n^2(t)$ .
3. Montrer que le processus  $B$  défini par  $B(0) = 0$  et  $dB(t) = \sum_{i=1}^n \frac{X_i(t) dW_i(t)}{\sqrt{r_t}}$  est un mouvement Brownien.

4. Montrer que  $dr_t = (a - br_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dB_t$

**Exercice 4.2.2 Processus de Bessel carré.** Soit  $x \geq 0$  et  $R$  un processus tel que

$$dR_t = \mu dt + 2\sqrt{R_t}dB_t, \quad R_0 = x \quad (4.2)$$

On admettra que  $R$  existe et que  $R \geq 0$ .

1. Soit  $Z_t = (B_t)^2$ . Montrer que  $Z$  vérifie une équation de la forme (4.2). Quelle est la valeur de  $\mu$  correspondante?
2. Soit  $B^1$  un mouvement Brownien indépendant de  $B$  et  $Z_t^1 = (B_t)^2 + (B_t^1)^2$ . Montrer que  $Z^1$  vérifie une équation de la forme (4.2). Quelle est la valeur de  $\mu$  correspondante? Généralisation à la somme des carrés de  $n$  Browniens indépendants.
3. Soit  $\rho_t = \sqrt{R_t}$ . Montrer que  $d\rho_t = b(t, \rho_t, \mu)dt + dB_t$ . On explicitera  $b$ .
4. Soit  $B^1$  un mouvement Brownien indépendant de  $B$ . On note  $R^{(\mu)}(x)$  le processus défini en (4.2) et, pour  $y \geq 0$ , le processus  $R^{(\nu)}(y)$  solution de

$$dR_t^{(\nu)} = \nu dt + 2\sqrt{R_t^{(\nu)}}dB_t^1, \quad R_0^{(\nu)} = y \quad (4.3)$$

On notera simplement  $R_t^{(\mu)}$  et  $R_t^{(\nu)}$  ces deux processus. On supposera que les processus  $R_t^{(\mu)}$  et  $R_t^{(\nu)}$  ne s'annulent pas et on admettra qu'ils sont indépendants.

- (a) Soit  $X_t = R_t^{(\mu)} + R_t^{(\nu)}$ . Calculer  $dX_t$ .
- (b) Montrer que le processus  $Z$  défini ci-dessous est un mouvement Brownien

$$dZ_t = \frac{\sqrt{R_t^{(\mu)}}dB_t + \sqrt{R_t^{(\nu)}}dB_t^1}{\sqrt{R_t^{(\mu)} + R_t^{(\nu)}}}$$

- (c) En déduire que  $X_t = R_t^{(\mu)} + R_t^{(\nu)}$  vérifie

$$dX_t = \beta dt + 2\sqrt{X_t}dZ_t$$

On explicitera  $\beta$  en fonction de  $\mu$  et  $\nu$ .

5. (a) On suppose que l'on connaît  $\mathbb{E}(R_t^{(\mu)}) = m(\mu)$  et  $\text{Var}(R_t^{(\mu)}) = v(\mu)$  pour tout  $\mu$ . Exprimer  $\mathbb{E}(X_t)$  et  $\text{Var}(X_t)$  en fonction de  $m$  et  $v$ .  
 (b) On admet que, si  $W$  est un brownien issu de  $\sqrt{x}$  (voir exo 2.1.11)

$$\mathbb{E}(\exp - \lambda(W_t)^2) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\lambda t}} \exp\left(-\frac{\lambda x}{1 + 2\lambda t}\right) \quad (4.4)$$

Comment calculer  $\mathbb{E}(\exp - \lambda[\rho_t^{(1)}]^2)$ ,  $\mathbb{E}(\exp - \lambda R_t^{(1)}(x))$  et  $\mathbb{E}(\exp - \lambda R_t^{(2)}(x))$  ?.

On utilisera la question (d) et l'indépendance de  $R_t^{(\mu)}$  et  $R_t^{(\nu)}$ .

6. Montrer que

$$\mathbb{E}(\exp - \lambda R_t^{(\mu)}(x)) = \mathbb{E}(\exp - \lambda R_t^{(1)}(x)) \left( \mathbb{E}(\exp - \lambda R_t^{(1)}(0)) \right)^{\mu-1}$$

Calculer  $\mathbb{E}(\exp - \lambda R_t^{(\mu)}(x))$ .

7. Comment démontrer l'indépendance de  $R_t^{(\mu)}$  et  $R_t^{(\nu)}$  ?  
Comment démontrer (4.4) ?

**Exercice 4.2.3 Processus de Bessel carré.** Soit  $X$  un  $BESQ^{(\delta)}(x)$ .

1. Montrer que  $(\frac{1}{c}X_{ct}, t \geq 0)$  est un  $BESQ^{(\delta)}(x/c)$ .
2. Montrer que, si  $F$  est un processus adapté

$$Z_t = \exp\left\{\frac{1}{2} \int_0^t F_s d(X_s - \delta s) - \frac{1}{2} \int_0^t F_s^2 X_s ds\right\}$$

est une martingale locale.

3. Montrer que si  $F$  est déterministe, dérivable

$$Z_t = \exp\left\{\frac{1}{2}F(t)X_t - F(0)X_0 - \delta \int_0^t F(s)ds - \frac{1}{2} \int_0^t F_s^2 X_s ds + X_s dF(s)\right\}$$

4. Soit  $\Phi$  solution de

$$\Phi'' = b^2 \Phi, \Phi(0) = 1, \Phi'(1) = 0$$

Montrer que  $Z_t = \exp\left\{\frac{1}{2}F(t)X_t - F(0)X_0 - \delta \ln \Phi(t) - \frac{b^2}{2} \int_0^t X_s ds\right\}$ . On admettra que  $Z$  est une martingale.

5. En déduire que

$$Q_x^{(\delta)}\left(\exp - \frac{1}{2} \int_0^1 X_s ds\right) = (\cosh b)^{-\delta/2} \exp(-xb \tanh b)$$

**Exercice 4.2.4** En utilisant que

$$\sup_{1 \leq t \leq 1} |W_t| \stackrel{loi}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{R_s^{(2)}}$$

où  $R_s^{(2)} = B_s + \frac{1}{2} \int_0^s \frac{du}{R_u^{(2)}}$  montrer que  $\mathbb{E} \sup_{1 \leq t \leq 1} (|W_t|) = \sqrt{\pi/2}$ .

**Exercice 4.2.5** Application du théorème de Lamperti The following absolute continuity relation between two  $BES$  processes (with  $\nu \geq 0$ )

$$P_x^{(\nu)} = \left(\frac{R_t}{x}\right)^\nu \exp - \left(\frac{\nu^2}{2} \int_0^t \frac{ds}{R_s^2}\right) P_x^{(0)}$$

where  $P^{(\nu)}$  is the law of a  $BES$  with index  $\nu$ . On utilisera

$$W^{(\nu)}|_{\mathcal{F}_t} = \exp(\nu W_t - \frac{\nu^2}{2}t)W|_{\mathcal{F}_t}$$

et  $(R_t; t \geq 0) \stackrel{loi}{=} x \exp(B_{C_t} + \nu C_t)$

**Exercice 4.2.6** Soit  $dX_t = 2\sqrt{X_t}dW_t + \delta(t)dt$  où  $\delta$  est une fonction (continue bornée). On veut calculer

$$A = \mathbb{E}_{t,x} \left( \exp \left( -\frac{1}{2} \int_t^T X_u m(u) du \right) f(X_T) \right)$$



1. On se place dans le cas  $f = 1$ , et on note  $\varphi$  la solution de

$$\partial_{uu}\varphi(u, T) = m(u)\varphi(u, T); \partial_u\varphi(T, T) = 0$$

Montrer que

$$\mathbb{E}_{t,x} \left( \exp \left( -\frac{1}{2} \int_t^T X_u m(u) du \right) \right) = \exp \left( \frac{\partial_u \varphi(t, T)}{2\varphi(t, T)} x \right) \exp \left( \frac{1}{2} \int_t^T \frac{\partial_u \varphi(s, T)}{\varphi(s, T)} \delta(u) du \right)$$

2. Montrer que le calcul de  $A$  se ramène au calcul de la solution d'une EDP.

### 4.3 Autres processus.

**Exercice 4.3.1 Processus d'Ingersoll.** Soit  $a < z < b$  et  $Z$  le processus solution de

$$dZ_t = (Z_t - a)(b - Z_t)\sigma dB_t, Z_0 = z$$

On admet que pour tout  $t$ , le processus  $Z$  vérifie  $a < Z_t < b$ .

1. Calculer la dynamique de  $Z^{-1}$ .
2. soit  $\zeta_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Z_t - a}{b - Z_t}$ . Calculer la dynamique de  $\zeta$  et celle de  $\ln \zeta$ .
3. Soit  $X_t = (b - Z_t)g(t, \zeta_t)$ . Donner une condition sur  $g$  pour que  $X$  soit une martingale. Sauriez-vous résoudre l'équation obtenue ?
4. Soit  $Y$  solution de

$$dY_t = (Y_t - a)(b - Y_t)^2 dt + (Y_t - a)(b - Y_t)\sigma dB_t$$

Montrer qu'il existe une probabilité  $\mathbb{Q}$  que l'on déterminera telle que, sous  $\mathbb{Q}$   $Y$  ait même loi que  $Z$  sous  $\mathbb{P}$ .

**Exercice 4.3.2 Un processus stationnaire.** Soit  $X$  vérifiant  $dX_t = -aX_t dt + \sigma dB_t$ ,  $X_0$  v.a. donnée.

1. Explicitez  $X_t$ .
2. Montrer que si  $X_0$  est une v.a. gaussienne indépendante de  $B$ , le processus  $X$  est un processus gaussien.
3. On suppose que  $X_0$  est gaussienne, indépendante de  $B$ . Déterminer la loi de  $X_0$  pour que la loi de la v.a.  $X_t$  ne dépende pas de  $t$ .

**Exercice 4.3.3** Soit  $X$  solution de (on admet que  $X$  existe)

$$dX_t = X_t(1 - X_t)((\mu - X_t)dt + dB_t), X_0 = x$$

avec  $x \in ]0, 1[$ . Soit  $h_0(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{2\theta-1}$  et  $h_1(x) = 2\frac{\ln(1-x) - \ln x}{(2\mu-1)}$  et  $\tau = \inf\{t \geq 0, S_t \notin [a, b]\}$ , avec  $0 < a < x < b < 1$ .

1. Montrer que  $h_0(X_t)$  et  $h_1(X_t) + t$  sont des martingales.
2. Montrer que  $P(X_\tau = a) = \frac{h_0(x) - h_0(b)}{h_0(a) - h_0(b)}$  et calculer  $\mathbb{E}(\tau)$ .

## 4.4 Des calculs

**Exercice 4.4.1 Un calcul de probabilité.** On suppose connue

$$\Phi(a, T) = P(B_t \leq at, \forall t \leq T)$$

Soit  $B_1$  et  $B_2$  deux MB indépendants et

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t(rdt + \sigma_1 dB_1(t)), & X_0 &= 1 \\ dY_t &= Y_t(rdt + \sigma_2 dB_2(t)), & Y_0 &= 1 \end{aligned}$$

Calculer, en fonction de  $\Phi$  la quantité  $P(X_t \leq Y_t, \forall t \leq T)$ .

**Exercice 4.4.2 Un calcul de loi** Let  $dX_t = \mu(t)dt + \sigma(t)dB_t, X_0 = 0$  where  $\mu$  and  $\sigma$  are piece wise constant over known time.

Let us restrict our attention to the case

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \mu \forall t \in [0, 1[, & \mu(t) &= \mu_1 \forall t \in [1, \infty[, \\ \sigma(t) &= \sigma \forall t \in [0, 1[, & \sigma(t) &= \sigma_1 \forall t \in [1, 2[, . \end{aligned}$$

Describe the distribution of  $Y_t = \max_{0 \leq s \leq t} X_s$ .

**Exercice 4.4.3** Montrer que la solution de

$$dC_t = C_t \left[ r_t dt + m \left( \frac{dS_t}{S_t} - r_t dt \right) \right]$$

avec  $dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dB_t)$  s'écrit sous la forme

$$C_t = C_0 \left( \frac{S_t}{S_0} \exp \left[ a \int_0^t r_s ds + b \int_0^t \sigma_s^2 ds \right] \right)^m$$

où on explicitera  $a$  et  $b$ .

**Exercice 4.4.4 Changement de temps** Soit  $dX_t = -\lambda X_t dt + \sigma dB_t$  et  $\tau = \inf\{t : |X_t| > g(t)\}$  où  $g$  est une fonction déterministe. Exprimer  $P(\tau > t)$  en fonction de  $\Psi(u) = P(\tau^* > u)$  avec  $\tau^* = \inf\{t : |B_t| > h(t)\}$ .

## Chapter 5

# Equations différentielles stochastiques

Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad X_0 = x$$

où l'inconnue est le processus  $X$ , les données sont le mouvement Brownien  $B$  (éventuellement multi-dimensionnel) et les fonctions  $b$  et  $\sigma$ .

L'équation précédente a une unique solution si a- les fonctions  $b$  et  $\sigma$  sont continues,

b- il existe  $K$  tel que pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$

i)  $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$

ii)  $|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2)$ . De plus cette solution vérifie

$$E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2\right) < \infty.$$

### 5.1 Equation linéaire

**Exercice 5.1.1** Soit l'EDS

$$dX_t = bX_t dt + dB_t, \quad X_0 = x.$$

1. On pose  $Y_t = e^{-bt}X_t$ . Quelle est l'EDS vérifiée par  $Y_t$  ? Exprimer  $Y_t$  sous la forme  $Y_t = y + \int_0^t f(s)dB_s$  où l'on explicitera la fonction  $f$ .
2. Calculer  $\mathbb{E}(Y_t)$  et  $\mathbb{E}(Y_t^2)$ .
3. Justifier que  $\int_0^t Y_s ds$  est un processus gaussien. Calculer  $\mathbb{E}(\exp[\int_0^t Y_s ds])$ .
4. Exprimer  $Y_t$  pour  $t > s$  sous la forme  $Y_t = Y_s + \int_s^t g(u)dB_u$  où l'on explicitera la fonction  $g$ . Calculer  $\mathbb{E}(Y_t|\mathcal{F}_s)$  et  $\text{Var}(Y_t|\mathcal{F}_s)$
5. Calculer  $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$  et  $\text{Var}(X_t|\mathcal{F}_s)$ .

**Exercice 5.1.2** Soit

$$d\Psi_t = (1 - r\Psi_t)dt + \sigma\Psi_t dB_t$$

et  $L$  le générateur associé

$$LV(x) = (1 - rx)V'(x) + \frac{\sigma^2}{2}x^2V''(x)$$

Soit  $u$  une solution de

$$Lu(x) - \lambda u(x) = 0$$

On définit  $x^*$  comme solution de  $x^*u'(x^*) = u(x^*)$  et  $v(x) = \frac{x^*}{u(x^*)}u(x)$ . On admettra que  $v''(x) \geq 0$ .

Soit enfin  $V$  définie par

$$\begin{cases} V(x) &= v(x), & 0 \leq x \leq x^* \\ &= x, & x > x^* \end{cases}$$

Montrer que  $1 - (r + \lambda)x^* \leq 0$ .

Ecrire la formule d'Itô pour  $e^{-\lambda t}V(\Psi_t)$  (il apparait un terme  $LV(x) - \lambda V(x)$ ). Montrer que sur  $x > x^*$  on a  $LV(x) - \lambda V(x) \leq 0$  et que sur  $x \leq x^*$ , on a  $LV(x) - V(x) = 0$

En déduire que

$$V(\Psi_0) \geq \tilde{\mathbb{E}}(e^{-\lambda T}V(\Psi_T))$$

(en admettant que l'intégrale stochastique est une martingale).

### Exercice 5.1.3 Cas particulier 1.

1. Montrer que la solution  $Y$  de

$$dY_t = \alpha X_t dt + \beta X_t dB_t, Y_0 = 1,$$

est

$$Y_t = \exp \left\{ \left( \alpha - \frac{1}{2}\beta^2 \right) t + \beta B_t \right\}.$$

2. Montrer que si  $\alpha \geq 0$ ,  $Y$  est une sous-martingale par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_t)$ .  
A quelle condition sur  $\alpha$ ,  $Y$  est elle une martingale?

3. Soit  $(Z_t)_{t \geq 0}$  le processus défini par

$$Z_t = x + (a - b\beta) \int_0^t Y_s^{-1} ds + b \int_0^t Y_s^{-1} dB_s.$$

Montrer que  $(Z_t)_{t \geq 0}$  est un processus d'Itô. Calculer  $\langle Y, Z \rangle_t$ .

En déduire que la solution  $X$  de (5.3) peut s'écrire  $X_t = Y_t Z_t$ .

### Exercice 5.1.4 Cas particulier 2. On considère l'équation

$$\begin{aligned} dX_t &= \alpha X_t dt + b dB_t \\ X_0 &= x. \end{aligned} \tag{5.1}$$

1. Montrer que l'unique solution de (5.1) s'écrit

$$X_t = e^{\alpha t} \left( X_0 + b \int_0^t e^{-\alpha s} dB_s \right).$$

2. Montrer que  $X$  est un processus gaussien, calculer son espérance et sa variance.

3. Justifier que  $\int_0^t X_s ds$  est un processus gaussien. Calculer  $\mathbb{E} \left( \exp \left[ \int_0^t X_s ds \right] \right)$ .

4. Calculer  $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$  et  $\text{Var}(X_t|\mathcal{F}_s)$ .
5. Soit  $X$  solution de (5.1), et  $\phi$  une fonction de classe  $C^2$ . Ecrire la formule d'Itô pour  $Z_t = \phi(X_t)$ .

En déduire que si  $\phi(x) = \int_0^x \exp(-\alpha \frac{y^2}{b^2}) dy$ , alors

$$Z_t = b \int_0^t \exp(-\alpha \frac{B_s^2}{b^2}) dB_s$$

$Z$  est-elle une martingale de carré intégrable?

6. Soit  $\lambda$  fixé. Calculer

$$\Phi(t, y) = \mathbb{E}(e^{\lambda X_t^2}).$$

Soit  $t$  fixé. Etudier la martingale  $\mathbb{E}(e^{\lambda X_t^2}|\mathcal{F}_s), s \leq t$ .

Montrer que  $\Phi$  est solution d'une équation aux dérivées partielles. Soit  $\Psi(t, x) = \ln \Phi(t, x)$ . Montrer que

$$\Psi(t, x) = x^2 a(t) + b(t), \text{ avec } a'(t) = -2a(t)(\alpha + b^2 a(t)), \quad b'(t) = -b^2 a(t).$$

**Exercice 5.1.5 Cas particulier 3.** On considère l'équation

$$\begin{aligned} dX_t &= (b + \beta X_t) dB_t \\ X_0 &= x \end{aligned} \tag{5.2}$$

où  $x \neq -\frac{b}{\beta}$ . Soit  $h$  la fonction définie par

$$h(y) = \frac{1}{\beta} \ln \left| \frac{b + \beta y}{b + \beta x} \right|$$

pour  $y \neq -\frac{b}{\beta}$

1. On pose  $Y_t = h(X_t)$ . Quelle est l'équation vérifiée par  $Y$ ?
2. En déduire que la solution de (5.2) s'écrit

$$X_t = \left(x + \frac{b}{\beta}\right) \exp\left(-\frac{\beta^2}{2}t + \beta B_t\right) - \frac{b}{\beta}$$

**Exercice 5.1.6 Cas particulier 4.** On se place dans le cas  $a = 1, b = 0$ . On pose  $Y_t = e^{-\alpha t} X_t$ . Quelle est l'équation différentielle vérifiée par  $Y$ ? Calculer  $\mathbb{E}(X_t)$  et  $\text{Var}(X_t)$ .

**Exercice 5.1.7 Cas général.** Soit  $a, \alpha, b, \beta$  quatre constantes réelles. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On considère l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dX_t &= (a + \alpha X_t) dt + (b + \beta X_t) dB_t \\ X_0 &= x \end{aligned} \tag{5.3}$$

1. Montrer que (5.3) admet une unique solution.
2. On note  $m(t) = \mathbb{E}(X_t)$  et  $M(t) = \mathbb{E}(X_t^2)$ .

(a) Montrer que  $m(t)$  est l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{aligned} y' - \alpha y &= a \\ y(0) &= x \end{aligned} \quad (5.4)$$

(b) Ecrire la formule d'Itô pour  $X^2$  où  $X$  est solution de (5.3).

(c) En déduire que  $M(t)$  est l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{aligned} y' - (2\alpha + \beta^2)y &= 2(a + b\beta)m + b^2 \\ y(0) &= x^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

où  $m$  est la solution de (5.4). (On admettra que l'intégrale stochastique qui intervient est une martingale)

(d) Résoudre (5.4) puis (5.5).

**Exercice 5.1.8** Soit  $f, F, g, G$  des fonctions continues bornées. On note  $X$  la solution de

$$dX_t = [f(t) + F(t)X_t]dt + [g(t) + G(t)X_t]dB_t, \quad X_0 = x$$

et  $Y$  la solution de

$$dY_t = F(t)Y_tdt + G(t)Y_tdB_t, \quad Y_0 = 1$$

1. Expliciter  $Y$ .
2. Soit  $Z$  défini par

$$Z_t = x + \int_0^t Y_s^{-1}[f(s) - G(s)g(s)]ds + \int_0^t Y_s^{-1}g(s)dB_s.$$

Montrer que  $X = YZ$ .

3. Soit  $m(t) = \mathbb{E}(X_t)$  et  $M_t = \mathbb{E}(X_t^2)$ . Montrer que  $m$  est l'unique solution de  $y'(t) - F(t)y(t) = f(t), y(0) = x$ . En déduire

$$m(t) = \exp(\tilde{F}(t)) \left[ x + \int_0^t \exp(-\tilde{F}(s))f(s)ds \right]$$

où  $\tilde{F}(t) = \int_0^t F(s)ds$ . Montrer que  $M$  est l'unique solution de

$$Y'(t) - [2F(t) + G^2(t)]y(t) = 2[f(t) + g(t)G(t)]m(t) + g^2(t), \quad y(0) = x^2$$

**Exercice 5.1.9** Calculer l'espérance et la variance de la v.a.  $X_t$  avec

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dB_t, \quad X_0 = x$$

**Exercice 5.1.10** Soit  $0 < s < T$  et  $m \in \mathbb{R}$ . Vérifier que la solution de

$$dX_t = \frac{(s - T)X_t + mT}{(s - T)t + T^2}dt + dB_t$$

est

$$X_t = \frac{m}{T}t + [(s - T)t + T^2] \int_0^t \frac{dB_u}{(s - T)u + T^2}$$

**Exercice 5.1.11** Soit  $\pi$  un processus adapté (de carré intégrable),  $\sigma$ ,  $\theta$  et  $r$  des processus adaptés (bornés),  $c$  un processus positif, adapté, borné et  $X$  la solution de

$$\begin{aligned} dX_t^{x,\pi,c} &= r_t X_t^{x,\pi,c} dt - c_t dt + \pi_t^T \sigma_t [dB_t + \theta_t dt] \\ X_0^{x,\pi,c} &= x \end{aligned} \quad (5.6)$$

On note  $H$  le deflateur, soit  $H_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds\right) = L_t \int_0^t r_s ds$ . Montrer que les processus  $H_t X_t + \int_0^t H_s c_s ds, t \geq 0$  et  $L_t(X_t R_t + \int_0^t c R_s ds)$  sont des martingales. Vérifier que leur différence est une martingale.

## 5.2 Processus affines

**Exercice 5.2.1** Calculer  $\mathbb{E}(\exp(\lambda X_T))$  pour

$$\begin{aligned} dX_t &= (\mu - \alpha X_t - \gamma V_t)dt + \sqrt{V_t} dB_{1,t} \\ dV_t &= k(\theta - V_t)dt + \sigma \sqrt{V_t} dB_{2,t} \end{aligned}$$

**Exercice 5.2.2** Soit

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$$

où  $\mu$  et  $\sigma^2$  (le carré de  $\sigma$ ) sont des fonctions affines :  $\mu(x) = \mu_0 + \mu_1 x$ ;  $\sigma^2(x) = \sigma_0 + \sigma_1 x$ . On souhaite montrer que pour toute fonction affine  $\psi(x) = \psi_0 + \psi_1 x$ , pour tout  $\theta$ , il existe deux fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  telles que,

$$\mathbb{E} \left( e^{\theta X_T} \exp \left( - \int_t^T \psi(X_s) ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) = e^{\alpha(t) + \beta(t) X_t}.$$

1. Montrer qu'il suffit d'établir l'existence de deux fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  telles que le processus

$$e^{\alpha(t) + \beta(t) X_t} \exp \left( - \int_0^t \psi(S_s) ds \right)$$

est une martingale avec  $\alpha(T) = 0, \beta(T) = \theta$ .

2. Montrer que la détermination de  $\alpha$  et  $\beta$  conduit à la résolution d'une équation de Ricatti (type d'équation différentielle non linéaire) et d'une équation différentielle linéaire. On ne demande pas la résolution de ces équations.
3. Généraliser le résultat au cas où  $dS_t = \mu(S_t)dt + \sigma(S_t)dB_t + dX_t$  où  $(X_t, t \geq 0)$  est un processus de Poisson.

## 5.3 Autres équations

**Exercice 5.3.1** On considère l'équation

$$dX_t = \mathbb{1}_{X_t \geq 0} dB_t, X_0 = x. \quad (5.7)$$

On suppose qu'il existe une solution.

1. Vérifier que, pour  $x = 0$ , la solution de (5.7) n'est pas identiquement nulle.
2. Vérifier que, pour  $x \geq 0$ , la solution est à valeurs positives. On pourra montrer, en utilisant la formule d'Itô, que si  $f$  est une fonction régulière, nulle sur  $\mathbb{R}^+$ , alors  $f(X_t)$  est nulle.
3. Montrer que la solution issue de 0 est d'espérance nulle à tout instant  $t$ .
4. Que peut on en conclure?

## 5.4 Finance

**Exercice 5.4.1 Options Asiatiques.** Soit  $S_t$  solution de

$$dS_t = S_t (r dt + \sigma dB_t)$$

les paramètres  $r$  et  $\sigma$  étant constants.

1. Soit  $K$  une constante. Montrer que le processus  $M_t = \mathbb{E} \left( \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)^+ | \mathcal{F}_t \right)$  est une martingale.
2. Montrer que, si l'on pose  $\zeta_t = S_t^{-1} (K - \frac{1}{T} \int_0^t S_u du)$ , on a

$$M_t = S_t \mathbb{E} \left( \left[ \frac{1}{T} \int_t^T \frac{S_u}{S_t} du - \zeta_t \right]^+ | \mathcal{F}_t \right).$$

3. Soit  $\Phi(t, x) = \mathbb{E} \left( \left[ \frac{1}{T} \int_t^T \frac{S_u}{S_t} du - x \right]^+ \right)$ . Montrer que  $\Phi(t, x) = \mathbb{E} \left( \left[ \frac{1}{T} \int_t^T \frac{S_u}{S_t} du - x \right]^+ | \mathcal{F}_t \right)$  et que  $M_t = S_t \Phi(t, \zeta_t)$ .
4. Ecrire la formule d'Itô pour  $M$ . En déduire une équation aux dérivées partielles vérifiée par  $\Phi$ .

**Exercice 5.4.2 Black et Scholes, volatilité déterministe.** Soit  $\sigma$  une fonction déterministe continue et  $r$  une constante et  $(S_t, t \geq 0)$  la solution de

$$dS_t = S_t (r dt + \sigma(t) dB_t), S_0 = x$$

1. Montrer que

$$S_t = S_0 \exp \left( rt + \int_0^t \sigma(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds \right)$$

2. Montrer que  $\int_0^t \sigma(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds$  est une variable gaussienne dont on calculera l'espérance et la variance.
3. On rappelle que dans le cas  $\sigma$  constant, le prix d'un call est donné par

$$C(0, x) = x \mathcal{N}(d_1) - K e^{-rT} \mathcal{N}(d_2)$$

avec

$$d_1 = \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \left( \ln \left( \frac{x}{K} \right) + T \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right), d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

En déduire (sans faire de calculs) que, dans le cas de volatilité déterministe, la formule de Black et Scholes s'écrit

$$\mathbb{E}((S_T - K)^+) = x \mathcal{N}(D_1) - K e^{-rT} \mathcal{N}(D_2)$$

Exprimer  $D_1$  et  $D_2$ .



**Exercice 5.4.3** La formule de Dupire. Soit

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma(t, S_t)dB_t)$$

où  $\sigma$  est une fonction de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  et  $f(t, x)$  la densité de  $S_t$ , soit  $f(t, x) = P(S_t \in dx)$ . ON admettra que

$$\partial_t f - \frac{1}{2} \partial_{xx} [x^2 \sigma^2(t, x) f(t, x)] + \partial_x [rx f] = 0$$

On note  $C(K, T)$  le prix en zéro d'un call Européen de strike  $K$  et de maturité  $T$ . On note  $\partial_1 C, \partial_2 C, \partial_{11} C$  les dérivées partielles de  $C$  par rapport à la première variable, seconde variable, dérivée seconde par rapport à la première variable.

1. Montrer que  $\partial_{11} C(K, T) = e^{-rT} f(T, K)$ .

2. Montrer que

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x^2 \sigma^2(t, x) f(t, x)] = e^{rt} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (rx \frac{\partial}{\partial x} C) + e^{rt} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial C}{\partial t}$$

3. En déduire

$$\frac{1}{2} x^2 \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t, x) = rx \frac{\partial C}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial C}{\partial t}(t, x)$$

## 5.5 Equations différentielles

**Exercice 5.5.1** Soit  $\alpha$  une constante et

$$dX_t = -\alpha^2 X_t^2(1 - X_t)dt + \alpha X_t(1 - X_t)dB_t \quad (5.8)$$

la condition initiale étant  $X_0 = x$  avec  $x \in ]0, 1[$ . On admet que  $X$  prend ses valeurs dans l'intervalle  $]0, 1[$ . On pose  $Y_t = \frac{X_t}{1 - X_t}$ .

1. Quelle est l'équation différentielle stochastique vérifiée par  $Y$  ?

2. En déduire que  $X_t = \frac{x \exp(\alpha B_t - \alpha^2 t/2)}{x \exp(\alpha B_t - \alpha^2 t/2) + 1 - x}$ .

**Exercice 5.5.2 Produit d'exponentielle.** Soit  $B$  un MB et  $h$  un processus adapté borné. On note  $\mathcal{E}(hB)_t \stackrel{def}{=} L_t$  l'unique solution de  $dL_t = L_t h_t dB_t$ ,  $L_0 = 1$ . Etablir une formule du type  $\mathcal{E}(h_1 B_1 + h_2 B_2)_t = X_t \mathcal{E}(h_1 B_1)_t \mathcal{E}(h_2 B_2)_t$  où  $X$  est à déterminer.

**Exercice 5.5.3** Soit  $B$  un mouvement Brownien issu de  $a > 0$  et  $T_0 = \inf\{t : B_t = 0\}$ . Pour  $t < T_0$ , on définit  $X_t = \mu(B_t)^\alpha$ . Montrer que, pour  $t < T_0$ ,

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$$

où on explicitera  $b$  et  $\sigma$ . En déduire la forme de la solution de  $dY_t = Y_t^n dB_t + \frac{1}{2} n Y_t^{2n-1} dt$ ,  $Y_0 = y \geq 0$  avant le premier temps d'atteinte de 0. (On admettra l'unicité de la solution).

**Exercice 5.5.4 Ponts**

1. Soit  $N$  une gaussienne réduite centrée indépendante de  $B$ . Vérifier que la solution de  $dX_t = dB_t + \frac{N - X_t}{1 - t} dt$  est  $X_t = tN + (1 - t) \int_0^t \frac{1}{1 - s} dB_s$ . En déduire que  $X$  est un processus gaussien, dont on calculera l'espérance et la covariance.

2. Soit  $W$  un MB indépendant de  $B$ . Vérifier que la solution de  $dX_t = dB_t + \frac{W_t - X_t}{1-t}dt$  est
- $$X_t = (1-t) \int_0^t \frac{W_s}{(1-s)^2} ds + (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s} dB_s.$$
- En déduire que  $X$  est un processus gaussien, dont on calculera l'espérance et la covariance.

# Chapter 6

## Girsanov

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité. Une probabilité  $\mathbb{Q}$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  est dite équivalente à  $\mathbb{P}$  si  $\mathbb{P}(A) = 0$  équivaut à  $\mathbb{Q}(A) = 0$ . Dans ce cas, il existe une variable aléatoire  $Z$ ,  $\mathcal{F}$ -mesurable, strictement positive telle que  $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z \mathbb{1}_A)$  ce que l'on note  $d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}} = Z d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}}$ . La v.a.  $Z$  vérifie  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z) = 1$ , on l'appelle densité de Radon-Nykodym.

Si  $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$  est un espace de probabilité filtré, et si  $\mathbb{Q}$  est équivalente à  $\mathbb{P}$  sur  $\mathcal{F}_T$  (avec  $T \leq \infty$ ), alors  $d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t} = Z_t d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$  et le processus  $(Z_t, t \leq T)$  est une  $\mathcal{F}_t, t \leq T$  martingale. On rappelle la formule de Bayes (voir Exercice 1.3.14): pour  $X$   $\mathcal{F}_T$ -mesurable bornée

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{F}_t) = \frac{1}{Z_t} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X Z_T | \mathcal{F}_t)$$

Dans tous ces exercices,  $B$  désigne un  $P$ -mouvement Brownien issu de 0,  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$  sa filtration naturelle.

### 6.1 Résultats élémentaires.

Dans la plupart des exercices, on considère des intégrales  $\int \theta_s dB_s$  avec  $\theta$  borné. La plupart des résultats se généralisent au cas de processus de carré intégrable.

**Exercice 6.1.1 Changement de probabilité.** Soit  $(\theta_t, t \geq 0)$  un processus adapté continu borné et  $L$  la martingale définie par  $L_t = \exp[\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds]$ . Soit  $\mathbb{Q}$  la probabilité définie sur  $\mathcal{F}_T$  par  $d\mathbb{Q} = L_T d\mathbb{P}$ . Soit  $(\phi_t, t \geq 0)$  un processus adapté continu borné et  $M_t = \int_0^t \phi_s dB_s - \int_0^t \theta_s \phi_s ds$ . Montrer que  $M$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale. On pose  $Z_t = M_t L_t$ . Montrer que  $Z$  est une  $\mathbb{P}$ -martingale locale. Pouvait-on prévoir ce résultat.

**Exercice 6.1.2 Calcul d'espérance 1.** Soit  $\theta$  un processus adapté borné et  $H$  le processus défini par  $dH_t = -H_t \theta_t dB_t$ ,  $H_0 = 1$ . On note  $d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t} = H_t d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$ . Montrer que  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(H_T \ln H_T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 ds)$ . On pourra faire une démonstration à la main (quand  $\theta$  est déterministe) ou utiliser le théorème de Girsanov.

**Exercice 6.1.3 Calcul d'espérance 2.** Soit  $p$  une fonction déterministe donnée. Pour quelles fonctions  $h$  et  $k$  le processus  $\exp(h(t) + k(t)B_t^2 + \int_0^t p(s)B_s^2 ds)$  est-il une martingale? Applications :

1. Calculer  $\mathbb{E}[\exp(\lambda B_T^2 + \int_0^T p(s) B_s^2 ds)]$
2. Calculer  $\mathbb{E}[\exp(\lambda B_T^2 + \int_0^T p(s) B_s^2 ds) \Psi(A + BB_T)]$

**Exercice 6.1.4 Itô+ Girsanov.** Soit  $\Gamma$  le processus solution de

$$d\Gamma_t = \Gamma_t(\beta_t dt + \gamma_t dB_t), \quad \Gamma_0 = 1$$

où  $\beta$  et  $\gamma$  sont des processus  $\mathbb{F}$  adaptés bornés.

1. Montrer que  $\Gamma_t \exp\left(-\int_0^t \beta_s ds\right)$  est une martingale locale.
2. Trouver une probabilité  $\mathbb{Q}$  telle que  $\Gamma$  soit une  $\mathbb{Q}$ -martingale locale.
3. Trouver une probabilité  $\mathbb{R}$  telle que  $\Gamma_t^{-1}$  soit une  $\mathbb{R}$ -martingale locale.

**Exercice 6.1.5 Longstaff's Model.** Soit  $r_t = Y_t^2$  avec  $dY_t = dB_t - (\lambda Y_t + \frac{\alpha}{2})dt$ .

1. Donner la dynamique de  $r$ .
2. Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions déterministes (que l'on supposera continues bornées). Exprimer

$$\mathbb{E}(\exp \int_0^t [f(s)B_s + g(s)]dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t [f^2(s)B_s^2 + 2B_s f(s)g(s)]ds)$$

en fonction de  $\exp \frac{1}{2} \int_0^t g^2(s)ds$ .

3. Montrer que le calcul de  $\mathbb{E}(\exp - \int_0^t r_s ds)$  se déduit du calcul de l'expression précédente avec des fonctions  $f$  et  $g$  vérifiant des conditions que l'on précisera.

**Exercice 6.1.6 Loi conditionnelle.** Soit  $t > s$ . Montrer que la densité

$$P(B_t + \nu t \in dy | B_s + \nu s = x)$$

ne dépend pas de  $\nu$ .

**Exercice 6.1.7 Loi du sup.** On suppose que l'on connaît la loi du couple de v.a.  $(B_t^*, B_t)$  où pour un processus  $X$  on note

$$X_t^* = \sup_{s \leq t} X_s.$$

Montrer comment calculer la loi de  $(L_t^*, L_t)$  pour  $L_t = \exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t)$ .

**Exercice 6.1.8 Loi de quantiles.**

1. Soit  $F$  et  $G$  deux fonctionnelles définies sur  $C([0, 1], \mathbb{R})$ . Montrer que l'on a équivalence entre
  - (i)  $\forall t, \forall \mu \in \mathbb{R}, F(X_s, s \leq t) \stackrel{loi}{=} G(X_s, s \leq t)$  le processus  $X$  étant un Brownien de drift  $\mu$
  - (ii)  $\forall t, F(X_s, s \leq t) \stackrel{loi}{=} G(X_s, s \leq t)$  le processus  $X$  étant un Brownien.

2. Soit  $A_t = \int_0^t ds \mathbb{1}_{X_s \geq 0}$  et  $\theta_t = \sup\{s \leq t : \sup_{u \leq s} X_u = X_s\}$ . Montrer que

$A_t \stackrel{loi}{=} \theta_t$ , lorsque le processus  $X$  est un mouvement Brownien de drift  $\mu$  équivaut à

$A_1 \stackrel{loi}{=} \theta_1$ , lorsque le processus  $X$  est un mouvement Brownien

3. Soit  $X$  un mouvement Brownien. Montrer que si  $\mathbb{E}(f(X_1, A_1) \mathbb{1}_{X_1 > 0}) = \mathbb{E}(f(X_1, \theta_1) \mathbb{1}_{X_1 > 0})$ , alors  $(X_1, A_1) \stackrel{loi}{=} (X_1, \theta_1)$ .

## 6.2 Crochet.

**Exercice 6.2.1 Girsanov** Soit  $M$  une  $\mathbb{P}$ -martingale de carré intégrable et  $d\mathbb{Q} = \exp(M_t - \frac{1}{2} \langle M \rangle_t) d\mathbb{P}$ . Montrer que si  $N$  est une  $\mathbb{P}$  martingale,  $N - \langle N, M \rangle$  est une  $\mathbb{Q}$  martingale.

**Exercice 6.2.2  $h$ -processus.** Soit  $X$  tel que  $dX_t = \mu dt + \sigma dB_t$ ,  $X_0 = x$  et  $h$  une fonction de classe  $C^1$  telle que  $h(X_t)$  est une martingale positive. On note  $\mathbb{Q}$  la probabilité définie par  $d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t} = \frac{h(X_t)}{h(x)} d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$ . Soit  $M$  une  $\mathbb{P}$ -martingale. Montrer que  $M_t - \int_0^t \frac{h'(X_s)}{h(X_s)} d\langle M, X \rangle_s$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale.

## 6.3 Processus.

**Exercice 6.3.1 Processus de Bessel.** Soient  $\theta$  et  $\mu$  deux processus adaptés bornés. On note  $\mathbb{P}^\theta$  la probabilité telle que le processus  $B^\theta$  défini par  $B_t^\theta \stackrel{def}{=} B_t - \int_0^t \theta_s ds$  soit un mouvement Brownien et  $\mathbb{P}^\mu$  la probabilité telle que  $B^\mu$  avec  $B_t^\mu \stackrel{def}{=} B_t - \int_0^t \mu_s ds$  soit un mouvement Brownien.

1. Quelles sont les densités  $L^\theta = \frac{d\mathbb{P}^\theta}{d\mathbb{P}}$  et  $L^\mu = \frac{d\mathbb{P}^\mu}{d\mathbb{P}}$  ?
2. Soit  $L = \frac{L^\theta}{L^\mu}$ . Expliciter  $L$  en fonction de  $B$  puis en fonction de  $B^\mu$ . A quel changement de probabilité type Girsanov correspond  $L$  ?
3. Soit  $\delta > 1$  et  $R$  le processus solution de

$$dR_t = \frac{\delta - 1}{R_t} dt + dB_t, R_0 = 1$$

(on admet qu'il existe une solution)

- (a) Montrer que

$$\int_0^t \frac{dR_s}{R_s} = \ln R_t + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{R_s^2} ds$$

- (b) Soit  $\theta$  un processus adapté borné et  $L_t = \exp(\int_0^t \theta_s dB(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds)$ . On note  $\mathbb{Q}$  la probabilité définie par  $d\mathbb{Q} = L_t d\mathbb{P}$ . Comment choisir  $\theta$  pour que, sous  $\mathbb{Q}$

$$dR_t = \frac{1}{R_t} dt + d\tilde{B}_t$$

où  $\tilde{B}$  est un  $\mathbb{Q}$ -Brownien. Exprimer  $L$  en n'utilisant que le processus  $R$

(c) En déduire que

$$\mathbb{E}(f(R_t)) = \mathbb{E} \left( (\rho_t)^\delta \exp \left[ \alpha \int_0^t \frac{ds}{\rho_s^2} \right] f(\rho_t) \right)$$

où  $\alpha$  est une constante dépendant de  $n$  et

$$d\rho_t = \frac{1}{\rho_t} dt + d\tilde{B}_t, \rho_0 = 1.$$

### Exercice 6.3.2 Fonctionnelles exponentielles

1. Calculer  $\mathbb{E}(\int_0^t \exp(B_s) ds)$  et  $\mathbb{E}(\exp(\alpha B_t) \int_0^t \exp(\gamma B_s) ds)$ .
2. Soit  $A(t, \nu) = \int_0^t \exp(B_s + \nu s) ds$ .
  - (a) Montrer en utilisant le théorème de Girsanov que le calcul de  $\mathbb{E}(A(t, \nu))$  se ramène au cas  $\nu = 0$ .
  - (b) Peut-on faire un calcul direct?

**Exercice 6.3.3** Soit  $X$  le processus solution de

$$dX_t = -\lambda X_t dt + dB_t, X_0 = x.$$

1. On définit

$$L_t = \exp \left( \lambda \int_0^t X_s dB_s - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t X_s^2 ds \right).$$

Vérifier que  $L$  est une martingale locale. On admet pour la suite que c'est une martingale.

2. On note  $\mathbb{P}^\lambda$  la mesure de probabilité définie sur  $\mathcal{F}_t$  par  $d\mathbb{P}^\lambda = L_t d\mathbb{P}$ . Quelle est la dynamique de  $X$  sous  $\mathbb{P}^\lambda$ ?
3. Montrer que

$$L_t = \exp \left( \int_0^t \lambda X_s dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2 X_s^2 ds \right)$$

4. Calculer

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left( \exp \left( -\frac{b^2}{2} \int_0^t X_s^2 ds \right) \right).$$

### Exercice 6.3.4 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

1. On définit sur  $\mathcal{F}_T$  la mesure  $\mathbb{P}^b$  par

$$d\mathbb{P}^b = \exp \left\{ -b \int_0^T B_s dB_s - \frac{b^2}{2} \int_0^T B_s^2 ds \right\} d\mathbb{P}$$

- (a) Justifier que, sous  $\mathbb{P}^b$  le processus  $(W_t = B_t + b \int_0^t B_s ds, t \leq T)$  est un brownien.
- (b) En déduire que sous  $\mathbb{P}^b$ , le processus  $(B_t, t \geq 0)$  est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, et que  $B_t$  est une variable gaussienne dont on précisera, en s'appuyant sur le cours, l'espérance et la variance.
- (c) Montrer que, sous  $\mathbb{P}$ , on a

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} (B_t^2 - t).$$

La même égalité est-elle vraie sous  $\mathbb{P}^b$ ?

(d) Montrer que, pour tout  $t \leq T$ ,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\exp\{-\alpha B_t^2 - \frac{b^2}{2} \int_0^t B_s^2 ds\}) = \mathbb{E}_b(\exp\{-\alpha B_t^2 + \frac{b}{2}(B_t^2 - t)\})$$

où  $\mathbb{E}_b$  désigne l'espérance sous  $\mathbb{P}^b$ .

Montrer que si  $\tilde{B}$  est un brownien issu de  $a$ , on a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\exp\{-\alpha \tilde{B}_t^2 - \frac{b^2}{2} \int_0^t \tilde{B}_s^2 ds\}) = \mathbb{E}_b(\exp\{-\alpha \tilde{B}_t^2 + \frac{b}{2}(\tilde{B}_t^2 - a^2 - t)\})$$

(e) En déduire (il y a des calculs) que, pour tout  $t$ ,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\exp\{-\alpha B_t^2 - \frac{b^2}{2} \int_0^t B_s^2 ds\}) = (\cosh bt + 2\frac{\alpha}{b} \sinh bt)^{-\frac{1}{2}}$$

2. Montrer que si  $\tilde{B}_t$  est un Brownien issu de  $a$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\exp\{-\alpha \tilde{B}_t^2 - \frac{b^2}{2} \int_0^t \tilde{B}_s^2 ds\}) = (\cosh bt + 2\frac{\alpha}{b} \sinh bt)^{-\frac{1}{2}} \exp[-\frac{xb}{2} \frac{1 + \frac{2\alpha}{b} \coth bt}{\coth bt + \frac{2\alpha}{b}}]$$

avec  $x = a^2$ .

**Exercice 6.3.5** Soit  $S$  solution de

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dB_t), S_0 = s,$$

les coefficients  $\mu$  et  $\sigma$  étant constants.

1. Montrer que  $S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t)$ .

2. On pose  $\theta = -\frac{\mu - r}{\sigma}$ . Soit  $\mathbb{Q}$  définie sur  $\mathcal{F}_t$  par  $d\mathbb{Q} = L_t d\mathbb{P}$  avec  $L_t = \exp(\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t)$ .  
Montrer que  $(W_t = B_t + \theta t, t \geq 0)$  est un  $\mathbb{Q}$ -mouvement brownien.

3. Soit  $\tilde{\mathbb{P}}$  définie sur  $\mathcal{F}_t$  par  $d\tilde{\mathbb{P}} = Z_t d\mathbb{Q}$  avec  $Z_t = \exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t)$ .  
Montrer que

$$dS_t = S_t ((r + \sigma^2) dt + \sigma d\tilde{B}_t)$$

où  $\tilde{B}$  est un  $\tilde{\mathbb{P}}$ -mouvement brownien.

4. Soit  $P_t = P_0 e^{rt}$ . Montrer que  $(\frac{S_t}{P_t}, t \geq 0)$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale.

Montrer que  $\frac{P_t}{S_t}$  est une  $\tilde{\mathbb{P}}$ -martingale.

5. Soit  $F_t = e^{-\lambda t} \left( \int_0^t S_u du + sA \right)$  où  $A, \lambda$  sont des constantes

Soit  $\Psi_t = \frac{F_t e^{\lambda t}}{S_t}$ . Ecrire l'équation différentielle stochastique vérifiée par  $\Psi_t$  en utilisant le Brownien  $\tilde{B}$ .

**Exercice 6.3.6** Soit  $\alpha, \beta$  et  $\sigma$  des fonctions (déterministes) bornées et  $b(t) = \int_0^t \beta(s) ds$ . On note  $r$  le processus solution de

$$dr_t = (\alpha(t) - \beta(t)r_t) dt + \sigma(t)dB_t$$

On suppose que  $\sigma$  ne s'annule pas.

1. Vérifier que

$$r_t = \exp(-b(t)) \left( r_0 + \int_0^t \exp(b(u)) \alpha(u) du + \int_0^t \exp(b(u)) \sigma(u) dB_u \right).$$

2. Calculer  $\mathbb{E}(r_t)$  et  $\text{Cov}(r_t, r_s)$ .
3. Soit  $\mathbb{Q}_1$  la probabilité définie sur  $\mathcal{F}_t$  par  $d\mathbb{Q}_1 = L_t d\mathbb{P}$ , avec

$$L_t = \exp\left(\int_0^t \theta(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t (\theta(s))^2 ds\right)$$

où  $\theta(s) = -\frac{\alpha(s)}{\sigma(s)}$ . On suppose  $\theta$  bornée. On note  $B_t^1 = B_t - \int_0^t \theta(s) ds$ . Montrer que  $(\exp(b(t)) r_t, t \geq 0)$  est une  $\mathbb{Q}_1$  martingale.

4. Soit  $\mathbb{Q}_2$  la probabilité définie sur  $\mathcal{F}_t$  par  $d\mathbb{Q}_2 = Z_t d\mathbb{Q}_1$ , avec

$$dZ_t = Z_t \frac{\beta(t)}{\sigma(t)} r_t dB_t^1, Z_0 = 1$$

Montrer que  $r$  est une  $\mathbb{Q}_2$ -martingale locale.

**Exercice 6.3.7 Drift non observable** Soit  $B_t^Y = Yt + B_t$  où  $Y$  est une variable aléatoire de loi  $\nu$ , indépendante de  $B$ . Soit  $F$  une fonctionnelle sur  $C([0, t], \mathbb{R})$ . Montrer que

$$\mathbb{E}[F(B_s^Y, s \leq t)] = \mathbb{E}[F(B_s; s \leq t)h(B_t, y)]$$

avec  $h(x, t) = \int \nu(dy) \exp(yx - \frac{y^2}{2}t)$  En déduire que, sur l'espace canonique

$$X_t - \int_0^t ds \frac{h'_x}{h}(X_s, s)$$

est une martingale sous  $\mathbb{P}^h$  avec  $\mathbb{P}^h|_{\mathcal{F}_t} = h(X_t, t)B|_{\mathcal{F}_t}$ . Montrer que  $B_t^Y = \tilde{B}_t^h + \int_0^t \int_0^t ds \frac{h'_x}{h}(B_s^Y, s)$

où  $\tilde{B}_t^h$  est un Brownien.

Soit  $\mathbb{Q}$  définie par  $d\mathbb{Q} = e^{-YB_t - \frac{1}{2}Y^2t} d\mathbb{P}$ . Montrer que sous  $\mathbb{Q}$ ,  $B_t^Y$  est indépendant de  $Y$ .

**Exercice 6.3.8** On note  $h$  une fonction.

1. Donner des conditions sur  $h$  pour que  $d\mathbb{Q} = h(B_T)d\mathbb{P}$  définisse, sur  $\mathcal{F}_T$  une probabilité équivalente à  $\mathbb{P}$ .
2. Calculer  $L_t$  telle que  $d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t} = L_t d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$
3. Montrer que  $\forall X \in \mathcal{F}_T$ , on a  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X|B_T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X|B_T)$
4. Expliciter  $\mathbb{Q}(B_T \in dx)$ .
5. Soit  $A \in \mathcal{F}_T$ , indépendante de  $B_T$ . Montrer que  $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{P}(A)$ . Donner des exemples de tels  $A$ .
6. Calculer  $\mathbb{Q}(f(B_T)|\mathcal{F}_t)$ .
7. Montrer que

$$L_t = 1 + \int_0^t dB_s \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{h'(y) e^{-(y-B_s)^2/(2(T-s))}}{\sqrt{2\pi(T-s)}}$$



8. Montrer que le processus  $W$  défini par

$$dW_t = dB_t - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dy h'(y) e^{-(y-B_t)^2/(2(T-t))}}{\int_{-\infty}^{\infty} dy h(y) e^{-(y-B_t)^2/(2(T-t))}} dt$$

est un  $\mathbb{Q}$  mouvement Brownien.

9. (cette question ne dépend pas des précédentes) Soit  $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(B_T)$ . Montrer que le processus  $M_t = B_t - \int_0^t \frac{B_T - B_s}{T-s} ds$  est un  $\mathbb{P}$ - $\mathcal{G}_t$  mouvement Brownien. Montrer que  $M_t$  est indépendante de  $B_T$ .

10. Montrer que  $M$  est un  $\mathbb{Q}$ - $\mathcal{G}_t$  mouvement Brownien.

**Exercice 6.3.9** Soit, pour  $t < 1$ ,  $X_t = B_t + \int_0^t \frac{x - X_s}{1-s} ds$  et  $M_t = \exp \left( - \int_0^t \frac{x - X_s}{1-s} dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \left( \frac{x - X_s}{1-s} \right)^2 ds \right)$

Montrer que

$$M_t = \exp \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{(x - X_t)^2}{2(1-t)} + \frac{1}{2} \ln(1-t) \right)$$

**Exercice 6.3.10** Soit  $d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t} = h(t, X_t) d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$ . Sous quelles conditions sur  $h$   $\mathbb{Q}$  est-elle une probabilité sur  $\mathcal{F}_T$ ? Montrer que

$$B_t - \int_0^t \partial_x h(s, B_s) ds$$

est une  $\mathbb{Q}$ -martingale?

**Exercice 6.3.11** Soit  $L_t = \exp \left( -\frac{1}{4} (e^{-2B_t} - 1) + \frac{1}{2} \int_0^t (e^{-2B_s} - \frac{1}{4} e^{-4B_s}) ds \right)$

1. Question préliminaire: Calculer l'intégrale  $\int_0^t e^{-2B_s} dB_s$ .
2. Montrer que  $L$  est une martingale. Quelle est son espérance?
3. On pose  $d\mathbb{Q} = L_t d\mathbb{P}$ . Quelle est la dynamique de  $B$  sous  $\mathbb{Q}$ ?

## 6.4 Cas multidimensionnel

**Exercice 6.4.1 Cas multidimensionnel.** Soient  $(B_1(t), t \geq 0)$  et  $(B_2(t), t \geq 0)$  deux mouvements Browniens indépendants. Soit  $(L_i(t), i = 1, 2, t \geq 0)$  les processus définis par

$$dL_i(t) = \theta_i(t) L_i(t) dB_i(t), \quad L_i(0) = 1$$

où  $(\theta_i(t), i = 1, 2)$  sont des processus adaptés continus bornés.

1. Vérifier que

$$L_i(t) = \exp \left( \int_0^t \theta_i(s) dB_i(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_i^2(s) ds \right).$$

2. Soit  $T \geq 0$  et  $\mathbb{Q}_1$  la probabilité définie sur  $\mathcal{F}_T$  par  $d\mathbb{Q}_1 = L_1(T) d\mathbb{P}$ . Soit  $(\phi_t, t \geq 0)$  un processus adapté continu et  $M_t = \int_0^t \phi_s dB_1(s) - \int_0^t \theta_1(s) \phi_s ds$ .

(a) Montrer que  $(M_t, 0 \leq t \leq T)$  est une  $\mathbb{Q}_1$ -martingale locale.

- (b) On pose  $Z_1(t) = M_t L_1(t)$ . Calculer  $dZ_1(t)$ . Montrer que  $Z_1$  est une  $\mathbb{P}$ -martingale. Pouvaient-on prévoir ce résultat ?
3. Soit  $Z_t = L_1(t)L_2(t)$ . Ecrire  $dZ_t$ . Montrer que  $Z$  est une  $\mathbb{P}$ -martingale.
4. Soit  $\mathbb{Q}$  la probabilité définie sur  $\mathcal{F}_T$  par  $d\mathbb{Q} = Z_T d\mathbb{P}$ . Comment se transforment les browniens  $B_i$  ?
5. Soit  $(S_i, i = 1, 2)$  deux processus solutions de

$$dS_i(t) = S_i(t)[b_i(t)dt + \sigma_i(t)dB_1(t) + \phi_i(t)dB_2(t)]$$

Montrer qu'il existe une probabilité  $\mathbb{Q}$  équivalente à  $\mathbb{P}$  telle que, sous  $\mathbb{Q}$

$$dS_i(t) = S_i(t)[r dt + \sigma_i(t)dB_1(t) + \phi_i(t)dB_2(t)]$$

où  $(B_i, i = 1, 2)$  sont des  $\mathbb{Q}$ -Browniens indépendants.

## 6.5 Temps d'arrêt.

**Exercice 6.5.1 Temps d'arrêt.** Soit  $\tau$  un  $(\mathcal{F}_t)$ -temps d'arrêt. Soit  $\mathbb{Q}$  telle que  $d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_T} = L_T d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_T}$  et  $X \in \mathcal{F}_T$ . Comparer  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(L_T \mathbb{1}_{\tau > T} X)$  et  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X \mathbb{1}_{\tau > T})$ .

**Exercice 6.5.2** Let  $B$  be a Brownian motion and  $T = \inf\{t : e^{B_t - t/2} > a\}$ , where  $a > 1$ . Prove that,  $\forall \lambda \geq 1/2$ ,

$$E(\mathbb{1}_{T < \infty} \exp(\lambda B_T - \frac{\lambda^2}{2} T)) = 1$$

**Exercice 6.5.3 Temps d'atteinte.** Soit  $X$  un processus tel que

$$dX_t = \mu dt + \nu dB_t, \quad X_0 = 0$$

où  $\mu$  et  $\nu$  sont des constantes telles que  $\nu > 0$ . Soit  $r$  une constante.

1. Montrer qu'il existe  $\theta$  tel que

$$M_t \stackrel{def}{=} \exp(-rt + \theta X_t)$$

soit une martingale.

2. Soit  $b$  un nombre positif et  $\tau$  le temps d'arrêt défini par

$$\tau = \inf\{t \geq 0 \mid X_t = b\}$$

Calculer  $E(\exp(-r\tau + \theta X_\tau))$ . On admettra que la martingale  $M_t$  est uniformément intégrable et que le temps d'arrêt  $\tau$  est fini. En déduire  $E(\exp(-r\tau))$ .

3. On suppose que les conditions de la première question sont satisfaites. Soit  $\mathbb{Q}$  telle que  $d\mathbb{Q} = M_t d\mathbb{P}$ , sur  $\mathcal{F}_t$ . Comment se transforme  $B$  ?
4. Soit  $S$  le processus défini par

$$dS_t = S_t[r dt + \sigma dB_t], \quad S_0 = s$$

et  $Y_t = \ln \frac{S_t}{s}$ . Ecrire  $dY_t$ .

5. Soit  $B$  une constante telle que  $s < B$ . Soit  $T_B$  le temps d'arrêt

$$T_B = \inf\{t \geq 0 \mid S_t = B\}$$

Calculer

$$E(\exp(-rT_B)).$$

**Exercice 6.5.4** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions déterministes,  $f$  de classe  $C^1$ ,  $g$  continue. On note  $F_t = \int_0^t f(s)dB_s$  et  $u$  est la solution de

$$u''(t) - 2\frac{f'(t)}{f(t)}u'(t) - 2\lambda g(t)f^2(t)u(t) = 0$$

avec  $u'(T) = -2a\lambda u(T)f^2(T)$ . Le but de cet exercice est de montrer que

$$E\left(\exp\left(-\lambda\left[aF_T^2 + \int_0^T g(t)F_t^2 dt\right]\right)\right) = \left(\frac{u(T)}{u(0)}\right)^2$$

1. Montrer que, pour toute fonction  $h$  continue, le processus  $L$  défini par

$$L_t = \exp\left(\int_0^t h(s)F_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)F_s^2 ds\right)$$

est une martingale.

2. En déduire que

$$\begin{aligned} 1 &= E\left(\exp\left(\int_0^T \frac{h(s)}{2f(s)}dF_s^2 - \frac{1}{2}\int_0^T (h(s)f(s) + h^2(s)F_s^2)ds\right)\right) \\ &= E\left(\exp\frac{1}{2}\left(\frac{h(T)}{f(T)}F_T^2 - \int_0^T F_t^2\left(\frac{h'(t)f(t) - f'(t)h(t)}{f^2(t)}\right)dt - \int_0^T (h(s)f(s) + h^2(s)F_s^2)ds\right)\right) \end{aligned}$$

3. Montrer que

$$E\left(\exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{u'(T)}{u(T)f^2(T)}\right)F_T^2 - \int_0^T F_t^2\left(\frac{u''(t) - 2u'(t)f'(t)/f(t)}{u(t)f^2(t)}\right)dt\right]\right) = \left(\frac{u(T)}{u(0)}\right)^{1/2}$$

4. Résoudre le même problème par changement de temps.

5. Soit  $\Psi$  une fonction borélienne bornée de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Comment calculer

$$K = E\left(\exp\left(-\lambda\left[aF_T^2 + \int_0^T g(t)F_t^2 dt\right]\right)\Psi\left(A + BF_T + \int_0^T \phi(t)F_t dt\right)\right)$$

**Exercice 6.5.5 Décomposition canonique** Soit  $B$  un mouvement Brownien et  $h$  une fonction positive, vérifiant  $h(0,0) = 1$  et harmonique en espace (c'est-à-dire telle que  $h(t, B_t)$  est une martingale). On définit  $\mathbb{Q}$  par  $d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t} = h(t, B_t)d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$ . Montrer que  $B_t - \int_0^t \frac{h'_x}{h}(s, B_s)ds$  est un  $\mathbb{Q}$ -mouvement Brownien.

## 6.6 Finance

Dans toute cette section,  $\mathbb{P}$  est la probabilité historique,  $\mathbb{Q}$  la probabilité risque neutre. Le processus  $\tilde{S}$  est le prix de l'actif sous-jacent après actualisation (soit  $\tilde{S}_t = S_t e^{-\int_0^t r_s ds}$ ). Dans un modèle Black et Scholes, le prix de l'actif suit

$$dS_t = S_t(b_t dt + \sigma dB_t)$$

sous la probabilité  $\mathbb{P}$ , où  $\sigma$  est une constante.

**Exercice 6.6.1 Moyenne.** Soit  $dS_t = S_t(r dt + \sigma dB_t)$ ,  $S_0 = 1$ ,  $r$  et  $\sigma$  étant des constantes. On souhaite calculer  $C = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(Z_T - S_T)^+]$  quand  $Z_T = \exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln S_t dt\right)$ .

1. Soit  $\mathbb{Q}^*$  la probabilité définie sur  $\mathcal{F}_T$  par  $d\mathbb{Q}^* = \exp(\sigma B_T - \sigma^2 T/2) d\mathbb{Q}$ . Montrer que

$$e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(Z_T - S_T)^+] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*}\left[\left(\frac{Z_T}{S_T} - 1\right)^+\right].$$

2. Soit  $\tilde{B}_t = B_t - \sigma t$ . Ecrire  $Z_T/S_T$  sous la forme  $\exp(\alpha T - \int_0^T \beta(t) d\tilde{B}_t)$  pour une fonction  $\beta$  que l'on précisera.
3. Montrer que le calcul de  $C$  se réduit au calcul de  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}((\tilde{S}_T - K)^+)$  pour un Brownien géométrique  $\tilde{S}$  dont on précisera la loi.

**Exercice 6.6.2 Volatilité stochastique** On rappelle le théorème de représentation prévisible à deux dimensions: soit  $B = (B^1, B^2)$  un Brownien à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{F}^B$  sa filtration canonique.

Toute  $\mathbb{F}^B$ -martingale de carré intégrable s'écrit  $M_t = m + \int_0^t \phi_s^1 dB_s^1 + \int_0^t \phi_s^2 dB_s^2$  où  $(\phi^i, i = 1, 2)$  sont des processus adaptés.

Soient  $\mu$  et  $\eta$  deux fonctions déterministes de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\sigma, \gamma$  deux fonctions déterministes de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On considère alors un marché financier où l'actif risqué vérifie

$$dS_t = S_t(\mu(t)dt + \sigma(Y_t)dB_t^1), \quad S_0 = s$$

où  $Y$  est un processus solution de

$$dY_t = \eta(t)dt + \gamma(Y_t)dB_t^2, \quad Y_0 = 1$$

1. Déterminer l'ensemble des probabilités équivalentes à  $\mathbb{P}$  telles que, sous  $\mathbb{Q}$ ,  $S$  soit une martingale.
2. Soit  $B$  un actif contingent  $B \in \mathcal{F}_T$ . Comment lui donner un prix (le taux sans risque est nul)?

**Exercice 6.6.3 Options boost.** Soit  $M$  une  $\mathbb{F}$ -martingale à valeurs strictement positives.

1. Justifier qu'il existe  $\psi$  tel que  $dM_t = \psi_t dB_t$  et qu'il existe  $\Psi$  tel que  $dM_t = \Psi_t M_t dB_t$ .
2. Soit  $S$  un Brownien géométrique tel que  $S_0 = x$  et

$$dS_t = S_t(r dt + \sigma dB_t) \tag{6.1}$$

où  $r$  et  $\sigma$  sont des constantes. Montrer qu'il existe  $\gamma$  tel que  $S_t = x(M_t)^\gamma$  où  $M$  est une martingale. A quel choix de  $r$  et  $\sigma$  correspond la valeur  $\gamma = 1$ ?

3. Soit  $S$  un processus vérifiant (6.1),  $S_t^* = \sup_{s \leq t} S_s$  et  $B_t^* = \sup_{s \leq t} B_s$ . La loi de  $B_t^*$  est connue (c'est celle de  $|B_t|$ , ce résultat sera admis), on notera  $\Phi(a) = \mathbb{P}(\bar{B}_t^* \leq a)$ . Calculer, en utilisant les résultats de la question 3,  $E(\mathbb{1}_{S_T^* \leq a})$  qui correspond à la valeur d'une option boost (au coefficient  $\exp(-rT)$  près).

**Exercice 6.6.4 Volatilité stochastique.** Soit  $B^1$  et  $B^2$  deux Browniens indépendants, et  $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s^1, B_s^2, s \leq t)$  la filtration engendrée par les deux Browniens. Soit  $\mu$  et  $\eta$  deux fonctions déterministes bornées de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\sigma, \gamma$  deux fonctions déterministes bornées définies de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On note  $S$  la solution de

$$dS_t = S_t(\mu(t)dt + \sigma(Y_t)dB_t^1), \quad S_0 = s$$

où  $Y$  est un processus solution de

$$dY_t = \eta(t)dt + \gamma(Y_t)dB_t^2, \quad Y_0 = 1$$

1. Soit  $\theta$  un processus borné et  $Z$  la solution de

$$dZ_t = Z_t \theta_t dB_t^1, \quad Z_0 = 1$$

Ecrire explicitement  $Z_t$  sous la forme d'une exponentielle.

2. Soit  $\lambda$  et  $\nu$  deux processus adaptés bornés et  $L$  le processus défini par

$$L_t = \exp \left[ \int_0^t \lambda_s dB_s^1 - \frac{1}{2} \int_0^t (\lambda_s)^2 ds + \int_0^t \nu_s dB_s^2 - \frac{1}{2} \int_0^t (\nu_s)^2 ds \right] \quad (6.2)$$

Ecrire l'EDS vérifiée par  $L$ .

3. On pose  $\tilde{B}_t = B_t^1 - \int_0^t \lambda_s ds$  et on note  $\tilde{Z}$  la solution de  $d\tilde{Z}_t = \tilde{Z}_t \theta d\tilde{B}_t^1$ ,  $\tilde{Z}_0 = 1$  où  $\theta$  est une constante. Montrer que  $L\tilde{Z}$  est une martingale.
4. Soit  $\mathbb{Q}^*$  définie sur  $\mathcal{F}_t$  par  $d\mathbb{Q}^* = L_t d\mathbb{P}$ . Montrer que  $\tilde{Z}$  est une  $\mathbb{Q}^*$  martingale. En déduire que  $\tilde{B}^1$  est un  $\mathbb{Q}^*$  brownien.
5. Montrer que  $\tilde{B}_t^2 = B_t^2 - \int_0^t \nu_s ds$  est un  $\mathbb{Q}^*$  brownien.
6. On admet que si  $\mathbb{Q}$  est une mesure équivalente à  $\mathbb{P}$  il existe  $\lambda, \nu$  tels que la densité de  $\mathbb{Q}$  par rapport à  $\mathbb{P}$  soit de la forme (6.2). Décrire l'ensemble des couples  $\lambda, \nu$  correspondants à des probabilités  $\mathbb{Q}$  telles que  $(S_t e^{-rt}, t \geq 0)$  soit une  $\mathbb{Q}$ -martingale.
7. Le marché financier est-il complet ?
8. Soit  $X$  un actif contingent duplicable, c'est-à-dire tel qu'il existe  $V$  processus adapté de la forme

$$dV_t = rV_t dt + \phi_t(dS_t - rS_t dt)$$

vérifiant  $V_T = X$ , avec  $\phi$  processus adapté borné. (On ne demande pas de justifier cette définition)

- (a) Montrer que  $(V_t e^{-rt}, t \geq 0)$  est une  $\mathbb{Q}$  martingale pour tout  $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ .
- (b) On suppose que  $V_t = v(t, S_t, Y_t)$ . Montrer que  $v$  vérifie une équation aux dérivées partielles que l'on explicitera.

**Exercice 6.6.5 Symétrie put-call.** Soit  $M$  une  $(\mathcal{F}_t)$ -martingale telle que  $dM_t = M_t \sigma dB_t$  où  $\sigma$  est une constante et  $M_0 = 1$ .

1. Vérifier que  $M$  est à valeurs strictement positives.
2. Calculer  $dY_t$  quand  $Y_t = (M_t)^{-1}$ .
3. Soit  $\mathbb{Q}^*$  telle que  $d\mathbb{Q}^* = M_t d\mathbb{P}$  sur  $\mathcal{F}_t$ . Déterminer la loi de  $Y$  sous  $\mathbb{Q}^*$ .
4. Montrer que  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}((M_T - K)^+) = K \mathbb{E}_{\mathbb{P}}((K^{-1} - M_T)^+)$ .

### Exercice 6.6.6 Symétries

On suppose que le prix d'un actif, sous la probabilité risque neutre  $\mathbb{Q}$  est donné par

$$dS_t = S_t([r - q]dt + \sigma dB_t), \quad S_0 = x$$

où  $q$  est le taux de dividendes. On note  $C(x, K, r, q)$  (ou  $C(x, K, r, q, \sigma)$  si besoin est) le prix d'une option d'achat européenne de prix d'exercice  $K$ , soit

$$C(x, K, r, q) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-rT}(S_T - K)^+)$$

On rappelle que, dans le cas  $r = 0 = q$ , en notant  $C^*(x, K) = C(x, K, 0, 0)$  le prix d'un call de strike  $K$  sur un sous-jacent de valeur initiale  $x$  et  $P^*$  le prix d'un put, on a

$$C^*(x, K) = x\mathcal{N}\left[d_1\left(\frac{x}{K}\right)\right] - K\mathcal{N}\left[d_0\left(\frac{x}{K}\right)\right], \quad P^*(x, K) = -x\mathcal{N}\left[d_0\left(\frac{K}{x}\right)\right] + K\mathcal{N}\left[d_1\left(\frac{K}{x}\right)\right], \quad (6.3)$$

avec

$$d_1(\alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln(\alpha) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}, \quad d_0(\alpha) = d_1(\alpha) - \sigma\sqrt{T}$$

et que le delta du call est  $\text{Delta}C^*(x, K) = \mathcal{N}(d_1(\frac{x}{K}))$ .

1. Montrer, en utilisant les résultats de l'exercice 3.6 que  $C(x, K, r, q) = C^*(xe^{-qT}, Ke^{-rT})$ .
2. Montrer, au vu des formules précédentes que

$$\text{Delta}C(x, K, r, q) = e^{-qT} \mathcal{N}\left[d_1\left(\frac{xe^{-qT}}{Ke^{-rT}}\right)\right] \quad \text{Delta}P(x, K, r, q) = -e^{-qT} \mathcal{N}\left[d_0\left(\frac{Ke^{-rT}}{xe^{-qT}}\right)\right]$$

où  $\text{Delta}C$  est le Delta du call.

3. Montrer, au vu des formules (6.3) et de la question (a) que

$$C(x, K, r, q) = C^*(Ke^{-\mu T}, x) = P^*(xe^{-\mu T}, K) = P(K, x, q, r) \quad (6.4)$$

où  $\mu = r - q$  et  $P$  le prix d'un put. Commenter.

### Exercice 6.6.7 Options power. Soit

$$dS_t = S_t((r - \delta)dt + \sigma dB_t), \quad S_0 = x.$$

Cette dynamique modélise, sous la probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}$ , le prix d'un actif versant des dividendes au taux  $\delta$  le taux spot étant  $r$ .

1. Calculer

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(h(S_T)e^{-r(T-t)}|\mathcal{F}_t)$$

dans le cas  $h(x) = (x^\alpha - K)^+$ .

2. On suppose  $r = \delta$ . On pose  $d\mathbb{Q}^*|_{\mathcal{F}_t} = (S_t/x)d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t}$  et  $Z_t = x^2/S_t$ . Quelle est la dynamique de  $(Z_t, t \geq 0)$  sous  $\mathbb{Q}^*$ ? Montrer que pour toute fonction  $f$  borélienne bornée

$$\frac{1}{x} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_T f(\frac{x^2}{S_T})) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(f(S_T))$$

3. On repasse au cas général. Montrer que  $S^a$  est une martingale pour une valeur de  $a$  que l'on précisera. Montrer que, pour toute fonction  $f$  borélienne bornée

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(f(S_T)) = \frac{1}{x^a} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_T^a f(\frac{x^2}{S_T}))$$

4. On se place dans le cas

$$h(x) = x^\beta (x - K)^+$$

Montrer que  $h(S_T)$  s'écrit comme différence de deux payoffs correspondants à des options d'achat Européennes portant sur  $S^{\beta+1}$  et sur  $S^\beta$  avec des strikes que l'on déterminera.

**Exercice 6.6.8 Option d'échange** Soit  $dS_t^{(i)} = S_t^{(i)}(b_i dt + \sigma_i dB_t^{(i)})$ ,  $i = 1, 2$  où les coefficients sont constants, les browniens  $B^{(i)}$  étant corrélés. Calculer la valeur d'une option d'échange dont le payoff est  $(S_T^{(1)} - S_T^{(2)})^+$ .

**Exercice 6.6.9 Taux de change** On considère deux pays. Les quantités relatives au pays domestique seront indexées par  $d$ , les quantités relatives à l'autre pays par  $f$ . Chaque pays possède un taux sans risque noté respectivement  $r^d$  et  $r^f$ . Les marchés des deux pays sont dirigés par un mouvement Brownien  $B$ . Sous la probabilité  $\mathbb{P}$ , un actif  $S$  suit la dynamique

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t^S dB_t)$$

On suppose que chacun des deux marchés est sans arbitrage : il existe une probabilité risque neutre domestique notée  $\mathbb{Q}^d$  équivalente à  $\mathbb{P}$  telle que sous  $\mathbb{Q}^d$  le processus  $(e^{-r^d t} S_t^d, t \geq 0)$  est une  $\mathbb{Q}^d$  martingale.

1. Montrer que tout actif domestique  $S^d$  a une dynamique de la forme

$$dS_t^d = S_t^d(r^d dt + \sigma_t^d dB_t^d)$$

où  $B^d$  est un  $\mathbb{Q}^d$  mouvement Brownien. On notera  $\lambda^d$  la prime de risque définie par  $dB_t^d = dB_t + \lambda_t^d dt$ . Le taux de change entre ces pays est  $X$  dirigé par

$$dX_t = X_t[(r^d - r^f) dt + \sigma_t^X dB_t^d]$$

Si  $S^f$  est un prix en unités monétaires du pays étranger,  $S^f X$  est le prix du même produit en unités monétaires domestiques.

2. Soit  $S^f$  un actif étranger de dynamique

$$dS_t^f = S_t^f(r_t^f dt + \sigma_t^f dB_t^f)$$

Montrer que

$$\lambda_t^f - \lambda_t^d = -\sigma_t^X$$

$$B_t^d - B_t^f = \int_0^t \sigma_s^X ds$$

3. Quelle est la dynamique du taux de change inverse  $Y = 1/X$  ?
4. On souhaite valoriser une option quanto, c'est à dire une option sur produit étranger faisant intervenir le taux de change. Comment évaluer en monnaie domestique un flux étranger de  $(Sf_T - K)^+$  ? Comment évaluer une option d'achat sur action étrangère avec strike en monnaie domestique ?

**Exercice 6.6.10 Richesse (Cox-Huang, Karatzas)** Un agent financier souhaite investir sur un marché sur lequel deux actifs sont négociables:

Un actif sans risque de dynamique  $dS_0(t) = S_0(t)r(t)dt$  où  $r$  est déterministe,

Un actif risqué dont le prix a pour dynamique  $dS_1(t) = S_1(t)(b(t)dt + \sigma(t)dB_t)$ . On suppose que  $\sigma$  ne s'annule pas.

La richesse  $X$  de cet agent a pour dynamique

$$dX_t = X_t r(t)dt + \pi_t [b(t) - r(t)]dt + \sigma(t)\pi_t dB_t$$

où  $\pi$  est un processus  $\mathbb{F}$  adapté représentant la proportion de la richesse investie dans l'actif risqué.

1. Montrer qu'il existe une probabilité  $\mathbb{Q}$  telle que  $dS_1(t) = S_1(t)(r(t)dt + \sigma(t)d\tilde{B}_t)$  où  $\tilde{B}$  est un  $\mathbb{Q}$ -mouvement Brownien.
2. Montrer que  $(R(t)X_t, t \geq 0)$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale locale, avec  $R(t) = \exp - \int_0^t r(s)ds$
3. Soit  $\theta(t) = \frac{b(t) - r(t)}{\sigma(t)}$  et  $H$  solution de l'équation  $dH_t = -H_t(r(t)dt + \theta(t)dB_t)$ ,  $H_0 = 1$ .  
Montrer que le processus  $(H_t X_t, t \geq 0)$  est une  $\mathbb{P}$ -martingale locale.
4. On suppose que  $(H_t X_t, t \geq 0)$  est une  $\mathbb{P}$ -martingale pour tout choix de  $\pi$ . L'agent souhaite obtenir une richesse terminale égale à  $\zeta$ , v.a.  $\mathcal{F}_T$  mesurable (i.e.  $X_T = \zeta$ ). Montrer que sa richesse initiale  $X_0$  est alors déterminée, et que son portefeuille de couverture (i.e.  $\pi$ ) également.

**Exercice 6.6.11 Optimisation de richesse** Sur le marché financier on trouve un actif risqué et un actif sans risque. Soit  $(S_t, t \geq 0)$  le prix de l'actif risqué. On suppose que  $dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma dB_t)$ . L'actif sans risque vérifie

$$dS_0(t) = S_0(t)r_t dt.$$

Les processus  $\mu_t, r_t$  sont  $\mathcal{F}_t$ -adaptés bornés,  $\sigma$  est une constante non nulle.

1. Montrer que  $S_t \exp\left(-\int_0^t \mu_s ds\right)$  est une  $\mathbb{P}$ -martingale.
2. On pose  $\theta_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma}$ .  
Déterminer  $\mathbb{Q}$  telle que, sous  $\mathbb{Q}$  le processus  $\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds$  soit un mouvement Brownien.  
Ecrire l'équation vérifiée par  $S_t$  en utilisant  $\tilde{B}_t$ .
3. Un agent de richesse initiale  $x$  investit sa richesse  $X_t$  suivant l'actif sans risque et l'actif risqué de prix  $S_t$  suivant  $X_t = n_0(t)S_0(t) + n_1(t)S_t$ . On suppose que  $dX_t = n_0(t)dS_0(t) + n_1(t)dS_t$ .
  - (a) Montrer que  $dX_t = r_t X_t dt + n_1(t)(dS_t - S_t r_t dt)$ .
  - (b) On note  $\pi_t = n_1(t)S_t$  et  $R_t = \exp - \int_0^t r_s ds$ .  
Ecrire  $dX_t$  en fonction de  $\pi_t, r_t$ , et  $B_t$ .
  - (c) Montrer que, sous  $\mathbb{Q}$ , le processus  $X_t R_t$  est une martingale.
  - (d) Soit  $\zeta = X_T$ . Ecrire  $X_t$  sous forme d'une espérance conditionnelle faisant intervenir  $\zeta$  et le processus  $r$ .
4. On se donne un processus  $(c_t, t \geq 0)$  à valeurs positives adapté et un processus  $(\pi_t, t \geq 0)$  de carré intégrable  $\mathcal{F}_t$ -adapté.  
Soit  $(X_t, t \geq 0)$  un processus tel que

$$dX_t = r_t X_t dt + \pi_t (dB_t + \theta_t dt) - c_t dt. \quad (6.5)$$



- (a) Montrer que, sous  $\mathbb{Q}$ , le processus  $X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds$  est une martingale. En déduire que

$$X_t R_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_T R_T + \int_t^T R_s c_s ds | \mathcal{F}_t).$$

- (b) Ecrire cette relation sous  $\mathbb{P}$ .  
 (c) Montrer que si l'on impose la condition  $X_T \geq 0$ , il existe une solution de (6.5) positive, vérifiant cette condition.

**Exercice 6.6.12** Soit  $X_t = \mu t + \sigma B_t$ . On note  $T_a = \inf\{t | X_t = a\}$ . Trouver une probabilité  $\mathbb{Q}$  telle que sous  $\mathbb{Q}$ ,  $(\tilde{B}_t = X_t/\sigma, t \geq 0)$  soit un mouvement Brownien. Exprimer  $T_a$  en utilisant  $\tilde{B}_t$ . Calculer  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\exp - \lambda T_a)$ .

**Exercice 6.6.13** Montrer que le prix d'une option Asiatique dont le strike est le sous jacent est le prix d'un call sur un sous jacent de dynamique  $dZ_t = (1 - rZ_t)dt - Z_t \sigma dB_t$ . Comment faire le calcul?

**Exercice 6.6.14** On considère un modèle Black et Scholes. Calculer, pour tout couple  $(s, t)$   $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_t | \mathcal{F}_s)$  et  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_t | \mathcal{F}_s)$ .

On note  $Y_t = \int_0^t S_u du$ .

- Quel est le prix, à la date  $t$  du payoff  $Y_T$  (versé en  $T$ )?
- Expliciter la stratégie de couverture de  $Y_T$
- On considère le payoff  $h(Y_T, S_T)$ , versé en  $T$ , où  $h$  est une fonction borélienne (bornée)
  - Montrer que le prix à la date  $t$  de  $h(Y_T, S_T)$  s'écrit  $\varphi(t, Y_t, S_t)$  et montrer comment obtenir  $\varphi(t, y, x)$  par un calcul d'espérance (non conditionnelle)
  - Quelle est l'EDP satisfaite par  $\varphi$ ?
  - Déterminer la stratégie de couverture associée.

**Exercice 6.6.15 Zero-coupons** Soit  $dY_t = h(t)dt + dB_t$  et  $r_t = \sigma(t)Y_t$  où  $h$  et  $\sigma$  sont des fonctions de classe  $C^1$ . On souhaite calculer  $E\left(\exp\left[-\int_0^t r_s ds\right]\right)$ .

1. Soit  $f$  une fonction continue et  $L_t^f = \exp\left(\int_0^t f(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t H^2(s)ds\right)$ . Justifier que  $E(L_T^f) = 1$ . En déduire que

$$E\left(\exp\left[h(T)B_T - \int_0^T h'(s)B_s ds - \frac{1}{2}\int_0^T h^2(s)ds\right]\right) = 1.$$

2. On note  $\Sigma$  (resp.  $H$ ) la primitive de  $\sigma$  (resp.  $h$ ) nulle en 0. Montrer que

$$E\left(\exp\left[-\int_0^T r_s ds\right]\right) = \exp(\Sigma(T)H(T) - \int_0^T \Sigma(t)h(t)dt) E\left(\exp\left(h(T)B_T - \int_0^T \Sigma(t)dB_t ds\right)\right).$$

3. Calculer cette quantité.

**Exercice 6.6.16** Soit  $dY_t = 2\sqrt{Y_t}dB_t + (2\beta(t)Y_t + \delta)dt$  et  $r_t = \sigma(t)Y_t$ , où  $\sigma$  et  $\beta$  sont des fonctions de classe  $C^1$ . On introduit  $dX_t = 2\sqrt{X_t}dB_t + \delta dt$ .

1. Soit  $H$  une fonction de classe  $C^2$  et

$$Z_t = \exp \left( \int_0^t H(s) \sqrt{X_s} dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t H^2(s) X_s ds \right)$$

On admet que  $Z$  est une martingale. Montrer que

$$Z_t = \exp \left( \frac{1}{2} \left( H(t)X_t - \delta \int_0^t H(s)ds - \int_0^t H'(s)X_s ds - \int_0^t H^2(s)X_s ds \right) \right) e^{-\frac{1}{2}H(0)X_0}$$

2. Montrer que

$$E \left( \exp \left[ - \int_0^T r_s ds \right] \right) = \exp \left[ \frac{1}{2} (-\beta(0)X_0 - \delta \int_0^T \beta(s)ds) \right] E \left( \exp \left[ \frac{1}{2} (\beta(T)X_T - \int_0^T X_s (\beta^2(s) + \beta'(s) + 2\sigma(s))ds) \right] \right)$$

3. Comment calculer cette dernière expression?

**Exercice 6.6.17** On se place dans le cas où  $S_t = e^{2(B_t + \nu t)}$ . Montrer que  $S$  est une sousmartingale pour  $\nu + 1 \geq 0$  et une surmartingale sinon. En déduire que le prix d'une option asiatique est plus petit que le prix d'une option plain vanilla. Montrer par une minoration simple que  $E(\frac{1}{T} \int_0^T \exp(2(B_s + \nu s))ds) \geq E(e^{2(B_T + \nu T)})$

# Chapter 7

## Compléments

Dans tout ce chapitre,  $B$  est un mouvement Brownien dont la filtration est notée  $\mathbb{F}$ .

### 7.1 Théorème de Lévy.

**Exercice 7.1.1 Lévy's theorem.** Let

$$D = \sup_{0 \leq s \leq t \leq 1} (B_s - B_t), \quad D_1 = B_\theta - \inf_{\theta \leq t \leq 1} B_t, \quad D_2 = \sup_{0 \leq t \leq \sigma} B_t - B_\sigma$$

where  $\theta$  (resp.  $\sigma$ ) is the time of the absolute maximum (resp. minimum) of the Brownian motion over  $[0, 1]$ , (i.e., ).

1. Prove that  $D \stackrel{loi}{=} \sup_{0 \leq t \leq 1} |B_t|$ .
2. En déduire la loi de  $D$ .
3. Prove that  $D_1 \stackrel{loi}{=} \sup_{g \leq t \leq 1} |B_t|$  where  $g = \sup\{t \leq 1 : B_t = 0\}$ .

**Exercice 7.1.2** On note  $B^*$  le processus  $B_t^* = \sup_{s \leq t} B_s$ .

1. Justifier rapidement (en se basant sur des résultats classiques) que  $\mathbb{P}(B_t^* > a) = 2\mathbb{P}(B_t > a)$  pour  $a > 0$ . Cette égalité est-elle vérifiée également pour  $a \leq 0$ ?
2. Soit  $s < t$ . Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \leq u \leq t} B_u > 0, B_s < 0\right) = 2\mathbb{P}(B_t > 0, B_s < 0)$$

3. Calculer explicitement cette quantité.
4. On note  $g_t = \sup\{s \leq t : B_s = 0\}$ . Calculer la loi de  $g_t$ .

**Exercice 7.1.3** On note  $B_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} B_s$  et  $\theta = \sup\{t \leq 1 : B_t = B_t^*\}$ . On souhaite calculer la loi de  $\theta$ .

1. Ecrire  $\{\theta \leq t\}$  en utilisant les variables  $B_t^*$  et  $\sup_{t \leq s \leq 1} B_s$
2. Ecrire  $\{\theta \leq t\}$  en utilisant  $B_t^*$  et  $\sup_{t \leq s \leq 1} (B_s - B_s)$

3. Quelle est la loi de  $\sup_{t \leq s \leq 1} (B_s - B_t)$  conditionnelle à  $\mathcal{F}_t$ ?
4. En déduire que  $\mathbb{P}(\theta \leq t | \mathcal{F}_t) = \Phi(B_t^* - B_t)$  où  $\Phi(x) = \mathbb{P}(B_{1-t}^* < x)$
5. Calculer  $\Phi(x)$ .
6. On admet que  $B_t^* - B_t$  a même loi que  $B_t$ . Comment obtenir la loi de  $\theta$ ?

## 7.2 Equations rétrogrades

**Exercice 7.2.1 Equation rétrograde 1.** Dans tout le problème  $\zeta$  est une variable  $\mathcal{F}_T$ -mesurable, intégrable.

1. On note  $X_t = \mathbb{E}(\zeta | \mathcal{F}_t)$ . Montrer qu'il existe un processus  $(\hat{X}_s, s \leq T)$  tel que

$$dX_t = \hat{X}_t dB_t, \quad X_T = \zeta \quad (7.1)$$

2. Soit  $r$  un nombre réel. En utilisant  $e^{rt} \mathbb{E}(\zeta e^{-rT} | \mathcal{F}_t)$  montrer qu'il existe un couple  $(X, \hat{X})$  de processus  $(\mathcal{F}_t)$  adaptés tels que

$$dX_t = rX_t dt + \hat{X}_t dB_t, \quad X_T = \zeta$$

3. Soit  $(r_t, t \geq 0)$  un processus  $\mathbb{F}$  adapté borné. Montrer qu'il existe un couple  $(X, \hat{X})$  de processus  $\mathbb{F}$ -adaptés tels que

$$dX_t = r_t X_t dt + \hat{X}_t dB_t, \quad X_T = \zeta$$

4. Soit  $\Gamma^{\beta, \gamma}$  le processus solution de  $d\Gamma_t = -\Gamma_t(\beta_t dt + \gamma_t dB_t)$ ,  $\Gamma_0 = 1$  où  $\beta$  et  $\gamma$  sont des processus  $\mathbb{F}$  adaptés bornés. Soit  $\phi$  un processus  $\mathbb{F}$  adapté borné. En considérant

$$\mathbb{E}(\Gamma_T \zeta + \int_t^T \Gamma_s \phi_s ds | \mathcal{F}_t)$$

montrer qu'il existe un couple  $(X, \hat{X})$  de processus  $\mathbb{F}$  adaptés tels que

$$dX_t = -(\phi_t + X_t \beta_t + \gamma_t \hat{X}_t) dt + \hat{X}_t dB_t, \quad X_T = \zeta$$

5. Soit  $a$  un nombre réel. En considérant  $\frac{1}{2a} \ln(E[\exp(2a\zeta) | \mathcal{F}_t])$ , montrer qu'il existe un couple  $(X, \hat{X})$  de processus  $\mathbb{F}$ -adaptés tels que

$$dX_t = -a\hat{X}_t^2 dt + \hat{X}_t dB_t, \quad X_T = \zeta \quad (7.2)$$

6. Montrer que  $\frac{1}{2a} \ln \left( \mathbb{E} \left[ \Gamma_{t,T}^{2ac,b} \exp(2a\zeta) | \mathcal{F}_t \right] \right)$  est solution de

$$dX_t = -(a\hat{X}_t^2 - b\hat{X}_t - c) dt + \hat{X}_t dB_t, \quad X_T = \zeta$$

**Exercice 7.2.2 Equation rétrograde 2.** Soit  $H$  la solution de

$$dH_t = -H_t(r dt + \theta dB_t), \quad H_0 = 1$$

On notera  $H_{t,s} = \frac{H_s}{H_t}$  pour  $t < s$ .

1. Soit  $t$  fixé. Quelle est l'EDS suivie par  $(H_{t,s}, s \geq t)$ .

2. Soit  $\zeta$  une v.a. bornée  $\mathcal{F}_T$ -mesurable et  $X_t = \ln \mathbb{E}(H_{t,T} e^\zeta | \mathcal{F}_t)$ . Montrer que  $Y_t \stackrel{\text{def}}{=} \exp(X_t) H_t$  est une martingale que l'on peut écrire sous la forme  $z + \int_0^t z_s dB_s$ .
3. Montrer que  $dX_t = (a\hat{X}_t^2 + b\hat{X}_t + c)dt + \hat{X}_t dB_t$  où  $\hat{X}$  est un processus adapté que l'on déterminera en fonction de  $Y, z, r$  et  $\theta$  et où  $b$  et  $c$  sont des constantes.

### Exercice 7.2.3 Equation rétrograde 3..

1. Soit  $(\alpha_t, t \geq 0)$  un processus  $\mathbb{F}$ -adapté. Donner la solution  $(Y, Z)$  de l'équation rétrograde

$$-dY_t = \alpha_t dt - Z_t dB_t, \quad Y_T = 0. \quad (7.3)$$

2. Au moyen du théorème de Girsanov, donner la solution de

$$-dY_t = (\alpha_t + \gamma Z_t)dt - Z_t dB(t), \quad Y_T = 0. \quad (7.4)$$

où  $\gamma$  est un scalaire quelconque. Exprimer  $Y_0$  sous la forme d'une espérance dépendant des données du problème.

3. On pose  $\alpha_t = B_t$ . Montrer que  $Y_0 = \int_0^T \mathbb{E}(M_t B_t) dt$  où  $M_t = \exp(\gamma B_t - \frac{1}{2}\gamma^2 t)$ . Calculer  $\mathbb{E}(M_t B_t)$  et  $\mathbb{E}(M_t \text{sign} B_t)$  où

$$\text{sign}(B_s) = 1 \text{ si } B_s > 0, \quad \text{et; } \text{sign}(B_s) = -1 \text{ si } B_s \leq 0.$$

4. On introduit le processus

$$\bar{B}_t = \int_0^t \text{sign}(B_s) dB_s,$$

On rappelle que ce processus est un mouvement Brownien, on notera  $\bar{\mathcal{F}}_t = \sigma(\bar{B}_s; s \leq t)$  sa filtration, qui est incluse dans  $\mathcal{F}_t$ . Montrer que la solution de

$$-d\bar{Y}_t = (\bar{B}_t + \gamma \bar{Z}_t) dt - \bar{Z}_t d\bar{B}_t, \quad \bar{Y}_T = 0,$$

vérifie

$$\bar{Y}_0 = \gamma T^2 / 2. \quad (7.5)$$

5. Montrer que la solution de

$$-dY_t = (\bar{B}_t + \gamma Z_t)dt - Z_t dB_t, \quad Y_T = 0, \quad (7.6)$$

vérifie

$$Y_0 = \int_0^T \mathbb{E}(M_T \bar{B}_t) dt = \int_0^T \mathbb{E}(M_t \bar{B}_t) dt.$$

6. Montrer, au moyen de la formule d'Itô que

$$\mathbb{E}(M_t \bar{B}_t) = \int_0^t \gamma \mathbb{E}(M_s \text{sign}(B_s)) ds,$$

pour  $0 \leq t \leq T$ . et en déduire que

$$Y_0 = \gamma T^2 / 2 - 2\gamma \int_0^T (T-s) \Phi(-\gamma \sqrt{s}) ds. \quad (7.7)$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

7. Supposons que  $Y_0$  représente l'utilité (mesure le bien être que l'on éprouve quand on consomme  $c$ ) associée à un plan de consommation ( $c_t = \exp(\bar{B}(t))$ ) et une information  $\mathbb{F}$  et que  $\bar{Y}_0$  représente l'utilité associée au même plan de consommation mais avec l'information  $\bar{\mathbb{F}}$ . Interprétez alors le résultat trouvé en (7.5) et en (7.7) selon que  $\gamma > 0$  ou que  $\gamma < 0$ .

**Exercice 7.2.4 facts on quadratic BSDE** The solution of the BSDE  $-dy_t = az_t^2 - z_t dB_t$ ,  $y_T = \zeta$  is  $y_t = \frac{1}{2a} \ln \mathbb{E}(e^{2a\zeta} | \mathcal{F}_t)$ . The solution of

$$-dy = (az^2 + bz)dt - zdB_t$$

obtained by Girsanov.

$$-dy = (az^2 + bz)dt - zdB_t = az^2 dt - z(dB_t - bdt) = az^2 dt - z_t d\hat{B}_t$$

leads to

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{1}{2a} \ln \widehat{\mathbb{E}}(e^{2a\zeta} | \mathcal{F}_t) \\ &= \frac{1}{2a} \ln \mathbb{E}(e^{bB_T - \frac{1}{2}b^2T} e^{2a\zeta} | \mathcal{F}_t) e^{bB_t - \frac{1}{2}b^2t} \\ &= \frac{1}{2a} \left( \ln \mathbb{E}(e^{bB_T - \frac{1}{2}b^2T} e^{2a\zeta} | \mathcal{F}_t) + bB_t - \frac{1}{2}b^2t \right) \end{aligned}$$

The solution of

$$-dy = (az^2 + bz + c_t)dt - zdB_t$$

follows setting  $\tilde{y}_t = y_t + \int_0^t c_s ds$ . The process  $\tilde{y}$  satisfies

$$-d\tilde{y} = (az^2 + bz)dt - zdB_t, \quad \tilde{y}_T = \zeta + \int_0^T c_s ds$$

therefore

$$\frac{1}{2a} \left( \ln \mathbb{E}(e^{bB_T - \frac{1}{2}b^2T} e^{2a(\zeta + \int_0^T c_s ds)} | \mathcal{F}_t) + bB_t - \frac{1}{2}b^2t \right) - \int_0^t c_s ds$$

## 7.3 Théorèmes de représentation

**Exercice 7.3.1** Soit  $B^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, 3$  trois MB, avec  $B^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$  indépendants. Montrer qu'il n'est pas possible d'avoir  $\sigma(B_s^{(3)}, s \leq t) = \sigma(B_s^{(1)}, B_s^{(2)}, s \leq t)$ .

**Exercice 7.3.2 Changement de temps** Soit  $M_t = \int_0^t \mathbb{1}_{B_s > 0} dB_s$ .

1. Justifier que  $(M_t, t \geq 0)$  est une martingale.
2. Trouver un processus  $(A_t, t \geq 0)$  croissant tel que  $M_t^2 - A_t$  est une  $(\mathcal{F}_t)$ -martingale.
3. On admet qu'il existe un processus croissant  $C$  tel que  $A(C(t)) = t$ . Montrer que  $(M_{C_t}, t \geq 0)$  est un  $(\mathcal{G}_t)$ -mouvement Brownien. Préciser quelle est la filtration  $(\mathcal{G}_t)$ -utilisée.

**Exercice 7.3.3 Crochet et indépendance.** Soient  $B_1$  et  $B_2$  deux MB tels que leur crochet soit nul. Montrer qu'ils sont indépendants.

## 7.4 Temps local.

**Exercice 7.4.1 Loi du couple**  $(|B_t|, L_t)$ . On note  $L$  le temps local de  $B$ .

1. Montrer que la loi du couple  $(|B_t|, L_t)$  est

$$\mu_t(da, d\ell) = \mathbb{1}_{a \geq 0} \mathbb{1}_{\ell \geq 0} \frac{2(a + \ell)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(a + \ell)^2}{2t}\right) da d\ell$$

2. On note  $T_a = \inf\{t \geq 0; B_t = a\}$  et  $\tau_\ell = \inf\{t \geq 0; L_t = \ell\}$ . Montrer que  $T_\ell \stackrel{loi}{=} \tau_\ell$
3. Montrer que le processus  $(|B_t|, L_t)$  est markovien de semi groupe

$$Q_t(\alpha, \lambda, f) = \int \mu_t(da, d\ell) f(\alpha \vee \ell - (\ell - a), (\lambda - \alpha) + \alpha \vee \ell)$$

4. Montrer que, pour tout  $t$ , les v.a.s  $S_t(S_t - B_t)$  et  $B_t$  sont indépendantes.
5. Montrer que  $S_t(S_t - B_t) \stackrel{loi}{=} \frac{t}{2} \mathcal{E}$  où  $\mathcal{E}$  est une variable exponentielle de paramètre 1.

**Exercice 7.4.2 Formule de Tanaka.**

1. Peut-on appliquer la formule d'Itô pour calculer  $dZ_t$  avec  $Z_t = |B_t|$ ?
2. On admet qu'il existe un processus croissant  $L$  tel que

$$|B_t| = |B_0| + \int_0^t f(B_s) dB_s + L_t$$

avec  $f(x) = 1$  si  $x > 0$  et  $f(x) = -1$  sinon. Montrer que  $(\int_0^t f(B_s) dB_s, t \geq 0)$  est un mouvement Brownien que l'on notera  $\beta$ .

3. Soit  $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$ . Vérifier que  $S$  est un processus croissant. Comparer les décompositions  $|B_t| = \beta_t + L_t$  et  $S_t - B_t = -B_t + S_t$ . Pour cette question, je ne vous demande aucun raisonnement précis.

**Exercice 7.4.3 Temps local.** Soit  $L$  le temps local. Montrer que  $L_t = \inf_{s \geq t} (|B_s| + L_s)$ .

**Exercice 7.4.4 Temps aléatoire.** Soit  $B$  un MB,  $S$  son maximum sur  $[0, 1]$  (soit  $S = \sup\{B_s, s \leq 1\}$ ) et  $\theta = \inf\{t \leq 1 : B_t = S\}$ . La v.a.  $\theta$  est-elle un temps d'arrêt? Quelle est la loi de  $\theta$ ? On calculera  $\mathbb{P}(\theta \leq u)$  et on utilisera le principe de réflexion et l'identité de Lévy  $(S_t - B_t, t \geq 0) \stackrel{loi}{=} (|B_t|, t \geq 0)$ . Calculer  $\mathbb{P}(\theta \leq t | \mathcal{F}_t)$ .

**Exercice 7.4.5 Des martingales.** Soit  $X$  une martingale continue et  $S_t = \sup_{s \leq t} X_s$ .

1. Pour quelles fonctions  $f$  le processus  $Y_t = f(X_t, S_t, \langle X \rangle_t)$  est-il une martingale locale?
2. Montrer que si  $g$  est  $C^2$  et  $g(0) = 0$ , le processus

$$g(S_t) - (S_t - X_t)g'(S_t)$$

est une martingale locale.

3. Montrer que si  $g$  est  $C^2$  et  $g(0) = 0$ , le processus

$$g(L_t) - |X_t|g'(L_t)$$

est une martingale locale.

**Exercice 7.4.6 Scaling** Soit  $B$  un MB et  $L$  son temps local. Montrer que

$$(L_{\lambda^2 t}^x, x \in \mathbb{R}, t \geq 0) \stackrel{\text{loi}}{=} (\lambda L_t^{x/\lambda}, x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$$

On utilisera

$$\int_0^{\lambda^2 t} f(B_s) ds \stackrel{\text{loi}}{=} \lambda^2 \int_0^t f(\lambda B_u) du$$

**Exercice 7.4.7** Calculer  $\mathbb{E}(L_{T_a}^x)$ .

**Exercice 7.4.8** Let  $M$  be a continuous martingale such that  $\langle M \rangle_\infty = \infty$  and  $\beta$  the associated Dubins-Schwarz BM. Prove that  $L_t^a(M) = L_{\langle M \rangle_t}^a(\beta)$ .

**Exercice 7.4.9** Let  $\phi$  be a non negative process indexed by  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ . Prove that

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^t d_s L_s^y \phi(s, y) = \int_0^t d_s \langle Y \rangle_s \phi(s, Y_s).$$

## 7.5 Lois

**Exercice 7.5.1 Temps d'atteinte.** Soit  $X$  solution de

$$X_t = a(X_t)dt + b(X_t)dB_t, \quad X_0 = x.$$

On note  $T_a = \inf\{t \geq 0 \mid X_t = a\}$ .

1. Donner des conditions sur la fonction  $V$  pour que  $(e^{-\lambda t}V(X_t), t \geq 0)$  soit une martingale.
2. En déduire  $\mathbb{E}(e^{-\lambda T_a} \mathbb{1}_{(T_a < \infty)})$  en fonction de  $V$ . On ne demande pas d'explicitier  $V$ .
3. Soit  $f(x) = \int_0^x \frac{y}{b(y)} dy$  et  $Y_t = f(X_t)$ . On suppose  $b \in C^1$ . Calculer  $dY_t$ .
4. En déduire que  $\int_0^t X_s dB_s = f(X_t) - f(x) + \int_0^t g(X_s) ds$  où  $g$  est une fonction que l'on précisera.

**Exercice 7.5.2 Temps d'atteinte** Soit  $V_t = v + B_t$  et  $\tau_a(V) = \inf\{t : V_t = a\}$ . Montrer que  $\tau_a(V) \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{(a-v)^2}{G^2}$ , où  $G$  est une variable de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Comment calculer  $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T < \tau_a(V)\}} h(V_T))$ ?

**Exercice 7.5.3** Soit  $M$  une martingale telle que  $M_0 = a$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t = 0$ . On rappelle (exercice 1.5.11)  $\sup M_t \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{a}{U}$  où  $U$  est une v.a. de loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

On propose des applications de ce résultat.

1. Let  $B$  be a BM with initial value  $a > 0$  and  $T_0 = \inf\{t : B_t = 0\}$ . Identify the law of  $\sup_{u \leq T_0} B_u$ .



2. Prove that, for  $a > 0$ ,  $\sup_u (B_u - au) \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{1}{2a} \mathbf{e}$ , where  $\mathbf{e}$  is a standard exponential variable with mean 1.
3. Let  $B$  be a BM and  $T_1$  the first hitting time of 1. Define  $I_t = -\inf_{s \leq t} B_s$ . Identify the law of  $I_{T_1}$ .

**Exercice 7.5.4 Loi du maximum.**

On rappelle que, pour  $T$  fixé,  $\max_{t \leq T} B_t \stackrel{\text{loi}}{=} |B_T|$ . On note  $C = \mathbb{E}[(e^{-\sigma B_T} - 1)^+]$  et  $P = [(1 - e^{\sigma B_T})^+]$ . Montrer que pour  $x > 0$

$$\mathbb{E}[\max_{t \leq T} (xe^{\sigma B_t} - xe^{\sigma B_T})] = x[C + P]$$

(Il n'y a aucun calcul à faire)

## 7.6 Filtrations

**Exercice 7.6.1 Agent initié** L'agent initié connaît la valeur terminale du Brownien. Le problème est de savoir comment se transforment les martingales. Soit  $Z_t \stackrel{\text{def}}{=} B_t - \int_0^t \frac{B_T - B_u}{T - u} du$

1. Soit  $f$  une fonction déterministe. Montrer que

$$\mathbb{E}[Z_u \int_0^T f(v) dB_v] = \int_0^u f(v) dv - \int_0^u ds \frac{1}{T-s} \int_s^T dv f(v)$$

En déduire que si, pour tout  $u$ ,  $\mathbb{E}[Z_u \int_0^T f(v) dB_v] = 0$ , alors  $f$  vérifie  $f(u) = \frac{1}{T-u} \int_u^T dv f(v)$  et montrer que  $f$  est une constante.

2. Soit  $t < T$ . On admet que  $\mathbb{E}(B_t | B_T) = aB_T + b$  où  $a$  et  $b$  sont des constantes. Montrer que  $b = 0$  et que  $a = \frac{t}{T}$ . (On pourra prendre l'espérance des deux membres et calculer  $\mathbb{E}(B_t B_T)$ )
3. Soit  $s < t < T$ . On admet que  $\mathbb{E}(B_t | B_s, B_T) = aB_s + bB_T + c$  où  $a, b$  et  $c$  sont des constantes. Montrer que  $a = \frac{T-t}{T-s}$ ,  $b = \frac{t-s}{T-s}$ ,  $c = 0$ .
4. On note  $\mathcal{F}_t^* = \mathcal{F}_t \vee \sigma(B_T)$  la tribu engendrée par  $(B_u, u \leq t)$  et par  $B_T$ . On admet que pour  $s < t$ ,  $\mathbb{E}(B_t | B_T, B_s) = \mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s^*)$ . Montrer que  $Z$  est une  $(\mathcal{F}_t^*)$ -martingale. On pourrait montrer que c'est un MB.

**Exercice 7.6.2** Soit  $\mathbb{G}$  une filtration et  $B$  un  $\mathbb{G}$  mouvement brownien.

1. Soit  $\mathbb{H}$  une filtration plus petite que  $\mathbb{G}$ . Vérifier que le processus  $M_t = \mathbb{E}(B_t | \mathcal{H}_t)$  est une martingale. (on précisera par rapport à quelle filtration).
2. Soit  $X_t = B_t + \int_0^t Y_u du$  où  $Y$  est un processus  $\mathbb{G}$  adapté intégrable. On note  $\mathbb{F}^X$  la filtration de  $X$  (qui vérifie  $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{G}_t$ ) et  $\hat{Y}_u = \mathbb{E}(Y_u | \mathcal{F}_u^X)$ . Vérifier que  $Z_t = (X_t - \int_0^t \hat{Y}_u du, t \geq 0)$  est une  $\mathbb{F}^X$ -martingale (on calculera l'espérance conditionnelle de  $Z_t$  par rapport à  $\mathcal{F}_s^X$ ). Montrer que  $Z$  est un mouvement Brownien.

## 7.7 Options barrières

**Exercice 7.7.1** On note  $\mathcal{N}$  la fonction de répartition de la loi normale et  $M_t = \sup(B_s, s \leq t)$ .

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\mathbb{P}(B_t \leq x) = \mathbb{P}(B_t \leq -x) = \mathcal{N}(x(\sqrt{t})^{-1})$ .
2. Soit  $y > 0$  donné,  $T = \inf\{t \geq 0 \mid B_t = y\}$ .  
Soit  $B_t^* = B_{T+t} - B_T$ . On admet que  $T$  est un temps d'arrêt et  $(B_t^*, t \geq 0)$  est un Brownien indépendant de  $\mathcal{F}_T$ .

(a) Montrer que

$$\mathbb{P}(B_t \leq x, M_t > y) = \mathbb{P}(T < t, B_{t-T}^* \leq x - y)$$

(b) Montrer que

$$\mathbb{P}(T < t, B_{t-T}^* \leq x - y) = \int_0^t \mathbb{P}(T \in du) \mathbb{P}(B_{t-u}^* \leq x - y) = \mathbb{P}(T < t, B_{t-T}^* \geq y - x)$$

(c) Montrer que pour  $y > x$ , on a

$$\mathbb{P}(B_t \leq x, M_t > y) = \mathbb{P}(B_t \geq 2y - x)$$

En déduire que

$$\mathbb{P}(B_t \leq x, M_t < y) = \mathcal{N}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \mathcal{N}\left(\frac{x-2y}{\sqrt{t}}\right)$$

3. En déduire la loi de  $T$ , celle de  $M_t$  et la densité du couple  $(B_t, M_t)$ .
4. Soit  $X_t = \mu t + B_t$ ,  $Y_t = \sup(X_s, 0 \leq s \leq t)$ . Montrer, en utilisant le théorème de Girsanov, que le calcul de

$$\mathbb{P}(X_t < x, Y_t < y)$$

se déduit du calcul précédent.

## 7.8 Méandres, ponts, excursions

**Exercice 7.8.1 Loi conditionnelle.** Soit  $d_t = \inf\{s \geq t : B_s = 0\}$ . Montrer que  $d_t(B) \stackrel{\text{loi}}{=} t + \frac{(-B_t)^2}{G^2}$  où  $G$  est une variable gaussienne de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  indépendante de  $B_t$ . Soit  $g = \sup\{t \leq 1 : B_t = 0\}$ . Calculer  $\mathbb{P}(g \leq t \mid \mathcal{F}_t)$ .

**Exercice 7.8.2 Martingale d'Azéma.** On admet que le processus  $m_u = \frac{1}{\sqrt{t-g_t}} |B_{g_t+u(t-g_t)}|, u \leq 1$  est indépendant de  $\mathcal{F}_{g_t}$ , que  $\text{sgn} B_t$  est  $\mathcal{F}_{g_t}$  mesurable et que  $m_1$  a pour densité  $xe^{-x^2/2} \mathbb{1}_{x>0} dx$ . Calculer  $\mathbb{E}(B_t \mid \mathcal{F}_{g_t})$ ,  $\mathbb{E}(B_t^2 - t \mid \mathcal{F}_{g_t})$  et  $\mathbb{E}(e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t} \mid \mathcal{F}_{g_t})$ . Montrer que ces processus sont des martingales.

## 7.9 Divers

**Exercice 7.9.1** Soit  $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$  et  $\tilde{S}_t = S_t \max(1, \max_{0 \leq s \leq t} \frac{K}{S_s})$ . Calculer  $e^{-rT} \mathbb{E}(\tilde{S}_T)$

**Exercice 7.9.2** Soit  $S$  un brownien géométrique

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$$

On pose  $M_t = \frac{1}{t} \int_0^t S_u du$ . Calculer

$$\mathbb{E}((M_T - k)^+ | \mathcal{F}_t) \mathbb{1}_{M_t \geq (Tk/t)}$$

1. Soit  $s < t$   $M_s = \sup_{u \leq s} B_u$ ,  $M_t^s = \sup_{s \leq u \leq t} B_u$ . Calculer  $\mathbb{P}(M_s < a, M_t^s < b, B_t < c)$ . On donnera le résultat sous forme d'une intégrale.
2. Soit  $X_t = e^{2(B_t + \nu t)}(x + \int_0^t e^{2(B_s + \nu s)} ds)$ . Montrer que

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dB_t$$

où l'on explicitera les fonctions  $f$  et  $g$ . Comment pourrait-on calculer le prix d'une option européenne sur le sous-jacent  $X$ , en présence d'un actif sans risque de taux constant  $r$ ?

**Exercice 7.9.3** Let  $B$  be a Brownian motion and  $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$  where  $a > 0$ .

1. Using the Doléans-Dade exponential of  $\lambda B$ , prove that

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda^2 T_a/2} | \mathcal{F}_t) = e^{-\lambda a} + \lambda \int_0^{T_a \wedge t} e^{-\lambda(a-B_u) - \lambda^2 u/2} du$$

and that

$$e^{-\lambda^2 T_a/2} = e^{-\lambda a} + \lambda \int_0^{T_a} e^{-\lambda(a-B_u) - \lambda^2 u/2} du$$

2. By differentiating the Laplace transform of  $T_a$ , and the fact that  $\varphi$  satisfies the Kolmogorov equation, prove that

$$\lambda e^{-\lambda c} = 2 \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t/2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, c) dt$$

where  $\varphi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)}$ .

3. Prove that, for any  $f$

$$\mathbb{E}(f(T_a) | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(f(T_a)) + 2 \int_0^{T_a \wedge t} \int_0^\infty f(u+s) \frac{\partial}{\partial u} \varphi(u, B_s - a) du dB_s$$

4. Deduce that

$$\mathbb{1}_{T_a < t} = \mathbb{P}(T_a < t) + 2 \int_0^{T_a \wedge t} \varphi(T-t, B_t - a) dB_t$$



## Chapter 8

# Processus à sauts

### 8.1 Processus de Poisson

Un processus de Poisson standard est un processus de comptage (i.e.  $N_t = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{T_i \leq t}$ , où les  $T_i$  sont des v.a. positives croissantes) à accroissements indépendents et stationnaires. La variable aléatoire  $N_t$  a pour loi une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

Un processus de Poisson d'intensité déterministe  $\lambda(s)$  est un processus de comptage tel que  $M_t = N_t - \int_0^t \lambda(s)ds$  est la martingale compensée. Pour tout processus  $Z$  on définit  $\int_0^t Z_s dN_s = \sum_{i=1}^{\infty} Z_{T_i} \mathbb{1}_{T_i \leq t} = \sum_{s \leq t} Z_s \Delta N_s$ .

Si

$$\begin{aligned} dX_t &= a_t dt + \sigma_t dB_t + \varphi_t dN_t \\ dY_t &= \alpha_t dt + \nu_t dB_t + \vartheta_t dN_t \end{aligned}$$

la formule d'intégration par parties est

$$\begin{aligned} d(XY)_t &= X_{t-} dY_t + Y_{t-} dX_t + \sigma_t \nu_t dt + \varphi_t \vartheta_t dN_t \\ X_{t-} dY_t + Y_{t-} dX_t + d[X, Y]_t \end{aligned}$$

Dans cete section,  $N$  est un processus de Poisson de filtration naturelle  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t = \sigma(N_s, s \leq t); t \geq 0)$ .

**Exercice 8.1.1** Montrer que si  $N$  est un processus de Poisson standard,  $M_t \stackrel{def}{=} N_t - \lambda t$  est une martingale. Montrer que si  $N$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda(s)$ ,  $f$  une fonction borélienne bornée et  $g$  une fonction borélienne bornée à valeurs dans  $] -1, \infty[$ , les processus

$$\begin{aligned} X_t &= \exp\left(\int_0^t f(s) dN_s + \int_0^t \lambda(s)(1 - e^{f(s)}) ds\right) \\ Y_t &= \exp\left(\int_0^t \ln(1 + g(s)) dM_s + \int_0^t [\ln(1 + g(s)) - g(s)] \lambda(s) ds\right) \end{aligned}$$

sont des martingales.

**Exercice 8.1.2** Soit  $N^i, i = 1, 2$  deux processus de Poisson indépendants de même intensité. Montrer que  $N^1 - N^2$  est une martingale.

**Exercice 8.1.3** Soit  $\mathcal{F}_t^* = \sigma(N_s, s \leq t, N_T)$ . Montrer que

$$M_t^* \stackrel{def}{=} N_t - \int_0^t \frac{N_T - N_s}{T - s} ds$$

est une  $\mathbb{F}^*$ -martingale.

**Exercice 8.1.4** Caractérisation de Processus de Poisson.

1. Calculer  $\psi(z, t) = \sum_n z^n P(N_t = n)$ .
2. Soit  $X$  un processus à accroissements indépendants, à valeurs dans l'ensemble des entiers, tel que  $X_{t+s} - X_t \stackrel{\text{loi}}{=} X_s$  et  $\psi(z, t) = \sum_n z^n P(X_t = n)$ . Montrer que  $\psi(z, t+h) = \psi(z, t)\psi(z, h)$ .  
On suppose qu'il existe  $\nu$  tel que

$$\frac{1}{h}P(X_h \geq 2) \rightarrow 0, \quad \frac{1}{h}P(X_h = 1) \rightarrow \nu, \quad \frac{1}{h}(1 - P(X_h = 0)) \rightarrow \nu$$

quand  $h$  tend vers 0. Montrer que  $\frac{\partial}{\partial t}\psi(z, t) = \nu(z-1)\psi(z, t)$ . Quel est le processus  $X$ ?

**Exercice 8.1.5** Calculer la transformée de Laplace de  $\int_0^t N_s ds$

**Exercice 8.1.6** On note  $\tau = T_1$  le premier saut de  $N$  et  $D_t = N_{t \wedge \tau}$

1. Déterminer  $\delta$  tel que  $Z_t = D_t - \int_0^{t \wedge \tau} \delta_u du$  soit une martingale.
2. On note  $L_t = (1 - D_t)/(1 - F(t))$  où  $F(t) = P(\tau \leq t)$  est supposée continue. Montrer que  $dL_t = \alpha_t dZ_t$  où on explicitera  $\alpha$ . Même question si  $F$  est seulement continue à droite.
3. Soit  $N_1$  et  $N_2$  deux PP d'intensité constante  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  et  $D_i$  les processus associés. On note  $\mu_1(t) = (\frac{\alpha_1}{\lambda_1} - 1)D_2(t-)$  et  $\mu_2(t) = (\frac{\alpha_2}{\lambda_2} - 1)D_1(t-)$ . Soit  $\rho_t$  solution de  $d\rho_t = \rho_{t-}(\mu_1(t)dZ_1(t) + \mu_2(t)dZ_2(t))$ . Expliciter  $\rho_t$ . Soit  $dQ = \rho_t dP$ . Calculer  $Q(\tau_1 > t, \tau_2 < s)$  pour  $s < t$ .

## 8.2 Poisson composé

Soit  $\lambda$  un nombre réel positif,  $\mu$  une loi de probabilité sur  $\mathbb{R}$ . Un processus de Poisson composé de paramètres  $(\lambda, \mu)$  est un processus  $X = (X_t, t \geq 0)$  de la forme

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$$

où  $N$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  et où les  $(Y_k, k \in \mathbb{N})$  sont des v.a. i.i.d. de loi  $\mu$ , indépendantes de  $N$ .

**Exercice 8.2.1** Soit  $M_t = N_t - \lambda t$  et  $Z_t = X_t - \mu \lambda t$ . Montrer que  $Z$  et  $(M_t Y_t - \mu \lambda t, t \geq 0)$  sont des martingales.

**Exercice 8.2.2** On considère l'équation

$$X_t = x + N_t - c \int_0^t X_s ds$$

1. Montrer que cette équation admet au plus une solution.

2. Montrer que

$$e^{-ct}x + \int_0^t e^{-c(t-s)} dN_s$$

est une solution.

**Exercice 8.2.3** Montrer qu'un processus de Poisson composé a des accroissements indépendants et stationnaires et que (si  $Y_1$  est intégrable)

$$E(X_t) = \lambda t E(Y_1)$$

$$\text{Var}(X_t) = \lambda t E(Y_1^2).$$

**Exercice 8.2.4** Let  $X$  be a  $(\lambda, \mu)$  compound

**Exercice 8.2.5** Let  $X$  be a  $(\lambda, \mu)$  compound Poisson process and  $f$  a bounded Borel function. Then,

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{N_t} f(Y_k) + t \int (1 - e^{f(x)}) \lambda \mu(dx)\right)$$

is a martingale.

Poisson process. Prove that the process

$$M_t^f = \sum_{s \leq t} f(\Delta X_s) \mathbb{1}_{\Delta X_s \neq 0} - t \lambda \mu(f)$$

is a martingale; the process

$$(M_t^f)^2 - t \lambda \mu(f^2)$$

is a martingale.

Suppose that  $X$  is a pure jump process and that there exists a finite positive measure  $\sigma$  such that

$$\sum_{s \leq t} f(\Delta X_s) \mathbb{1}_{\Delta X_s \neq 0} - t \sigma(f)$$

is a martingale for any  $f$ , then  $X$  is a compound Poisson process.

**Exercice 8.2.6** If  $X$  is a  $(\lambda, \mu)$  compound Poisson process,

$$E(e^{-\alpha X_t}) = \exp\left(-\lambda t \left(1 - \int_0^\infty e^{-\alpha u} \mu(du)\right)\right).$$

## 8.3 Formule d'Itô

Dans cette section,  $B$  est un mouvement Brownien et  $N$  un processus de Poisson de martingale compensée  $M$ . On note  $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, N_s, s \leq t)$ .

**Exercice 8.3.1** On suppose que  $N$  est d'intensité constante  $\lambda$ .

1. Montrer que la solution de

$$dS_t = S(t_-)(r dt + \sigma dB_t + \phi dM_t), \quad S_0 = x$$

est, pour  $\phi > -1$

$$S_t = x e^{rt} \exp(\sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t) \exp(\ln(1 + \phi) N_t - \phi \lambda t). \quad (8.1)$$

2. Ecrire la solution en faisant apparaître la martingale  $M$ .
3. Quelle est la dynamique de  $1/S$ ?
4. Quelle est la dynamique de  $S^2$ ?
5. Calculer  $\mathbb{E}(S_t)$  et  $\mathbb{E}(S_t^2)$ .
6. Quelle est la solution de (8.1) pour  $\phi = -1$ ? et pour  $\phi < -1$ ?
7. Quelle est la solution de (8.1) lorsque les coefficients dépendent du temps?

**Exercice 8.3.2** Soit

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t + \phi(t, X_{t-})dM_t$$

et  $H$  une fonction de classe  $C^{1,2}$ . Sous quelles conditions sur les coefficients le processus  $Y_t = H(t, X_t)$  est-il une martingale locale?

## 8.4 Temps de Défaut

**Exercice 8.4.1** Soit  $\tau$  un temps aléatoire sur un espace  $(\Omega, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ . On suppose qu'il existe un processus positif,  $\mathbb{G}$ -adapté  $(\lambda_s, s \geq 0)$  tel que  $\mathbb{1}_{\tau \leq t} - \int_0^{t \wedge \tau} \lambda_u du$  soit une  $\mathbb{G}$  martingale. Soit  $h$  une fonction borélienne,  $X$  une variable aléatoire  $\mathcal{G}_T$  mesurable et

$$V_t = E(X \exp - \int_t^T \lambda_s ds + \int_t^T du h_u \lambda_u (\exp - \int_t^u \lambda_s ds) | \mathcal{G}_t).$$

Montrer que

$$\mathbb{1}_{\{t < \tau\}} V_t = \mathbb{E} \left( (\Delta V_\tau) \mathbb{1}_{\{t < \tau \leq T\}} + X \mathbb{1}_{\{T < \tau\}} \mid \mathcal{G}_t \right).$$

## 8.5 Marché complets, incomplets

**Exercice 8.5.1** Soit

$$dS_t = S_{t-} [\mu dt + \phi dM_t]$$

and  $r = 0$ . Quelle est la condition pour que ce marché soit sans arbitrage? Quelle est le m.m.e.  $\mathbb{Q}$ ? Quelle est la dynamique de  $S$  sous  $\mathbb{Q}$ ?

**Exercice 8.5.2** On étudie un modèle dans lequel il y a un actif sans risque de taux  $r$  et un actif risqué

$$dS_t = S(t_-)(r dt + \sigma dB_t + \phi dM_t) \quad (8.2)$$

1. Montrer que ce marché est incomplet, déterminer les m.m.e..
2. Quels sont les actifs duplicables?
3. On note  $X^{x, \pi, C}$  la valeur d'un portefeuille  $\pi$  de richesse initiale  $x$ , avec processus de consommation cumulé  $C$ . Montrer que

$$R_t X_t = x + \int_0^t \pi_s X_s d(RS) - \int_0^t R_s dC_s$$



4. Soit  $\mathbb{Q}$  l'ensemble des probabilités risque neutre, et

$$V_t = \text{esssup}_{\mathbb{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(R_T B | \mathcal{F}_t)$$

On admettra que  $V$  est une surmartingale pour tout  $\mathbb{Q}$  et que toute surmartingale s'écrit comme une martingale moins un processus croissant.

Montrer qu'il existe  $A^{\mathbb{Q}}$  processus croissant,  $\mu, \nu$  tels que  $V_t = v + \int_0^t \mu_s dB_s^{\mathbb{Q}} + \int_0^t dM_s^{\mathbb{Q}} - A_t^{\mathbb{Q}}$ , où  $W^{\mathbb{Q}}$  et  $M^{\mathbb{Q}}$  sont des  $\mathbb{Q}$ -martingales et  $B^{\mathbb{Q}}$  un MB.. Préciser le lien entre  $A^P$  et  $A^{\mathbb{Q}}$ .

5. Montrer que  $\mu_t \frac{\phi}{\sigma} - \nu_t \geq 0$

6. Montrer que  $A^P - \int_0^t \lambda(\mu_s \frac{\phi}{\sigma} - \nu_s)$  est un processus croissant.

7. En déduire que  $V$  est la valeur d'un portefeuille  $X$  dont on explicitera le processus de consommation.

**Exercice 8.5.3** On considère un actif de prix

$$dS_t = S_{t-}(r dt + \varphi dM_t)$$

où  $M$  est la martingale composée associée à un processus de Poisson d'intensité constante  $\lambda$ .

1. Vérifier que  $S_t e^{-rt}$  est une martingale.
2. Soit  $X$  le valeur d'un portefeuille autofinancant comportant  $\theta$  parts d'actif risqué, soit

$$dX_t = rX_t dt + \theta_t(dS_t - rS_t dt)$$

Vérifier que  $\tilde{X}_t = e^{rt} X_t$  est une martingale. Ecrire la dynamique de  $\tilde{X}$  en fonction de  $\tilde{S}$ .

3. Ecrire l'EDS vérifiée par  $X/S$ .
4. On pose  $d\mathbb{Q} = S_t e^{-rt} / S_0 d\mathbb{P}$ . Vérifier que  $X/S$  est une martingale sous  $\mathbb{Q}$ .

S

**CORRIGES**

# Chapter 1

## Rappels, Corrigés

### 1.1 Tribu

**Exercice 1.1.1:** L'ensemble  $B - A$  s'écrit  $B \cap A^c$ . Si  $\mathcal{F}$  est une tribu, elle est stable par passage au complémentaire et par intersection, d'où le résultat.

**Exercice 1.1.2 :** 1) La tribu engendrée par  $A$  est constituée des quatre ensembles  $A, A^c, \emptyset, \Omega$ .  
2) Cette tribu doit contenir  $A$  et  $B$ , l'ensemble vide et  $\Omega$ . Puis les complémentaires, soit  $A^c$  et  $B^c$  (les complémentaires de  $\Omega$  et de l'ensemble vide égaux à l'ensemble vide et à  $\Omega$  sont déjà dans la liste). Puis les unions d'ensembles soit  $A \cup B$ , les autres unions  $A \cup \Omega = \Omega$ ,  $A \cup B^c = B^c$ , ... sont déjà dans la liste. Puis les intersections  $A^c \cap B^c$ . On a terminé car les autres ensembles formés à partir d'opérations de passage au complémentaire, d'intersection et d'union sont dans la liste par exemple  $(A^c \cap B^c) \cup B^c = B^c$ .

**Exercice 1.1.4 :** Soit  $\mathcal{G} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$  la famille composée des ensembles qui appartiennent à  $\mathcal{F}_1$  et à  $\mathcal{F}_2$ . La famille  $\mathcal{G}$  est une tribu si

(i)  $\Omega \subset \mathcal{G}$ , ce qui est le cas car  $\Omega \subset \mathcal{F}_1, \Omega \subset \mathcal{F}_2$  donc  $\Omega \subset \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ .  
(ii) la famille  $\mathcal{G}$  est stable par passage au complémentaire: si  $A \subset \mathcal{G}$ , la stabilité des tribus  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  par passage au complémentaire implique  $A^c \subset \mathcal{F}_1, A^c \subset \mathcal{F}_2$  donc  $A^c \subset \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ .  
(iii) la famille  $\mathcal{G}$  est stable par intersection dénombrable: si  $A_i \subset \mathcal{G}$ , la stabilité des tribus  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  par intersection dénombrable implique  $\cap_i A_i \subset \mathcal{F}_1, \cap_i A_i \subset \mathcal{F}_2$  donc  $\cap_i A_i \subset \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ .  
Les autres propriétés résultent des précédentes: L'ensemble vide appartient à  $\mathcal{G}$  car c'est le complémentaire de  $\Omega$  (utiliser (i) et (ii)), la famille  $\mathcal{G}$  est stable par union dénombrable: en passant au complémentaire l'identité  $(\cap A_i)^c \cup (\cup A_i^c)$  on obtient  $\cap A_i = (\cup A_i^c)^c$ . Il reste à utiliser (ii) et (iii).  
L'union de tribus n'est pas une tribu: considérer le cas  $\mathcal{F}^1 = \sigma(A), \mathcal{F}^2 = \sigma(B)$ . la famille  $\mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2$  ne contient pas  $A^c \cap B^c$ . Ne pas confondre sous ensembles et éléments. Par exemple, un intervalle est un sous ensemble de  $\mathbb{R}$ , et n'est pas un élément de  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 1.1.6 :** On utilise que  $X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\}$ . La famille  $\mathcal{C}$  est une tribu: la stabilité requise provient des égalités suivantes:  $X^{-1}(B^c) = (X^{-1}(B))^c$ ,  $X^{-1}(\cap B_n) = \cap X^{-1}(B_n)$ . On trouvera une démonstration de la réciproque dans tout ouvrage de proba, cette démonstration est basée sur le théorème qui précise que si une tribu contient une classe stable par intersection finie, elle contient la plus petite tribu engendrée par cette classe.

**Exercice 1.1.7 :** Les diverses quantités que l'on veut comparer sont égales. Les espérances  $E(f(X))$  et  $E(f(Z))$  sont égales parce que  $X$  et  $Z$  ont même loi, et  $E(f(X, Y)) = E(f(Z, T))$  car le couple  $(X, Y)$  a même loi que le couple  $(Z, T)$ . Si l'hypothèse  $(Z, T)$  sont indépendantes n'était pas faite,

l'égalité en loi des variables  $X$  et  $Z$  et celle des variables  $Y$  et  $T$  ne suffirait pas. Par exemple, on peut prendre  $X \stackrel{\text{loi}}{=} Y$  de loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, 1)$ ,  $X$  et  $Y$  indépendantes et  $Z = T = X$ . On aurait alors  $E(X^2 Y^2) = 1$  et  $E(Z^2 T^2) = E(X^4) = 3$ . (contre exemple pour la question 3)

## 1.2 Variables gaussiennes.

**Exercice 1.2.1 :** Par symétrie de la densité et imparité de  $x^3$ , on a  $E(X^3) = 0$  et, par parité de

$x^4$  on a  $E(X^4) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x^4 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$ . Cette dernière intégrale se calcule par intégrations par parties successives et on obtient  $E(X^4) = 3\sigma^4$ .

On a également  $E(|X|) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx$ , d'où  $E(|X|) = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$  et, par des calculs analogues  $E(|X^3|) = \frac{4\sigma^3}{\sqrt{2\pi}}$ .

Soit  $U$  une variable gaussienne d'espérance  $m$  et de variance  $\sigma^2$ . Pour calculer  $\mathbb{E}(\exp\{\lambda U^2 + \mu U\})$ , on doit calculer

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda u^2 + \mu u} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-m)^2} du.$$

On montre que

$$\lambda u^2 + \mu u - \frac{1}{2\sigma^2}(u-m)^2 = -\frac{1}{2\Sigma^2} \left(u - \left(\mu + \frac{m}{\sigma^2}\right)\Sigma^2\right)^2 + \frac{\Sigma^2}{2} \left(\mu + \frac{m}{\sigma^2}\right)^2 - \frac{m^2}{2\sigma^2}$$

avec  $\Sigma^2 = \frac{\sigma^2}{1-2\lambda\sigma^2}$ .

Il vient

$$\mathbb{E}(\exp\{\lambda U^2 + \mu U\}) = \frac{\Sigma}{\sigma} \exp\left(\frac{\Sigma^2}{2} \left(\mu + \frac{m}{\sigma^2}\right)^2 - \frac{m^2}{2\sigma^2}\right).$$

En particulier

$$\mathbb{E}(\exp \lambda U^2) = \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda\sigma^2}} \exp \frac{m^2\lambda}{1-2\lambda\sigma^2}$$

Par propriété de l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}(e^{aXY}) = \mathbb{E}(\Phi(X))$  avec  $\Phi(x) = e^{axY}$ .

**Exercice 1.2.2 :** Si  $X$  et  $Y$  sont gaussiennes indépendantes de loi  $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$  et  $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ , la somme  $X + Y$  est gaussienne: ceci se voit très facilement avec les fonctions caractéristiques:

$$E(e^{it(X+Y)}) = E(e^{itX})E(e^{itY}) = e^{itm_1 - \frac{t^2\sigma_1^2}{2}} e^{itm_2 - \frac{t^2\sigma_2^2}{2}} = e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

avec  $m = m_1 + m_2$  et  $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ .

On peut le voir aussi en se souvenant que si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, de densité  $f$  et  $g$ , la somme  $X + Y$  a pour densité  $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$  et en effectuant le calcul. Attention, ce résultat n'est pas nécessairement vrai si on n'a pas l'indépendance de  $X$  et  $Y$  (la somme de deux gaussiennes est une gaussienne si le vecteur est gaussien).

On peut aussi calculer la transformée de Laplace de la somme

$$\begin{aligned} E(\exp(\lambda(X+Y))) &= E(\exp(\lambda(X))E(\exp(\lambda(Y))) \\ &= \exp[\lambda(m_1 + m_2) + \frac{\lambda^2}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)] \end{aligned}$$

ce qui montre que la somme a une loi gaussienne d'espérance  $m_1 + m_2$  et de variance  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ .

**Exercice 1.2.3 :**

1. Si  $X$  est  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , sa densité est  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}$  et la v.a.  $Y = \frac{X-m}{\sigma}$  est  $\mathcal{N}(0, 1)$ . On peut le vérifier de plusieurs façons.

- En calculant la fonction de répartition de  $Y$ : Soit  $F_Y$  la fonction de répartition de  $Y$ . On a  $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq m + y\sigma) = F_X(m + y\sigma)$ . Il reste à dériver par rapport à  $y$  pour obtenir la densité de  $Y$  qui est  $\sigma f(m + y\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{y^2}{2}$ .
- On peut utiliser les fonctions caractéristiques. Soit  $\phi(t) = E(e^{itX}) = e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$  la fonction caractéristique de  $X$ ; la fonction caractéristique de  $Y$  est

$$E(e^{itY}) = E(e^{it\frac{X-m}{\sigma}}) = e^{-\frac{itm}{\sigma}} \phi\left(\frac{t}{\sigma}\right) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Cette remarque permet de ramener des calculs sur  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  à des calculs sur  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

La variable  $X - m$  est gaussienne centrée. D'où en utilisant l'exercice 1.2.1,  $E(|X - m|) = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$ .

2. On a  $E(e^{\lambda X}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} \exp -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} dx$ .

On montre que  $e^{\lambda x} \exp -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} = \exp(\lambda m + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2) \exp[-\frac{1}{2\sigma^2}(x - (m + \lambda\sigma^2))^2]$  et le résultat s'obtient facilement.

3. Soit  $X$  une v.a. de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . On a

$$E(\mathbb{1}_{X < b} e^{\lambda X}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^b e^{\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\lambda^2}{2}} \int_{-\infty}^{b-\lambda} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{\frac{\lambda^2}{2}} \Phi(b - \lambda).$$

4. Il est facile, par changement de variable, d'obtenir

$$\mathbb{E}(e^{\theta X} f(X)) = e^{m\theta + \sigma^2\theta^2/2} \mathbb{E}(f(X + \theta\sigma^2))$$

pour  $f$  continue bornée.

5. Par dérivation par rapport à  $\theta$ , on obtient pour  $f$  "régulière"

$$\mathbb{E}(f(X)(X - m)) = \sigma^2 \mathbb{E}(f'(X))$$

6. En dérivant  $\mathbb{E}(e^{aG} \mathcal{N}(bG + c))$  par rapport à  $b$ , on obtient le résultat.

**Exercice 1.2.4 :** On rappelle quelques résultats classiques:

(a) la convergence  $L^2$  implique la convergence  $L^1$ :  $\|X_n - X\|_2$  converge vers 0 implique  $\|X_n - X\|_1$  converge vers 0, avec  $\|X\|_1 = \int_{\Omega} |X| d\mathbb{P}$ . Ce résultat est évident compte tenu de l'inégalité  $\|X\|_1 \leq \|X\|_2$  qui résulte de la positivité de la variance  $\text{Var}(|X|) = \|X\|_2^2 - \|X\|_1^2$ .

(b) Si  $X_n$  converge vers  $X$  dans  $L^2$  (resp.  $L^1$ ), on a  $\mathbb{E}(X_n^2)$  converge vers  $\mathbb{E}(X^2)$  (resp  $\mathbb{E}(X_n)$  converge vers  $\mathbb{E}(X)$ ). (La réciproque est fautive)

Si  $X_n$  converge dans  $L^2$  vers  $X$ , on a en particulier  $m_n$  converge vers  $m$  et  $\sigma_n^2$  converge vers  $\sigma^2$ . La suite de fonctions caractéristiques  $e^{itm_n - \frac{t^2\sigma_n^2}{2}}$  converge vers  $e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$  et la loi de  $X$  est gaussienne.

**Exercice 1.2.5 :** Soit  $X$  un vecteur gaussien. Le vecteur  $Y = AX$  est un vecteur gaussien, car toutes les combinaisons linéaires de composantes de  $Y$  sont des combinaisons linéaires de composantes de  $X$ , donc une variable gaussienne.

Que le vecteur  $X$  soit gaussien ou non, on a  $\mathbb{E}(AX) = A\mathbb{E}(X)$  et  $\text{Var} AX = A^t(\text{Var} X)A$ , où  $\text{Var} X$  désigne la matrice de variance covariance du vecteur  $X$ . On obtient dans le cas  $p = 1$  que

$A^t(\text{Var } X)A \geq 0$ , c'est-à-dire que les matrices de variance covariance sont semi définies positives.

**Exercice 1.2.6 :** La v.a.  $\lambda X + \mu Y$  est gaussienne d'espérance  $\lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y)$  et de variance  $\lambda^2 \sigma^2(X) + \mu^2 \sigma^2(Y)$ . On en déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\exp(\lambda X + \mu Y)) &= \exp \left[ \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y) + \frac{1}{2}(\lambda^2 \sigma^2(X) + \mu^2 \sigma^2(Y)) \right] \\ &= \exp \left[ \lambda \mathbb{E}(X) + \frac{1}{2} \lambda^2 \sigma^2(X) \right] \exp \left[ \mu \mathbb{E}(Y) + \frac{1}{2} \mu^2 \sigma^2(Y) \right] = \mathbb{E}(\exp \lambda X) \mathbb{E}(\exp \mu Y)\end{aligned}$$

d'où l'indépendance.

**Exercice 1.2.7 :** Si  $(X, Y)$  est un vecteur gaussien,  $X$  et  $Y$  sont des vecteurs gaussiens.

Cas  $d = 1$ . La projection de  $X$  sur  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  est de la forme  $Pr X = \sum_{i=1}^n a_i Y_i$ . C'est une v.a. gaussienne car  $Y$  est gaussien. Le vecteur  $(X - Pr X, Y)$  est gaussien. Les vecteurs  $X - Pr X$  et  $Y$  sont indépendants car  $\mathbb{E}((X - Pr X)Y_i) = 0$  par définition de la projection.

**Exercice 1.2.8 :** Toujours avec la transformée de Laplace.

On vérifie dans un premier temps que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\exp(\lambda X)) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(\exp(\lambda X)|Y)] = \mathbb{E}[\exp(\lambda(aY + b) + \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2)] \\ &= \exp[\lambda a \mathbb{E}(Y) + \frac{\lambda^2 a^2}{2}\sigma^2(Y)] \exp[\lambda b + \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2]\end{aligned}$$

donc, la v.a.  $X$  est gaussienne d'espérance  $b + a \mathbb{E}(Y)$  et de variance  $\sigma^2 + a^2 \sigma^2(Y)$ . On calcule de la même façon  $\mathbb{E}(Y e^{\lambda X}) = \mathbb{E}(Y \exp(\lambda(aY + b) + \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2))$  et en dérivant par rapport à  $\lambda$ , on trouve  $\mathbb{E}(XY) = a \mathbb{E}(Y^2) + b \mathbb{E}(Y)$ .

D'autre part

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\exp(\lambda X + \mu Y)) &= \mathbb{E}[\exp(\mu Y) \mathbb{E}(\exp(\lambda X)|Y)] \\ &= \mathbb{E}[\exp(\mu Y) \exp(\lambda(aY + b) + \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2)] \\ &= \mathbb{E}[\exp[(\lambda a + \mu)Y]] \exp(\lambda b + \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2}) \\ &= \exp[(\lambda a + \mu) \mathbb{E}(Y) + \frac{(\lambda a + \mu)^2}{2}\sigma^2(Y)] \exp(\lambda b + \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2})\end{aligned}$$

et on vérifie que ceci est

$$\exp(\lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y)) + \frac{1}{2} \text{Var}(\lambda X + \mu Y)$$

### 1.3 Espérance conditionnelle

**Exercice 1.3.2 :** Il suffit de calculer  $\mathbb{E}([X - Y]^2 | \mathcal{G})$  qui vaut 0 (développer le carré) donc, en prenant l'espérance  $\mathbb{E}([X - Y]^2) = 0$ .

**Exercice 1.3.5 :** Sous les hypothèses de l'exercice  $\mathbb{E}(X - Y | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X | \mathcal{G}) - Y$  car  $Y$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable et  $\mathbb{E}(X - Y | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X - Y) = m$  par indépendance. D'où  $\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) = m + Y$ . De la même façon  $\mathbb{E}((X - Y)^2 | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X^2 | \mathcal{G}) - 2Y \mathbb{E}(X | \mathcal{G}) + Y^2$  d'où  $\mathbb{E}(X^2 | \mathcal{G}) = \sigma^2 + (Y + m)^2$ .

**Exercice 1.3.6 :** Par définition de la projection  $\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}((Pr X)Z)$  pour tout  $Z$  combinaison linéaire des  $Y_i$ . Cela ne suffit pas à dire que  $Pr X$  est l'espérance conditionnelle car il existe des v.a. qui sont  $Y$ -mesurable et qui ne sont pas combinaison linéaire des  $Y_i$ . Mais nous avons montré que  $X - Pr X$  et  $Y$  sont indépendantes, d'où  $\mathbb{E}(X - Pr X | Y) = \mathbb{E}(X - Pr X) = 0$ . D'où  $\mathbb{E}(X|Y) = Pr X$ . Si  $n = 1$ ,  $\mathbb{E}(X|Y) = Pr X$  appartient à l'espace engendré par  $Y$  donc s'écrit  $\alpha Y$ , et on déduit de  $\mathbb{E}(X|Y) = \alpha Y$ , après multiplication par  $Y$  et intégration  $\alpha = \frac{\mathbb{E}(XY)}{\mathbb{E}(Y^2)}$ .

**Exercice 1.3.7 :** Soit  $X = X_1 + X_2$ . On a  $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X_1|\mathcal{G}) + \mathbb{E}(X_2|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X_1) + X_2$ . Puis  $\mathbb{E}(X^2|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X_1^2) + X_2^2 + 2X_2\mathbb{E}(X_1)$  et

$$\text{Var}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X^2|\mathcal{G}) - (\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))^2 = \text{Var } X_1.$$

$$\mathbb{E}(e^{\lambda X}|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(e^{\lambda X_1} e^{\lambda X_2}|\mathcal{G}) = e^{\lambda X_2} \mathbb{E}(e^{\lambda X_1}) = e^{\lambda X_2} \exp(\lambda \mathbb{E}(X_1) + \frac{\lambda^2}{2} \text{Var}(X_1))$$

**Exercice 1.3.8 :** Il est facile de montrer la suite d'égalités

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z_1, Z_2|\mathcal{G}) &= \mathbb{E}(Z_1 Z_2|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(Z_1|\mathcal{G})\mathbb{E}(Z_2|\mathcal{G}) \\ &= \mathbb{E}(Z_1 Z_2|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(Z_2(\mathbb{E}(Z_1|\mathcal{G}))|\mathcal{G}) \\ &= \mathbb{E}((Z_1 - \mathbb{E}(Z_1|\mathcal{G})) Z_2|\mathcal{G}) \end{aligned}$$

**Exercice 1.3.9 :** Le membre de droite, noté  $K$  est  $\mathcal{H}$  mesurable. Il suffit de vérifier que

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_H) = \mathbb{E}(K \mathbb{1}_H)$$

pour tout  $H \in \mathcal{H}$ , ce qui se réduit à

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_C \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(K \mathbb{1}_C \mathbb{1}_A), \text{ et } \mathbb{E}(X \mathbb{1}_C \mathbb{1}_{A^c}) = \mathbb{E}(K \mathbb{1}_C \mathbb{1}_{A^c})$$

ce qui est routine.

**Exercice 1.3.10 :** Par linéarité,  $\mathbb{E}(aX + b|Z) = a\mathbb{E}(X|Z) + b$ . La tribu engendrée par  $Z$  est composée des sous-ensembles de  $\Omega$  de la forme  $Z^{-1}(A)$  où  $A$  est un borélien de  $\mathbb{R}$  et  $Z^{-1}(A) = \{\omega | Z(\omega) \in A\} = \{\omega | \alpha Y(\omega) + b \in A\} = \{\omega | Y(\omega) \in B\}$  où  $B$  est l'ensemble des nombres réels tels que  $x \in B \iff \alpha x + b \in A$  et est un borélien (La preuve parfaite exigerait la démonstration de ce point, qui tient au fait que  $B$  est l'image réciproque de  $A$  par l'application  $g : y \rightarrow \frac{1}{\alpha}y - b$ , soit  $B = g^{-1}(A)$  et que  $g$  est continue, donc borélienne)

**Exercice 1.3.11 :** La première question est directe en utilisant le résultat admis dans l'exercice 1.1.6. En utilisant cette question, on a que  $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \mathbb{1}_{1 \leq \tau}$  est de la forme  $h(1 \wedge \tau) \mathbb{1}_{1 \leq \tau} = h(1) \mathbb{1}_{1 \leq \tau}$ . En prenant l'espérance des deux membres, on identifie la constante  $h(1)$ .

**Exercice 1.3.12 :** Trivial.

**Exercice 1.3.13 :**  $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$  est  $\mathcal{G} \vee \mathcal{F}$  mesurable. Soit  $F \in \mathcal{F}$  et  $G \in \mathcal{G}$ , on a alors, en utilisant l'indépendance

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_F \mathbb{1}_G) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_F) \mathbb{E}(\mathbb{1}_G)$$

et

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_F \mathbb{1}_G \mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_F \mathbb{E}(X|\mathcal{F})) \mathbb{E}(\mathbb{1}_G)$$

donc  $\mathbb{E}(X \mathbb{1}_F \mathbb{1}_G) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_F \mathbb{1}_G \mathbb{E}(X|\mathcal{F}))$ . Nous avons donc montré que  $\mathbb{E}(X \mathbb{1}_H) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_H \mathbb{E}(X|\mathcal{F}))$  pour tout  $H \in \mathcal{G} \vee \mathcal{F}$  de la forme  $H = F \cap G$ . Ces ensembles engendrent la tribu  $\mathcal{G} \vee \mathcal{F}$  et forment une famille stable par intersection. L'application qui à  $H$  associe  $\mathbb{E}(X \mathbb{1}_H)$  (resp.  $\mathbb{E}(\mathbb{1}_H \mathbb{E}(X|\mathcal{F}))$ ) définit

une mesure positive sur cette tribu, les deux mesures, après normalisation par  $\mathbb{E}(X)$  sont des probabilités (c'est-à-dire l'application qui à  $H$  associe  $\mathbb{E}(X \mathbb{1}_H)/\mathbb{E}(X)$  est une probabilité) qui coïncident sur les ensembles de la forme  $F \cap G$ , donc, par théorème de classe monotone, elles coïncident sur la tribu engendrée.

**Exercice 1.3.14 :** Seule la réciproque demande une démonstration. Si  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X|\mathcal{G})$  alors  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(LX|\mathcal{G}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X|\mathcal{G})\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(L|\mathcal{G}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(L|\mathcal{G})|\mathcal{G})$  D'où  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X(L - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(L|\mathcal{G}))|\mathcal{G}) = 0$  pour tout  $X$ . Il en résulte (prendre  $X = L - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(L|\mathcal{G})$ ) que  $L - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(L|\mathcal{G}) = 0$ .

**Exercice 1.3.15 :** Soit  $d\mathbb{Q} = \Psi(X)d\mathbb{P}$ . On a  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\phi(X)) = \int \phi(x)f(x)dx$ ,  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\phi(X)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\Psi(X)\phi(X)) = \int \Psi(x)\phi(x)f(x)dx$ . Il suffit de choisir  $\Psi$  telle que  $\Psi(x)f(x) = g(x)$ .

## 1.4 Martingales

**Exercice 1.4.1 :** Soit  $s \geq t$  et  $X_t = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)$ . On a, en utilisant  $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$

$$\mathbb{E}(X_s|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_s|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t) = X_t.$$

**Exercice 1.4.2 :** Soit  $X_t = M_t - A_t$ . On a, pour  $t \geq s$   $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = M_s - \mathbb{E}(A_t|\mathcal{F}_s)$  et comme  $A_s \leq A_t$  ou  $-A_t \leq -A_s$ ,  $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \leq M_s - \mathbb{E}(A_s|\mathcal{F}_s) = M_s - A_s = X_s$ .

**Exercice 1.4.3 :** C'est le lemme de Fatou: de l'inégalité

$$\mathbb{E}(M_{t \wedge \tau_n}|\mathcal{F}_s) = M_{s \wedge \tau_n}$$

on en déduit l'inégalité de surmartingale en utilisant que  $M_{s \wedge \tau_n}$  converge vers  $M_s$  et que

$$\lim \mathbb{E}(M_{t \wedge \tau_n}|\mathcal{F}_s) \leq \mathbb{E}(\lim M_{t \wedge \tau_n}|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s)$$

(le lemme de Fatou assure que  $\lim \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(\lim X_n|\mathcal{G})$  si les v.a. sont positives).

Soit  $F \in \mathcal{F}$  et  $G \in \mathcal{G}$   $\mathbb{E}(X \mathbb{1}_F \mathbb{1}_G) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_F \mathbb{1}_G \mathbb{E}(X|\mathcal{F}))$  car  $\mathbb{E}(X \mathbb{1}_F \mathbb{1}_G) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_F) \mathbb{E}(\mathbb{1}_G)$  et  $\mathbb{E}(\mathbb{1}_F \mathbb{1}_G \mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_F \mathbb{E}(X|\mathcal{F})) \mathbb{E}(\mathbb{1}_G)$ .

**Exercice 1.4.4 :** Par définition de la propriété de martingale,  $X_t = \mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_t)$ . Cette propriété est à la base de tous les calculs d'évaluation en finance. En effet, ces formules reposent sur le fait qu'un certain processus est une martingale et donc que sa valeur à l'instant  $t$  est l'espérance conditionnelle de sa valeur terminale.

**Exercice 1.4.7 :** Soit  $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t, t \geq 0)$  la filtration de  $M$ , c'est à dire  $\mathcal{G}_t = \sigma(M_s, s \leq t)$ . Par définition,  $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$  (La martingale  $M$  est  $\mathbb{F}$  adaptée, et la filtration de  $M$  est la plus petite filtration telle que la propriété d'adaptation soit vraie. On a alors  $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{G}_s) = \mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s|\mathcal{G}_s) = \mathbb{E}(M_s|\mathcal{G}_s) = M_s$  On peut aussi montrer que si  $M$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale et  $\mathcal{H}_t \subset \mathcal{F}_t$ ,  $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{H}_t)$  est une  $\mathbb{H}$ -martingale.

**Exercice 1.4.8 :** Pour  $s < t$ , on a  $(\tau \leq s) \subset (\tau < t)$ , d'où

$$Z_t = \mathbb{E}(\tau \leq t|\mathcal{F}_t) \geq \mathbb{E}(\tau \leq s|\mathcal{F}_t)$$

et le résultat suit en prenant l'espérance conditionnelle par rapport à  $\mathcal{F}_s$ .



**Exercice 1.4.9 :** Si  $X$  est un PAI, et  $X_t$  intégrable, pour  $t > s$ , les propriétés de l'espérance conditionnelle permettent d'écrire

$$\mathbb{E}(X_t - X_s | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t - X_s)$$

d'où  $Y_t \stackrel{\text{def}}{=} X_t - \mathbb{E}(X_t)$  est une martingale. En utilisant que le PAI  $Y$  est une martingale

$$\mathbb{E}(Y_t^2 - Y_s^2 | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((Y_t - Y_s)^2 | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((Y_t - Y_s)^2)$$

et il est facile d'en déduire que  $X_t^2 - \mathbb{E}(X_t^2)$  est une martingale. De la même façon

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_s) &= \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda X_t} | \mathcal{F}_s)}{\mathbb{E}(e^{\lambda X_t})} = \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda(X_t - X_s)} | \mathcal{F}_s)}{\mathbb{E}(e^{\lambda X_t})} e^{\lambda X_s} = \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda(X_t - X_s)})}{\mathbb{E}(e^{\lambda(X_t - X_s)}) \mathbb{E}(e^{\lambda X_s})} e^{\lambda X_s} \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}(e^{\lambda X_s})} e^{\lambda X_s} = Z_s \end{aligned}$$

## 1.5 Temps d'arrêt

**Exercice 1.5.1 :** La seule difficulté est la stabilité par passage au complémentaire. Si  $A \in \mathcal{F}_\tau$  on écrit

$$A^c \cap (\tau \leq t) = (\tau \leq t) - (A \cap (\tau \leq t)) \in \mathcal{F}_t$$

**Exercice 1.5.2 :** Par hypothèse sur  $X$ , pour tout  $a$ ,  $\{X \leq a\} \in \mathcal{F}_T$ . Par définition de la tribu  $\mathcal{F}_T$ ,  $\{X \leq a\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ . Par suite  $\{X \leq a\} \cap \{T \leq a\} \in \mathcal{F}_a$ . Le premier membre de cette inclusion est  $\{X \leq a\}$ .

**Exercice 1.5.4 :** Il suffit d'écrire

$$A \cap (T \leq t) = A \cap (S \leq t) \cap (T \leq t)$$

et donc, si  $A \in \mathcal{F}_S$  on a  $A \cap (T \leq t) \in \mathcal{F}_t$ .

**Exercice 1.5.5 :** Il suffit d'écrire

$$(S \leq a) \cap (S \leq t) = (S \leq (a \wedge t)) \in \mathcal{F}_{a \wedge t}$$

**Exercice 1.5.6 :** Montrons que  $S \leq T \in \mathcal{F}_T$ . pour cela, on écrit

$$(S \leq T) \cap (T \leq t) = (S \wedge t \leq T \wedge t) \cap (T \leq t) \cap (S \leq t)$$

et chacun des trois ensembles du membre de droite est dans  $\mathcal{F}_t$  (car  $S \wedge t$  est plus petit que  $t$  donc  $\mathcal{F}_t$  mesurable).

On introduit  $R = S \wedge T$ . C'est un temps d'arrêt,  $\mathcal{F}_R$  mesurable avec  $\mathcal{F}_R \subset \mathcal{F}_T$ . Donc  $(R = T) \in \mathcal{F}_T$ , et  $(R < T) \in \mathcal{F}_T$ , par suite  $(S < T) \in \mathcal{F}_T$  et  $S = T \in \mathcal{F}_T$ , ainsi que  $T \leq S$  et  $T < S$ .

**Exercice 1.5.7 :** Soit  $\omega$  fixé. La fonction  $t \rightarrow Z_t(\omega)$  vaut 1 pour  $t \in [S(\omega), T(\omega[$  et 0 sinon. Elle est continue sur les trois intervalles  $[0, S(\omega)[$ ,  $]S(\omega), T(\omega[$ ,  $]T(\omega), \infty[$ . Elle est continue à droite en  $S(\omega)$  car si  $t \rightarrow S(\omega)$  "par la droite" (soit  $t > S(\omega)$ ),  $Z_t(\omega) = 1$  tend vers  $Z_{S(\omega)}(\omega) = 1$ .

**Exercice 1.5.11 :** Utiliser le théorème d'arrêt et le temps d'arrêt  $T_y$  pour  $y > a$ . On a  $\mathbb{E}(M_{T_y \wedge t}) = a$ . On fait alors tendre  $t$  vers l'infini  $M_{T_y \wedge t}$  converge vers  $y$  sur  $T_y < \infty$  et vers 0 sinon. (et est borné). D'où  $\mathbb{P}(T_y < \infty) = a/y$ . Il reste à remarquer que  $\mathbb{P}(T_y < \infty) = \mathbb{P}(\sup M_t \geq y)$ .

## 1.6 Temps discret

**Exercice ?? :** L'égalité  $\mathbb{E}(X_{n+p}|\mathcal{F}_n) = X_n$  est vraie pour  $p = 1$ . En utilisant

$$\mathbb{E}(X_{n+p}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+p}|\mathcal{F}_{n+p-1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+p-1}|\mathcal{F}_n)$$

on démontre le résultat par récurrence.

**Exercice ?? :** On obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((H \cdot M)_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(H_k(M_k - M_{k-1}) | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} H_k(M_k - M_{k-1}) + \mathbb{E}(H_n(M_n - M_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} H_k(M_k - M_{k-1}) + H_n \mathbb{E}(M_n - M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} H_k(M_k - M_{k-1}) \end{aligned}$$

## 1.7 Algèbre bêta-gamma

## 1.8 Divers

**Exercice 1.8.1 :**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\exp - \lambda M_\tau) &= \mathbb{E}(\theta \int_0^\infty dt e^{-\theta t} e^{-\lambda M_t}) = \mathbb{E}(\theta \int_0^\infty dt e^{-\theta t} \lambda \int_{M_t}^\infty e^{-\lambda u} du) \\ &= \mathbb{E}(\theta \int_0^\infty dt \int_0^\infty du e^{-\theta t} \lambda \mathbb{1}_{u > M_t} e^{-\lambda u}) = \mathbb{E}(\theta \int_0^\infty du \int_0^\infty dt e^{-\theta t} \lambda \mathbb{1}_{T_u > t} e^{-\lambda u}) \\ &= \theta \mathbb{E}(\int_0^\infty du e^{-\lambda u} \lambda \int_0^{T_u} dt e^{-\theta t}) = \int_0^\infty du e^{-\lambda u} \lambda (1 - e^{-\theta T_u}) \end{aligned}$$

**Exercice 1.8.2 :** La partie directe est évidente, car  $e^{\lambda X}$  et  $e^{\lambda Y}$  sont indépendantes. La réciproque n'est pas vraie, comme le montre le contre exemple suivant: Soit  $X, Y$  telles que  $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = a_{i,j}$  où les  $a_{i,j}$  sont donnés par les coefficients de la matrice

$$\begin{bmatrix} 1/9 & 1/6 & 1/18 \\ 1/18 & 1/9 & 1/6 \\ 1/6 & 1/18 & 1/9 \end{bmatrix}$$

La loi de  $X$  est égale à celle de  $Y$  et  $\mathbb{P}(X = i) = 1/3 = \mathbb{P}(Y = j)$ . On vérifie que  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes (par exemple  $\mathbb{P}(X = 1, Y = 3) \neq 1/9$ ).

La loi de  $X + Y$  est égale à la loi de  $X_1 + Y_1$  où  $X_1$  a même loi que  $X$ ,  $Y_1$  a même loi que  $Y$  et  $X_1$  et  $Y_1$  sont indépendantes.

Cet exercice montre que la loi de la somme de deux v.a. dépend très fortement de la loi du COUPLE. Rappelons à ce sujet que si  $Z_1$  et  $Z_2$  sont gaussiennes, cela n'implique pas que  $Z_1 + Z_2$  est gaussienne: Le contre exemple suivant dû à Nelson le prouve: Soit  $n$  la densité gaussienne réduite centrée et  $u$  une fonction impaire continue, nulle hors de  $[-1, +1]$  telle que  $|u(x)| < (2\pi e)^{-1/2}$ . On vérifie que  $f(x, y) = n(x)n(y) + u(x)u(y)$  est une densité, que les lois marginales sont normales, et

la loi de la somme n'est pas normale.

Par contre, si le vecteur  $(X, Y)$  est gaussien, la somme  $X + Y$  est gaussienne. Pour que le vecteur  $(X, Y)$  soit gaussien, il faut et il suffit que  $X$  soit gaussien et que la loi conditionnelle de  $Y$  à  $X$  soit gaussienne.



## Chapter 2

# Mouvement Brownien, Corrigés

### 2.1 Propriétés élémentaires

**Exercice 2.1.1 :** Trivial. Ceci constitue une caractérisation du mouvement Brownien comme processus gaussien centré de covariance  $t \wedge s$ .

**Exercice 2.1.3 :**

1. On a  $\mathbb{E}(B_s B_t^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(B_s B_t^2 | \mathcal{F}_s))$ . La variable aléatoire  $B_s$  est  $\mathcal{F}_s$ -mesurable, d'où  $\mathbb{E}(B_s B_t^2) = \mathbb{E}(B_s \mathbb{E}(B_t^2 | \mathcal{F}_s))$ .  
On sait que  $B_t^2 - t$  est une martingale, d'où, si  $s > t$ ,  $\mathbb{E}(B_t^2 | \mathcal{F}_s) = B_s^2 - s + t$ . En utilisant que la v.a.  $B_t$  est centrée et que  $\mathbb{E}(B_t^3) = 0$ , on obtient que

$$\mathbb{E}(B_s B_t^2) = \mathbb{E}(B_s (B_s^2 - s + t)) = \mathbb{E}(B_s^3) = 0.$$

Si  $s > t$ , on a  $\mathbb{E}(B_s B_t^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(B_s B_t^2 | \mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}(B_t^2 \mathbb{E}(B_s | \mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}(B_t^3) = 0$  où on a utilisé la propriété de martingale de  $B$ .

2. Le MB est une martingale, donc  $\mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s) = B_s$  pour  $t \geq s$  et  $\mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s) = B_s$  pour  $t < s$  car  $B_t$  est  $\mathcal{F}_s$ -mesurable dans ce cas. Si  $s < t$ ,  $\mathbb{E}(B_t | B_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s + B_s | B_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s | B_s) + B_s = B_s$  car  $B_t - B_s$  est indépendant de  $B_s$  et centré. Si  $t < s$ , on s'inspire du pont Brownien (voir ex suivant) pour écrire  $\mathbb{E}(B_t | B_s) = \mathbb{E}(B_t - \frac{t}{s} B_s | B_s) + \frac{t}{s} B_s$ . La v.a.  $B_t - \frac{t}{s} B_s$  est centrée et indépendante de  $B_s$ : en effet, le couple  $(B_t - \frac{t}{s} B_s, B_s)$  est un couple gaussien centré et sa covariance est nulle. On en déduit  $\mathbb{E}(B_t | B_s) = \frac{t}{s} B_s$ .  
On peut aussi utiliser les résultats sur le conditionnement d'un vecteur gaussien.
3. La variable  $B_t + B_s$  est gaussienne (car  $B$  est un processus gaussien) centrée. On peut aussi écrire  $(B_t + B_s)$  comme une somme de v.a. gaussiennes indépendantes: si  $t > s$ ,  $B_t + B_s = B_t - B_s + 2B_s$ . On en déduit que sa variance est  $t + 3s$ .

4. Soit  $\theta_s$  une variable aléatoire bornée  $\mathcal{F}_s$ -mesurable. On a, pour  $s \leq t$

$$\mathbb{E}(\theta_s (B_t - B_s)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\theta_s (B_t - B_s) | \mathcal{F}_s)) = \mathbb{E}(\theta_s \mathbb{E}((B_t - B_s) | \mathcal{F}_s)) = 0.$$

De même

$$\mathbb{E}(\theta_s (B_t - B_s)^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\theta_s (B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s)) = \mathbb{E}(\theta_s \mathbb{E}((B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s)) = (t - s) \mathbb{E}(\theta_s).$$

5.  $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_t \leq a}) = \mathbb{P}(B_t \leq a) = \mathbb{P}(\sqrt{t}U \leq a) = \mathbb{P}(U \leq a/\sqrt{t})$  où  $U$  est une v.a. de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

$\mathbb{E}(B_t \mathbb{1}_{B_t \leq a}) = \int_{-\infty}^a x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{2t}) dx = \sqrt{t} \int_{-\infty}^{a/\sqrt{t}} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{y^2}{2}) dy$  et la dernière intégrale se calcule facilement.

**Exercice 2.1.4 :**

Pour  $t > u$ , la propriété d'indépendance et de stationarité des accroissements conduit à

$$f(B_t) = f(B_t - B_u + B_u) \stackrel{\text{loi}}{=} f(\hat{B}_{t-u} + B_u) \stackrel{\text{loi}}{=} f(\hat{B}_{t-u} + \sqrt{u}G)$$

où  $\hat{B}_s = B_{s+u} - B_u$  est un MB indépendant de  $\mathcal{F}_u$  et  $G$  une v.a. gaussienne standard, indépendante de  $\hat{B}_{t-u}$ .

**Exercice 2.1.5 :**

On peut calculer la densité de  $B_\Theta$

$$\mathbb{P}(B_\Theta \in dx) = \int \mathbb{P}(B_t \in dx) \theta e^{-\theta t} \mathbb{1}_{t>0} dt = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{2t}) \theta e^{-\theta t} dt$$

On trouve

$$\mathbb{P}(B_\Theta \in dx) = \frac{\sqrt{2\theta}}{2} e^{-|x|\sqrt{2\theta}} dx$$

mais ce calcul d'intégrale n'est pas trivial. Cependant, on peut y arriver sans utiliser un attirail lourd de changement de variables. On sait que la transformée de Laplace du temps d'atteinte du niveau  $a$  par un mouvement Brownien est  $e^{-|a|\sqrt{2\lambda}}$  et que la densité de ce temps d'atteinte est  $\frac{|a|}{\sqrt{2\pi u^3}} e^{-a^2/2u}$ . Ce qui s'écrit

$$-|a|\sqrt{2\lambda} = \mathbb{E}(e^{-\lambda T_a}) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{|a|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-a^2/2t} dt.$$

Par dérivation par rapport à  $\lambda$ , on obtient

$$\frac{|a|}{\sqrt{2\lambda}} e^{-|a|\sqrt{2\lambda}} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{|a|}{\sqrt{2\pi t}} e^{-a^2/2t} dt.$$

D'où

$$\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-a^2/2t} dt = \frac{\sqrt{2\lambda}}{2} e^{-|a|\sqrt{2\lambda}}.$$

**Exercice 2.1.6 :**

1. Le processus  $M$  est  $\mathbb{F}$ -mesurable. La v.a.  $M_t$  est intégrable:  $\mathbb{E}(|B_t^3|) = Ct^{\frac{3}{2}}$  où  $C$  est une constante et  $\mathbb{E}|\int_0^t B_s ds| \leq \int_0^t \mathbb{E}(|B_s|) ds = \int_0^t \sqrt{\frac{2s}{\pi}} ds < \infty$ .

En utilisant que, pour  $t > s$ , la v.a.  $B_t - B_s$  est indépendante de  $\mathcal{F}_s$ , on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_t^3 | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}((B_t - B_s + B_s)^3 | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((B_t - B_s)^3) + 3B_s \mathbb{E}(B_t - B_s)^2 + 3B_s^2 \mathbb{E}(B_t - B_s) + B_s^3 \\ &= 3B_s(t - s) + B_s^3. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\mathbb{E}(\int_0^t B_u du | \mathcal{F}_s) = \int_0^t \mathbb{E}(B_u | \mathcal{F}_s) du = \int_0^s \mathbb{E}(B_u | \mathcal{F}_s) du + \int_s^t \mathbb{E}(B_u | \mathcal{F}_s) du = \int_0^s B_u du + B_s(t-s)$$

La propriété de martingale de  $M$  est alors facile à vérifier.

2. Des calculs analogues aux précédents montrent que  $B_t^3 - 3tB_t$  est une martingale. Il suffit de montrer que pour  $s < t$ ,  $\mathbb{E}(B_t^3 - 3tB_t | \mathcal{F}_s) = B_s^3 - 3sB_s$ . Or, en utilisant que  $B_t - B_s$  est indépendant de  $\mathcal{F}_s$ , on obtient  $\mathbb{E}((B_t - B_s)^3 | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((B_t - B_s)^3) = 0$  car  $\mathbb{E}(X^3) = 0$  si  $X$  est une variable gaussienne centrée. Il reste à utiliser  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$  pour obtenir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_t - B_s)^3 | \mathcal{F}_s &= \mathbb{E}(B_t^3 | \mathcal{F}_s) - 3B_s \mathbb{E}(B_t^2 | \mathcal{F}_s) + 3B_s^2 \mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s) - B_s^3 \\ &= \mathbb{E}(B_t^3 | \mathcal{F}_s) - 3B_s(B_s^2 - s + t) + 3B_s^2 B_s - B_s^3\end{aligned}$$

Le processus  $B_t^3 - 3tB_t$  est une martingale, donc par différence  $tB_t - \int_0^t B_s ds$  est une martingale, égale (intégration par parties) à  $\int_0^t s dB_s$ .

3. La v.a.  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable et intégrable : en effet  $|X_t| \leq t|B_t| + \int_0^t |B_s| ds =: Z$  et il est facile de vérifier que  $Z$  est intégrable (soit  $\mathbb{E}(Z) < \infty$ , car  $\mathbb{E}(|B_t|) = \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{2\pi}}$ ). Soit  $t > s$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(tB_t - \int_0^t B_u du | \mathcal{F}_s) = t\mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s) - \int_0^t \mathbb{E}(B_u | \mathcal{F}_s) du \\ &= tB_s - \int_0^s B_u du - \int_s^t B_s du = tB_s - \int_0^s B_u du - B_s(t - s) \\ &= - \int_0^s B_u du + B_s s = X_s\end{aligned}$$

le processus  $X$  est une martingale.

On peut aussi appliquer la formule d'Itô et vérifier que  $dX_t = t dB_t$ . Comme  $f(s) = s$  est de carré intégrable (soit  $\int_0^t s^2 ds < \infty$ ), l'intégrale de Wiener  $\int_0^t s dB_s$  est une martingale. On peut aussi remarquer que, par intégration par parties,  $X_t = \int_0^t s dB_s$ .

4. On verra plus tard que  $U$  n'est pas une martingale. On peut remarquer que  $\mathbb{E}(U_t)$  n'est sans doute pas constant.
5. Soit  $t > s$ .  $\mathbb{E}(Y_t | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(t^2 B_t - 2 \int_0^t B_u du | \mathcal{F}_s) = t^2 \mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s) - 2 \int_0^t \mathbb{E}(B_u | \mathcal{F}_s) du = t^2 B_s - 2 \int_0^s B_u du - 2 \int_s^t B_s du = t^2 B_s - 2 \int_0^s B_u du - 2B_s(t - s) = Y_s + (t^2 - s^2)B_s - 2B_s(t - s)$  Pour que  $Y$  soit une martingale, il faudrait que  $0 = (t^2 - s^2)B_s - 2B_s(t - s) = (t - s)B_s(t + s - 2)$ , ce qui n'est pas.

**Exercice 2.4.4 :** En écrivant  $M_t = -(B_t^2 - t) + (a + b)B_t - ab$  et en utilisant que  $B$  et  $(B_t^2 - t, t \geq 0)$  sont des martingales, le caractère martingale de  $M$  provient de la structure espace vectoriel de l'ensemble des martingales. Le processus  $M_{t \wedge T_{a,b}}$  est une martingale de valeur initiale  $-ab$ , donc  $\mathbb{E}[M_{t \wedge T_{a,b}}] = -ab$ . Le temps d'arrêt  $T_{a,b}$ , majoré par  $T_a$  est fini (cf. Exercice 2.4.1). Lorsque  $t$  converge vers l'infini  $M_{t \wedge T_{a,b}} = (a - B_{t \wedge T_{a,b}})(B_{t \wedge T_{a,b}} - b) + t \wedge T_{a,b}$  converge vers  $(a - B_{T_{a,b}})(B_{T_{a,b}} - b) + T_{a,b} = T_{a,b}$ , car  $(a - B_{T_{a,b}})(B_{T_{a,b}} - b) = 0$ . La quantité  $(a - B_{t \wedge T_{a,b}})(B_{t \wedge T_{a,b}} - b)$  est majorée par  $(a - b)^2$  et la quantité  $t \wedge T_{a,b}$  converge en croissant vers  $T_{a,b}$  dont on ne sait pas qu'elle est intégrable. On peut conclure en appliquant le théorème de Lebesgue dominé pour la partie  $\mathbb{E}(a - B_{t \wedge T_{a,b}})(B_{t \wedge T_{a,b}} - b)$  et le théorème de convergence monotone pour la partie portant sur le temps d'arrêt. On en déduit  $\mathbb{E}(T_{a,b}) = -ab$ .

**Exercice 2.1.9 :** Soit  $t \geq s$ .  $\mathbb{E}_x(f(B_t)g(B_s)) = \mathbb{E}_x(f(\hat{B}_{t-s} + B_s)g(B_s)) = \mathbb{E} \left[ \int dy f(y) p_{t-s}(B_s, y) g(B_s) \right] = \mathbb{E}(\Psi(X_s))$  avec  $\Psi(z) = g(z) \int f(y) p_{t-s}(z, y) dy$ .  
D'où  $\mathbb{E}_x(f(B_t)g(B_s)) = \int p_s(x, z) \Psi(z) dz$ .

Autre mode de raisonnement: On applique la propriété de Markov.

$$\mathbb{E}_x(f(B_t)g(B_s)) = \mathbb{E}_x(g(B_s)\mathbb{E}((f(B_t)|\mathcal{F}_s)) = \mathbb{E}_x(g(B_s)\mathbb{E}((f(B_t)|B_s)) = \mathbb{E}_x(g(B_s)\varphi(B_s))$$

avec  $\varphi(z) = \mathbb{E}_z(f(B_{t-s})) = \int f(y) p_{t-s}(z, y) dy$ .

**Exercice 2.1.11 :** En utilisant l'exercice 1.2.1:

$$\mathbb{E}_x(\exp -\lambda(B_t)^2) = \frac{1}{\sqrt{1+2\lambda t}} \exp(-\frac{\lambda x^2}{1+2\lambda t})$$

**Exercice 2.1.13 :**  $\mathbb{E} \left| \int_0^1 \frac{B_s}{s} ds \right| \leq \int_0^1 \mathbb{E} \left| \frac{B_s}{s} \right| ds = c \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{s}} ds < \infty$ .

**Exercice 2.1.14** Utiliser que  $\{B_t < 0\} \subset \{\tau \leq t\}$ .

**Exercice 2.1.16** La quantité  $e^{-\lambda t}u(B_t)$  est majorée par  $e^{-\lambda t}M$ , qui est intégrable sur  $[0, \infty]$ , d'où l'existence de  $f$  et  $g$ .

La suite d'égalités

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left( \int_{\tau}^{\infty} dt e^{-\lambda t} u(B_t) \right) &= \mathbb{E}_x \left( \mathbb{E}_x \left[ \int_{\tau}^{\infty} dt e^{-\lambda t} u(B_t) | \mathcal{F}_{\tau} \right] \right) \\ \mathbb{E}_x \left[ \int_{\tau}^{\infty} dt e^{-\lambda t} u(B_t) | \mathcal{F}_{\tau} \right] &= e^{-\lambda \tau} \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\infty} dt e^{-\lambda t} u(B_{t+\tau} - B_{\tau} + B_{\tau}) | \mathcal{F}_{\tau} \right] \\ \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\infty} dt e^{-\lambda t} u(B_{t+\tau} - B_{\tau} + B_{\tau}) | \mathcal{F}_{\tau} \right] &= \int_0^{\infty} dt e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x(u(B_{t+\tau} - B_{\tau} + B_{\tau}) | \mathcal{F}_{\tau}) \\ \mathbb{E}_x(u(B_{t+\tau} - B_{\tau} + B_{\tau}) | \mathcal{F}_{\tau}) &= \mathbb{E}_{B_{\tau}}[u(\hat{B}_t)] \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de la propriété forte de Markov,  $\hat{B}$  étant le Brownien  $(B_{t+\tau} - B_{\tau}, t \geq 0)$ , indépendant de  $\mathcal{F}_{\tau}$ , conduisent à

$$\mathbb{E}_x \left( \int_{\tau}^{\infty} dt e^{-\lambda t} u(B_t) \right) = \mathbb{E}_x(e^{-\lambda \tau} \psi(B_{\tau}))$$

avec  $\psi(x) = \int_0^{\infty} dt e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x[u(\hat{B}_t)] = f(x)$  ce qui est le résultat souhaité.

**Exercice 2.1.17 :** Il suffit d'écrire

$$\sum \frac{\alpha^k}{k!} \mathbb{E}(B_t^k | \mathcal{F}_s) = \sum \frac{\alpha^k}{k!} H_k(B_s, -(t-s))$$

**Exercice 2.1.19 :**  $\mathbb{P}(\text{au moins un zéro dans } ]s, t[ | B_s = a) = \mathbb{P}(T_a \leq t-s)$ . Il reste à calculer

$$2 \int_0^{\infty} da \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-a^2/2s} \int_0^{t-s} dx (2\pi x^3)^{-1/2} a \exp(-\frac{a^2}{2x})$$

On utilise Fubini et de la trigonométrie.



## 2.2 Processus Gaussien

**Exercice 2.2.1 :** Le processus  $Y$  tel que  $Y_t = \int_0^t B_u du$  est défini trajectoire par trajectoire, comme intégrale de Riemann d'une fonction continue. En particulier, on a  $dY_t = B_t dt$ . Nous vérifions que le processus  $Y$  est un processus gaussien. Tout d'abord, la v.a.  $Y_t$  est une gaussienne comme limite de sommes de Riemann qui sont des gaussiennes car  $B$  est un processus gaussien. Le caractère gaussien du processus s'obtient par un raisonnement analogue.

On a  $\mathbb{E}(Y_t) = \int_0^t \mathbb{E}(B_u) du = 0$ .

La covariance de  $Y$  est  $\mathbb{E}(Y_t Y_s) = \int_0^t du \int_0^s dv \mathbb{E}(B_u B_v)$ . Il reste à intégrer

$$\int_0^t du \left[ \int_0^s dv (u \wedge v) \right].$$

On se place dans le cas  $s < t$  et il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_t Y_s) &= \int_0^s du \left[ \int_0^s (v \wedge u) dv \right] + \int_s^t du \left[ \int_0^s (v \wedge u) dv \right] \\ &= \int_0^s du \left[ \int_0^u v dv + \int_u^s u dv \right] + \int_s^t du \left[ \int_0^s v dv \right]. \end{aligned}$$

Tous calculs faits, pour  $s < t$ :  $\mathbb{E}(Y_t Y_s) = \frac{s^2}{6}(3t - s)$ .

**Exercice 2.2.2** La solution est

$$X_t = e^{-at}x + e^{-at} \int_0^t e^{(a+b)t} dB_t$$

On procède comme pour le processus d'OU. On peut aussi résoudre  $dX_t = -aX_t dt$  ce qui donne  $X_t = Ce^{-at}$  et appliquer une méthode de variation de la constante. On cherche un processus  $C$  tel que  $X_t = C_t e^{-at}$  vérifie l'équation (cette méthode ne prend toute sa signification que si on a vu la formule d'intégration par parties)

$$dX_t = -aC_t e^{-at} dt + e^{-at} dC_t = -aX_t dt + e^{bt} dB_t$$

d'où  $e^{-at} dC_t = e^{bt} dB_t$  soit  $dC_t = e^{(b+a)t} dB_t$ . Il resterait à vérifier que l'on a bien trouvé une solution, car on ne dispose pas du lemme d'Itô et on ne sait pas justifier que la dérivée de  $C_t e^{-at}$  est  $-aC_t e^{-at} dt + e^{-at} dC_t$ .

**Exercice 2.2.4 :**

1. Le processus  $(Z_t = B_t - tB_1, 0 \leq t \leq 1)$  est un processus gaussien car pour tout choix de  $(a_i, t_i)$

$$\sum a_i Z_{t_i} = \sum a_i B_{t_i} - \left( \sum a_i t_i \right) B_1$$

est une v.a.r. gaussienne ( $B$  est un processus gaussien). De la même façon, on obtient que le vecteur  $(Z_t, B_1)$  est gaussien. Ses deux composantes  $Z_t$  et  $B_1$  sont indépendantes car  $\mathbb{E}(Z_t B_1) = \mathbb{E}(B_t B_1) - t\mathbb{E}(B_1^2) = 0$ . La covariance de  $Z$  est

$$\mathbb{E}(Z_t Z_s) = \mathbb{E}(B_s B_t) - s\mathbb{E}(B_1 B_t) - t\mathbb{E}(B_s B_1) + ts\mathbb{E}(B_1^2) = (s \wedge t) - st.$$

On appelle  $Z$  un pont Brownien.

2. Le processus  $(Y_t = Z_{1-t}, 0 \leq t \leq 1)$  est gaussien centré. Sa covariance est, pour  $s \leq t$ ,

$$\mathbb{E}(Y_t Y_s) = (1-t) \wedge (1-s) - (1-s)(1-t) = (s \wedge t) - st = s(1-t).$$

3. Soit  $Y_t = (1-t)B_{\frac{t}{1-t}}$ . Le processus  $Y$  est un processus gaussien car  $\sum a_i Y_{t_i} = \sum b_i B_{s_i}$ . On a  $\mathbb{E}(Y_t) = 0$  et pour  $s < t$

$$\mathbb{E}(Y_s Y_t) = (1-t)(1-s)\mathbb{E}(B_{\frac{t}{1-t}} B_{\frac{s}{1-s}}) = (1-t)(1-s)\frac{s}{1-s} = s(1-t)$$

**Exercice 2.2.5 :** Par définition de l'intégrale de Riemann, toute combinaison linéaire  $\sum_i a_i Z_{t_i}$  est limite dans  $L^2$  de sommes du type  $\sum_j b_j B_{t_j}$ , d'où le caractère gaussien. (Attention, il ne faut pas se contenter de dire que  $Z$  est la somme de deux processus gaussiens. La somme de deux v.a. gaussiennes n'est pas nécessairement une gaussienne. Cette propriété est vraie si les variables sont indépendantes) On utilise ici que  $\int_0^t \frac{B_s}{s} ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{B_{t_i}}{t_i} (t_{i+1} - t_i)$ .

Pour caractériser la loi du processus gaussien  $Z$ , il suffit de donner son espérance et sa covariance. Il est immédiat de montrer que  $\mathbb{E}(Z_t) = 0$ . Il reste à calculer la covariance. Soit  $s < t$ .

$$\mathbb{E}(Z_s Z_t) = \mathbb{E}(B_s B_t) - \mathbb{E}\left[\int_0^t B_s \frac{B_u}{u} du\right] - \mathbb{E}\left[B_t \int_0^s \frac{B_u}{u} du\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t du \frac{B_u}{u} \int_0^s dv \frac{B_v}{v}\right]$$

On utilise que  $\mathbb{E}\left(\int_a^b f(B_u) du\right) = \int_a^b \mathbb{E}[f(B_u)] du$  et que  $\mathbb{E}(B_u B_v) = u \wedge v$ . Après quelques calculs d'intégration sur les intégrales doubles, il vient  $\mathbb{E}(Z_s Z_t) = s$ . Le processus  $Z$  est un processus gaussien d'espérance nulle et de covariance  $s \wedge t$ .

Le processus  $Z$  est donc un mouvement Brownien. Cependant le processus  $Z$  n'est pas une  $(\mathcal{F}_t)$  martingale: pour  $s > t$

$$\mathbb{E}(Z_s - Z_t | \mathcal{F}_t) = \int_t^s \frac{1}{u} B_s du \neq 0$$

On a ici l'exemple d'un processus qui est un MB (et une martingale par rapport à sa propre filtration), mais qui n'est pas un brownien, ni même une martingale par rapport à une filtration plus grosse. Le problème est connu sous le nom de grossissement de filtration. (Voir l'exercice sur l'agent initié, dans le chapitre compléments)

**Exercice 2.2.6 :**  $B_u - \frac{u}{t} B_t = (B_u - \frac{u}{t+h} B_{t+h}) - \frac{u}{t} (B_t - \frac{t}{t+h} B_{t+h})$  montre la croissance de  $\Gamma_t$  et  $B_t$  est orthogonal à  $B_u - \frac{u}{t} B_t$ .

**Exercice 2.2.7 :** Rappel (cf. Exercice 1.6.2) : soit  $X$  est une v.a. de loi  $\mathbb{N}(m; \sigma^2)$  et  $Y = \exp\{\lambda(X - m) - \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\}$ . Soit  $d\mathbb{Q} = Y d\mathbb{P}$ . Sous  $\mathbb{Q}$ ,  $X$  est une v.a. de densité  $N(m + \lambda\sigma^2, \sigma^2)$ .

On montre alors que  $\tilde{B}_t = B_t - mt$  a une loi gaussienne sous  $\mathbb{Q}$ .

On vérifie ensuite l'indépendance des accroissements: il s'agit de montrer que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\phi(\tilde{B}_{t+s} - \tilde{B}_s) \psi(\tilde{B}_s)) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\phi(\tilde{B}_{t+s} - \tilde{B}_s)) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\psi(\tilde{B}_s))$$

pour toutes fonctions boréliennes bornées  $(\phi, \psi)$ . On a, par changement de probabilité, avec  $L_t = \exp(mB_t - \frac{m^2}{2}t)$

$$A = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\phi(\tilde{B}_{t+s} - \tilde{B}_s) \psi(\tilde{B}_s)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(L_{t+s} \phi(\tilde{B}_{t+s} - \tilde{B}_s) \psi(\tilde{B}_s)).$$

On a  $\tilde{B}_{t+s} - \tilde{B}_s = B_{t+s} - B_s - mt$ .

En utilisant l'indépendance de  $B_{t+s} - B_s$  et de  $B_s$  (sous  $\mathbb{P}$ ) et la forme de  $L$ , on obtient

$$A = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\exp(m(B_{t+s} - B_s) - \frac{1}{2}m^2t)] \phi(B_{t+s} - B_s - mt) \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\exp(mB_s - \frac{1}{2}m^2s)\psi(\tilde{B}_s)].$$

Sous  $\mathbb{P}$ ,  $B_{t+s} - B_s$  et  $B_t$  ont même loi, d'où

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\exp(mB_t - \frac{1}{2}m^2t)\phi(B_t - mt)] \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\exp(mB_s - \frac{1}{2}m^2s)\psi(\tilde{B}_s)] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\exp(mB_t - \frac{1}{2}m^2t)\phi(\tilde{B}_t)] \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\exp(mB_s - \frac{1}{2}m^2s)\psi(\tilde{B}_s)] \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$A = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\phi(\tilde{B}_t)) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\psi(\tilde{B}_s)).$$

**Exercice 2.2.8 :**

$$\sup_t (|B_t| - \mu t^{p/2}) = \sup_s (|B_{\lambda^2 s}| - \mu(\lambda^2 s)^{p/2}) \stackrel{\text{loi}}{=} \sup_s (\lambda |B_s| - \mu(\lambda^2 s)^{p/2}) = \lambda \sup_s (|B_s| - s^{p/2})$$

$$\mathbb{E}(|B_T|) \leq \mathbb{E}(|B_T| - \mu T^{p/2}) + \mu \mathbb{E}(T^{p/2}) \leq \mathbb{E}(\sup_t (|B_t| - \mu t^{p/2})) + \mu \mathbb{E}(T^{p/2})$$

## 2.3 Multidimensionnel

**Exercice 2.3.2 :** Si les coefficients  $\sigma_i$  sont des constantes, il suffit de définir  $B_3(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}(\sigma_1 B_1(t) + \sigma_2 B_2(t))$ . Ce processus est un mouvement Brownien car c'est une martingale et  $(B_3^2(t) - t; t \geq 0)$  est une martingale. Si les  $\sigma$  sont déterministes, on pose  $dB_3 = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2(t) + \sigma_2^2(t)}}(\sigma_1(t)dB_1(t) + \sigma_2(t)dB_2(t))$ .

Le processus

$$B_{(3)}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}}(B_{(2)}(t) - \rho B_{(1)}(t))$$

est une martingale

$$B_{(3)}^2(t) = \frac{1}{1 - \rho^2}(B_{(2)}^2(t) + \rho^2 B_{(1)}^2(t) - 2\rho B_{(1)}(t)B_{(2)}(t))$$

Par définition de la corrélation,  $B_{(1)}(t)B_{(2)}(t) - \rho t$  est une martingale. Il s'en suit que  $B_{(3)}^2(t) - t$  est une martingale, donc  $B_{(3)}$  est un MB. Il reste à montrer que  $B_{(3)}$  est indépendant de  $B_{(1)}$ . Remarque: On peut utiliser le théorème de RP pour établir que si le coefficient de corrélation de deux MB est nul, ces processus sont indépendants.

## 2.4 Temps d'atteinte

**Exercice 2.4.1 :** Soit  $\lambda > 0$ . Le processus  $M$  défini par  $M_t = \exp(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t)$  est une martingale. On applique le théorème d'arrêt de Doob. Si  $a > 0$ , la martingale  $M_{t \wedge T_a}$  est uniformément intégrable, car majorée par  $\exp(\lambda a)$ . Donc  $\mathbb{E}(\exp(\lambda B_{T_a} - \frac{1}{2}\lambda^2 T_a)) = 1$ , soit  $\mathbb{E}(\exp(\lambda a - \frac{1}{2}\lambda^2 T_a) \mathbb{1}_{T_a < \infty}) = 1$ . D'où  $\mathbb{E}(\exp(-\frac{1}{2}\lambda^2 T_a) \mathbb{1}_{T_a < \infty}) = \exp -\lambda a$ . Pour  $\lambda = 0$ ; on obtient  $\mathbb{P}(T_a < \infty) = 1$ , puis  $\mathbb{E}(\exp(-\frac{1}{2}\lambda^2 T_a)) = \exp -\lambda a$ . En dérivant par rapport à  $\lambda^2$ , et en prenant  $\lambda = 0$ , on en déduit l'espérance de  $T_a$ .

**Exercice 2.4.2 :** Appliquer le théorème d'arrêt de Doob à la martingale  $B$  et au processus  $B_{t \wedge n}^2 - (t \wedge n)$ .

**Exercice ?? :** On note  $S_t = \max_{s \leq t} B_s$ . En remarquant que  $S_T = \max_{s \leq t} B_s \vee \max_{t < s \leq T} B_s$  on en déduit

$$\mathbb{P}(\tau > T | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(S_T < a | \mathcal{F}_t) = \mathbb{1}_{S_t < a} \mathbb{P}(\max_{t < s \leq T} B_s - B_t < a - B_t | \mathcal{F}_t)$$

Le processus  $\tilde{B}_u = B_{t+u} - B_t$  est un MB indépendant de  $\mathcal{F}_t$ . D'où  $\mathbb{P}(\max_{t < s \leq T} B_s - B_t < a - B_t | \mathcal{F}_t) = \Psi(a - B_t)$  avec

$$\Psi(x) = \mathbb{P}(\max_{0 < u < T-t} \tilde{B}_u < x) = \mathbb{P}(|\tilde{B}_{T-t}| < x) = \mathbb{P}(|\sqrt{T-t} G| < x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{T-t}}} e^{-u^2/2} du.$$

**Exercice 2.4.5 :** Des calculs simples montrent que  $\mathbb{E}(e^{-\lambda T^d}) = \mathbb{E}(\exp(-|B_d| \sqrt{2\lambda}) e^{-\lambda d})$ . De même,  $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_d \leq \alpha} e^{-\lambda T^d}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_d \leq \alpha} \Phi(B_d)) e^{-\lambda d}$  avec  $\Phi(x) = \mathbb{E}_x(e^{-\lambda T_0}) = \mathbb{E}_0(e^{-\lambda T_x}) = \exp(-|x| \sqrt{2\lambda})$ . D'où

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_d \leq \alpha} e^{-\lambda T^d}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_d \leq \alpha} \exp(-|B_d| \sqrt{2\lambda}) e^{-\lambda d}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{G \leq \alpha/\sqrt{d}} \exp(G \sqrt{2d\lambda}) e^{-\lambda d})$$

**Exercice 2.4.3 :** La propriété de Markov fort montre que  $\hat{B}_t = B_{T_a+t} - B_{T_a} = B_{T_a+t} - a$  est indépendant de  $\mathcal{F}_{T_a}$ , donc de  $T_a$ . Comme  $b > a$ , on a

$$T_b = \inf\{t : B_t = b\} = \inf\{t \geq T_a : B_t = b\} = T_a + \inf\{t : \hat{B}_t = b - a\}$$

On en déduit que la v.a.  $T_b - T_a$  est indépendante de  $T_a$  et que  $T_b - T_a \stackrel{loi}{=} T_{b-a}$ . Le processus  $T_a$  est donc à accroissements indépendants et stationnaires. C'est donc un processus de Lévy.

Le processus  $e^{\theta(X_t - \nu t) - \frac{1}{2}\theta^2 t}$  est une martingale. On applique ensuite le théorème d'arrêt de Doob pour obtenir

$$\mathbb{E}\left(\exp\left[-\frac{1}{2}\lambda^2 T_a\right]\right) = e^{\nu a} \exp\left(-|a| \sqrt{\nu^2 + \lambda^2}\right).$$

Ensuite, on montre que

$$(e^{\beta b} - e^{\beta a})e^{\alpha X_t - \lambda t} + (e^{\alpha ab} - e^{\alpha b})e^{\beta X_t - \lambda t}$$

est une martingale pour  $\beta = \sqrt{\nu^2 + 2\lambda} - \nu$ ,  $\alpha = -\sqrt{\nu^2 + 2\lambda} - \nu$ .

**Exercice 2.4.7 :** Par définition  $\mathbb{P}(I \leq x) = \mathbb{P}(\inf_{s \leq T_1} B_s \geq -x) = \mathbb{P}(T_1 \leq T_{-x})$ . En utilisant le théorème d'arrêt de Doob  $\mathbb{E}(B_{T_1 \wedge T_{-x}}) = \mathbb{E}(B_0) = 0$ , d'où

$$\mathbb{P}(T_1 \leq T_{-x}) - x\mathbb{P}(T_1 \geq T_{-x}) = 0 = \mathbb{P}(T_1 \leq T_{-x}) - x(1 - \mathbb{P}(T_1 \leq T_{-x}))$$

$$\text{et } \mathbb{P}(T_1 \leq T_{-x}) = \frac{x}{1+x}.$$

**Exercice 2.4.8 :** On utilise que  $(M_{T_a^*} < y) = (\sup_{u < v} B_u < y)$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_{T_a^*} - y > x | M_{T_a^*} > y) &= \mathbb{P}(T^* > T_{x+y} | T_a^* > T_y) \\ &= \mathbb{P}(M_u - B_u \leq a, T_y < u < T_{x+y} | M_u - B_u < a, \forall u < T_y) \\ &= \mathbb{P}(\tilde{M}_u - \tilde{B}_u \leq a, \forall u, 0 < u < \tilde{T}_x) = \mathbb{P}(\tilde{M}_{T_a^*} \geq x) \end{aligned}$$

Pour obtenir le paramètre, on calcule l'espérance

$$0 = \mathbb{E}(B_{T^* \wedge n}) = \mathbb{E}(M_{T_a^* \wedge n}) - \mathbb{E}(M_{T_a^* \wedge n} - B_{T_a^* \wedge n})$$

et on passe à la limite  $\mathbb{E}(M_{T_a^* \wedge n}) = a$ .

**Exercice 2.4.9 :** Le processus  $\exp[-2\mu X_t/\sigma^2]$  est une martingale, en effet il est facile de mettre ce processus sous la forme  $\exp(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t)$ . On en déduit que  $h(X_t)$  est une martingale et que  $\mathbb{E}(h(X_{\tau \wedge t})) = h(0)$ . L'inégalité  $|h(X_{\tau \wedge t})| \leq \sup_{x \in [-B, A]} |h(x)|$  permet d'appliquer le théorème de convergence dominée.

**Exercice 2.4.15 :** On sait que (Lamberton et Lapeyre 2nd edition, page 96, Musiela et Rutkowski p. 49, Voir aussi Karatzas et Shreve, page 95) si  $M_t = \sup_{s \leq t} B_s$

$$\mathbb{P}(B_t \leq x, M_t \leq y) = \mathbb{P}(B_t \leq x) - \mathbb{P}(B_t \geq 2y - x)$$

pour  $0 \leq y, x \leq y$ . On en déduit, par dérivation

$$\mathbb{P}(B_t \in dx, M_t \leq y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{2t}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{(2y-x)^2}{2t})$$

et

$$\mathbb{P}(M_t \leq y | B_t = x) = \frac{\mathbb{P}(B_t \in dx, M_t \leq y)}{\mathbb{P}(B_t \in dx)} = 1 - \exp(-\frac{(2y-x)^2}{2t} + \frac{x^2}{2t})$$

Si le MB est issu de  $x$ , on utilise

$$\mathbb{P}(\sup_{s \leq t} B_s + x \leq y | B_t + x = z) = \mathbb{P}(M_t \leq y - x | B_t = z - x)$$

## 2.5 Scaling

**Exercice 2.5.2 :** La partie a) résulte de

$$(T_1 > t) = (1 > S_t) \stackrel{loi}{=} (1 > \sqrt{t}S_1) = (\frac{1}{S_1^2} > t)$$

La partie c) résulte de

$$\begin{aligned} d_{\Delta_a} &= \inf\{t \geq \Delta_a : B_t = 0\} = \inf\{t : \frac{1}{a}A_t \geq 1, \frac{1}{\sqrt{a}}B_t = 0\} \\ &\stackrel{loi}{=} \inf\{t : A_{t/a} \geq 1, B_{t/a} = 0\} = ad_{\Delta_1} \end{aligned}$$

et

$$(A_g \leq a) = (g \leq \Delta_1) = (1 \leq d_{\Delta_a} \stackrel{loi}{=} (1 \leq ad_{\Delta_1}) = (\frac{1}{d_{\Delta_1}} \leq a)$$

La partie d) est facile. Dans ce cas  $\Delta_1 \stackrel{loi}{=} T_1^* = \inf\{t : \sup_{s \leq t} |B_s| \geq 1\}$ .

**Exercice 2.5.3 :**

$$\mathbb{P}(\sup_{1 \leq t \leq 1} |B_t| \leq x) = \mathbb{P}(\sup_{1 \leq t \leq (1/x^2)} |B_t| \leq 1) = \mathbb{P}(M_1 \geq \frac{1}{x^2})$$

## 2.6 Compléments

**Exercice 2.6.1 :** On calcule  $\mathbb{E}((B_t - \hat{B}_t)^2)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((B_t - \hat{B}_t)^2) &= \mathbb{E}(B_t^2) + \mathbb{E}(\hat{B}_t^2) - 2\mathbb{E}(B_t \hat{B}_t) \\ &= 2t - 2\mathbb{E}(B_t \hat{B}_t) \end{aligned}$$

Il reste à calculer

$$\mathbb{E}(B_t \widehat{B}_t) = \mathbb{E}[\mathbb{E}((B_t \widehat{B}_t | \mathcal{G}_t))] = \mathbb{E}(\widehat{B}_t^2) = t$$

d'où  $\mathbb{E}((B_t - \widehat{B}_t)^2) = 0$ ; il s'en suit l'égalité souhaitée.

**Exercice 2.6.4 :** Soit  $s < t$ . Nous devons montrer que pour  $u \leq s$ ,  $\beta_u^{(s)} \stackrel{\text{def}}{=} B_u - \frac{u}{s} B_s \in \Pi_t$ . Il suffit d'écrire  $\beta_u^{(s)} = B_u - \frac{u}{t} B_t + \frac{u}{s} (\frac{s}{t} B_t - B_s) = \beta_u^{(t)} - \frac{u}{s} \beta_s^{(t)}$ . Le processus  $(\beta_u^{(t)}; u \leq t)$  est indépendant de la variable  $\frac{u}{t} B_t$  (calculer les covariances), et  $B_u = (\beta_u^{(s)} + \frac{u}{t} B_t)$  est la décomposition orthogonale de  $B$ , la projection de  $F_t$  est donc  $\int_0^t f(s) ds \beta_s^{(t)}$ . Le processus  $\widehat{B}$  est un processus gaussien centré de covariance  $t \wedge s$ , c'est un MB (On peut aussi le voir en utilisant des résultats d'unicité en loi de solution d'équa diff) Il est facile de montrer que

$$\widehat{B}_s = \beta_s^{(t)} - \int_0^s \frac{du}{u} \beta_u^{(t)}$$

et que, en particulier

$$\widehat{B}_t = - \int_0^t \frac{du}{u} \beta_u^{(t)}$$

D'où l'égalité des tribus. Il en résulte, en notant  $\bar{F}(t) = \int_0^t f(s) ds$  et en utilisant une intégration par partie que

$$\int_0^t f(s) dB_s = \int_0^t f(s) d\widehat{B}_s - \frac{B_t}{t} \bar{F}(t) + \int_0^t \frac{\bar{F}(s)}{s} d\widehat{B}_s.$$

**Exercice 2.6.7 :** On utilisera le théorème de représentation prévisible pour représenter  $B_t^{(1)}, B_t^{(2)}$  en terme de  $B^{(3)}$ . Si l'égalité était possible, on aurait  $B_t^{(i)} = \int_0^t \Phi_s^{(i)} dB_s$  avec  $\int_0^t \mathbb{E}[\Phi_s^{(i)}]^2 ds = t$  et  $\mathbb{E}(B_t^{(1)} B_t^{(2)}) = \mathbb{E}(\int_0^t \Phi_s^{(1)} \Phi_s^{(2)} ds) = 0$ .

**Exercice 2.6.8 :** Les premières questions se traitaient en utilisant des formules d'intégration par parties, ou la formule d'Itô. A la main, on calcule

$$\begin{aligned} B_t + \int_0^t \frac{B_s - X_s}{1-s} ds &= B_t + \int_0^t \frac{B_s}{1-s} ds - \int_0^t ds \int_0^s \frac{B_u}{(1-u)^2} du - \int_0^t ds \int_0^s \frac{1}{1-u} dB_u \\ &= B_t - \int_0^t \frac{t-u}{1-u} dB_u + \int_0^t \frac{B_s}{1-s} (1 - \frac{t-s}{1-s}) ds \\ &= \int_0^t (1 - \frac{t-u}{1-u}) dB_u + \int_0^t \frac{B_s}{1-s} (1 - \frac{t-s}{1-s}) ds \\ &= (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-u} dB_u + (1-t) \int_0^t \frac{B_s}{(1-s)^2} ds \end{aligned}$$

Par différentiation

$$\begin{aligned} dX_t &= (1-t) \frac{B_t}{(1-t)^2} dt - dt \int_0^t \frac{B_s}{(1-s)^2} ds + (1-t) \frac{1}{1-t} dB_t - dt \int_0^t \frac{1}{1-s} dB_s \\ &= \frac{B_t}{1-t} dt + dB_t - \frac{1}{1-t} X_t dt \end{aligned}$$

Le calcul de la covariance du processus Gaussien  $X$  s'obtenait en appliquant plusieurs fois le résultat d'isométrie

$$\mathbb{E}(\int_0^t f(u) dB_u \int_0^s g(u) dB_u) = \int_0^{t \wedge s} f(u) g(u) du$$

et en remarquant que les v.a.  $\int_0^t f(u)dB_u$  et  $\int_0^s g(v)dB_v$  sont indépendantes. On trouve pour  $s < t$

$$\mathbb{E}(X_s X_t) = s + 2s(1-t) + (2-s-t)\ln(1-s)$$

## 2.7 Finance

**Exercice 2.7.1 :** On calcule séparément  $\mathbb{E}(S_t \mathbb{1}_{S_t < K})$  et  $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_t < K})$ . On trouve

$$\mathbb{E}(e^{-rt}(S_t - K)^+) = x\mathcal{N}(d_1(t)) - Ke^{-rt}\mathcal{N}(d_2(t))$$

avec

$$d_1(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}(\ln(\frac{x}{K} + \frac{1}{2}\sigma^2 t + rt), d_2(t) = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

En appliquant la propriété de Markov, on en déduit

$$\mathbb{E}(e^{-r(t-s)}(S_t - K)^+ | \mathcal{F}_s) = x\mathcal{N}(d_1(t-s)) - Ke^{-r(t-s)}\mathcal{N}(d_2(t-s)).$$

**Exercice 2.7.2 :** Nous présentons le calcul pour deux dates. Il s'agit de calculer l'espérance de

$$(S_T - S_{t_1})^+ \mathbb{1}_{S_{t_1} < K} + (S_T - K)^+ \mathbb{1}_{K < S_{t_1}}$$

On utilise la formule de BS.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(S_T - S_{t_1})^+ \mathbb{1}_{S_{t_1} < K}] &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{S_{t_1} < K} \mathbb{E}((S_T - S_{t_1}^+ | \mathcal{F}_{t_1})] \\ \mathbb{E}((S_T - S_{t_1}^+ | \mathcal{F}_{t_1}) &= \mathbb{E}((S_T - S_{t_1}^+ | \mathcal{G}_{t_1})) \\ &= S_{t_1}\mathcal{N}(d_1) - S_{t_1}e^{-r(T-t_1)}\mathcal{N}(d_2) \end{aligned}$$

avec

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t_1}}(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t_1) + r(T-t_1))$$

Il vient

$$\mathbb{E}[(S_T - S_{t_1}^+ \mathbb{1}_{S_{t_1} < K} = a\mathbb{E}(S_{t_1} \mathbb{1}_{S_{t_1} < K})$$

avec

$$a = \mathcal{N}(d_1) - \mathcal{N}(d_2)e^{-r(T-t_1)}$$

$$\mathbb{E}[(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{K < S_{t_1}\}}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{K < S_{t_1}\}}(S_{t_1}\mathcal{N}(d_1^*) - Ke^{-r(T-t_1)}\mathcal{N}(d_2^*))$$

$$d_1^* = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t_1}}(\ln(\frac{S_{t_1}}{K} + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t_1) + r(T-t_1))$$





## Chapter 3

# Intégrale d'Itô, Corrigés

### 3.1 Intégrale de Wiener

**Exercice 3.1.1 :** On a  $tB_t = \int_0^t s dB_s + \int_0^t B_s ds$  (en utilisant la formule d'intégration par parties) et  $\mathbb{E}(Y_t) = 0$ ,  $\mathbb{E}(Y_s Y_t) = ts(t \wedge s)$ . Le processus  $Y$  est un processus gaussien (c'était d'ailleurs évident par définition de  $Y$ ). On peut aussi utiliser la formule d'Itô (voir plus loin) qui conduit à  $dY_t = t dB_t + B_t dt$ .

**Exercice 3.1.2 :** La v.a.  $X_t = \int_0^t (\sin s) dB_s$  est définie, car  $\int_0^t \sin^2 s ds < \infty$ , pour tout  $t$ . Le processus  $X$  est gaussien d'espérance nulle et de covariance  $\mathbb{E}(X_s X_t) = \int_0^{s \wedge t} \sin^2 u du$ . Il vient alors  $\mathbb{E}(X_t X_s) = \frac{s \wedge t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2(s \wedge t)$ . Le processus  $X$  est une martingale, d'où, pour  $s < t$ , on a  $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ . La dernière égalité résulte d'une IP.

**Exercice 3.1.4 :** La v.a.  $Y_t = \int_0^t (\tan s) dB_s$  est définie, car  $\int_0^t \tan^2 s ds < \infty$  pour  $t < \frac{\pi}{2}$ . Le processus  $Y$  est gaussien, centré de covariance  $\mathbb{E}(Y_t Y_s) = \int_0^{s \wedge t} \tan^2 u du = \tan(s \wedge t) - (s \wedge t)$ . Le processus  $Y$  est une martingale.

**Exercice 3.1.5 :** Soit

$$X_t = (1-t) \int_0^t \frac{dB_s}{1-s}; 0 \leq t < 1$$

En appliquant le Lemme d'Itô (ou une I.P.) à  $f(t, y) = (1-t)y$  et  $Y_t = \int_0^t \frac{dB_s}{1-s}$  (donc  $dY_t = \frac{dB_t}{1-t}$ ) il vient  $dX_t = (-dt) \int_0^t \frac{dB_s}{1-s} + (1-t) \frac{dB_t}{1-t}$ , d'où

$$\begin{cases} dX_t &= \frac{X_t}{t-1} dt + dB_t; 0 \leq t < 1 \\ X_0 &= 0 \end{cases}$$

On admet l'unicité de la solution. Le processus  $X$  est gaussien car  $\int_0^t \frac{dB_s}{1-s}$  est une intégrale de Wiener, et on a  $\mathbb{E}(X_t) = 0$  et la covariance de  $X$  est donnée par, pour  $s < t$

$$\mathbb{E}(X_s X_t) = (1-t)(1-s) \mathbb{E}\left(\int_0^t \frac{dB_u}{1-u} \int_0^s \frac{dB_u}{1-u}\right) = (1-t)(1-s) \int_0^s \frac{du}{(1-u)^2} = (1-t)s$$

En particulier  $\mathbb{E}(X_t^2) = t(1-t)$  d'où  $X_t$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers 1. Le processus  $X$  est un pont Brownien.

**Exercice 3.1.6 :** Formule évidente en écrivant  $B_t = \int_0^t dB_s$  et en utilisant l'isométrie.

**Exercice 3.1.7 :**  $\mathbb{E}(\int_{t_1}^{t_2} (B_t - B_{t_1}) dt | \mathcal{F}_{t_1}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbb{E}((B_t - B_{t_1}) | \mathcal{F}_{t_1}) dt = 0$ . Par intégration par parties  $\int_{t_1}^{t_2} B_t - B_{t_1} dt = t_2(B_{t_2} - B_{t_1}) - \int_{t_1}^{t_2} t dB_t = \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - t) dB_t$ . On en déduit que la variance cherchée est  $\int_{t_1}^{t_2} (t_2 - t)^2 dt$ .

## 3.2 Formule d'Itô

**Exercice 3.2.1 :** 1. Soit  $X_t = B_t^2$ . On a, en posant  $f(x) = x^2$

$$dX_t = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)dt = 2B_tdB_t + dt.$$

2. Soit  $X_t = t + \exp B_t$ . En posant  $f(t, x) = t + e^x$ , on a

$$dX_t = dt + \exp B_t dB_t + \frac{1}{2} \exp B_t dt.$$

3. Soit  $X_t = B_t^3 - 3tB_t$ . En posant  $f(t, x) = x^3 - 3tx$  on obtient

$$dX_t = 3B_t^2 dB_t - 3t dB_t - 3B_t dt + \frac{1}{2} 3 2B_t dB_t dB_t = (3B_t^2 - 3t) dB_t.$$

On retrouve le caractère martingale de  $X$  établi au chapitre précédent.

**Exercice 3.2.2 :** Soit  $X_t = \exp \int_0^t a(s) ds$  et  $Y_t = Y_0 + \int_0^t [b(s) \exp(-\int_0^s a(u) du) dB_s]$ , où  $a$  et  $b$  sont des fonctions déterministes. En utilisant la notation différentielle  $dX_t = a(t) (\exp \int_0^t a(s) ds) dt$  et  $dY_t = b(t) \exp(-\int_0^t a(u) du) dB_t$ , d'où  $dX_t dY_t = 0$ . On pose  $Z_t = X_t Y_t$ . Par la formule d'Itô, on a

$$dZ_t = X_t dY_t + Y_t dX_t = b(t) dB_t + a(t) X_t Y_t dt$$

soit  $dZ_t = a(t) Z_t dt + b(t) dB_t$ . Le processus  $(Z_t \exp - \int_0^t a(s) ds = Y_t; t \geq 0)$  est une martingale locale.

**Exercice 3.2.3 :** La formule d'Itô donne (nous omettons les indices  $t$ )

$$\begin{aligned} dY &= X_1 X_2 dt + t(X_1 dX_2 + X_2 dX_1 + d\langle X_1, X_2 \rangle) \\ &= X_1 X_2 dt + t(X_2 f(t) + \sigma_1 \sigma_2) dt + t(X_1 \sigma_2 + X_2 \sigma_1) dB \end{aligned}$$

**Exercice 3.1.3 :** La formule d'Itô appliquée à  $\sin B_t$  donne

$$\sin B_t = 0 + \int_0^t \cos B_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sin B_s ds,$$

d'où  $Y_t = \int_0^t \cos B_s dB_s$ . C'est une martingale, car  $\mathbb{E}(\int_0^t \cos^2 B_s ds) < \infty$ , pour tout  $t$ . On a  $\mathbb{E}(Y_t) = 0$  et  $\text{var } Y_t = \mathbb{E}(\int_0^t \cos^2 B_s ds)$ .

**Exercice 3.2.4 :** En appliquant la formule d'Itô, on obtient

$$d(X_t^2 + Y_t^2) = 2X_t dX_t + 2Y_t dY_t + d\langle X \rangle_t + d\langle Y \rangle_t = 2X_t Y_t dB_t - 2x_t Y_t dB_t + (X_t^2 + Y_t^2) dt$$

En posant  $Z_t = X_t^2 + Y_t^2$  on montre que le processus  $Z$  vérifie  $dZ_t = Z_t dt$  ce qui s'intègre en  $Z_t = ze^t$ .

**Exercice 3.2.5 :** Il est évident que  $dZ_t = Y_t dB_t$ . On calcule facilement  $\mathbb{E}(Y_s^2) = \int_0^s e^{2s} ds$ . L'intégrale stochastique est une martingale car

$$\mathbb{E}(\int_0^t Y_s^2 ds) = \int_0^t \mathbb{E}(Y_s^2) ds < \infty$$

et  $\mathbb{E}(Z_t) = 0, \mathbb{E}(Z_t^2) = \mathbb{E}(\int_0^t Y_s^2 ds)$ .

**Exercice 3.2.6 :** Soit  $dX_t = a(K_t - X_t) dt + \sigma dB_t$ . On voudrait que  $X_t = f(K_t)$ . La formule d'Itô appliquée à  $f(K_t)$  donne

$$dX_t = f'(X_t) dK_t + \frac{1}{2} f''(K_t) \sigma^2 dt$$

soit

$$dX_t = (f'(K_t)b + \frac{1}{2} f''(K_t) \sigma^2) dt + f'(K_t) \sigma dB_t$$

Si on identifie les deux drifts, on obtient

$$a(K_t - f(K_t)) = f'(K_t)b + \frac{1}{2} f''(K_t) \sigma^2$$

d'où  $f$  est solution de

$$\frac{1}{2} \sigma^2 f''(x) + b f'(x) + a f(x) = ax.$$

On résout cette EDO et on montre que  $f$  est de la forme

$$\alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x} + (x - \frac{b}{a})$$

avec  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  solutions de  $\frac{1}{2} \sigma^2 \lambda^2 + b \lambda + a = 0$ .

**Exercice 3.2.7 :** Soit  $X_t = \int_0^t \sigma(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds$ . On a

$$dX_t = \sigma(t) dB_t - \frac{1}{2} \sigma^2(t) dt.$$

Soit  $Y_t = \exp X_t$ . On applique la formule d'Itô avec  $f(x) = e^x$ .

$$\begin{aligned} dY_t &= \exp(X_t) dX_t + \frac{1}{2} \exp(X_t) \sigma^2(t) dt \\ &= Y_t \left( -\frac{1}{2} \sigma^2(t) dt + \sigma(t) dB_t \right) + \frac{1}{2} Y_t \sigma^2(t) dt \\ &= Y_t \sigma(t) dB_t. \end{aligned}$$

Le processus  $Y$  est une martingale locale. C'est une martingale si

$$\mathbb{E} \left( \int_0^t Y_t^2 \sigma^2(t) dt \right) < \infty.$$

Ce critère n'est pas très bon, nous en verrons d'autres par la suite.

Si  $\sigma$  est une constante,  $Y$  est un brownien géométrique avec drift nul. En particulier,

$$Y_t = \exp(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t)$$

est une (vraie) martingale:

Vérifions à titre d'exercice dans ce cas les conditions d'intégrabilité:

$$Y_t = \exp X_t = \exp(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$$

d'où

$$\mathbb{E}(|Y_t|) = \mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(\exp(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2 t} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = 1$$

$$\mathbb{E}(Y_t^2) = \mathbb{E}(\exp(2\sigma B_t - \sigma^2 t)) = \exp(\sigma^2 t).$$

En particulier, si  $\sigma = 1$  le processus  $\exp(B_t - \frac{t}{2})$  est une martingale.

Soit  $Z_t = \frac{1}{Y_t}$ . Pour calculer  $dZ_t$ , on peut utiliser la formule d'Itô

$$dZ_t = -\frac{Y_t \sigma(t)}{Y_t^2} dB_t + \frac{1}{2} \frac{2Y_t^2 \sigma^2(t)}{Y_t^3} dt = Z_t(-\sigma(t)dB_t + \sigma^2(t)dt)$$

ce qui va s'écrire

$$Z_t = Z_0 \exp(-\int_0^t \sigma(s)dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds)$$

formule que l'on peut obtenir directement en inversant l'exponentielle.

**Exercice 3.2.8 :** Par simple application de la formule d'Itô

$$dZ_t = (aZ_t + b)dt + cZ_t dB_t$$

**Exercice 3.2.9 :** Dans le cas  $h = 0$ , on a

$$S_t = S_0 e^{(r-q)t} e^{\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t} = e^{(r-q)t} M_t.$$

Donc  $M_t = M_0 e^{\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$  est une martingale positive, d'espérance 1 et on peut l'utiliser comme densité de RN. Sous  $Q$ , le processus  $\hat{B}_t = B_t - \sigma t$  est un MB.

Dans le cas général

$$S_t = S_0 e^{(r-q)t} e^{\int_0^t h_s ds} e^{\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}.$$

On en déduit  $e^{-\int_0^t h_s ds} = \frac{1}{S_t} M_t e^{-(r-q)t}$ . Donc

$$e^{-rT} \mathbb{E}(e^{-\int_0^T h(S_s) ds} \Psi(S_T)) = e^{-rT} \mathbb{E}(\frac{1}{S_T} M_T e^{-(r-q)T} \Psi(S_T)) = e^{-qT} E_Q(\frac{1}{S_T} \Psi(S_T)).$$

On se place dans le cas  $h_t = S_t^{-p}$  et on pose  $Z_t = S_t^p$ . Le lemme d'Itô conduit à

$$\begin{aligned} dZ_t &= pS_t^{p-1} \sigma dB_t + (r-q)pS_t^p dt + p dt + \frac{1}{2} p(p-1) S_t^{p-2} \sigma^2 S_t^2 dt \\ &= pZ_t \sigma dB_t + \left( \left[ (r-q)p + \frac{1}{2} p(p-1) \sigma^2 \right] Z_t + p \right) dt \\ &= (aZ_t + b)dt + cZ_t dB_t \end{aligned}$$

Le processus  $f(Z_t)$  est une martingale locale si

$$f'(z)(az + b) + \frac{1}{2} f''(z)c^2 z^2 = 0.$$

On pose  $g = f'$ . L'équation

$$g(z)(az + b) + \frac{1}{2} g'(z)c^2 z^2 = 0$$

a pour solution  $g(z) = \alpha \exp(\frac{2b}{c^2 z}) z^{-1/c^2}$ . Les fonctions  $f$  recherchées (ce que l'on appelle les fonctions d'échelle) sont les primitives de  $g$ .

**Exercice 3.2.10 :** Le processus  $Z$  est une martingale locale car  $dZ_t = cX_t Z_t dB_t$ . On a

$$\begin{aligned} dU_t &= 2X_t dX_t + d\langle X \rangle_t \\ &= 2X_t(a - bX_t)dt + 2X_t dB_t + dt \end{aligned}$$

soit  $U_t = U_0 + 2 \int_0^t X_s dB_s + \int_0^t (2X_s(a - bX_s) + 1)ds$  On en déduit

$$\frac{1}{2}(X_t^2 - X_0^2 - t) = \int_0^t X_s dB_s + a \int_0^t X_s ds - b \int_0^t X_s^2 ds$$

**Exercice 3.2.11 :** Pour montrer que  $Z$  est une martingale locale, on calcule  $dZ$  et on vérifie que son drift est nul. On a  $Z_t = f(t, B_t)$  avec  $f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \exp -\frac{x^2}{2(1-t)}$ . Il en résulte que

$$dZ_t = -\frac{B_t}{(1-t)^{3/2}} \exp -\frac{B_t^2}{2(1-t)} dB_t$$

Le processus  $(Z_t, t < 1)$  est une martingale locale. C'est une vraie martingale si pour tout  $T \leq 1$

$$\mathbb{E}[\int_0^T \frac{B_t^2}{(1-t)^3} \exp -\frac{B_t^2}{2(1-t)} dt] < \infty$$

Le terme de gauche est majoré par  $\mathbb{E}[\int_0^T \frac{B_t^2}{(1-t)^3} dt] = \int_0^T \frac{t}{(1-t)^3} dt < \infty$ .

**Exercice 3.2.12 :** Soit  $Z_t = (L_t)^a \exp(-\Gamma(a)t)$ . Alors, en utilisant que

$$L_t = e^{\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t}$$

implique

$$L_t^a = e^{a\phi B_t - \frac{1}{2}a\phi^2 t} = e^{a\phi B_t - \frac{1}{2}a^2\phi^2 t} e^{\frac{1}{2}\phi^2(a^2 - a)}$$

on obtient

$$dZ_t = dM_t + e^{-\Gamma(a)t} (L_t)^a (-\Gamma(a) + a(a-1)\phi)$$

où  $M$  est une martingale.

Le processus  $Z$  est une martingale pour  $\Gamma(a) = a(a-1)\phi$ . **Exercice 3.2.13 :** Il est facile d'établir que

$$dY_t = -Y_t[(2X_t a_t + \sigma_t^2(1 + 2X_t^2))dt + 2X_t \sigma_t dB_t]$$

et, en utilisant que  $X_t = 0$  et  $Y_t = 1$  on obtient  $0 = -\sigma_t^2 dt$ .

**Exercice 3.2.21 :** La fonction d'échelle de  $X_t = \exp(B_t + \nu t)$  est  $s(x) = x^{-2\nu}$ . Le processus croissant de  $s(X)$  est  $A_t = \int_0^t (s'\sigma)^2(X_s)ds$ .

**Exercice 3.2.25 :** On obtient facilement

$$\mathbb{E}(f(B_1)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(f(B_1 - B_t + B_t)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(f(\widehat{B}_{1-t} + B_t)|\mathcal{F}_t) = \psi(t, B_t)$$

avec

$$\psi(t, x) = \mathbb{E}(f(x + B_{1-t})). \quad (3.1)$$

D'autre part, la formule d'Itô et la propriété de martingale de  $\psi(t, B_t)$  conduisent à  $\psi(t, B_t) = \mathbb{E}(f(B_1)) + \int_0^t \partial_x \psi(s, B_s) dB_s$ . On écrit (grâce à 3.1)

$$\partial_x \psi(t, x) = \mathbb{E}(f'(x + B_{1-t}))$$

et un raisonnement analogue au précédent montre que si on pose  $\varphi(t, x) = \mathbb{E}(f'(x + B_{1-t}))$  on obtient

$$\varphi(t, B_t) = \mathbb{E}(f'(B_1) | \mathcal{F}_t)$$

### 3.3 Cas multidimensionnel

**Exercice 3.3.1 :** De façon évidente, on a

$$dS_3(t) = \frac{1}{2} [dS_1(t) + dS_2(t)] = \frac{1}{2} [r(S_1(t) + S_2(t)) dt + \sigma_1 S_1(t) dB_1(t) + \sigma_2 S_2(t) dB_2(t)].$$

On peut remarquer que

$$\sqrt{\sigma_1^2 S_1^2(t) + \sigma_2^2 S_2^2(t)} dB^3(t) = (\sigma_1 S_1(t) dB_1(t) + \sigma_2 S_2(t) dB_2(t))$$

définit un Brownien  $B_3$  qui permet d'écrire

$$dS_3(t) = r S_3(t) dt + \sigma(t) S_3(t) dB_t^3$$

où  $\sigma(t) = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 S_1^2(t) + \sigma_2^2 S_2^2(t)}}{S_1(t) + S_2(t)}$  est un processus.

En utilisant le lemme d'Itô, on obtient

$$dS_4(t) = S_4(t) \left( r dt - \frac{1}{8} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) dt + \frac{\sigma_1}{2} dB_1(t) + \frac{\sigma_2}{2} dB_2(t) \right),$$

ce que l'on peut écrire

$$dS_4(t) = S_4(t) \left( r dt - \frac{1}{8} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) dt + \sigma dB_4(t) \right).$$

Pour vérifier que  $B_3$  et  $B_4$  sont des browniens, on peut procéder de différentes façons (voir aussi les exercices sur le Brownien)

- $B_i(t+s) - B_i(t)$  a même loi que  $B_i(s)$ , cette loi est  $\mathcal{N}(0, s)$  et les accroissements sont indépendants
- $B_i$  et  $(B_i^2(t) - t, t \geq 0)$  sont des martingales et  $B_i$  est un processus continu
- pour tout  $\lambda$ , le processus  $\exp(\lambda B_i(t) - \frac{\lambda^2}{2} t)$  est une martingale.

### 3.4 Compléments

**Exercice 3.4.1 :** En utilisant le théorème de Fubini pour les intégrales doubles

$$F(x) = \int_{-\infty}^x dz \int_{-\infty}^z dy f(y) = \int_{-\infty}^x dy f(y) \int_y^x dz = \int_{-\infty}^x dy f(y) (x - y)^+$$

Par dérivation par rapport à la borne supérieure

$$F'(x) = \int_{-\infty}^x dy f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \mathbb{1}_{x > y} dy$$

Le lemme d'Itô conduit alors au résultat. La formule finale s'écrit aussi

$$\int_0^t f(B_s) ds = 2 \int_{-\infty}^{\infty} L^B(t, y) f(y) dy$$

avec  $L^B(t, y) = \left( (B_t - y)^+ - (B_0 - y)^+ - \int_0^t \mathbb{1}_{B_s > y} dB_s \right)$  et est connue sous le nom formule de temps d'occupation. Le processus  $L^B(\cdot, y)$  est le temps local de  $B$  au point  $y$  entre 0 et  $t$ . La difficulté est de vérifier que le processus  $L(\cdot, y)$  est un processus croissant.

**Exercice 3.4.2 :** On a, en exprimant  $X_t$  comme le produit de  $\exp B_1(t)$  et de  $U_t = \int_0^t \exp[-B_1(s)] dB_2(s)$  qui vérifie  $dU_t = \exp[-B_1(t)] dB_2(t)$

$$\begin{aligned} dX_t &= \exp B_1(t) (\exp -B_1(t)) dB_2(t) + U_t (\exp[B_1(t)] dB_1(t) + \frac{1}{2} \exp[B_1(t)] dt) \\ &= dB_2(t) + X_t dB_1(t) + \frac{1}{2} X_t dt \end{aligned}$$

Soit  $f(x) = \sinh x$ , alors,  $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$  et  $f''(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$ . On applique le lemme d'Itô:

$$dZ_t = \cosh(B_1(t)) dB_1(t) + \frac{1}{2} \sinh(B_1(t)) dt = \sqrt{1 + Z_t^2} dB_1(t) + \frac{1}{2} Z_t dt$$

$M_t \stackrel{\text{def}}{=} B_2(t) + \int_0^t X_s dB_1(s)$  est une martingale locale comme somme de deux martingales locales.

Son crochet est  $t + \int_0^t X_s^2 ds = \int_0^t (1 + X_s^2) ds$ , d'où  $\gamma_s = \sqrt{1 + X_s^2}$ . En regroupant les résultats  $X_t = \int_0^t \sqrt{1 + X_s^2} dB_3(t) + \frac{1}{2} \int_0^t X_t dt$  et  $Z_t = \int_0^t \sqrt{1 + Z_s^2} dB_1(s) + \frac{1}{2} \int_0^t Z_s ds$ . On obtient donc l'égalité en loi de  $X$  et de  $Z$ .

**Exercice 3.4.4 :** (voir Brownien) Le processus  $Z$  est une martingale, et le lemme d'Itô conduit à

$$dZ_t = \mathbb{1}_{S_t < a} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{a - B_t}{\sqrt{T - t}} \exp - \frac{(a - B_t)^2}{2} dB_t.$$

### 3.5 Brownien géométrique et extensions

**Exercice 3.5.2 :** Soit  $dS_t = S_t(b dt + \sigma dB_t)$  un brownien géométrique et  $\tilde{S}_t = e^{-bt} S_t$ . La formule d'intégration par parties montre que

$$d(\tilde{S}_t) = e^{-bt} dS_t - b e^{-bt} S_t dt = e^{-bt} \sigma S_t dB_t = \tilde{S}_t \sigma dB_t.$$

D'après les exercices précédents,

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \exp(\sigma B_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t)$$

et  $\tilde{S}$  est une martingale. Il en résulte

$$S_t = S_0 \exp((b - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma B_t)$$

ou encore

$$S_t = S_s \exp((b - \frac{1}{2} \sigma^2)(t - s) + \sigma(B_t - B_s)), s \leq t$$

On obtient

$$\mathbb{E}(S_t) = e^{bt} \mathbb{E}(\tilde{S}_t) = e^{bt} S_0$$

et

$$\mathbb{E}(S_t | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(e^{bt} \tilde{S}_t | \mathcal{F}_s) = e^{bt} \tilde{S}_s = e^{b(t-s)} S_s$$

Le calcul de  $\mathbb{E}(\exp((b - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s) + \sigma(B_t - B_s)) | \mathcal{F}_s)$  se fait également à partir de celui de  $\mathbb{E}(\exp(\sigma(B_t - B_s)) | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\exp(\sigma(B_t - B_s)))$  pour lequel il suffit d'utiliser la transformée de Laplace de la v.a. gaussienne  $B_t - B_s$ . On obtient

$$\mathbb{E}(S_t | \mathcal{F}_s) = \exp(b(t-s)) S_s.$$

Si  $Z_t = (\tilde{S}_t)^{-1}$ , on a  $dZ_t = Z_t((\sigma^2 - b)dt - \sigma dB_t)$ .

Ces calculs se généralisent au cas de coefficients aléatoires. Soit  $dS_t = S_t(b_t dt + \sigma_t dB_t)$  et  $Y_t = S_t \exp(-\int_0^t b_s ds)$ . On a  $d(\exp(-\int_0^t b_s ds) = b_t \exp(-\int_0^t b_s ds)dt$ . Le processus  $Y$  vérifie

$$dY_t = \exp(-\int_0^t b_s ds) dS_t - S_t b_t \exp(-\int_0^t b_s ds)dt = \exp(-\int_0^t b_s ds) S_t \sigma_t dB_t = Y_t \sigma_t dB_t$$

et est une martingale locale.

La solution de  $dL_t = -L_t \theta_t dB_t$  est une martingale locale, qui s'écrit

$$L_t = L_0 \exp(-\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds).$$

On pose  $Y_t = S_t L_t$ . On a

$$dY_t = S_t dL_t + L_t dS_t + d\langle S, L \rangle_t.$$

Par définition  $d\langle S, L \rangle_t = -S_t \sigma_t L_t \theta_t dt$ , d'où

$$dY_t = Y_t((b_t - \theta_t \sigma_t) dt + \sigma_t dB_t).$$

En finance, le changement de probabilité le plus utilis{e} correspond au cas  $\theta_t = -\frac{r(t)-b_t}{\sigma_t}$ . Il vient alors

$$dY_t = Y_t(r(t) dt + \sigma_t dB_t).$$

Soit  $R_t = \exp(-\int_0^t r(s) ds)$ . Le processus  $YR = LRS$  est une martingale locale qui vérifie  $d(LRS) = LRS\sigma dB$ .

**Exercice 3.5.3 :** Soit

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dB_t)$$

et  $A_t = \frac{1}{t} \int_0^t \ln S_s ds$ . On a  $S_t = S_0 \exp(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + rt)$  et

$$\ln S_t = \ln S_s + \sigma(B_t - B_s) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(t-s)$$

Le processus  $\ln S$  est un processus gaussien, d'où  $A_t$  est une variable gaussienne.

Soit  $G(t, T) = \frac{1}{T} \int_t^T (B_s - B_t) ds$ . Soit  $t$  fixé. Le processus  $(B_s - B_t, s \geq t)$  est gaussien, d'où  $G(t, T)$  est une variable gaussienne. Le processus  $(B_s - B_t, s \geq t)$  est indépendant de  $\mathcal{F}_t$  donc  $G(t, T)$  aussi, d'où  $\mathbb{E}(G(t, T) | \mathcal{F}_t) = \frac{1}{T} \int_t^T \mathbb{E}(B_s - B_t) ds = 0$ .

$$\text{Var}(G(t, T) | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(G^2(t, T)) = \frac{1}{T^2} \int_t^T \int_t^T \mathbb{E}((B_s - B_t)(B_u - B_t)) ds du.$$



$\mathbb{E}((B_s - B_t)(B_u - B_t)) = (s \wedge u) - t$ . Tous calculs faits

$$\text{Var}(G(t, T) | \mathcal{F}_t) = \frac{1}{T^2} \left( \frac{1}{3} T^3 - \frac{1}{3} t^3 + tT(t - T) \right)$$

En écrivant  $A_T = \frac{1}{T} \left( \int_0^t \ln S_s ds + \int_t^T \ln S_s ds \right)$  et en remarquant que

$$\int_t^T \ln S_s ds = (T - t) \ln S_t + \frac{1}{2} \frac{r - \sigma^2}{2} (T - t)^2 + \sigma G(t, T)$$

on obtient

$$A_T = \frac{t}{T} A_t + \left(1 - \frac{t}{T}\right) \left[ \ln S_t + \frac{1}{2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) (T - t) \right] + \sigma G(t, T).$$

**Exercice 3.5.5 :** Soit  $\tilde{S}_t = e^{-bt} S_t$ . On a vu déjà plusieurs fois que  $\tilde{S}_t$  est une martingale (par exemple vérifier, en utilisant le lemme d'Itô, que  $d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dB_t$ ).

Soit  $X_t$  défini par

$$e^{-bt} X_t = \mathbb{E} \left[ \frac{e^{-bT}}{h} \int_{T-h}^T S_u du | \mathcal{F}_t \right].$$

On a,  $X_T = V_T$  et si  $t \leq T - h$

$$e^{-bt} X_t = e^{-bT} \frac{1}{h} \int_{T-h}^T \mathbb{E}(S_u | \mathcal{F}_t) du$$

soit

$$e^{-bt} X_t = S_t e^{-bt} \frac{1 - e^{-bh}}{bh}$$

et si  $T - h \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} e^{-bt} X_t &= e^{-bT} \frac{1}{h} \int_{T-h}^T \mathbb{E}(S_u | \mathcal{F}_t) du \\ &= e^{-bT} \frac{1}{h} \int_{T-h}^t \mathbb{E}(S_u | \mathcal{F}_t) du + \frac{1}{h} \int_t^T \mathbb{E}(S_u | \mathcal{F}_t) du = \frac{e^{-bT}}{h} \int_{T-h}^t S_u du + S_t e^{-bt} \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{bh}. \\ \frac{dX_t}{X_t} &= bdt + \frac{\sigma S_t}{X_t} \left\{ 1_{\{t < T-h\}} \frac{1 - e^{-bh}}{bh} + 1_{\{T-h < t < T\}} \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{bh} \right\} dB_t \\ &= bdt + \sigma \left\{ 1_{t < T-h} + 1_{T-h < t < T} \frac{S_t}{X_t} \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{bh} \right\} dB_t. \end{aligned}$$

**Exercice 3.5.6:** Soit  $Z_t = e^{-rt} S_t + \int_0^t \delta(s) e^{-rs} S_s ds$ . On a alors

$$\begin{aligned} dZ_t &= -r e^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t + \delta_t e^{-rt} S_t dt \\ &= S_t e^{-rt} \sigma dB_t \end{aligned}$$

Le processus  $Z$  est une martingale locale. On peut expliciter  $S$  qui est la solution d'une équation du type  $dS_t = S_t(a(t)dt + \sigma dB_t)$  par

$$S_t = S_0 \exp(rt - \Delta(t) + \sigma B_t)$$

avec  $\Delta(t) = \int_0^t \delta(s) ds$ . En écrivant

$$S_t = S_0 \exp(rt - \Delta(t)) \exp(\sigma B_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t)$$

et en utilisant que  $\exp(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$  est une martingale d'espérance 1, on obtient

$$\mathbb{E}(S_t) = S_0 \exp(rt - \Delta(t)).$$

On montre que  $S$  est de carré intégrable : en effet

$$S_t^2 = S_0^2 \exp(2rt - 2\Delta(t) + 2\sigma B_t) = S_0^2 \exp(2rt - 2\Delta(t) + \frac{1}{2}(2\sigma)^2 t) \exp(2\sigma B_t - \frac{1}{2}(2\sigma)^2 t)$$

et l'on sait que  $\exp(2\sigma B_t - \frac{1}{2}(2\sigma)^2 t)$  est une martingale égale à 1 en  $t = 0$ , d'où

$$\mathbb{E}(S_t^2) = S_0^2 \exp(2rt - 2\Delta(t) + \frac{1}{2}(2\sigma)^2 t)$$

et  $\mathbb{E}(\int_0^t S_s^2 e^{-2rs} ds) < \infty$ , ce qui établit le caractère martingale de la martingale locale  $Z$ .

On sait que (formule de Black et Scholes en changeant de nom les paramètres) si  $dS_t = S_t(adt + \sigma dB_t)$ ,  $S_0 = x$  alors

$$\mathbb{E}(e^{-aT}(S_T - K)^+) = x\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-aT}\mathcal{N}(d_2)$$

avec  $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln(\frac{x}{Ke^{-aT}}) + \frac{1}{2}\sigma^2 T$ . Le calcul demandé est alors facile.

### 3.6 Le crochet

### 3.7 Finance

**Exercice 3.7.6 :** Par définition,

$$C_t^{Am} \geq C_t = \mathbb{E}(e^{-rT}(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(e^{-rT}g(S_T) | \mathcal{F}_t)$$

avec  $g(x) = (x - K)^+$ . En utilisant  $g(x) \leq e^{-rt}g(xe^{rt})$ , pour tout  $t$  et l'inégalité de Jensen (liée à la convexité de  $g$ ) on obtient

$$\begin{aligned} e^{-ru}g(S_u) \leq e^{-rT}g(S_u e^{r(T-u)}) &= e^{-rT}g(e^{rT}\mathbb{E}(S_T e^{-rT} | \mathcal{F}_u)) = e^{-rT}g(\mathbb{E}(e^{rT}S_T e^{-rT} | \mathcal{F}_u)) \\ &= e^{-rT}g(\mathbb{E}(S_T | \mathcal{F}_u)) \leq \mathbb{E}(e^{-rT}g(S_T) | \mathcal{F}_u) = C_u \end{aligned}$$

$P \leq P^{Am}$  et la propriété de sous martingale de  $(K - S_t e^{-rt})$  permet de conclure.

**Exercice 3.7.3 :** On écrit la formule d'intégration par parties

$$d(\frac{X_t}{Y_t}) = X_t d(\frac{1}{Y_t}) + \frac{1}{Y_t} dX_t + d\langle X, \frac{1}{Y} \rangle_t.$$

En particulier (on omet les indices  $t$ ) ( $X = Y$ )

$$d(\frac{X}{X}) = d(1) = 0 = X d(\frac{1}{X}) + \frac{1}{X} dX + d\langle X, \frac{1}{X} \rangle.$$

Soit  $dV = \pi_1 dS^1 + \pi^2 dS^2$ . On a donc

$$d\langle V, \frac{1}{S^1} \rangle = \pi_1 d\langle S^1, \frac{1}{S^1} \rangle + \pi^2 d\langle S^2, \frac{1}{S^1} \rangle.$$

Par suite, si  $V^1 = V/S^1$ , on peut écrire la suite d'égalités (on utilise  $V = \pi^1 S^1 + \pi^2 S^2$ )

$$\begin{aligned}
 dV_t^1 &= V d\left(\frac{1}{S^1}\right) + \frac{1}{S^1} dV + d\left\langle V, \frac{1}{S^1} \right\rangle \\
 &= (\pi^1 S^1 + \pi^2 S^2) d\left(\frac{1}{S^1}\right) + \frac{1}{S^1} (\pi^1 dS^1 + \pi^2 dS^2) + \pi^1 d\left\langle S^1, \frac{1}{S^1} \right\rangle + \pi^2 d\left\langle S^2, \frac{1}{S^1} \right\rangle \\
 &= \pi^1 \left( S^1 d\left(\frac{1}{S^1}\right) + \frac{1}{S^1} dS^1 + d\left\langle S^1, \frac{1}{S^1} \right\rangle \right) + \pi^2 \left( S^2 d\left(\frac{1}{S^1}\right) + \frac{1}{S^1} dS^2 + d\left\langle S^2, \frac{1}{S^1} \right\rangle \right) \\
 &= \pi^2 d\left(\frac{S^2}{S^1}\right)
 \end{aligned}$$

**Exercice 3.7.14 :** On remarque que

$$\mathcal{F}_T = \sigma(B_s, s \leq t) = \sigma(S_s^1, s \leq t) = \sigma(S_s^2, s \leq t)$$

Le marché est complet: en effet, toute v.a.  $\mathcal{F}_T$  mesurable s'écrit comme valeur terminale d'un portefeuille auto-finançant composé des actifs sans risque et de l'actif 1, donc le marché composé d'un actif supplémentaire (avec les mêmes actifs contingents) est également complet. La seule probabilité équivalente à la probabilité  $P$  telle que l'actif sans risque et l'actif 1, actualisés, sont des martingales est  $Q$  définie par  $dQ|_{\mathcal{F}_t} = \exp(-\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t) dP|_{\mathcal{F}_t}$  avec  $\theta = \frac{\mu_1 - r}{\sigma}$ . L'actif 2, actualisé n'est pas une martingale sous  $Q$ , il n'existe donc pas de probabilité équivalente à la probabilité  $P$  telle que TOUS les actifs actualisés soient des martingales. Le marché présente des opportunités d'arbitrage. Supposons  $\mu_1 > \mu_2$ . Si, à la date 0, on achète une part de l'actif 1 et on vend une part de l'actif 2 (capital initial investi nul) et que l'on maintient cette position jusqu'en  $T$ , on a un portefeuille de valeur

$$S_T^1 - S_T^2 = [\exp(\mu^1 T) - \exp(\mu^2 T)] \exp(\sigma B_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T) > 0$$

ce qui constitue un arbitrage.



## Chapter 4

# Exemples, Corrigés

### 4.1 Processus de Bessel

**Exercice 4.1.3 :** La formule d'Itô conduit à

$$dZ_t = -\frac{1}{R_t^2}dR_t + \frac{1}{2} \frac{2}{R_t^3}d\langle R \rangle_t = -\frac{1}{R_t^2}dB_t - \frac{1}{R_t^3}dt + \frac{1}{R_t^3}dt = -\frac{1}{R_t^2}dB_t$$

Soit  $V_t = \frac{\sinh \lambda R_t}{\lambda R_t}$ . On pose  $f(x) = \frac{\sinh \lambda x}{\lambda x}$ , d'où

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\sinh \lambda x}{\lambda x^2} + \frac{\cosh \lambda x}{x} \\ f''(x) &= +2\frac{\sinh \lambda x}{\lambda x^3} - \frac{\lambda \cosh \lambda x}{x^2} - \frac{\cosh \lambda x}{x^2} + \frac{\lambda \sinh \lambda x}{x}. \end{aligned}$$

La formule d'intégration par parties conduit à

$$dU_t = e^{-\frac{t\lambda^2}{2}} \left[ -\frac{\lambda^2}{2} V_t dt + dV_t \right]$$

et on vérifie que les termes en  $dt$  s'annulent.

Il suffit d'appliquer le théorème d'arrêt de Doob à la martingale  $U$  et au temps d'arrêt  $T_b$  (on utilise que  $\sinh x$  est bornée sur  $[0, b]$ ). On obtient  $\mathbb{E}(\exp(-\frac{\lambda^2 T_b}{2}) (\frac{\sinh \lambda b}{\lambda b})) = 1$ , d'où  $\mathbb{E}(\exp(-\frac{\lambda^2 T_b}{2})) = \frac{\lambda b}{\sinh \lambda b}$ .

**Exercice 4.1.4 :**

Les deux résultats s'obtiennent en appliquant le lemme d'Itô

$$\begin{aligned} d(\ln R_t) &= \frac{1}{R_t}dR_t - \frac{1}{2(R_t)^2}dR_t dR_t = \frac{1}{R_t}dB_t - \frac{1}{R_t} \frac{1}{2R_t}dt + \frac{1}{2(R_t)^2}dt = \frac{1}{R_t}dB_t, \\ dR_t^\nu &= \nu R_t^{\nu-1}dR_t + \frac{\nu(\nu-1)}{2}R_t^{\nu-2}dR_t dR_t = \nu R_t^{\nu-1}dB_t + \nu R_t^{\nu-1} \frac{1}{2R_t}dt + \frac{\nu(\nu-1)}{2}R_t^{\nu-2}dt. \\ &= \nu R_t^{\nu-1}dB_t + \frac{\nu^2}{2}R_t^{\nu-2}dt \end{aligned}$$

On pose  $Z_t = \exp(-\frac{\nu^2}{2} \int_0^t \frac{ds}{R_s^2})$  et on applique le lemme d'Itô.

$$\begin{aligned} dZ_t &= d \exp(-\frac{\nu^2}{2} \int_0^t \frac{ds}{R_s^2}) = Z_t(-\frac{\nu^2}{2}) \frac{1}{R_t^2} dt \\ dL_t &= Z_t dR_t^\nu + R_t^\nu dZ_t = Z_t \left[ \nu R_t^{\nu-1} dB_t + \nu R_t^{\nu-1} \frac{1}{2R_t} dt + \frac{\nu(\nu-1)}{2} R_t^{\nu-2} dt - \frac{\nu^2}{2} \frac{1}{R_t^2} R_t^\nu dt \right] \\ &= Z_t \nu R_t^{\nu-1} dB_t \end{aligned}$$

**Exercice 4.1.5 :**

$$dY_t = 2\sqrt{Y_t} dB_t + \delta dt$$

La formule d'Itô conduit à

$$dZ_t = Z_t(-\mu\sqrt{Y_t}) dB_t$$

Sous  $Q$   $\tilde{B}_t \stackrel{def}{=} B_t + \mu \int_0^t \sqrt{Y_u} du$  est un MB et  $dY_t = 2\sqrt{Y_t} d\tilde{B}_t + (\delta - 2\mu Y_t) dt$ .

**Exercice 4.2.2 :** Par application de la formule d'Itô à  $Z_t = B_t^2$

$$dZ_t = 2B_t dB_t + dt = 2\sqrt{Z_t} dB_t + dt$$

on a alors

$$\begin{aligned} dZ_t &= 2B_t dB_t + 2B_t^1 dB_t^1 + 2dt = \frac{2}{\sqrt{(B_t)^2 + (B_t^1)^2}} \sqrt{(B_t)^2 + (B_t^1)^2} (B_t dB_t + B_t^1 dB_t^1) \\ &= 2\sqrt{Z_t} dB_t^3 + 2dt \end{aligned}$$

Avec  $n$  Browniens on obtient  $\mu = n$ .

Si  $\rho_t \stackrel{def}{=} \sqrt{R_t}$ , la formule d'Itô conduit à

$$d\rho_t = \frac{1}{2\rho_t}(\mu - 1)dt + dB_t$$

$$dX_t = dR_t^{(\mu)} + dR_t^{(\nu)} = (\mu + \nu)dt + 2\sqrt{R_t^{(\mu)} + R_t^{(\nu)}} dZ_t$$

où  $Z$  est un MB. On en déduit que la somme de deux Bessels carrés indépendants est un Bessel carré.

**Exercice 4.1.6 :**  $\mathbb{P}_x(\inf_{s \leq t} X_s) = \mathbb{P}_x(T_a > t)$  et on connaît la transformée de Laplace de  $T_a$   $\mathbb{E}^{(\nu)}(\exp -\frac{\lambda^2}{2} T_a)$ .

Dans le cas du BES(3)  $\mathbb{P}_x^{(3)}|_{\mathcal{F}_t} = (\frac{X_{t \wedge \tau}}{x}) \mathbf{W}_x|_{\mathcal{F}_t}$  d'où pour  $a < x$   $\mathbb{P}_x^{(3)}(\phi(T_a) \mathbb{1}_{T_a < \infty}) = \frac{a}{x} \mathbf{W}_x(\phi(\mathbf{T}_a))$   
D'où  $\mathbb{P}_x^{(3)}(T_a > t) = \mathbb{P}_x^{(3)}(\infty > T_a > t) + (1 - \frac{a}{x})$  et  $\mathbb{P}_x^{(3)}(\infty > T_a > t) = \frac{a}{x} \mathbb{P}_0(T_{(x-a)} > t) = \frac{a}{x} \mathbb{P}_0((x-a) > |N|\sqrt{t})$ .  
Voir Borodin pour l'autre cas

## 4.2 Processus de Bessel carré

**Exercice 4.2.4 :** Remarquer que  $\mathbb{E}(R_1^{(2)}) = \mathbb{E}\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ .

**Exercice 4.2.5 :** On part de

$$\mathbf{W}^{(\nu)}|\mathcal{F}_t = \exp(\nu \mathbf{B}_t - \frac{\nu^2}{2} t) \mathbf{W}|\mathcal{F}_t$$

On sait que  $(R_t; t \geq 0) \stackrel{loi}{=} x \exp(B_{C_t} + \nu C_t)$

$$\mathbb{P}^{(\nu)}(F(R_s), s \leq t) = \mathbf{W}^{(\nu)}(\mathbf{F}(\mathbf{x} \mathbf{B}_u), \mathbf{u} \leq \mathbf{C}_t)$$

$$W^{(\nu)}(F(xB_u), u \leq C_t) = \mathbf{W}(\exp(\mathbf{B}_{\mathbf{C}_t} + \nu \mathbf{C}_t) \mathbf{F}(\mathbf{x} \mathbf{B}_u), \mathbf{u} \leq \mathbf{C}_t) = \mathbb{P}^{(0)}(\frac{\mathbf{R}_t}{\mathbf{x}})^\nu \exp - \frac{\nu^2}{2 \mathbf{C}_t} \mathbf{F}(\mathbf{R}_s), \mathbf{s} \leq \mathbf{t})$$

car sous  $\mathbb{P}^{(0)}$

$$\exp \nu B_{C_t} = (\exp B_{C_t})^\nu, \quad R_t = x \exp B_{C_t}$$

### 4.3 Autres processus

**Exercice 4.3.3 :** La première question résulte d'une application du lemme d'Itô:  $f(t, X_t)$  est une martingale locale si  $\mathcal{G}f(t, X_t) = 0$  avec  $\mathcal{G}f(t, x) = \partial_t f + x(1-x)(\mu-x)\partial_x f + \frac{1}{2}x^2(1-x)^2\partial_{xx}f$ . Dire que  $h_0(X)$  est une martingale locale revient à vérifier que  $h_0$  est solution de  $x(1-x)(\mu-x)h' + \frac{1}{2}x^2(1-x)^2h'' = 0$ . Montrer que  $h_1(X_t) - t$  est une martingale locale revient à vérifier que  $h_1$  satisfait

$$-1 + x(1-x)(\mu-x)h' + \frac{1}{2}x^2(1-x)^2h'' = 0.$$

En appliquant le théorème d'arrêt de Doob (la fonction  $h_0$  est bornée sur  $[a, b]$ , la martingale locale  $h_0(X_{t \wedge \tau})$  est uniformément intégrable)  $\mathbb{E}(h_0(X_\tau)) = h_0(x)$  soit

$$h_0(x) = \mathbb{E}(h_0(X_\tau)) = h_0(a)\mathbb{P}(X_\tau = a) + h_0(b)\mathbb{P}(X_\tau = b) = h_0(a)\mathbb{P}(X_\tau = a) + h_0(b)(1 - \mathbb{P}(X_\tau = a)).$$

On applique ensuite le théorème de Doob à  $h_1(X_t) - t$

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \mathbb{E}[(h_1(a) - \tau)\mathbb{1}_{X_\tau=a}] + \mathbb{E}[(h_1(b) - \tau)\mathbb{1}_{X_\tau=b}] \\ &= h_1(a)\mathbb{P}(X_\tau = a) + h_1(b)(1 - \mathbb{P}(X_\tau = a)) - \mathbb{E}(\tau) \end{aligned}$$

### 4.4 Des Calculs

**Exercice 4.4.2 :** For  $t \leq 1$  and  $a > 0$ , the events  $\{Y_t \leq a\}$  and  $\{T_a \geq t\}$  are equal, where  $T_a = \inf\{t \geq 0, X_t = a\}$ .

Then,  $\mathbb{P}(Y_t \leq a) = \mathbb{P}(T_a \geq t)$ . Let  $\tilde{X} = X/\sigma$  and  $T_\alpha(\tilde{X}) = \inf\{t \geq 0, \tilde{X}_t = \alpha\}$ . Then,  $T_a = T_\alpha(\tilde{X})$  where  $\alpha = a/\sigma$ .

It is well known (the proof follows, from example from inversion of Laplace transform) that

$$\mathbb{P}_0(T_\alpha(\tilde{X}) \in dt) = \frac{|\alpha|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp - \frac{(\alpha - \tilde{\mu}t)^2}{2t}$$

where  $\tilde{\mu} = \mu/\sigma$  (see Borodin-Salminen p. 223, formula 2.0.2. or Revuz Yor, second edition, page 320, ex. 1.21).

Therefore, you get the cumulative function of  $Y$  for  $t \leq 1$ .  
Let us denote  $\Phi(t, a, \mu, \sigma) = \mathbb{P}(\sup_{0 \leq s \leq t} (\mu s + \sigma B_s) \leq a)$ .

Suppose now that  $2 > t > 1$ . Then

$$X_t = X_1 + \mu_1(t-1) + \sigma_1(B_t - B_1) = X_1 + \mu_1(t-1) + \sigma_1\tilde{B}_{t-1}$$

where  $\tilde{B}$  is a BM independent of  $\sigma(B_s, s \leq 1)$ .  
Then,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_t \leq a) &= \mathbb{P}(Y_1 \leq a, \max_{1 \leq s \leq t} (X_1 + \mu_1(s-1) + \sigma_1 \tilde{B}_{s-1}) \leq a) \\ &= \mathbb{P}(Y_1 \leq a | \mathbb{P}[\max_{1 \leq s \leq t} (X_1 + \mu_1(s-1) + \sigma_1 \tilde{B}_{s-1}) \leq a | \mathcal{F}_1]) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(Y_1 \leq a)} \Psi(t-1, X_1))\end{aligned}$$

where

$$\Psi(u, x) = \mathbb{E}(\max_{0 \leq s \leq u} (x + \mu_1 s + \sigma_1 \tilde{B}_s) \leq a) = \mathbb{E}(\max_{0 \leq s \leq u} (\mu_1 s + \sigma_1 \tilde{B}_s) \leq a - x)$$

and this quantity is known from step 1:  $\Psi(u, x) = \Phi(u, a - x, \mu_1, \sigma_1)$ .

Then, it remains to know the law of the pair  $Y_1, X_1$ . This is the reflection principle in the case  $\mu = 0$  (Revuz Yor, page 105 ex. 3.14) and the general result follows from Girsanov's theorem. For example Borodin-Salminen, page 198, formula 1.18 in the case where  $\sigma = 1$

$$\mathbb{P}(Y_1 \geq y, X_1 \in dz) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp[\mu y - \frac{\mu^2 t}{2} - \frac{(|z-y|+y)^2}{2t}] dz$$

References:

Borodin, A. and Salminen, P.: *Handbook of Brownian Motion. Facts and Formulae*, Birkhäuser, 1996.

**Exercice 4.4.3 :** On écrit  $dS = D(rdt + \sigma_t d\tilde{B}_t)$ . Si  $\tilde{C}$  est la valeur de  $C$  actualisé, alors  $dC = Cm\sigma d\tilde{B}_t$ . Il suffit de résoudre et d'identifier

$$C_t = C_0 \left( \frac{S_t}{S_0} \exp[-\frac{m-1}{m} [\int_0^t r_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds]] \right)^m$$

**Exercice 4.4.4 :** On remarque que  $Y_t = e^{\lambda t} X_t$  est un MB changé de temps:  $Y_t = B_{\Lambda(t)}$  avec  $\Lambda(t) = \sigma^2 \int_0^t e^{2\lambda u} du = \sigma^2 \frac{e^{2\lambda t} - 1}{2\lambda}$ . Par suite  $\tau = \inf\{t : |Y_t| > e^{\lambda y} g(t)\}$ . D'où la suite d'égalités

$$\begin{aligned}\{\tau > t\} &= \{|B_{\Lambda(u)}| < e^{\lambda u} g(u), \forall \Lambda(u) < \Lambda(t)\} \\ &= \{|B_v| < e^{\lambda C(v)} g(C(v)), \forall v < \Lambda(t)\} = \{\tau^* > \Lambda(t)\}\end{aligned}$$

avec

$$\tau^* = \inf\{t : |B_t| > e^{\lambda C(t)} g(C(t))\}$$



## Chapter 5

# Equations différentielles stochastiques, Corrigés

### 5.1 Equation Linéaire

**Exercice 5.1.7 :** L'équation a une solution unique car  $b(t, x) = a + \alpha x$  et  $\sigma(t, x) = b + \beta x$  sont lipschitziennes et ont une croissance linéaire. On a

$$X_t = x + \int_0^t (a + \alpha X_s) ds + \int_0^t (b + \beta X_s) dB_s$$

L'intégrale stochastique est une martingale car  $\mathbb{E}(\int_0^t (b + \beta X_s)^2 ds) \leq \mathbb{E}(\int_0^t 2(b^2 + \beta^2 X_s^2) ds)$  et la solution de l'équation vérifie  $\mathbb{E}(\sup_{s \leq t} X_s^2) < \infty$ . D'où en prenant l'espérance de  $X_t$  et en posant  $m(t) = \mathbb{E}(X_t)$

$$m(t) = x + \int_0^t (a + \alpha m(s)) ds.$$

La fonction  $m$  est dérivable et vérifie  $m'(t) = a + \alpha m(t)$ . Compte tenu de la condition initiale  $m(0) = x$ , la solution est

$$m(t) = (x + \frac{a}{\alpha})e^{\alpha t} - \frac{a}{\alpha}$$

La formule d'Itô conduit à

$$d(X_t^2) = 2X_t(a + \alpha X_t) dt + 2X_t(b + \beta X_t) dB_t + (b + \beta X_t) dt.$$

En admettant que l'intégrale stochastique est une martingale et en posant  $M(t) = \mathbb{E}(X_t^2)$

$$M(t) = x^2 + 2 \int_0^t (am(s) + \alpha M(s)) ds + \int_0^t (b^2 + \beta^2 M(s) + 2b\beta m(s)) ds$$

soit

$$\begin{cases} M'(t) - (2\alpha + \beta^2)M(t) &= 2(a + b\beta)m(t) + b^2 \\ M(0) &= x^2 \end{cases}$$

la solution est

$$\begin{cases} M(t) &= Ce^{(2\alpha + \beta^2)t} + ke^{\alpha t} + c \\ k(-\alpha - \beta^2) &= 2(a + b\beta)(x + \frac{a}{\alpha}) \\ c &= (b^2 - 2(a + b\beta)\frac{a}{\alpha})\frac{1}{2\alpha + \beta^2} \\ C + k + c &= x^2 \end{cases}$$

**Exercice 5.1.3 :** On a  $dY_t = Y_t(\alpha dt + \beta dB_t)$  dont la solution est (cf brownien géométrique)

$$Y_t = \exp[(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)t + \beta B_t]$$

On a (cf propriété de martingale du Brownien)

$$\mathbb{E}(Y_t | \mathcal{F}_s) = \exp(\alpha t) \mathbb{E}(\exp[-\frac{1}{2}\beta^2 t + \beta B_t] | \mathcal{F}_s) = \exp(\alpha t) \exp[-\frac{1}{2}\beta^2 s + \beta B_s]$$

D'où, si  $\alpha \geq 0$ , on a  $\mathbb{E}(Y_t | \mathcal{F}_s) \geq Y_s$ . Le processus  $Y$  est une martingale si on a égalité soit si  $\alpha = 0$ .  
c. Le processus  $Y$  ne s'annule pas. Le processus  $Z_t$  est un processus d'Itô car  $Y_t^{-1}$  est de carré intégrable (voir brownien géométrique) et

$$dZ_t = (a - b\beta)Y_t^{-1} dt + bY_t^{-1} dB_t$$

On a ainsi  $d\langle Y, Z \rangle_t = bY_t^{-1} Y_t \beta = b\beta$ .

Soit  $U_t = Y_t Z_t$ . La formule d'Itô conduit à

$$dU_t = (a - b\beta) dt + b dB_t + U_t(\alpha dt + \beta dB_t) + b\beta dt = (a + \alpha U_t) dt + (b + \beta U_t) dB_t$$

et comme  $U_0 = x$  on a par unicité  $X_t = U_t$ .

**Exercice 5.1.4 :** L'équation  $dX_t = \alpha X_t dt + b dB_t$  admet une solution unique. En posant  $Z_t = e^{-\alpha t} X_t$  on voit que  $dZ_t = e^{-\alpha t} dB_t$  d'où

$$X_t = e^{\alpha t} x + e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha s} b dB_s$$

Il en résulte que  $X$  est un processus gaussien de moyenne  $\mathbb{E}(X_t) = e^{\alpha t} x$  et de variance

$$V(X_t) = b^2 e^{2\alpha t} \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha} \stackrel{def}{=} \sigma^2(t).$$

Si  $Y_t = \phi(X_t)$ , la formule d'Itô conduit à

$$dY_t = \phi'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} \phi''(X_t) b^2 dt.$$

Dans le cas particulier de l'énoncé,

$$dY_t = \exp(-\frac{\alpha}{b^2} X_t^2) (b dB_t)$$

soit

$$Y_t = b \int_0^t \exp(-\frac{\alpha}{b^2} X_s^2) dB_s$$

C'est une martingale car  $\mathbb{E}(\int_0^t \exp(-\frac{2\alpha}{b^2} X_s^2) ds) < \infty$  (faire le calcul en utilisant ce qui suit) de carré intégrable.

En utilisant le calcul de  $\mathbb{E}(e^{\lambda U^2})$  quand  $U$  est une gaussienne, on trouve, en posant  $m(t) = e^{\alpha t}$

$$\mathbb{E}(e^{\lambda X_t^2}) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda\sigma^2(t)}} \exp \frac{\lambda m^2(t) x^2}{1 - 2\lambda\sigma^2(t)} = \Phi(t, x)$$

et

$$\mathbb{E}(e^{\lambda X_t^2} | \mathcal{F}_s) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda\sigma^2(t-s)}} \exp \frac{\lambda m^2(t-s) X_s^2}{1 - 2\lambda\sigma^2(t-s)} = \Phi(t-s, X_s)$$

Soit  $t$  fixé. Par définition, le processus d'Itô  $V$  défini par  $V_s = \Phi(t-s, X_s)$  est une martingale, donc son drift est nul. On a donc

$$-\partial_1 \Phi(t-s, x) + \alpha x \partial_2 \Phi(t-s, x) + \frac{1}{2} b^2 \partial_{22} \Phi(t-s, x) = 0$$

$$\partial_1 \Phi(u, x) + \alpha x \partial_2 \Phi(u, x) + \frac{1}{2} b^2 \partial_{22} \Phi(u, x) = 0$$

En posant  $\Psi = \ln \Phi$  et en recherchant  $\Psi$  sous la forme

$$\Psi(t, x) = x^2 a(t) + b(t)$$

on a (voir la forme de  $\Phi$ ) les conditions de l'énoncé sur les fonctions  $a$  et  $b$ .

**Exercice 5.2.1 :** Dans un premier temps, on pose  $Y_t = e^{\alpha t} X_t$ . Ce processus vérifie

$$dY_t = e^{\alpha t} (\mu - \gamma V_t) dt + e^{\alpha t} \sqrt{V_t} dW_{1,t}$$

Calculer  $\varphi(\lambda) = \mathbb{E}(\exp(\lambda X_T))$  revient à calculer  $\psi(\lambda) = \mathbb{E}(\exp(\lambda Y_T))$ . On a en effet  $\varphi(\lambda) = \psi(\lambda e^{\alpha T})$ . Le calcul des espérances conditionnelles se réduit à un calcul d'espérance par la propriété de Markov. On a

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t e^{\alpha s} (\mu - \gamma V_s) ds + \int_0^t e^{\alpha s} \sqrt{V_s} dW_{1,s}$$

On est donc ramené à calculer

$$A = \mathbb{E} \left( \exp \left( -\gamma \int_0^t e^{\alpha s} V_s ds + \int_0^t e^{\alpha s} \sqrt{V_s} dW_{1,s} \right) \right)$$

En décorrélant  $W_{1,t}$ , le terme sous l'exponentielle est

$$-\gamma \int_0^t e^{\alpha s} V_s ds + \rho \int_0^t e^{\alpha s} \sqrt{V_s} dW_{2,s} + \sqrt{1-\rho^2} \int_0^t e^{\alpha s} \sqrt{V_s} dW_s$$

En utilisant l'indépendance entre  $W$  et  $V$

$$A = \mathbb{E} \left( \exp \left( -\gamma \int_0^t e^{\alpha s} V_s ds + \rho \int_0^t e^{\alpha s} \sqrt{V_s} dW_{2,s} + \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2} \int_0^t e^{2\alpha s} V_s ds \right) \right)$$

Il reste un calcul du type espérance de l'exponentielle de

$$\int_0^t f(s) V_s ds + \int_0^t g(s) \sqrt{V_s} dW_{2,s}$$

Cette expression s'écrit

$$\begin{aligned} \int_0^t f(s) V_s ds &+ \int_0^t g(s) (dV_s - k(\theta - V_s) ds) = \int_0^t F(s) V_s ds + \int_0^t G(s) dV_s \\ &= \int_0^t F(s) V_s ds + G(t) V_t - G(0) V_0 - \int_0^t G'(s) V_s ds \\ &= G(t) V_t + \int_0^t H(s) V_s ds \end{aligned}$$

ou  $f, g, F, G, H$  sont des fonctions déterministes. (remarque: pour un processus d'Ornstein Uhlenbeck, ce type de calcul est standard)

**Exercice 5.1.9 :** On pose  $Y_t = e^{at} X_t$ . On a

$$dY_t = abe^{at} dt + \sigma e^{at/2} \sqrt{Y_t} dW_t$$

et on en déduit  $\mathbb{E}(Y_t) = x + b(e^{at} - 1)$  En utilisant

$$\begin{aligned} Y_t &= x + \int_0^t a b e^{as} ds + \int_0^t \sigma e^{as/2} \sqrt{Y_s} dW_s \\ &= \mathbb{E}(Y_t) + \int_0^t \sigma e^{as/2} \sqrt{Y_s} dW_s \end{aligned}$$

on obtient  $Y_t - \mathbb{E}(Y_t) = \int_0^t \sigma e^{as/2} \sqrt{Y_s} dW_s$  par suite

$$\text{Var}(Y_t) = \int_0^t \sigma^2 e^{as} \mathbb{E}(Y_s) ds$$

## 5.2 Processus affines

**Exercice 5.2.2 :** Si  $\alpha$  et  $\beta$  existent, le processus  $M_t = e^{\alpha(t) + \beta(t)S_t} \exp\left(-\int_0^t \psi(S_s) ds\right)$  est une martingale, donc  $\mathbb{E}(M_T | \mathcal{F}_t) = M_t$  ce qui conduit à

$$\mathbb{E}\left(e^{\theta S_T} \exp\left(-\int_0^T \psi(S_s) ds\right) \middle| \mathcal{F}_t\right) = e^{\alpha(t) + \beta(t)S_t} \exp\left(-\int_0^t \psi(S_s) ds\right).$$

D'où le résultat en remarquant que  $\exp(-\int_0^t \psi(S_s) ds)$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable. Pour que  $M$  soit une martingale, il faut que sa partie à variation bornée soit nulle. Il est facile de voir que

$$d(e^{\alpha(t) + \beta(t)S_t}) = e^{\alpha(t) + \beta(t)S_t} (\alpha' + \beta') dt + \beta dS_t + \beta^2 \sigma(S_t)^2 dt$$

Ce qui conduit à

$$\alpha' + \beta' S_t - \psi(S_t) + \beta \mu(S_t) dt + \beta^2 \sigma(S_t)^2 = 0$$

soit

$$\alpha' + \beta' x - \psi(x) + \beta(\mu_0 + \mu_1 x) + \beta^2(\sigma_0 + \sigma_1 x) = 0$$

Cette équation doit être vérifiée pour tout  $(t, x)$  d'où (cours élémentaire sur les ED)

$$\begin{aligned} \alpha' - \psi_0 + \beta \mu_0 + \beta^2 \sigma_0 &= 0 \\ \beta' - \psi_1 + \beta \mu_1 + \beta^2 \sigma_1 &= 0 \end{aligned}$$

La seconde équation est une équation de Riccati

## 5.3 Finance

**Exercice 5.4.1 :** La solution de

$$dS_t = S_t (r dt + \sigma dB_t)$$

vérifie, pour  $t \leq u$

$$S_u = S_t \exp\left(r(u-t) + \sigma(B_u - B_t) - \frac{\sigma^2}{2}(u-t)\right) \quad (5.1)$$

Le processus  $S$  est à valeurs positives (si  $S_0 > 0$ ) et ne s'annule pas.

1. Le processus  $M_t = \mathbb{E}\left(\left[\frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K\right]^+ \middle| \mathcal{F}_t\right)$  est une martingale.

2. En utilisant que  $s(a-b)^+ = (sa-sb)^+$  si  $s > 0$  et la  $\mathcal{F}_t$ -mesurabilité de  $S_t$ , on obtient  $M_t = S_t \mathbb{E} \left( \left[ \frac{1}{T} \int_0^T \frac{S_u}{S_t} du - \frac{K}{S_t} \right]^+ | \mathcal{F}_t \right)$  ce qui s'écrit de façon évidente

$$S_t \mathbb{E} \left( \left[ \frac{1}{T} \int_t^T \frac{S_u}{S_t} du - \zeta_t \right]^+ | \mathcal{F}_t \right)$$

avec  $\zeta_t = S_t^{-1} (K - \frac{1}{T} \int_0^t S_u du)$ , variable  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

3. On rappelle que, si  $X$  est indépendante de  $\mathcal{G}$  et  $Y$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable,

$$\mathbb{E}(f(X, Y) | \mathcal{G}) = [\mathbb{E}(f(X, y))]_{y=Y}.$$

Les variables  $(\frac{S_u}{S_t}, u \geq t)$  sont indépendantes de  $\mathcal{F}_t$  (utiliser (5.1)), et  $\zeta_t$  est  $\mathcal{F}_t$  mesurable. Il en résulte

$$M_t = S_t \Phi(t, \zeta_t)$$

avec

$$\Phi(t, x) = \mathbb{E} \left( \frac{1}{T} \int_t^T \frac{S_u}{S_t} du - x \right)^+.$$

4. On obtient

$$dS_t^{-1} = -\frac{1}{S_t^2} dS_t + \frac{1}{2} \frac{2}{S_t^3} d\langle S, S \rangle_t = (\frac{\sigma^2}{S_t} - \frac{r}{S_t}) dt - \frac{\sigma}{S_t} dB_t.$$

on en déduit les égalités suivantes

$$\begin{aligned} d\zeta_t &= -S_t^{-1} \frac{S_t}{T} dt + (K - \frac{1}{T} \int_0^t S_u du) dS_t^{-1} = -\frac{1}{T} dt + \zeta_t (-\sigma dB_t - r dt + \sigma^2 dt) \\ d\langle \zeta, \zeta \rangle_t &= \zeta_t^2 \sigma^2 dt \\ d\Phi(t, \zeta_t) &= \Phi'_t dt + \Phi'_x d\zeta_t + \frac{1}{2} \Phi''_{xx} d\langle \zeta, \zeta \rangle_t = (\dots) dt - \sigma \zeta_t \Phi'_x dB_t \\ d\langle S, \Phi \rangle_t &= -S_t \sigma^2 \zeta_t \Phi'_x \end{aligned}$$

La formule d'Itô appliquée à  $M_t$  est alors (écriture volontairement simplifiée)

$$dM_t = \Phi dS + S d\Phi + dS d\Phi$$

ce qui s'écrit

$$\Phi(t, \zeta_t) dS_t + S_t [\Phi'_t(t, \zeta_t) dt + \Phi'_x(t, \zeta_t) d\zeta_t + \frac{1}{2} \Phi''_{xx}(t, \zeta_t) d\langle \zeta, \zeta \rangle_t] + d\langle S, \Phi \rangle_t$$

Soit

$$dM_t = S_t (r\Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial t} - (\frac{1}{T} + r\zeta) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \zeta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}) dt + dN_t$$

où  $N$  est une martingale du type  $(\dots) dB_t$ . Le processus  $M$  étant une martingale locale, sa partie processus à variation finie est nulle, soit

$$0 = r\Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial t} - (\frac{1}{T} + r\zeta) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \zeta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

**Exercice 5.4.2 :** Il est facile de montrer que

$$S_t = S_0 \exp \left( rt + \int_0^t \sigma(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds \right)$$

est solution de l'équation proposée.

2. Pour  $t$  fixé,  $\int_0^t \sigma(s)dB_s$  est une variable gaussienne (intégrale de Wiener) centrée de variance  $\int_0^t \sigma^2(s)ds$ . Il en résulte que  $\int_0^t \sigma(s)dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s)ds$  est une variable gaussienne car d'espérance  $-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s)ds$  et de variance  $\int_0^t \sigma^2(s)ds$ .

3. La formule de valorisation d'une option revient à calculer  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_T - K)^+$ . Dans le cas où  $S_T = S_0 e^U$  où  $U$  est une variable d'espérance  $rT$  et de variance  $V^2 = \sigma^2 T$ , on a

$$C(0, x) = x\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2)$$

avec

$$d_1 = \frac{1}{V} \left( \ln\left(\frac{x}{K}\right) + Tr + \frac{V^2}{2} \right), d_2 = d_1 - V$$

Il suffit donc de remplacer  $\sigma^2 T$  par  $\Sigma^2 = \int_0^T \sigma^2(s)ds$

$$C(0, x) = x\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2)$$

avec

$$d_1 = \frac{1}{\Sigma} \left( \ln\left(\frac{x}{K}\right) + Tr + \frac{\Sigma^2}{2} \right), d_2 = d_1 - \Sigma$$

## 5.4 Equations différentielles

**Exercice 5.5.4 :** Nous vérifions que

$$X_t = tN + (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s} dB_s \quad (5.2)$$

est solution de  $dX_t = dB_t + \frac{N - X_t}{1-t}dt$ . Par différentiation de (5.2)

$$\begin{aligned} dX_t &= Ndt - 1 \int_0^t \frac{1}{1-s} dB_s + dB_t \\ &= Ndt - \frac{1}{1-t} (X_t - tX_1)dt + dB_t \\ &= dB_t + \frac{1}{1-t} (-X_t + N)dt \end{aligned}$$

Le processus  $X$  est donc gaussien, centré, de covariance ( $s < t$ )

$$\begin{aligned} E(X_s X_t) &= ts + (1-t)(1-s)E\left(\int_0^t \frac{1}{1-u} dB_u \int_0^s \frac{1}{1-v} dB_v\right) \\ &= ts + (1-t)(1-s) \int_0^s \frac{1}{(1-u)^2} du = s \end{aligned}$$

## Chapter 6

# Girsanov, Corrigés

### 6.1 Résultats élémentaires

**Exercice 6.1.2 :** Par changement de probabilité, le processus  $H$  étant une martingale positive d'espérance 1, en posant  $d\mathbb{Q} = H_t d\mathbb{P}$ , on définit une nouvelle probabilité  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(H_T \ln H_T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\ln H_T)$ . Or,

$$H_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds\right)$$

D'où

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\ln H_T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(-\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds\right)$$

Le processus  $\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds$  est un  $\mathbb{Q}$  mouvement Brownien, et

$$-\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds = -\int_0^t \theta_s d\tilde{B}_s + \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds,$$

d'où le résultat.

**Exercice 6.1.4 :** On a  $\Gamma_t = \exp\left(\int_0^t \beta_s ds\right) \exp\left(\int_0^t \gamma_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma_s^2 ds\right)$ , d'où  $\Gamma_t \exp\left(-\int_0^t \beta_s ds\right)$  est une martingale. L'écriture  $d\Gamma_t = \Gamma_t \gamma_t (dB_t + \frac{\beta_t}{\gamma_t} dt)$  montre que sous  $\mathbb{Q}$  défini par  $d\mathbb{Q} = L_t d\mathbb{P}$ , avec  $dL_t = L_t \frac{\beta_t}{\gamma_t} dB_t$ , le processus  $\tilde{B}_t$  défini par  $d\tilde{B}_t = dB_t + \frac{\beta_t}{\gamma_t} dt$  est un mouvement Brownien. Le processus  $\Gamma$  vérifiant  $d\Gamma_t = \Gamma_t \gamma_t d\tilde{B}_t$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale locale. On obtient facilement  $d(\Gamma_t^{-1}) = -\Gamma_t^{-1} \gamma_t (dB_t - \frac{\gamma_t^2 - \beta_t}{\gamma_t} dt)$  et le choix de  $\mathbb{R}$  s'en suit.

### 6.2 Crochet

**Exercice 6.2.1 :** Soit  $Z = N - \langle N, M \rangle$  et  $L_t = \exp(M_t - \frac{1}{2} \langle M \rangle_t)$ . On a  $d(ZL) = ZdL + LdZ + d\langle Z, L \rangle = \text{mart} + d\langle Z, L \rangle - Ld\langle M, N \rangle = \text{mart}$

**Exercice 6.2.2 :** On vérifie que  $Z_t = h(X_t)M_t - \int_0^t \frac{h'(X_s)}{h(X_s)} d\langle M, X \rangle$  est une  $\mathbb{P}$ -martingale.

## 6.3 Processus

### Exercice 6.3.4 :

1. La question 1 a déjà été traitée dans l'exercice ??.
2. On se place dans le cas d'un Brownien issu de  $a$ . Soit

$$d\mathbb{P}^b = \exp\left\{-b \int_0^T B_s dB_s - \frac{b^2}{2} \int_0^T B_s^2 ds\right\} d\mathbb{P}.$$

En posant  $\theta_s = -bB_s$  et en appliquant Girsanov, on montre que sous  $\mathbb{P}^b$  le processus  $B_t + b \int_0^t B_s ds$  est un brownien issu de  $a$  que l'on note  $W_t$ . L'égalité

$$B_t = - \int_0^t bB_s ds + W_t$$

qui s'écrit  $dB_t = -bB_t dt + dW_t$  montre que le processus  $(B_t, t \geq 0)$  est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck sous  $\mathbb{P}^b$ . D'où  $B_t$  est une variable gaussienne sous  $\mathbb{P}^b$ , d'espérance  $ae^{-bt}$  et de variance  $\frac{1 - e^{-2tb}}{2b}$ .

Soit  $x = a^2$ . En utilisant que, sur  $\mathcal{F}_t$ ,

$$d\mathbb{P} = \exp\left\{b \int_0^t B_s dB_s + \frac{b^2}{2} \int_0^t B_s^2 ds\right\} d\mathbb{P}^b$$

on a, pour tout  $Z$ ,  $\mathcal{F}_t$ -mesurable  $\mathbb{P}$ -intégrable,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z) = \mathbb{E}_b(Z \exp\{b \int_0^T B_s dB_s + \frac{b^2}{2} \int_0^T B_s^2 ds\})$$

d'où

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\exp\{-\alpha B_t^2 - \frac{b^2}{2} \int_0^t B_s^2 ds\}) = \mathbb{E}_b(\exp\{-\alpha B_t^2 + b \int_0^t B_s dB_s\})$$

La formule d'Itô montre que

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - a^2 - t)$$

(sous  $\mathbb{P}$  et sous  $\mathbb{P}_b$ ).

On obtient, en posant  $x = a^2$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\exp\{-\alpha B_t^2 - \frac{b^2}{2} \int_0^t B_s^2 ds\}) = \mathbb{E}_b(\exp\{-\alpha B_t^2 + \frac{b}{2}(B_t^2 - x - t)\})$$

Sous  $\mathbb{P}^b$ ,  $B_t$  est une gaussienne. On applique le résultat de la question 1 et on trouve (calculs)

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\exp\{-\alpha B_t^2 - \frac{b^2}{2} \int_0^t B_s^2 ds\}) = (\cosh bt + 2\frac{\alpha}{b} \sinh bt)^{-\frac{1}{2}} \exp[-\frac{xb}{2} \frac{1 + \frac{2\alpha}{b} \coth bt}{\coth bt + \frac{2\alpha}{b}}]$$

On note  $\Phi(\alpha, b)$  l'expression de droite.

**Exercice 6.3.3 :** Soit  $dX_t = -\lambda X_t dt + dB_t$  un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Sous  $\mathbb{P}_\lambda$ ,  $X$  est un Brownien car  $X_t = -\lambda \int_0^t X_s ds + B_t$ . On a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\exp - \frac{b^2}{2} \int_0^T X_s^2 ds) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\lambda}(L_T^{-1} \exp - \frac{b^2}{2} \int_0^T X_s^2 ds)$$



$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\lambda} \left( \exp \left( -\lambda \int_0^T X_s dX_s - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^T X_s^2 ds - \frac{b^2}{2} \int_0^T X_s^2 ds \right) \right) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\lambda} \left( \exp \left( -\frac{\lambda}{2} (X_T^2 - T) - \frac{\lambda^2 + b^2}{2} \int_0^T X_s^2 ds \right) \right) \\
&= \left( \exp \frac{\lambda T}{2} \right) \Phi \left( \frac{\lambda}{2}, \sqrt{\lambda^2 + b^2} \right)
\end{aligned}$$

(On comparera cet exercice au précédent)

**Exercice 6.3.5 :** Soit  $S$  solution de

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dB_t), S_0 = s.$$

$$S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t).$$

1. Soit  $d\mathbb{Q} = L_t d\mathbb{P}$  avec  $L_t = \exp(\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t)$ . Le théorème de Girsanov montre que  $W$  est un  $\mathbb{Q}$ -mouvement Brownien.
2. Soit  $d\tilde{\mathbb{P}} = Z_t d\mathbb{Q}$  avec  $Z_t = \exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t)$   
Le théorème de Girsanov montre que  $(\tilde{B}_t = W_t - \sigma t, t \geq 0)$  est un  $\tilde{\mathbb{P}}$ -mouvement brownien.  
On a alors

$$dS_t = S_t ((r + \sigma^2) dt + \sigma d\tilde{B}_t)$$

3. Soit  $P_t = P_0 e^{rt}$ . Le processus  $(Y_t = \frac{S_t}{P_t}, t \geq 0)$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale, car  $Y_t = Y_0 \exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t)$  (ou parce que (Itô)  $dY_t = \frac{d(S_t e^{-rt})}{P_0} = Y_t dW_t$ .)  
Le processus  $Z_t = \frac{P_t}{S_t}$  est une  $\tilde{\mathbb{P}}$ -martingale car  $Z_t = Z_0 \exp(-\sigma \tilde{B}_t - \frac{\sigma^2}{2} t)$
4. Soit  $F_t = e^{-\lambda t} \left( \int_0^t S_u du + sA \right)$  où  $A, \lambda$  sont des constantes  
Soit  $\Psi_t = \frac{F_t}{P_t} e^{\lambda t}$ . On a  $d\Psi_t = (1 - r\Psi_t) dt - \sigma \Psi_t d\tilde{B}_t$

**Exercice 6.3.7 :** Let  $B_t^Y = Yt + B_t$  and  $F$  be a functional on  $C([0, t], \mathbb{R})$ . Using the independence between  $Y$  and  $B$ , and Cameron-Martin theorem, we get

$$\mathbb{E}[F(B_s^Y, s \leq t)] = \mathbb{E}[F(sY + B_s, s \leq t)] = \int \nu(dy) \mathbb{E}[F(sy + B_s, s \leq t)] \quad (6.1)$$

$$= \int \nu(dy) \mathbb{E}[F(B_s, s \leq t) \exp(yB_t - \frac{y^2}{2} t)] = \mathbb{E}[F(B_s; s \leq t) h(B_t, y)] \quad (6.2)$$

$$= \mathbb{E}^h(F(X_s, s \leq t)) \quad (6.3)$$

where  $h(x, t) = \int \nu(dy) \exp(yx - \frac{y^2}{2} t)$  and  $\mathbb{P}^h|_{\mathcal{F}_t} = h(B_t, t)W|_{\mathcal{F}_t}$ . Therefore,

$$B_t^h \stackrel{\text{def}}{=} B_t - \int_0^t ds \frac{h'_x}{h}(B_s, s)$$

is a  $P^h$ -martingale, more precisely a  $\mathbb{P}^h$  Brownian motion and  $B_t$  is solution of

$$X_t = B_t^h + \int_0^t ds \frac{h'_x}{h}(X_s, s)$$

Under  $\mathbb{P}^h$ ,  $B$  has the same law as  $B^Y$  under  $\mathbb{P}$ . Then,  $B_t^Y = \tilde{B}_t^h + \int_0^t ds \frac{h'_x}{h}(B_s^Y, t)$ . Let us remark that

$$\mathbb{E}(Y|\mathcal{B}_t^Y) = \frac{h'_x}{h}(B_s^Y, s)$$

where  $\mathcal{B}_t^Y = \sigma(B_s^Y, s \leq t)$ . On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(f(Y)F(B_s^Y, s \leq t)) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-YB_t - \frac{1}{2}Y^2t} F(B_s^Y, s \leq t)) \\ &= \int \nu(dy) f(y) \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-yB_t - \frac{1}{2}y^2t} F(B_s + ys, s \leq t)) \\ &= \int \nu(dy) f(y) \mathbb{E}(F(B_s, s \leq t)) = \mathbb{E}(F(B_s, s \leq t)) \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(f(Y)) \end{aligned}$$

et la loi de  $Y$  est la même sous  $\mathbb{P}$  et sous  $\mathbb{Q}$ .

**Exercice gi:4 :** On remarque que  $e^{-2B_t} - 1 = -2 \int_0^t e^{-2B_s} dB_s + 2 \int_0^t e^{-2B_s} ds$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4}(e^{-2B_t} - 1) + \frac{1}{2} \int_0^t \left( e^{-2B_s} - \frac{1}{4}e^{-4B_s} \right) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t e^{-2B_s} dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-2B_s} ds + \frac{1}{2} \int_0^t \left( e^{-2B_s} - \frac{1}{4}e^{-4B_s} \right) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t e^{-2B_s} dB_s - \frac{1}{4} \int_0^t e^{-4B_s} ds \end{aligned}$$

et on sait que  $\exp\left(\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds\right)$  est une martingale locale. On peut vérifier que la condition de Novikov est satisfaite. Sous  $\mathbb{Q}$ , le processus  $\hat{B} = B - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-2B_s} ds$  est un MB.

## 6.4 Cas multidimensionnel

## 6.5 Temps d'arrêt

**Exercice 6.5.1 :** Soit  $d\mathbb{P}_{\mu} = L_t d\mathbb{P}$  où  $L_t = \exp(-\frac{\mu}{\sigma}B_t - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}t)$ . Sous  $\mathbb{P}_{\mu}$ ,  $(\tilde{B}_t = B_t + \frac{\mu}{\sigma}t = \frac{X_t}{\sigma}, t \geq 0)$  est un Brownien et  $X_t = \sigma \tilde{B}_t$ .

De l'égalité  $T_a = \inf\{t | \tilde{B}_t = \frac{a}{\sigma}\}$ , on en déduit le résultat qui figure dans le cours en procédant comme suit:

On a  $d\mathbb{P} = L_t^{-1} d\mathbb{P}_{\mu}$  avec

$$L_t^{-1} = \exp\left(\frac{\mu}{\sigma}B_t + \frac{\mu^2}{2\sigma^2}t\right) = \exp\left(\frac{\mu}{\sigma}\tilde{B}_t - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}t\right)$$

et pour tout temps d'arrêt  $T$ , on a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\exp(-\lambda(T \wedge t))) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mu}}(L_{T \wedge t} e^{-\lambda(T \wedge t)}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mu}}\left(\exp\left(\frac{\mu}{\sigma}\tilde{B}_{T \wedge t} - \frac{\mu^2 + 2\lambda\sigma^2}{2\sigma^2}(T \wedge t)\right)\right)$$

On en déduit

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\exp(-\lambda T_a) \mathbb{1}_{T_a < \infty}) = \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2}a\right) \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mu}}\left(\exp\left(-\frac{\mu^2 + 2\lambda\sigma^2}{2\sigma^2}T_a\right) \mathbb{1}_{T_a < \infty}\right)$$

Le passage à la limite quand  $t \rightarrow \infty$  est licite pour  $a \geq 0$ , car d'une part  $e^{-\lambda(T \wedge t)} \leq 1$  et d'autre part  $\tilde{B}_{T_a \wedge t} \leq a$ , d'où  $\exp(\frac{\mu}{\sigma}\tilde{B}_{T \wedge t} - \frac{\mu^2 + 2\lambda\sigma^2}{2\sigma^2}(T \wedge t))$  est borné. On utilise aussi  $\tilde{B}_{T_a} \mathbb{1}_{T_a < \infty} = \frac{a}{\sigma}$ .

**Exercice 6.5.2 :**

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{T<\infty} \exp(\lambda B_T - \frac{\lambda^2}{2} T)) = \mathbb{P}^{(\lambda)}(T < \infty) =$$

and use that

$$T = \inf\{t : B_t - t/2 > \ln a\} = \inf\{t : B_t + (\lambda - 1/2)t > \ln a\}$$

**Exercice 6.5.3 :** Le processus  $(M_t = \exp(\theta \tilde{B}_t - \frac{\theta^2 t}{2}), t \geq 0)$  est une  $\mathbb{P}_\mu$ -martingale et si  $a$  et  $\theta$  sont positifs  $(M_{t \wedge T_a}, t \geq 0)$  est uniformément intégrable, car majorée par  $\exp(\theta a)$ . On en déduit  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_\mu}(M_{T_a}) = 1$  d'où

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\lambda T_a} \mathbb{1}_{T_a < \infty}) = \exp\left(\frac{a\mu}{\sigma^2} - \frac{a\sqrt{\mu^2 + 2\lambda\sigma^2}}{\sigma^2}\right)$$

et on vérifie que  $T_a$  est fini (faire  $\lambda = 0$ ).

**Exercice 6.5.4 :**  $L$  est une martingale exponentielle d'espérance 1, en utilisant que  $dF_t^2 = 2F_t f(t) dB_t + f^2(t) dt$  on obtient la première égalité. Une intégration par partie montre que

$$\int_0^T \frac{h(s)}{2f(s)} dF_s^2 dB_s = \frac{h(T)}{f(T)} F_T^2 - \frac{h(0)}{f(0)} F_0^2 - \int_0^T F_t^2 d\left(\frac{h(t)}{f(t)}\right)$$

ce qui donne le résultat. On prend ensuite  $h(t) = \frac{u'}{u(t)f(t)}$  et on utilise que

$$\mathbb{E}\left(\exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{u'(T)}{u(T)f^2(T)}\right) F_T^2 - \int_0^T F_t^2 \left(\frac{u''(t) - 2u'(t)f'(t)/f(t)}{u(t)f^2(t)}\right) dt\right]\right) = \exp\left(\int_0^T \frac{u'(t)}{u(t)} dt\right)$$

Pour calculer l'expression avec  $\Psi$ , on fait un changement de probabilité en posant  $d\mathbb{Q} = L_T d\mathbb{P}$ . On a

$$K = \left(\frac{u(T)}{u(0)}\right)^{1/2} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\Psi(A + BF_T + \int_0^T \phi(t) F_t^2 dt)\right)$$

et en appliquant Girsanov,

$$K = \left(\frac{u(T)}{u(0)}\right)^{1/2} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\Psi\left(A + Bu(T) \int_0^T \frac{u(t)}{f(t)} dB_t + \int_0^T dt \phi(t) u(t) \int_0^t dB_s \frac{f(s)}{u(s)}\right)\right)$$

On peut calculer le membre de droite, car c'est l'exponentielle d'une gaussienne.

**Exercice 6.6.16 :** On a  $dr = 2\sqrt{\sigma(t)r_t} dB_t + ([2\beta(t) + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}]r_t + \delta\sigma(t))dt$ . L'étude de  $Z$  se fait par une IP.

**Exercice 6.5.5 :**

1. Utiliser Girsanov et Bayes.
2. C'est le théorème de Girsanov appliqué sur l'espace produit.
3. Appliquer Itô. Les termes en  $dt$  sont nuls car  $\pi$  est une martingale.

## 6.6 Finance

**Exercice 6.6.13 :** Il s'agit de calculer  $A = \mathbb{E}\left(e^{-rT} \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_u du - S_T\right)^+\right)$  que l'on écrit

$$A = \frac{1}{T} \mathbb{E}(e^{-rT} S_T (Y_T - K)^+)$$

avec  $Y_t = \frac{1}{S_t} \int_0^t S_u du$  et  $K = T$ . Par un changement de probabilité (le processus  $e^{-rt} \frac{S_t}{S_0}$  est une  $Q$ -martingale positive d'espérance 1), on obtient  $A = \frac{S_0}{T} \tilde{\mathbb{E}}((Y_T - K)^+)$  avec, sous  $\tilde{Q}$

$$dY_t = (1 - rY_t)dt + Y_t \sigma d\tilde{B}_t.$$

On peut utiliser que  $Y_t = U_t + V_t$  avec  $U$  solution de

$$dU_t = -rU_t dt - \sigma U_t d\tilde{B}_t, U_0 = 1$$

et  $V_t = y + \int_0^t (U_s)^{-1} ds$ , ce qui ne nous avance pas beaucoup.

**Exercice 6.6.15 :**

1. On a  $dr_t = \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} r_t dt + \sigma(t)(dB_t + h(t)dt)$ .
2. Une intégration par parties donne le résultat.
3. Une nouvelle intégration par parties donne le résultat
4. Une quantité du type

$$A = \mathbb{E} \left( \exp \left( f(T)B_T - \int_0^T B_s g(s) ds \right) \right)$$

se calcule en recherchant une fonction  $\varphi$  telle que  $\varphi'(s) = g(s)$ ,  $\varphi(T) = g(T)$ . On peut aussi remarquer que

$$h(T)B_T - \int_0^T B_s (h'(s) + \sigma(s)) ds$$

est une variable gaussienne centrée dont on identifie la variance.

**Exercice 6.6.17 :**  $S_t = x + mart + 2(\nu + 1) \int_0^t S_u du$ . Utiliser que  $\frac{1 - e^{-b}}{b} \geq e^{-b}$ . On en déduit que  $\mathbb{E}((\frac{1}{T} \int_0^T \exp(2(B_s + \nu s)) ds - K)^+) \geq \mathbb{E}((\exp 2(B_T + \nu T) - k)^+)$  pour  $k$  assez petit.

**Exercice 6.6.7** Pour évaluer  $\mathbb{E}_Q(h(S_T)|\mathcal{F}_t)$  dans le cas  $h(x) = (x^\alpha - K)^+$ , on utilise ce qui précède en écrivant  $S_T^\alpha$  sous la forme  $x \exp((a - \frac{b^2}{2})t + bB_t)$ . IL est facile de vérifier que sous  $\mathbb{Q}^*$ ,

$$dZ_t = -\sigma Z_t d\tilde{B}_t$$

et comme  $\tilde{B}$  donc  $-\tilde{B}$  est un MB,  $Z$  a même dynamique sous  $\mathbb{Q}^*$  que  $S$  sous  $\mathbb{Q}$ . Par suite

$$\forall \varphi, \mathbb{E}_Q(\varphi(S_T)) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*}(\varphi(Z_T)).$$

Par définition de  $\mathbb{Q}^*$

$$\frac{1}{x} \mathbb{E}_Q(S_T f(\frac{x^2}{S_T})) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*}(f(\frac{x^2}{S_T})).$$

Par définition de  $Z$ ,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*}(S_T f(\frac{x^2}{S_T})) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*}(f(Z_T)) = \mathbb{E}_Q(f(S_T)).$$

Si  $S^\alpha$  est une martingale, le même raisonnement conduit à la formule souhaitée. Un peu d'algèbre permettait décrire  $x^\beta(x - K)^+$  comme

$$(x^{\beta+1} - K^{\beta+1})^+ - K(x^\beta - K^\beta)^+.$$

## Chapter 7

# Compléments, Corrigés

### 7.1 Théorème de Lévy.

**Exercice 7.1.1 :** Soit  $S_t = \sup_{0 \leq s \leq t} W_s$  et

$$\begin{aligned} D &= \sup_{0 \leq s \leq t \leq 1} (W_s - W_t) = \sup_{0 \leq t \leq 1} \sup_{0 \leq s \leq t} (W_s - W_t) \\ &= \sup_{0 \leq t \leq 1} (S_t - W_t) \stackrel{loi}{=} \sup_{0 \leq t \leq 1} |W_t| \end{aligned}$$

Grace au théorème de Lévy

$$(S_t - W_t, S_t, W_t; \theta \leq t \leq 1) \stackrel{loi}{=} (|W_t|, L_t, L_t - |W_t|; g \leq t \leq 1)$$

D'où

$$W_\theta, \sup_{\theta \leq t \leq 1} (S_t - W_t - S_t) \stackrel{loi}{=} L_g - |B_g|, \sup_{g \leq t \leq 1} (|W_t| - L_t) = (L_g, \sup_{g \leq t \leq 1} (|W_t| - L_g))$$

Thus

$$D_1 = W_\theta + \sup_{\theta \leq t \leq 1} (S_t - W_t - S_t) \stackrel{loi}{=} L_g + \sup_{g \leq t \leq 1} |W_t| - L_g$$

**Exercice 7.4.1 :** La premiere égalité provient du théorème de Lévy et de la connaissance de la loi du couple  $(S_t, B_t)$ . La seconde égalité en loi provient de la symétrie de la loi du couple. Pour le semi groupe, on utilise la formule de Lévy et l'indépendance de  $(B_u, u \leq t)$  et de  $\tilde{B}_v = B_{t+v} - B_t$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(S_{t+s} - B_{t+s}, S_{t+s} | \mathcal{F}_s)) &= \mathbb{E}(f((S_s - B_s) \vee \tilde{S}_t - \tilde{B}_t, B_s + (S_s - B_s) \vee \tilde{S}_t S_{t+s}) | \mathcal{F}_s) \\ &= \int \mu_t(da, d\ell) f(\alpha \vee \ell - (\ell - a), (\lambda - \alpha) + \alpha \vee \ell) \end{aligned}$$

Les résultats concernant l'indépendance de  $S_t(S_t - B_t)$  et  $B_t$  sont dus à Seshadri.

### 7.2 Equations rétrogrades

**Exercice 7.2.2 :** Il s'agit d'appliquer la formule d'Itô et le théorème de représentation. La propriété de martingale de  $X$  provient de  $X_t = \mathbb{E}(e^\zeta H_T | \mathcal{F}_t)$  et le théorème de représentation établit l'existence

de  $z$ . Puis, en utilisant la formule d'Itô

$$\begin{aligned} d(1/H_t) &= -\frac{1}{H_t^2}dH_t + \frac{1}{H_t^3}d\langle H \rangle_t = \frac{1}{H_t}[(r + \theta^2)dt + \theta dW_t] \\ d(Z_t/H_t) &= \frac{Z_t}{H_t}[(r + \theta^2)dt + \theta dW_t] + H_t z_t dW_t + \frac{z_t}{H_t}\theta dt \\ dX_t &= \left(\frac{z_t}{H_t} + \theta\right)dW_t + \left((r + \theta^2) + \frac{z_t}{H_t}\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{z_t}{H_t} + \theta\right)^2\right)dt \\ &= \hat{X}_t dW_t + (r + \theta \hat{X}_t - \frac{1}{2}\hat{X}_t^2)dt \end{aligned}$$

### 7.3 Théorèmes de représentation

**Exercice 7.3.1 :** On utilisera le théorème de représentation prévisible pour représenter  $W_t^{(1)}, W_t^{(2)}$  en terme de  $W^{(3)}$ . Si l'égalité était possible, on aurait  $W_t^{(i)} = \int_0^t \Phi_t^{(i)} dW_t$  avec  $\int_0^t \mathbb{E}[\Phi_t^{(i)}]^2 dt = t$  et  $\mathbb{E}(W_t^{(1)} W_t^{(2)}) = \mathbb{E}(\int_0^t \Phi_t^{(1)} \Phi_t^{(2)} dt) = 0$ .

**Exercice 7.3.2 :**  $M$  est une intégrale stochastique, l'intégrand est borné donc de carré intégrable,  $M$  est une martingale. Par propriété de l'intégrale stochastique

$$\left[ \int_0^t \mathbb{1}_{W_s > 0} dW_s \right]^2 - \int_0^t (\mathbb{1}_{W_s > 0})^2 ds$$

est une martingale. Une autre méthode consiste à appliquer la formule d'Itô à  $Y_t^2$  avec  $Y_t = \int_0^t \mathbb{1}_{W_s > 0} dW_s$ . Le processus  $A_t = \int_0^t \mathbb{1}_{W_s > 0} ds$  est un processus croissant.

Le processus  $M_{C_t}$  est une  $\mathcal{G}_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}_{C_t}$  martingale et

$$M_{C_t}^2 - A_{C_t} = M_{C_t}^2 - t$$

est une martingale.

### 7.4 Temps local.

**Exercice 7.4.2 :** On ne peut pas appliquer Itô car  $x \rightarrow |x|$  n'est pas de classe  $C^2$ . Un calcul fait en pensant qu'un point ne compte pas et que l'on peut négliger le point où la dérivée n'existe pas conduirait à (la dérivée de  $|x|$  est égale à  $\text{sgn}$  sauf en 0 et la dérivée seconde est nulle sauf en 0)  $|B_t| = \int_0^t \text{sgn}(B_s) dB_s$  et l'intégrale du membre de droite n'est pas positive (nous verrons plus loin que c'est un mouvement Brownien).

Le processus  $\beta$  est une martingale de crochet  $\int_0^t f^2(B_s) ds = t$ , c'est un MB. Il est évident que pour  $u \geq t$

$$S_u = \sup_{s \leq u} W_s \geq S_t = \sup_{s \leq t} W_s$$

La première décomposition exprime que  $|W_t|$  est égal à un MB plus un processus croissant, la seconde décomposition dit que  $S_t - W_t$  a la même propriété. On peut montrer, grace au lemme de Skohorod (voir poly) que  $(S_t - W_t, t \geq 0) \stackrel{\text{loi}}{=} (|W_t|, t \geq 0)$  et que  $(L_t, t \geq 0) \stackrel{\text{loi}}{=} (S_t, t \geq 0)$ .

**Exercice 7.4.3 :**  $|B_s| + L_s \geq L_t = L_{d_t}$  for  $s \geq t$ , and  $|B_{d_t}| + L_{d_t} = L_{d_t}$ .

**Exercice 7.4.4 :**  $(\theta \leq u) = \sup_{s \geq u} B_s \leq \sup_{s \leq u} B_s = \sup_{1 \geq s \geq u} (B_s - B_u) + B_u \leq \sup_{s \leq u} B_s$  d'où  $\mathbb{P}(\theta \leq u) = \mathbb{P}(\hat{S}_{1-u} \leq S_u - B_u)$  On trouve finalement que  $\theta$  a une loi Arc Sinus.

**Exercice 7.4.5 :** On utilise la formule d'Itô

$$dY_t = f'_x(X_t, S_t, \langle X \rangle_t) dX_t + f'_s(X_t, S_t, \langle X \rangle_t) dS_t + (f'_t + \frac{1}{2} f''_{xx})(X_t, S_t, \langle X \rangle_t) d\langle X \rangle_t$$

Or  $f'_s(X_t, S_t, \langle X \rangle_t) = f'_s(S_t, S_t, \langle X \rangle_t) dS_t$  presque surement. Si  $\frac{1}{2} f''_{xx} + f'_t = 0$  et  $f'_s(s, s, t) = 0$ ,  $Y$  est une martingale locale.

$$\begin{aligned} g(S_t) - (S_t - X_t)g'(S_t) &= g(S_t) - \int_0^t g'(S_s) dS_s + \int_0^t g'(S_s) dX_s + \int_0^t (S_s - X_s)g''(S_s) dS_s \\ &= \int_0^t g'(S_s) dX_s \end{aligned}$$

**Exercice 7.4.6 :** On utilise le scaling du MB pour écrire

$$\int_0^{\lambda^2 t} f(B_s) ds \stackrel{\text{loi}}{=} \lambda^2 \int_0^t f(\lambda B_u) du = \lambda^2 \int da f(\lambda a) L_t^a$$

**Exercice 7.4.8 :** From the occupation formula and change of time  $\int_0^t d\langle M \rangle_s f(M_s) = \int_0^t d\langle M \rangle_s f(\beta_{\langle M \rangle_s}) = \int_0^{\langle M \rangle_t} du f(\beta_u) = \int dy f(y) L_{\langle M \rangle_t}^y(\beta)$ .

## 7.5 Lois

**Exercice 7.5.1 :** Soit  $Y_t = f(X_t)$ . On en déduit

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{X_t}{b(X_t)} dX_t + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{b(X_t)} - \frac{X_t b'(X_t)}{b^2(X_t)} \right) b^2(X_t) dt \\ &= X_t \left( \frac{a(X_t)}{b(X_t)} dt + dW_t \right) + \frac{1}{2} (b(X_t) - X_t b'(X_t)) dt \end{aligned}$$

Le résultat souhaité en découle.

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \left[ X_s \frac{a(X_s)}{b(X_s)} + \frac{1}{2} (b(X_s) - X_s b'(X_s)) \right] ds = \int_0^t X_s dW_s$$

**Exercice 7.5.2 :** Let  $V$  be a standard Brownian motion starting at  $v$ , that is,  $V_t = v + W_t$ . In this case, the two events  $\{\tau_a(V) \leq t\}$  and  $\{\sup_{s \leq t} W_s \geq \alpha\}$ , where  $\alpha = a - v$  are equal. The reflection principle implies that the r.v.  $\sup_{s \leq t} W_s$  is equal in law to the r.v.  $\|W_t\|$ . Therefore,

$$\mathbb{P}(\tau_\alpha(W) \leq t) = \mathbb{P}(\sup_{s \leq t} W_s \geq \alpha) = \mathbb{P}(\|W_t\| \geq \alpha) = \mathbb{P}(W_t^2 \geq \alpha^2) = \mathbb{P}(tG^2 \geq \alpha^2)$$

where  $G$  is a Gaussian variable, with mean 0 and variance 1. It follows that  $\tau_\alpha(W) \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{\alpha^2}{G^2}$ , and the probability density function of  $\tau_\alpha(V)$  is

$$f(t) = \frac{a-v}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(v-a)^2}{2t}\right).$$

The computation of

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T < \tau_a(V)\}} h(V_T)) = \mathbb{E}(h(V_T)) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T \geq \tau_a(V)\}} h(V_T))$$

can be done using Markov property:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T \geq \tau_a(V)\}} h(V_T)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T \geq \tau_a(V)\}} \mathbb{E}(h(V_T) | \mathcal{F}_{\tau_a(V)})) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T \geq \tau_a(V)\}} h(\tilde{V}_{T-\tau_a(V)} + a)),$$

where  $\tilde{V}$  is a Brownian motion independent of  $\tau_a(V)$ .

**Exercice 7.5.3 :** Soit  $y > a$ . On admettra que  $M$  est uniformément intégrable.

$$a = \mathbb{E}[M_{T_y}] = y\mathbb{P}(T_y < \infty) = y\mathbb{P}(\sup M_t \geq y)$$

Soit  $\frac{a}{y} = \mathbb{P}(\sup M_t \geq y) = \mathbb{P}(\frac{a}{y} \geq U) = \mathbb{P}(\frac{a}{U} \geq y)$ .

## 7.6 Filtrations

**Exercice 7.6.2 :**  $M_t = \mathbb{E}(W_t | \mathcal{H}_t)$  est un processus  $\mathbb{H}$ -adapté. Pour montrer que c'est une  $\mathbb{H}$ -martingale, il suffit d'écrire la suite d'égalités suivantes, pour  $t \geq s$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_t | \mathcal{H}_s) &= \mathbb{E}(W_t | \mathcal{H}_t | \mathcal{H}_s) = \mathbb{E}(W_t | \mathcal{H}_s) \\ &= \mathbb{E}(W_t | \mathcal{G}_s | \mathcal{H}_s) = \mathbb{E}(W_s | \mathcal{H}_s) \end{aligned}$$

Pour montrer que  $Z$  est une  $\mathbb{F}^X$ -martingale, on écrit (en justifiant chaque égalité, ce que je ne fais pas)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_s^X) &= \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s^X) - \mathbb{E}(\int_0^t \hat{Y}_u du | \mathcal{F}_s^X) \\ &= \mathbb{E}(W_t + \int_0^t Y_u du | \mathcal{F}_s^X) - \mathbb{E}(\int_0^t \hat{Y}_u du | \mathcal{F}_s^X) \\ &= \mathbb{E}(W_t | \mathcal{F}_s^X) + \mathbb{E}(\int_0^s Y_u du | \mathcal{F}_s^X) + \mathbb{E}(\int_s^t Y_u du | \mathcal{F}_s^X) - \int_0^s \hat{Y}_u du - \mathbb{E}(\int_s^t \hat{Y}_u du | \mathcal{F}_s^X) \\ &= \mathbb{E}(W_s | \mathcal{F}_s^X) + \mathbb{E}(\int_0^s Y_u du | \mathcal{F}_s^X) + \mathbb{E}(\int_s^t Y_u du | \mathcal{F}_s^X) - \int_0^s \hat{Y}_u du - \mathbb{E}(\int_s^t \hat{Y}_u du | \mathcal{F}_s^X) \\ &= \mathbb{E}(X_s | \mathcal{F}_s^X) + \int_s^t \mathbb{E}(Y_u | \mathcal{F}_s^X) du - \int_0^s \hat{Y}_u du - \mathbb{E}(\int_s^t \hat{Y}_u du | \mathcal{F}_s^X) \\ &= X_s + \int_s^t \hat{Y}_u du - \int_0^s \mathbb{E}(\hat{Y}_u | \mathcal{F}_s^X) du - \mathbb{E}(\int_s^t \hat{Y}_u du | \mathcal{F}_s^X) \\ &= X_s - \int_0^s \hat{Y}_u du \end{aligned}$$

on a utilisé que  $\mathbb{E}(W_t | \mathcal{F}_s^X) = \mathbb{E}(W_s | \mathcal{F}_s^X)$  et que, pour  $u > s$

$$\mathbb{E}(Y_u | \mathcal{F}_s^X) = \mathbb{E}(Y_u | \mathcal{F}_u^X | \mathcal{F}_s^X) = \mathbb{E}(\hat{Y}_u | \mathcal{F}_s^X)$$

## 7.7 Options barrières

**Exercice 7.7.1 :** Soit  $\Phi_t(x) = \mathbb{P}(B_t < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^x \exp(-\frac{u^2}{2t}) du$ . on a  $\Phi_t(x) = 1 - \Phi_t(-x)$  d'où,  $\mathbb{P}(B_t < x) = \mathbb{P}(B_t > -x)$ .



Soit  $T = \inf\{t \geq 0 | B_t = y\}$ . Par définition  $\mathbb{P}(B_t \leq x, M_t > y) = \mathbb{P}(T < t, B_{t-T}^* < x - y)$ . Si  $M_t > y$ , c'est que l'on a dépassé  $y$  avant  $t$ : Si  $M_t > y$ , on a  $T < t$ . De plus  $B_{t-T}^* = B_t - B_T = B_t - y$ . Par indépendance,  $\mathbb{P}(T < t, B_{t-T}^* < x - y) = \int_0^t \mathbb{P}(T \in du, B_{t-u}^* < x - y) = \int_0^t \mathbb{P}(T \in du) \mathbb{P}(B_{t-u}^* < x - y)$ . D'après 1,  $\mathbb{P}(B_{t-u}^* < x - y) = \mathbb{P}(B_{t-u}^* > -x + y)$ , d'où

$$\int_0^t \mathbb{P}(T \in du) \mathbb{P}(B_{t-u}^* < x - y) = \int_0^t \mathbb{P}(T \in du) \mathbb{P}(B_{t-u}^* > y - x)$$

et par indépendance

$$\int_0^t \mathbb{P}(T \in du) \mathbb{P}(B_{t-u}^* > y - x) = \int_0^t \mathbb{P}(T \in du, B_{t-u}^* > y - x) = \mathbb{P}(T < t, B_t > 2y - x)$$

En tenant compte du fait que si  $B_t > 2y - x$  et  $y > x$ , alors  $B_t > y$ , donc  $T < t$  on en déduit  $\mathbb{P}(T < t, B_t > 2y - x) = \mathbb{P}(B_t > 2y - x)$  d'où

$$\mathbb{P}(B_t \leq x, M_t > y) = \mathbb{P}(B_t > 2y - x)$$

En utilisant

$$\mathbb{P}(B_t \leq x, M_t < y) = \mathbb{P}(B_t \leq x) - \mathbb{P}(B_t \leq x, M_t > y)$$

on obtient

$$\mathbb{P}(B_t \leq x, M_t < y) = \mathcal{N}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \mathcal{N}\left(\frac{x - 2y}{\sqrt{t}}\right)$$

3. La loi de  $T$  s'obtient en écrivant  $\mathbb{P}(T < t) = \mathbb{P}(M_t < y)$  et la densité du couple  $(B_t, M_t)$  en dérivant  $\mathbb{P}(B_t \leq x, M_t < y)$ .

4. Soit  $X_t = \mu t + B_t$ ,  $Y_t = \sup\{X_s, 0 \leq s \leq t\}$ . Soit  $dQ = \zeta d\mathbb{P}$  avec  $\zeta = \exp(-\mu X_t + \frac{1}{2}\mu^2 t)$ . En utilisant le théorème de Girsanov, on a

$$\mathbb{P}(X_t < x, Y_t < y) = \mathbb{E}_Q(\exp(\mu X_t - \frac{1}{2}\mu^2 t) \mathbb{1}_{X_t < x} \mathbb{1}_{Y_t < y})$$

que l'on peut calculer car sous  $Q$ ,  $X$  est un mouvement Brownien et on connaît la loi du couple  $(x, Y)$  sous  $Q$ .

## 7.8 Méandres, ponts, excursions

**Exercice 7.8.1:** Let  $V$  be a standard Brownian motion starting at  $v$ , that is,  $V_t = v + W_t$ . In this case, the two events  $\{\tau_a(V) \leq t\}$  and  $\{\sup_{s \leq t} W_s \geq \alpha\}$ , where  $\alpha = a - v$  are equal. The reflection principle implies that the r.v.  $\sup_{s \leq t} W_s$  is equal in law to the r.v.  $\|W_t\|$ . Therefore,

$$\mathbb{P}(\tau_a(W) \leq t) = \mathbb{P}(\sup_{s \leq t} W_s \geq \alpha) = \mathbb{P}(\|W_t\| \geq \alpha) = \mathbb{P}(W_t^2 \geq \alpha^2) = \mathbb{P}(tG^2 \geq \alpha^2)$$

where  $G$  is a Gaussian variable, with mean 0 and variance 1. It follows that  $\tau_a(W) \stackrel{loi}{=} \frac{\alpha^2}{G^2}$ , and the probability density function of  $\tau_a(V)$  is

$$f(t) = \frac{a - v}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(v - a)^2}{2t}\right).$$

The computation of

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T < \tau_a(V)\}} h(V_T)) = \mathbb{E}(h(V_T)) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T \geq \tau_a(V)\}} h(V_T))$$

can be done using Markov property:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T \geq \tau_a(V)\}} h(V_T)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T \geq \tau_a(V)\}} \mathbb{E}(h(V_T) | \mathcal{F}_{\tau_a(V)})) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T \geq \tau_a(V)\}} h(\tilde{V}_{T-\tau_a(V)} + a)),$$

where  $\tilde{V}$  is a Brownian motion independent of  $\tau_a(V)$ .

For  $t < 1$ , the set  $\{g \leq t\}$  is equal to  $\{d_t > 1\}$ .

$$d_t^a(W) = t + \inf \{u \geq 0 : W_{u+t} - W_t = a - W_t\} = t + \hat{\tau}_{a-W_t} \stackrel{loi}{=} t + \frac{(a - W_t)^2}{G^2}.$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{a^2}{G^2} > 1 - t\right) = \Phi\left(\frac{\|a\|}{\sqrt{1-t}}\right).$$

Then, the Itô-Tanaka formula combined with the identity  $x\Phi'(x) + \Phi''(x) = 0$  lead to

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(g \leq t | \mathcal{F}_t) = \Phi\left(\frac{|W_t|}{\sqrt{1-t}}\right) &= \int_0^t \Phi'\left(\frac{|W_s|}{\sqrt{1-s}}\right) d\left(\frac{|W_s|}{\sqrt{1-s}}\right) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{ds}{1-s} \Phi''\left(\frac{|W_s|}{\sqrt{1-s}}\right) \\ &= \int_0^t \Phi'\left(\frac{|W_s|}{\sqrt{1-s}}\right) \frac{\text{sgn}(W_s)}{\sqrt{1-s}} dW_s + \int_0^t \frac{dL_s}{\sqrt{1-s}} \Phi'\left(\frac{|W_s|}{\sqrt{1-s}}\right) \\ &= \int_0^t \Phi'\left(\frac{|W_s|}{\sqrt{1-s}}\right) \frac{\text{sgn}(W_s)}{\sqrt{1-s}} dW_s + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \frac{dL_s}{\sqrt{1-s}}. \end{aligned}$$

**Exercice 7.4.7 :** The occupation time formula leads to

$$\mathbb{E} \int_0^{T_a(X)} f(X_s) ds = \int_{-\infty}^a f(x) \mathbb{E}[L_{T_a}^x] dx$$

It remains to compute  $\phi(x) = \mathbb{E}[L_{T_a}^x]$ . Tanaka's formula reads

$$\begin{aligned} (X_{T_a} - x)^+ &= (-x)^+ + \int_0^{T_a} \mathbb{1}_{(X_s > x)} dX_s + \frac{1}{2} L_{T_a}^x \\ (a - x)^+ &= (-x)^+ + \int_0^{T_a} \mathbb{1}_{(X_s > x)} (dW_s + \nu ds) + \frac{1}{2} L_{T_a}^x \end{aligned}$$

Then, taking expectation of both sides

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbb{E}[L_{T_a}^x] &= (a - x)^+ - (-x)^+ - \nu \mathbb{E}\left[\int_0^{T_a} \mathbb{1}_{(X_s > x)} ds\right] \\ &= (a - x)^+ - (-x)^+ - \nu \mathbb{E}\left[\int_x^a L_{T_a}^y dy\right] \end{aligned}$$

Therefore, if  $\phi(x) = \mathbb{E}[L_{T_a}^x]$

$$\frac{1}{2} \phi(x) = (a - x)^+ - (-x)^+ - \nu \int_x^a \phi(y) dy, \quad \phi(a) = 0$$

which gives

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\nu} (1 - \exp(2\nu(x - a))) & \text{for } 0 \leq x \leq a \\ \frac{1}{\nu} (1 - \exp(-2\nu a)) \exp(2\nu x) & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

**Exercice 7.8.2 :** Il suffit d'écrire

$$B_t = m_1 \sqrt{t - g_t} (\text{sgne} B_t)$$

On a alors  $\mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_{g_t}) = \mathbb{E}(m_1 \sqrt{t - g_t} (\text{sgne} B_t) | \mathcal{F}_{g_t}) = \sqrt{t - g_t} (\text{sgne} B_t) \mathbb{E}(m_1) = \sqrt{t - g_t} (\text{sgne} B_t) \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

On note  $\mu_t = \sqrt{t - g_t} (\text{sgne} B_t)$ , c'est une martingale. Des calculs analogues conduisent à

$$\mathbb{E}(B_t^2 - t | \mathcal{F}_{g_t}) = \mathbb{E}(m_1^2) \mu_t^2 - t$$

$$\mathbb{E}(e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t} | \mathcal{F}_{g_t}) = h(\alpha \mu_t) e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

avec  $h(x) = \mathbb{E}(e^{xm_1})$ .



## Chapter 8

# Sauts, Corrigés.

### 8.1 Processus de Poisson

**Exercice 8.4.1** : Il suffit d'utiliser l'Exercice 1.4.9.

**Exercice 8.1.3** : La Propriété d'accroissements indépendants du processus de Poisson conduit à

$$\mathbb{E}(N_t - N_s | \mathcal{F}_s \wedge \sigma(N_1)) = \mathbb{E}(N_t - N_s | (N_s - N_1))$$

Il est bien connu (ou tout au moins facile de vérifier) que si  $X$  et  $Y$  sont deux variables de Poisson, indépendantes, de paramètre  $\mu$  et  $\nu$

$$\mathbb{P}(X = k | X + Y = n) = \binom{n}{k} \alpha^k (1 - \alpha)^{n-k}$$

avec  $\alpha = \frac{\mu}{\mu + \nu}$ . On en déduit

$$\mathbb{E}(N_t - N_s | \mathcal{F}_s \wedge \sigma(N_1)) = \frac{t - s}{1 - s} (N_1 - N_s)$$

La vérification de la propriété de martingale est alors facile.

**Exercice 8.1.4** : Si  $N$  est un processus de Poisson,  $\mathbb{P}(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n t^n}{n!}$  d'où

$$\psi(z, t) = e^{-\lambda t} e^{-\lambda t z}$$

Si  $N$  un processus à accroissements indépendants tel que  $N_{t+s} - N_t \stackrel{loi}{=} N_s$

$$\begin{aligned} \psi(z, t + s) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbb{P}(N_{t+s} = n) = \mathbb{E}(z^{N_{t+s}}) = \mathbb{E}(z^{N_{t+s} - N_t + N_t}) \\ &= \mathbb{E}(z^{N_{t+s} - N_t}) \mathbb{E}(z^{N_t}) = \mathbb{E}(z^{N_s}) \mathbb{E}(z^{N_t}) = \psi(z, t) \psi(z, s) \end{aligned}$$

On en déduit

$$\psi(z, t + h) - \psi(z, t) = \psi(z, t) [\psi(z, h) - 1]$$

ce qui conduit à une EDO en utilisant les propriétés de  $\psi$  données dans l'énoncé. En tenant compte de  $\psi(z, 0) = 1$ , on montre que  $\psi(z, t) = e^{-\lambda t} e^{-\lambda t z}$ , ce qui caractérise le processus de Poisson (cette égalité caractérise la loi de  $N_t$ , ce qui avec  $N$  un processus à accroissements indépendants tel que  $N_{t+s} - N_t \stackrel{loi}{=} N_s$  caractérise le processus de Poisson.)

**Exercice 8.2.1 :** Le processus de Poisson composé est un processus à accroissements indépendants, donc pour  $s < t$

$$\mathbb{E}(Y_t - Y_s | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(Y_t - Y_s) = \mathbb{E}(X_t - X_s) - \mu\lambda(t - s) = 0$$

On peut le démontrer à la main:

$$\mathbb{E}(X_t - X_s | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=N_s+1}^{N_t} Y_i | \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=N_s+1}^{N_t-N_s+N_s} Y_i | \mathcal{F}_s\right) = \Psi(N_s)$$

avec

$$\begin{aligned} \Psi(n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=n+1}^{n+N_{t-s}} Y_i\right) = \sum_k \mathbb{P}(N_{t-s} = k) \mathbb{E}\left(\sum_{i=n+1}^{n+k} Y_i\right) \\ &= \sum_k \mathbb{P}(N_{t-s} = k) k \mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(Y_1) \mathbb{E}(N_{t-s}) = \mathbb{E}(Y_1) \lambda(t - s) \end{aligned}$$

**Exercice 8.2.2 :** Si  $X$  et  $\tilde{X}$  sont deux solutions,

$$Z_t \stackrel{\text{def}}{=} X_t - \tilde{X}_t = -c \int_0^t (X_s - \tilde{X}_s) ds = -c \int_0^t Z_s ds$$

et  $Z$  est solution de l'équation différentielle ordinaire  $Z'_t = -cZ_t$  avec condition initiale nulle. Donc  $Z = 0$ .

Soit  $X_t = e^{-ct}x + \int_0^t e^{-c(t-s)} dN_s$ . On calcule

$$\int_0^t X_s ds = \int_0^t e^{-cs} x ds + \int_0^t ds \int_0^s e^{-c(s-u)} dN_u.$$

L'intégrale double se calcule en employant Fubini (pour des intégrales de Stieltjes)

$$\begin{aligned} \int_0^t ds \int_0^s e^{-c(s-u)} dN_u &= \int_0^t dN_u \int_u^t ds e^{-c(s-u)} = \frac{1}{c} \int_0^t dN_u (1 - e^{-c(t-u)}) \\ &= \frac{1}{c} (N_t - \int_0^t e^{-c(t-s)} dN_s). \end{aligned}$$

En utilisant que  $M$  et  $Y$  sont des martingales

$$\mathbb{E}(M_t Y_t | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(M_t (Y_t - Y_s) | \mathcal{F}_s) + M_s Y_s = \mathbb{E}((M_t - M_s)(Y_t - Y_s) | \mathcal{F}_s) + M_s Y_s$$

Le calcul de  $\mathbb{E}((M_t - M_s)(Y_t - Y_s) | \mathcal{F}_s)$  se fait comme le précédent. **Exercice 8.1.5 :** Par intégration par parties,  $d(tN_t) = N_t dt + t dN_t$  D'où

$$\int_0^t N_s ds = tN_t - \int_0^t s dN_s = \int_0^t (t - s) dN_s$$

Pour calculer la TL, il suffit d'utiliser que pour toute fonction  $h$  (ici, pour  $t$  fixé  $h(s) = -\lambda(t - s)$ ) si  $c$  est l'intensité de  $N$

$$\mathbb{E}(\exp(\int_0^t h(s) dN_s)) = \exp(-c \int_0^t (1 - e^{h(s)}) ds)$$

## 8.2 Poisson composé

**Exercice 8.2.3 :** Par indépendance des  $Y_k$ , on obtient

$$\mathbb{E}(\lambda \sum_{k=1}^n Y_k + \mu \sum_{k=n+1}^m Y_k) = \mathbb{E}(\lambda Y_1)^n \mathbb{E}(\mu Y_1)^m$$

Le caractère PAIS de  $N$  s'obtient à partir de

$$\mathbb{E}(\lambda X_s + \mu(X_t - X_s)) = \mathbb{E}(\psi(\lambda, N_s)\psi(\mu, N_t - N_s)) = \mathbb{E}(\psi(\lambda, N_s))\mathbb{E}(\psi(\mu, N_{t-s}))$$

où  $\psi(\lambda, n) = \mathbb{E}(\lambda Y_1)^n$ . Le processus  $N$  est indépendant des  $(Y_k, k \geq 1)$  et la v.a.  $N_t$  a une loi de Poisson : il s'en suit que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_t \leq x) &= \sum_n \mathbb{P}(N_t = n, \sum_{k=1}^n Y_k \leq x) \\ &= \sum_n \mathbb{P}(N_t = n) \mathbb{P}(\sum_{k=1}^n Y_k \leq x) \\ &= e^{-\lambda t} \sum_n \frac{(\lambda t)^n}{n!} F^*(x), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\sum_{k=1}^n Y_k \mathbb{1}_{N_t=n}) = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{E}(Y) \mathbb{P}(N_t = n) \\ &= \mathbb{E}(Y) \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(N_t = n) = \lambda t \mathbb{E}(Y_1). \end{aligned}$$

Le calcul de la variance peut être obtenu avec les mêmes arguments, mais il est plus facile d'utiliser que le moment d'ordre deux est obtenu par dérivation (d'ordre deux) de la transformée de Laplace de  $X_t$  **Exercice 8.2.4 :** Le processus  $X$  étant un PAI et  $\mathbb{E}(X_t) = \lambda t \mathbb{E}(Y_1)$  on obtient que  $(X_t - t\lambda \mathbb{E}(Y), t \geq 0)$  est une martingale. Plus généralement, si  $f$  une fonction borélienne bornée, on note  $\mu(f) = \int f(x) \mu(dx)$  l'esp $\mathbb{E}(f(Y))$ . Par définition de  $M^f$ ,

$$\mathbb{E}(M_t^f) = \sum_n \mathbb{E}(f(Y_n)) \mathbb{P}(T_n < t) - t\lambda \mu(f) = \sigma(f) \sum_n \mathbb{P}(T_n < t) - t\lambda \mu(f) = 0$$

La fin de la preuve est standard et utilise le calcul suivant, pour  $s > 0$

$$\mathbb{E}(M_{t+s}^f - M_t^f | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E} \left( \sum_{t < u \leq t+s} f(\Delta X_u) \mathbb{1}_{\Delta X_u \neq 0} - s\lambda \mu(f) | \mathcal{F}_t \right) = 0.$$

Pour la réciproque, on écrit

$$\begin{aligned} e^{iuX_t} &= 1 + \sum_{s \leq t} e^{iuX_{s-}} (e^{iuX_s} - 1) \\ &= + \int_0^t e^{iuX_{s-}} dM_s^f + \sigma(f) \int_0^t e^{iuX_{s-}} ds \end{aligned}$$

où  $f(x) = e^{iux} - 1$ . Il en résulte

$$\mathbb{E}(e^{iuX_{t+s}} | \mathcal{F}_t) = e^{iuX_t} + \sigma(f) \int_t^{t+s} dr \mathbb{E}(e^{iuX_{t+r}} | \mathcal{F}_t).$$

En posant  $\varphi(s) = \mathbb{E}(e^{iuX_{t+s}} | \mathcal{F}_t)$  on obtient  $\varphi(s) = \varphi(0) + \sigma(f) \int_0^s \varphi(r) dr$ , d'où

$$\mathbb{E}(e^{iuX_{t+s}} | \mathcal{F}_t) = e^s \lambda \int \mu(dx) (e^{iux} - 1)$$

avec  $\lambda = \sigma(1)$  et  $\mu = \sigma/\lambda$ .

**Exercice 8.2.6 :** From the independence between the r.v.  $(Y_k, k \geq 1)$  and the process  $N$ ,

$$\mathbb{E}(e^{-\alpha X_t}) = \mathbb{E} \left( \exp \left( -\alpha \sum_{k=1}^{N_t} Y_k \right) \right) = \mathbb{E}(\Phi(N_t))$$

where  $\Phi(n) = \mathbb{E} \left( \exp \left( -\alpha \sum_{k=1}^n Y_k \right) \right) = [\Psi_Y(\alpha)]^n$ , with  $\Psi_Y(\alpha) = \mathbb{E}(\exp -\alpha Y)$ . Now,  $\mathbb{E}(\Phi(N_t)) =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\Psi_Y(\alpha)]^n e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n t^n}{n!}. \quad \textbf{Exercice 8.4.1 :} \quad \text{Appliquer la formule d'intégration par parties à } V_t \exp - \int_0^t \lambda_s ds + \int_0^t du h_u \lambda_u (\exp - \int_0^u \lambda_s ds) = U_t \text{ et à } U_t(1 - \mathbb{1}_{\tau \leq t}).$$

### 8.3 Marché complets, incomplets

**Exercice 8.5.1 :** We shall now restrict our attention to the simple case of a complete market where

$$dS_t = S_{t-} [\mu dt + \phi dM_t]$$

and  $r = 0$ . Here,  $M$  is the compensated martingale associated with a poisson process with deterministic intensity.

The non-arbitrage condition is equivalent to the existence of  $\gamma$  such that  $\gamma > -1$  and  $\mu + \lambda\phi\gamma = 0$ . This implies that  $\frac{\lambda\phi - \mu}{\lambda\phi} > 0$ .

The unique equivalent martingale measure  $\mathbb{Q}$  is defined by  $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t} = L_t$  where  $L$  is the strictly positive martingale

$$L_t = \left( \frac{\lambda\phi - \mu}{\lambda\phi} \right)^{N_t} \exp(t\mu/\phi)$$

which satisfies  $dL_t = -L_{t-} \frac{\mu}{\lambda\phi} dM_t$ .

Under the measure  $\mathbb{Q}$ ,  $\tilde{M}_t \stackrel{def}{=} M_t + t\mu/\phi$  is a martingale.

**Exercice 8.5.2 :** Les m.m.e. sont définies par leur densité  $L$  vérifiant

$$dL_t = L_{t-} (-\psi_t dB_t + \gamma_t dM_t)$$

avec

$$\sigma\psi(t) = b - r + \lambda\phi\gamma(t) \quad , \quad d\mathbb{P} \otimes dt.p.s.$$

Elles sont indexées par un processus  $\gamma > -1$ . Sous  $\mathbb{P}^\gamma$ , le processus  $B^\gamma$  défini par

$$B_t^\gamma \stackrel{def}{=} B_t - \int_0^t \psi(s) ds$$

est un mouvement Brownien  $M_t^\gamma \stackrel{def}{=} M_t - \int_0^t \lambda\gamma(s) ds$  est une martingale.

On utilisera

$$B^\gamma(t) = B(t) + t\theta + \int_0^t \lambda\phi \frac{\gamma(s)}{\sigma} ds = B_t^0 + \int_0^t \lambda\phi \frac{\gamma(s)}{\sigma} ds$$

avec  $\theta = \frac{b-r}{\sigma}$ .