

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/317734089>

Teoría Clásica de Campos. El Lagrangiano del modelo estándar

Book · June 2017

DOI: 10.5281/zenodo.596727

CITATIONS

0

READS

5,382

1 author:



[Diego Restrepo](#)

University of Antioquia

66 PUBLICATIONS 1,108 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Dark Matter direct detection experiments [View project](#)

El Lagrangiano del Modelo Estándar

Diego Restrepo
Instituto de Física
Universidad de Antioquia
2012

License



All materials are licensed under the [Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 United States License](#).

Índice general

Introducción	1
1. Teoría Clásica de Campos	7
1.1. Preliminares	7
1.2. Unidades Naturales	7
1.2.1. Dimensiones de Planck	10
1.3. Notación relativista	12
1.3.1. Ejemplos de cuadvectores	15
1.4. Principio de Mínima Acción	19
1.5. La cuerda clásica unidimensional	22
1.6. Construcción de Lagrangianos covariantes	25
1.7. Transformación de Lorentz para campos escalares	26
1.8. Principio de mínima acción para campos	28
1.9. Campo escalar complejo	29
1.10. Problema variacional de Noether	29
1.11. Tipos de conservación	29
1.12. Teoremas	30
1.13. Ecuaciones de Euler-Lagrange	31
1.14. Simetrías internas	32
1.15. Primer teorema de Noether	33
1.16. Segundo teorema de Noether	35
1.17. Simetrías externas	37
1.18. Aplicación a Mecánica Cuántica	38
1.18.1. Conservación del momento	40
1.18.2. Conservación de la energía	41
1.19. Invarianza de fase local del Lagrangiano de Schrödinger's	42
1.20. Ecuación de Schrödinger en presencia de un campo electromagnético	48
1.20.1. Euler-Lagrange equation for ψ^*	49
1.20.2. Corrientes conservadas	51
1.20.3. Interpretación física	53
1.21. Ecuación de Klein-Gordon	54
1.22. Invarianza de fase local para campo escalar complejo	55
1.23. Principio de Mínima Acción para \mathcal{L}	56
1.24. Problemas	58

2. Campos bosónicos	61
2.1. Construcción de Lagrangianos covariantes	61
2.1.1. Ecuaciones covariantes	62
2.2. Campos escalares complejos	63
2.3. Ecuaciones de Maxwell en notación covariante	64
2.3.1. Lagrangiano Electromagnético	68
2.4. Vector field Lagrangian	69
2.4.1. Energía del campo electromagnético	75
2.4.2. Fijación del gauge	77
2.5. Ecuaciones de Proca	78
2.6. Problemas	80
3. Fermiones	81
3.1. Preliminares	81
3.1.1. Representaciones de grupos	81
3.2. Grupo de Lorentz	85
3.3. 2 representaciones 2×2 del Grupo de Lorentz	89
3.4. Lorentz transformation of the fields	89
3.5. Lagrangian	91
3.5.1. Lorentz transformation	92
3.5.2. Corriente conservada y Lagrangiano de Weyl	94
3.5.3. Tensor momento-energía	95
3.5.4. Righthanded fermion	95
3.5.5. Ecuaciones de Euler-Lagrange	96
3.5.6. Ejercicio	99
3.5.7. Lorentz invariance of the Weyl Action	100
3.6. Espinores de Dirac	102
4. Ruptura espontánea de simetría	107
4.1. El resurgimiento del éter.	107
4.2. Campo escalar real	111
4.2.1. Ausencia de taquiones	114
4.2.2. Caso complejo	114
4.3. Electrodinámica cuántica escalar	116
4.3.1. Gauge unitario	117
4.3.2. Superconductividad	118
4.4. Masas para fermiones de Weyl	118
4.5. SU(2) escalar	120
5. Principio gauge local	125
5.1. Electrodinámica Cuántica	125
5.1.1. Paridad	128
5.2. Cromodinámica Cuántica	128
5.3. Soluciones a la ecuación de Dirac	141
5.3.1. Lagrangiano de Weyl	141
5.3.2. Ecuaciones de Weyl	142

5.4. Espín	143
5.5. Solución de partícula libre	146
5.5.1. Ecuaciones de Euler–Lagrange	149
5.5.2. Corrientes conservadas	151
6. Modelo Estándar	153
6.1. Contenido de partículas	153
6.2. Interacciones débiles	154
6.2.1. Productos $SU(2)$	155
6.2.2. Ruptura espontánea de simetría	158
6.2.3. Spontaneous symmetry breaking in $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$	160
6.2.4. Lagrangiano de Yukawa	163
6.2.5. interacciones Fermión-gauge	164
6.2.6. Self-interactions	166
6.2.7. Notación de Dirac para la primera generación	167
6.2.8. Dinámica de sabor	168
6.3. Fenomenología Electrodébil	172
6.3.1. Decaimientos débiles mediados por corrientes cargadas	174
6.4. Resumen	177
6.5. Lecturas recomendadas	181
A. Potencial de Yukawa	183
A.1. Ecuación de Klein-Gordon	183
B. Dirac Action	191
B.1. Dirac’s Action	191
B.1.1. Lorentz transformation	191
B.1.2. Corriente conservada y Lagrangiano de Dirac	193
B.1.3. Tensor momento-energía	194
B.1.4. Ecuaciones de Euler-Lagrange	195
B.1.5. Propiedades de las matrices de Dirac	198
B.1.6. Lorentz invariance of the Dirac Action	200
B.1.7. Dirac’s Lagrangian	201
C. Soluciones a la ecuación de Dirac	203
C.1. Fermiones quirales de cuatro componentes	203
C.1.1. Fermiones de Weyl	205
C.2. Soluciones a la ecuación de Dirac	205
C.2.1. Lagrangiano de Weyl	205
C.3. Límite no relativista en presencia de un campo electromagnético	206
C.4. Problemas	209
C.5. Apéndices	210
C.6. Fermiones quirales de cuatro componentes	210
C.6.1. Corriente conservada y Lagrangiano de Dirac	211
C.6.2. Tensor momento-energía	213
C.6.3. Ecuaciones de Euler-Lagrange	213
C.6.4. Propiedades de las matrices de Dirac	216

D. Soluciones a los problemas	219
D.1. Lagrangiano para una generación en Dirac	223

Introducción

Nuestro entendimiento de cómo funciona el mundo físico ha llegado a una culminación exitosa en años recientes con el desarrollo y comprobación experimental del Modelo Estándar (ME) de las interacciones fundamentales. A medida que el ME ha llegado a ser mejor entendido y comprobado experimentalmente, mucha más gente con algunos conocimientos en física desea entender cuantitativamente éste nuevo éxito de las ciencias moderna. Debido a esto, parece esencial tener una presentación del ME que pueda ser usada a nivel pregrado. En el presente trabajo pretendemos desarrollar un núcleo básico de temas que permitan construir el Lagrangiano del Modelo Estándar y mostrar que dentro de este marco se pueden ilustrar los aspectos más importantes del ME. Este material de apoyo está dirigido a personas que con conocimientos de mecánica y electromagnetismo a nivel de pregrado quieran obtener un conocimiento básico de los principios subyacentes y las principales predicciones del Modelo Estándar de las partículas elementales que permita apreciar una de las fronteras más importantes de la ciencia moderna.

El Modelo Estándar da una descripción amplia de las partículas básicas y las fuerzas de la naturaleza y de como pueden ser descritos todos los fenómenos físicos que vemos. Este contiene los principios subyacentes de todo el comportamiento de protones, núcleos, átomos, moléculas, materia condensada, estrellas, y más. El Modelo Estándar ha explicado mucho de lo que no fue entendido antes; ha hecho cientos de predicciones exitosas, incluyendo muchas que han sido dramáticas; y a excepción de los resultados sobre oscilaciones de neutrinos, no hay ningún fenómeno en su dominio que no haya sido explicado.

La madurez de la formulación del Modelo Estándar hace que cada vez sea más necesario que cualquier persona formada en física deba tener un conocimiento básico de sus principios subyacentes y sus principales predicciones. Sin embargo, una apreciación completa del éxito y el significado del Modelo Estándar requiere de un conocimiento profundo de la Teoría Cuántica de Campos que va más allá de lo que es enseñado usualmente en los cursos de pregrado en física. La Teoría Cuántica de Campos combina de forma coherente la mecánica cuántica y la relatividad especial. No fue sino hasta que la Teoría Cuántica de Campos quedó completamente formulada a principio de los años setenta (con la prueba de que las Teorías Gauge no abelianas con ruptura espontánea de simetría eran renormalizables), que el Modelo Estándar consiguió emerger como la teoría que explica el comportamiento conocido de las partículas elementales y sus interacciones.

A medida que el Modelo Estándar ha llegado a ser mejor entendido y comprobado experimentalmente, mucha más gente con algunos conocimientos en física pero que no esta interesada en trabajar en física de partículas, desea entender cuantitativamente éste nuevo éxito de las ciencias moderna. Debido a esto, parece esencial tener una presentación del Modelo Estándar que pueda ser usada a nivel pregrado. Además, parece aún más importante tener libros que cualquier estudiante o físico que tenga los conocimientos necesarios pueda leer para aprender sobre los desarrollos en física de partículas. Aquellos desarrollos deberían ser parte de la educación de cualquiera interesado en lo que la humanidad ha aprendido acerca de los constituyentes básicos de la materia y las fuerzas de la

naturaleza.

Pero hasta hace poco tiempo no había un sitio donde las personas con los conocimientos suficientes pudieran ir a aprender esos desarrollos. Para llenar este vacío aparecieron libros como el de Kane [1] (1993) y Cottingham [2] (1998) donde los prerequisites mínimos son un curso introductorio en mecánica cuántica (Física Moderna) y los cursos normales de pregrado en mecánica y electromagnetismo. Con éstas herramientas es posible obtener un buen entendimiento a nivel cuantitativo de la física de partículas moderna. En estos libros se ha hecho un esfuerzo por extraer los conceptos y técnicas básicas usadas en el Modelo Estándar de modo que un mayor número de físicos no especializados en el área puedan tener una visión del logro intelectual representado por el Modelo, y compartir el excitamiento por su éxito. En estos libros el Modelo Estándar es enseñado escribiendo la forma básica de la teoría y extrayendo sus consecuencias.

Todos los tratamientos anteriores eran a nivel de posgrado para físicos que querían especializarse en el área, o descripciones populares demasiado superficiales para realmente entender los desarrollos, o descripciones históricas carentes de la lógica profunda del Modelo Estándar.

Con nuestra experiencia dictando los cursos de introducción a la física de partículas en la carrera de Física basados en estos textos, ha quedado claro que con una presentación del Modelo Estándar de una forma deductiva en lugar de la aproximación histórica usual de los libros más avanzados, los estudiantes pueden llegar a entender la estructura básica de la física de partículas moderna. Además resulta ser una pequeña extensión adicionar el marco apropiado para entender porque algunas direcciones de la investigación de frontera se enfatizan más, y en que direcciones se espera que aparezcan nuevos progresos.

Con el presente trabajo queremos ir más allá del objetivo de los anteriores libros y mostrar que con una reorganización e inclusión de tópicos adicionales no enfatizado en esos libros, con sólo los conocimientos de los cursos normales de pregrado en mecánica y electromagnetismo, se puede llegar más rápidamente a un entendimiento cuantitativo de los aspectos más importantes del Modelo Estándar.

En el presente trabajo pretendemos desarrollar un núcleo básico de temas que permitan construir el Lagrangiano del Modelo Estándar y mostrar que dentro de este marco se pueden ilustrar los aspectos más importantes del Modelo Estándar.

La Teoría Cuántica de Campos (TCC) es el marco teórico utilizado en la descripción cuántica de campos relativistas. En esta teoría se estudian sistemas en los cuales las partículas pueden ser creadas y destruidas. Esta teoría resulta de combinar la mecánica cuántica con la relatividad especial en un marco consistente. Las teorías cuánticas de campos se describen más convenientemente en el formalismo Lagrangiano. De hecho, los Lagrangianos que describen las partículas elementales y sus interacciones puede ser construidos a partir de principios de simetría. Aspectos básicos de la construcción de la TCC son:

- Lagrangianos para campos de una sola partícula
- Tratamiento relativístico de un campo
- Segunda cuantización de campos de una sola partícula, bien sea mediante la cuantización canónica o a través de integrales de camino
- Tratamiento de una sola partícula de forma covariante que permita describir la creación y aniquilación de partículas.
- Invarianza gauge local

Ejemplos concretos de teorías cuánticas de campos son:

- **Electrodinámica Cuántica.** Resulta de imponer el principio gauge local basado en una simetría abeliana a la ecuación de Dirac para el electrón. Como resultado se obtienen las ecuaciones de Maxwell con un término de corriente asociada a la interacción electromagnética entre el electrón y el fotón.
- **Cromodinámica Cuántica.** Resulta de imponer el principio gauge local basado en una simetría no abeliana a la ecuación de Dirac para los quarks. Entre los resultados se explica la libertad asintótica observada en las interacciones fuertes y la autointeracción de los bosones gauge.
- **Teoría Electrodébil.** Resulta de imponer el principio gauge local simultáneamente para una simetría abeliana y para una simetría no abeliana a la ecuación de Dirac para los fermiones conocidos. La simetría no abeliana en este caso prohíbe términos de masa para los fermiones, mientras que la invarianza gauge local, como en los casos anteriores, prohíbe los términos de masa para los bosones gauge. De este modo, cuando las simetrías de la teoría electrodébil son exactas, todas las partículas aparecen sin masa. Para ser consistente con el espectro de fermiones y bosones conocidos, se introducen 4 campos escalares sin masa organizado en lo que se conoce como un doblete de Higgs. Uno de ellos desarrolla un valor esperado de vacío y rompe espontáneamente la simetría, generando masa para todos los fermiones. Mediante el mismo mecanismo los otros 3 campos escalares ayudan a explicar las masas para tres de los bosones gauge del modelo. El fotón, junto con los neutrinos permanecen sin masa.

El Modelo Estándar es la TCC que combina de forma consistente la Cromodinámica Cuántica y la Teoría Electrodébil. Después del rompimiento espontáneo de la simetría la parte Electrodébil se reduce a la Electrodinámica Cuántica. El estudio de los fundamentos y las consecuencias fenomenológicas del Modelo Estándar requiere del desarrollo completo de la TCC basado en conceptos y técnicas avanzadas de mecánica cuántica y relatividad especial a un nivel normalmente de posgrado.

En las TCC los campos electromagnéticos se convierten en operadores que dependen del espacio y el tiempo. Los valores esperados de estos operadores en el ambiente descrito por los estados cuánticos dan lugar a los campos clásicos. Los otros campos bosónicos, y los campos de Dirac para los fermiones del Modelo Estándar también se convierten en operadores.

Sin embargo se puede escribir la forma básica del Modelo Estándar y extraer muchas de sus consecuencias tratando los campos bosónicos y de Dirac como simples funciones.

En éste caso los campos se pueden pensar como funciones de ondas de una partícula. En este contexto el Lagrangiano del Modelo Estándar puede construirse usando solo conocimientos a nivel de pregrado de mecánica y electromagnetismo y algunas referencias a aspectos básicos de la mecánica cuántica.

Con estas herramientas se pueden escribir las ecuaciones de Maxwell en forma covariante y mostrar como éstas se pueden obtener, usando el principio de mínima acción, a partir del Lagrangiano para el vector de campo electromagnético. Se puede introducir a este nivel la importante idea de las transformaciones gauge y relacionarla con la conservación de la carga eléctrica. Se puede generalizar el Lagrangiano para describir campos vectoriales masivos, lo que da lugar a la ecuación de Proca. A este punto, se puede obtener el Lagrangiano para una partícula escalar real, a partir de la componente escalar del campo vectorial y mostrar que dicho Lagrangiano da lugar a la ecuación de Klein-Gordon. Tomando la componente escalar como un campo independiente se puede usar el principio gauge local para estudiar sus interacciones con los campos gauge. Usando conceptos de mecánica cuántica

se puede generalizar el potencial del Lagrangiano para el campo escalar de modo que se pueda interpretar su masa como las oscilaciones del campo alrededor de estado de energía fundamental, el vacío. Se puede estudiar a partir de allí, la ruptura espontánea de simetría. Con estos ingredientes se puede construir finalmente el Lagrangiano bosónico del Modelo Estándar.

Después de esto, se puede introducir el campo de Dirac como la solución a la ecuación equivalente a la ecuación Schrödinger pero compatible con la relatividad especial. Luego de definir el espín y la helicidad se impone la invarianza gauge local del Modelo Estándar al Lagrangiano de Dirac y se obtiene de esta forma el Lagrangiano completo del Modelo Estándar.

En el primer capítulo se ha abordado la formulación Lagrangiana de la Teoría de Campos Clásica. En la sección 1.4 (ver Anexo 2), se formula el Principio de Mínima Acción para sistemas de partículas y se establece que la cantidad a minimizar corresponde al Lagrangiano del sistema. Este Lagrangiano depende de coordenadas generalizadas de desplazamiento y su derivada temporal.

En la sección 1.5 se construye el sistema continuo más simple correspondiente a las oscilaciones de una cuerda unidimensional. Esta se construye suponiendo un sistema discreto de partículas unidas por resortes que oscilan alrededor de su punto de equilibrio. Usando las técnicas de la sección 1.4 se construye el Lagrangiano interpretando como desplazamiento el campo que describe las oscilaciones de cada partícula. Tomando el límite de infinitas partículas y separación cero, se reescribe la Acción en términos de la densidad Lagrangiana y se establece que para sistemas continuos es dicha densidad Lagrangiana la que hay que minimizar para establecer el principio de mínima acción. Tenemos entonces de un lado la Lagrangiana como punto de partida para describir las coordenadas de sistemas discretos, y la densidad Lagrangiana para describir los campos de desplazamiento de sistemas continuos.

En la sección 1.23 se usan métodos variacionales para calcular la variación de la acción debida a transformaciones de los campos (transformaciones internas) y de las coordenadas (transformaciones externas). Con este resultado se derivan las ecuaciones de Euler-Lagrange en términos de la densidad Lagrangiana y se demuestra el Teorema de Noether. Para simetrías internas se encuentra la expresión para la corriente conservada J^μ en términos de la densidad Lagrangiana. Para simetrías externas se encuentra la expresión para el tensor $T^{\mu\nu}$, que en sistemas relativistas se interpreta como el tensor de momento-energía $T^{\mu\nu}$.

De este modo dada una densidad Lagrangiana, las cantidades a calcular corresponden a la ecuación de movimiento resultante de la ecuaciones de Euler Lagrange, la corriente conservada J^μ si la densidad de Lagrangiana posee alguna simetría continua, y el tensor $T^{\mu\nu}$.

Para la densidad Lagrangiana que da lugar a la ecuación de Schrödinger en la sección 1.18, la simetría interna de invarianza de fase da lugar a la conservación de la probabilidad, $\int_V T_0^0 d^3x$ da lugar a la energía del sistema, y la integral de T_0^i da lugar al correspondiente número de onda de la solución de onda plana para la ecuación de Schrödinger.

La densidad Lagrangiana para la cuerda unidimensional no posee simetrías internas continuas. Con respecto a las simetrías externas, en la sección ?? se muestra que para interpretar correctamente el tensor T_ν^μ en este caso, es preciso cuantizar el campo que describe las oscilaciones de la cuerda. Al cuantizarlo se encuentra que éste describe una partícula que transporta energía, y en el límite en el cual la velocidad de la onda es la velocidad de la luz, la partícula correspondiente también transporta momentum. De hecho, para que una onda sea solución a las ecuaciones que describen las oscilaciones de una cuerda unidimensional relativista se requiere que su frecuencia y número de onda satisfagan la ecuación de energía-momento relativista con masa cero. La adición de un término de masa al Lagrangiano correspondiente, da lugar a la ecuación de Klein-Gordon para un campo real.

En el segundo capítulo se estudia la versión covariante de la ecuaciones de Maxwell. Después

de introducir las unidades naturales en la sección 1.2 y la notación relativista en la sección 1.3, la forma covariante de las ecuaciones de Maxwell se desarrolla en la sección 2.3. Allí se explota la invarianza gauge para encontrar el Lagrangiano electromagnético, el cual se reduce a las ecuaciones de Klein-Gordon con masa igual a cero cuando se escoge el Gauge de Lorentz. En la sección 2.5, se modifican las ecuaciones de Maxwell para permitir un término de masa. Cómo dicho término rompe la invarianza gauge de la teoría, el gauge de Lorentz pasa a ser una condición ineludible que da lugar a la ecuación de Klein-Gordon para un campo vectorial.

En el tercer capítulo se introduce la ecuación de Klein-Gordon como un caso particular de la ecuación de Proca. Se muestra que dicha ecuación exhibe una simetría discreta de paridad para el caso de un campo real. En las secciones subsiguientes se aumenta el Lagrangiano adicionando más grados de libertad de la misma masa y se muestra como va aumentando la simetría de una simetría discreta a simetrías continuas abelianas y no abelianas. A la luz de teorema de Noether estas simetrías dan lugar a cargas conservadas globalmente. En la sección ?? se establece el principio gauge local para imponer que la carga se conserve localmente. Esto da lugar a la aparición del campo gauge asociado a las interacciones electromagnéticas y a la dinámica asociada a la interacción del campo escalar complejo en presencia del campo electromagnético. En la sección ?? se generaliza el principio gauge local al caso no Abelian, y en la sección ?? se combinan el caso Abelian con el no Abelian. Las nuevas características de las ecuaciones del campo gauge no Abelian se ilustran usando la representación adjunta del Grupo no Abelian en la sección ??.

En el cuarto capítulo se repite el mismo procedimiento del anterior capítulo pero reemplazando el potencial escalar de $\frac{1}{2}m^2\phi^2$ a $\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4$ con $\mu^2 < 0$ y $\lambda > 0$. De modo que μ no puede interpretarse como un parámetro de masa. Este potencial contiene un conjunto degenerado de vacíos que no respetan la invarianza del Lagrangiano. El análisis del espectro partículas alrededor de uno de estos mínimos da lugar a bosones de Higgs masivos, sección ??, bosones de Goldstone, sección ??, y campos gauge masivos, sección ?? a través del mecanismo de ruptura espontánea de la simetría. La sección ?? es un aplicación de todos los conceptos y técnicas desarrollados al caso del sector bosónico del Modelo Estándar de las partículas elementales.

En el quinto capítulo, basándonos en principios de simetría, se encuentra el Hamiltoniano de la Ecuación de Schrödinger dependiente sólo de primera derivadas y que es compatible con la ecuación de Klein-Gordon. Este corresponde la ecuación de Dirac que describe los fermiones del Modelo Estándar. El Hamiltoniano resulta ser en este caso una combinación lineal de matrices que satisfacen el álgebra de Dirac. El Lagrangiano de Dirac, resulta tener una invarianza abeliana global. En la sección 5.1 se usa el principio gauge local para hacer que la carga asociada a la transformación abeliana sea local. Como antes esto da lugar a la aparición del campo gauge asociado a las interacciones electromagnéticas y a la dinámica asociada a la interacción del campo fermiónico en presencia del campo electromagnético. En la sección 5.5 se definen la helicidad izquierda y derecha de los fermiones.

En el capítulo seis, se construye el Lagrangiano leptónico gauge local para el Grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$ que describe correctamente las interacciones débiles y electromagnéticas. Como 3 de los 4 bosones gauge son masivos debe introducirse un potencial escalar que rompa espontáneamente la simetría. En la sección 5.2 se introduce el grupo gauge local no Abelian responsable de las interacciones fuertes entre quarks y que completa la estructura de grupo del Modelo Estándar de las partículas elementales.

La página web del curso está en:

<http://fisica.udea.edu.co/cursos>

Capítulo 1

Teoría Clásica de Campos

Mostraremos la conexión entre teoría clásica de campos y relatividad especial. Se hará un repaso de las nociones de relatividad especial para mostrar como se transforman los campos escalares y vectoriales bajo transformaciones de Lorentz.

1.1. Preliminares

Antes de entrar en materia, se sentarán las bases teóricas necesarias sobre el sistema de unidades más utilizado en física subatómica en la Sección 1.2 y temas de relatividad especial que serán utilizados posteriormente en la Sección 1.3. Los ejemplos de cuadvectores en la Subsección se dejan como referencia para posible uso posterior

1.2. Unidades Naturales

Las *unidades naturales* son unidades físicas de medida definidas en términos de constantes físicas universales [21]. El primer conjunto consiste de unidades naturales, las *unidades de Planck* [22], fue formulado por el propio Planck después de establecer la última constante universal, que lleva su nombre. En palabras de Planck

...ihre Bedeutung für alle Zeiten und für alle, auch außerirdische und außermenschliche Kulturen notwendig behalten und welche daher als »natürliche Maßeinheiten bezeichnet werden können...

...Estas necesariamente retienen su significado en todos los tiempos y para todas las civilizaciones, aún las extraterrestre y no humanas, y por consiguiente se pueden designar como “Unidades naturales”...

De este modo, estas unidades son naturales debido a que el origen de su definición proviene solo de propiedades de la naturaleza y no de alguna construcción humana. A diferencia de otros conjuntos de unidades naturales las unidades de Planck donde

$$G_N = 1, \quad \hbar = 1, \quad c = 1, \quad K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1, \quad k = 1, \quad (1.1)$$

están basadas sólo en las propiedades del espacio libre, y no en las propiedades (tales como carga, masa, tamaño o radio) de algún objeto o partícula elemental.

Las constantes físicas que suelen normalizarse se escogen del conjunto dado por la ec. (1.1) y

$$e, \quad m_e, \quad m_p. \quad (1.2)$$

Teniendo en cuenta que $1 \text{ eV} = 1.602 \ 176 \ 565(35) \times 10^{-19} \text{ J}$,

$$\begin{aligned} 10^{-9} \text{ GeV} &= 1.602 \ 176 \ 565(35) \times 10^{-19} \text{ J} \\ 1 \text{ GeV} &= 1.602 \ 176 \ 565(35) \times 10^{-10} \text{ J} \end{aligned} \quad (1.3)$$

De la masa en reposo del protón, por ejemplo,

$$\begin{aligned} m_p c^2 &= 1.672 \ 621 \ 777(74) \times 10^{-27} \text{ kg} \times (299 \ 792 \ 458 \text{ ms}^{-1})^2 \\ &= 1.503 \ 277 \ 5 \times 10^{-10} \text{ J} \frac{1 \text{ GeV}}{1.602 \ 176 \ 565(35) \times 10^{-10} \text{ J}} \\ &= 938.272 \ 046(21000000) \text{ MeV}/c^2, \end{aligned}$$

podemos obtener la equivalencia entre masa y energía en unidades naturales: $c = 1$

$$\begin{aligned} m_p &= 938.272 \ 046(21) \text{ MeV} \\ &\approx 1 \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

de modo que

$$1 \text{ kg} = 5.609 \ 589 \ 12(42) \times 10^{26} \text{ GeV}. \quad (1.5)$$

Example 1.2.0.1

Calcule la energía cinética de un mosquito de 2 mg, moviéndose a 1.45 Km/h

$$v = 1.45 \text{ km/h} \frac{1 \text{ h}}{3 \ 600 \text{ s}} \frac{1 \ 000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = 0.4 \text{ m/s} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m v^2 = 0.5 \times 2 \times 10^{-6} \text{ kg} (0.4 \text{ m/s})^2 \\ &= 1.6 \times 10^{-7} \text{ J} \\ &= 1 \text{ TeV}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Teniendo en cuenta que [25]

$$c = 299 \ 792 \ 450 \text{ m s}^{-1} \quad (\text{exact}), \quad (1.8)$$

podemos obtener la relación entre longitud y energía a partir de

$$\begin{aligned} \hbar c &= 1.054 \ 571 \ 68(53) \times 10^{-34} \text{ J s} \times 299 \ 792 \ 450 \text{ m s}^{-1} \\ &\approx 3.161 \ 526 \ 28 \times 10^{-26} \text{ J m} \\ &\approx 3.161 \ 526 \ 28 \times 10^{-26} \text{ J} \frac{1 \text{ GeV}}{1.602 \ 176 \ 487 \times 10^{-10} \text{ J}} \text{ m} \\ &= 1.973 \ 269 \ 631(49) \times 10^{-16} \text{ GeV m}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

$6.582\,118\,99(16) \times 10^{-25} \text{ s}$	$\hbar \text{ GeV}^{-1}$
$1.973\,269\,631(49) \times 10^{-16} \text{ m}$	$\hbar c \text{ GeV}^{-1}$
1 kg	$5.609\,589\,12(42) \times 10^{26} \text{ GeV}/c^2$
1 K	$8.617\,343(15) \times 10^{-14}/k \text{ GeV}$
$299\,792\,450 \text{ m s}^{-1}$	c
m kg	$2.842\,278\,859 \times 10^{-16} \hbar c^{-1}$

Tabla 1.1: SI \leftrightarrow MPU

Entonces $\hbar c = 0.1973\,269\,631(49) \text{ GeV fm}$.

podemos obtener la relación entre el tiempo y la energía de

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = 1.054\,571\,68(53) \times 10^{-34} \text{ J s} = 6.582\,118\,99(16) \times 10^{-25} \text{ GeV s}, \quad (1.10)$$

Similarmente para la relación entre temperatura y energía, tenemos de la constante de Boltzman

$$k = 1.380\,6504(24) \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} = 8.617\,343(15) \times 10^{-14} \text{ GeV K}^{-1}. \quad (1.11)$$

Los factores de conversión del sistema MKS a MPU están dados en la Tabla 1.1 después de hacer $\hbar = c = k = 1$

De la constante de Fuerza electrostática $K = 1/(4\pi\epsilon_0)$, podemos obtener el valor de la constante de estructura fina electromagnética $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx \frac{1}{4\pi \times 8.854 \times 10^{-12}} \text{ C}^{-2} \text{ Nm}^2 = \frac{1}{4\pi \times 8.854 \times 10^{-12}} \text{ C}^{-2} \text{ Kg m}^3 \text{ s}^{-2} \\
&\approx \frac{1}{4\pi \times 8.854 \times 10^{-12}} \text{ C}^{-2} \times 5.6096 \times 10^{26} \text{ GeV} \times (5.068 \times 10^{15} \text{ GeV}^{-1})^3 \\
&\quad \times (1.519 \times 10^{-24} \text{ GeV}^{-1})^{-2} \times \frac{(\hbar c)^3 \hbar^{-2}}{c^2} \\
&\approx 2.84 \times 10^{35} \text{ C}^{-2} \hbar c \\
&\approx 2.84 \times 10^{35} \text{ C}^{-2} \times \left(\frac{1.602 \times 10^{-19}}{e^2} \right)^2 \hbar c \\
&= \frac{7.296 \times 10^{-3}}{e^2} \hbar c
\end{aligned}$$

Definimos la cantidad adimensional α , como

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx 7.296 \times 10^{-3} \approx \frac{1}{137}$$

conocida como la constante de estructura fina, que no puede tomar un valor numérico diferente sin importar el sistema de unidades que se use. De modo que no se puede tener un sistema de unidades que normalice todas las constantes físicas presentes en α . Sólo 3 de las cuatro constantes e , \hbar , ϵ_0 y c pueden ser normalizadas, y la otra queda dependiendo del valor de α .

El propósito de las unidades naturales es simplificar las expresiones algebraicas que aparecen en las leyes físicas.

El sistema de unidades naturales que usaremos es el de las Unidades de Planck Modificadas (MPU)

$$G_N = 1, \quad \hbar = 1 \quad c = 1, \quad \epsilon_0 = 1, \quad k = 1, \quad (1.12)$$

de modo que

$$e = \sqrt{4\pi\alpha}, \quad \text{or} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \quad (1.13)$$

Example 1.2.0.2

Calcule la energía potencial de Coulomb para una par de protones (o electrones) separados una distancia $l = \hbar c / \text{GeV} = 0.1973 \, 269 \, 631 \, \text{fm}$

$$\begin{aligned} V &= \frac{K e^2}{l} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(\hbar c) \, \text{GeV}^{-1}} \\ &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \text{GeV}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Como V tiene unidades de energía, de la ec. (1.14) resulta de nuevo α .

1.2.1. Dimensiones de Planck

La relación ente masa y energía se puede obtener también a partir de

$$G_N = 6.674 \, 28(67) \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} = 6.70881(65) \times 10^{-39} \hbar c (\text{GeV}/c^2)^{-2} \quad (1.15)$$

entonces¹

$$M_p \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} = 1.2209 \times 10^{19} \text{GeV}/c^2 = 2.1765 \times 10^{-8} \text{kg} \quad (1.16)$$

y

$$G_N = \frac{\hbar c}{M_p^2}. \quad (1.17)$$

La energía de Planck es entonces $M_p c^2$, e igual a la masa en unidad naturales.

De los factores de conversión de la tabla vemos que masa×longitud tiene las mismas unidades que \hbar/c , de modo que podemos definir la longitud de Planck tal que

$$\begin{aligned} L_p M_p &\equiv \frac{\hbar}{c} \\ L_p &= \frac{\hbar}{c M_p} = \frac{\hbar}{c} \sqrt{\frac{G_N}{\hbar c}} = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^3}} \\ &\approx 8.1907 \times 10^{-20} \frac{\hbar}{c \, \text{GeV}} \approx 1.6163 \times 10^{-35} \text{m} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Este análisis dimensional muestra que la longitud de Planck corresponde a una escala a la cual los efectos gravitacionales llegan a ser importantes, es decir, que la intensidad del potencial gravitacional

¹o de una masa bien medida, por ejemplo $m_p = 0.938 \, 272 \, 013(23) \, \text{GeV}/c^2 = 1.672 \, 621 \, 637(83)^{-27} \text{kg}$.

es del orden de la masa de la partícula que lo genera²

$$V_{\text{gravity}} = G_N \frac{M_p^2}{L_p} = M_p c^2 \quad (1.19)$$

Finalmente, el tiempo de Planck es

$$t_P \equiv \frac{L_p}{c} = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^5}} \approx 8.1907 \times 10^{-20} \frac{\hbar}{c^2 \text{ GeV}} \approx 5.3912 \times 10^{-44} \text{ s}, \quad (1.20)$$

y la temperatura de Planck es

$$T_P \equiv \frac{M_p c^2}{k} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G_N k^2}} = 1.4168 \times 10^{32} \text{ K}. \quad (1.21)$$

Teniendo en cuenta la condición en (1.19), podemos también definir la carga de Planck tal que la intensidad de Potencial de Coulomb para dos masas de Planck separadas por la longitud de Planck sea igual a la energía de Planck

$$\begin{aligned} V_{\text{Coulomb}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_p^2}{L_p} = M_p c^2 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_p^2}{\hbar/(c M_p)} &= M_p c^2 \\ \frac{Q_p^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} &= 1 \\ Q_p &= \frac{e}{\sqrt{\alpha}} \approx 1.8756 \times 10^{-18} \text{ C}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Entonces la constante de estructura fina puede pensarse como el cuadrado del cociente de la carga elemental a la carga de Planck

$$\alpha = \left(\frac{e}{Q_p} \right)^2. \quad (1.23)$$

Estos resultados están resumidos en la Tabla 1.2

Example 1.2.1.1

Cálcule el potencial gravitacional para un par de protones separados una distancia $L_{\text{proton}} = \hbar/(c m_{\text{proton}}) \approx 2.1 \times 10^{-16} \text{ m}$

$$V_{\text{gravity}} = G_N \frac{m_p^2}{L_{\text{proton}}} = G_N m_p^3 \frac{c}{\hbar} = \frac{G_N}{\hbar c} m_p^3 c^2 = \frac{m_p^2}{M_p^2} m_p c^2 \approx 10^{-38} m_p c^2 \quad (1.24)$$

En este caso la energía potencial gravitacional es mucho menor que la escala de energía correspondiente

²This is shown using dimensional analysis, much in the same way as the Bohr radius, beyond which the full quantum mechanical description of the Hydrogen atom cannot be neglected. Note that the Bohr radius was derived before a modern quantum mechanical treatment of Hydrogen became available. A similar statement can be made about the Planck length [24].

M_p	$\sqrt{\hbar c / G_N}$	$2.1765 \times 10^{-8} \text{ kg}$
L_p	$\sqrt{\hbar G_N / c^3}$	$1.6163 \times 10^{-35} \text{ m}$
t_p	$\sqrt{\hbar G_N / c^5}$	$5.3912 \times 10^{-44} \text{ s}$
T_p	$\sqrt{\hbar c^5 / (G_N k^2)}$	$1.4168 \times 10^{32} \text{ K}$
Q_p	$e / \sqrt{\alpha}$	$1.8756 \times 10^{-18} \text{ C}$

Tabla 1.2: Unidades de Planck $G_N = \hbar = c = \epsilon_0 = k = 1$ **Example 1.2.1.2**

Compare la intensidad gravitacional con la Coulomb para un protón, y para una partícula de Planck.

Usando la ec. (1.17)

$$\begin{aligned}
 \frac{V_{\text{gravity}}}{V_{\text{Coulomb}}} &= \frac{G_N m_X^2}{(1/4\pi\epsilon_0)e^2} \\
 &= (4\pi\epsilon_0 \hbar c / e^2) \frac{m_X^2}{M_p^2} \\
 &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{m_X}{M_p} \right)^2 \\
 &\sim \begin{cases} 10^{-36} & m_X = m_{\text{proton}} \\ 10^2 & m_X = M_p \end{cases} \quad (1.25)
 \end{aligned}$$

1.3. Notación relativista

Las transformaciones de Lorentz se definen como la transformaciones que dejan invariante al producto escalar en el espacio de Minkowski definido como

$$x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \equiv x_\nu x^\nu = x^{02} - x^i x^i = a^{02} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \quad (1.26)$$

donde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, $i = 1, 2, 3$ y se asume suma sobre índices repetidos. Además

$$x_\nu \equiv g_{\mu\nu} x^\mu \quad (1.27)$$

Finalmente la métrica usada se define como

$$\{g_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

donde $\{g_{\mu\nu}\}$ denota la forma matricial del tensor $g_{\mu\nu}$.

El producto de dos cuadvectores se define en forma similar como

$$x_\nu y^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad (1.29)$$

El inverso de la métrica es

$$\{g^{\mu\nu}\} \equiv \{g_{\mu\nu}\}^{-1} = \{g_{\mu\nu}\} \quad (1.30)$$

tal que

$$g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu \quad \text{and} \quad x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu \quad (1.31)$$

Bajo una transformación de Lorentz.

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu. \quad (1.32)$$

La invarianza del producto escalar en ec. (1.29)

$$x'^\mu y'_\mu = x^\mu y_\mu \quad (1.33)$$

implica que

$$\begin{aligned} x'^\mu y'_\mu &= g_{\mu\nu} x'^\mu y'^\nu \\ &= g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha x^\alpha \Lambda^\nu_\beta y^\beta \\ &= \Lambda^\mu_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta x^\alpha y^\beta. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Por consiguiente, la condición para que el producto escalar en el espacio de Minkowski definido por la métrica $g_{\mu\nu}$, sea invariante bajo transformaciones de Lorentz es

$$\Lambda^\mu_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta x^\alpha y^\beta = g_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta, \quad (1.35)$$

y por consiguiente

$$g_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta, \quad (1.36)$$

o, reorganizando los índices mudos

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha_\mu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu \quad \text{or} \quad \{g_{\mu\nu}\} = \{\Lambda_\mu^\alpha\}^T \{g_{\alpha\beta}\} \{\Lambda^\beta_\nu\}. \quad (1.37)$$

En notación matricial

$$g = \Lambda^T g \Lambda. \quad (1.38)$$

De la ec. (1.37) tenemos que

$$\begin{aligned} g^{\rho\mu} g_{\mu\nu} &= g^{\rho\mu} \Lambda^\alpha_\mu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu \\ \delta_\nu^\rho &= \Lambda_\beta^\rho \Lambda^\beta_\nu, \end{aligned} \quad (1.39)$$

o

$$\Lambda_\alpha^\mu \Lambda^\alpha_\nu = \delta_\nu^\mu. \quad (1.40)$$

Ya que

$$(\Lambda^{-1})^\mu_\alpha \Lambda^\alpha_\nu = \delta_\nu^\mu \quad (1.41)$$

el inverso de Λ es

$$(\Lambda^{-1})^\mu_\alpha = \Lambda_\alpha^\mu, \quad (1.42)$$

o

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu, \quad (1.43)$$

Repitiendo los pasos que dieron lugar a la ec. (1.34) pero para la métrica contravariante (TAREA), y usando la ec. (1.43), tenemos que

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \Lambda_\alpha{}^\mu g^{\alpha\beta} \Lambda_\beta{}^\nu \\ &= (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha g^{\alpha\beta} (\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Example 1.3.0.1

Invarianza de Lorentz

$$\begin{aligned} x_\mu y^\mu &\rightarrow x'_\mu y'^\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu \Lambda^\mu{}_\rho y^\rho \\ &= \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu \Lambda^\mu{}_\rho y^\rho \\ &= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \Lambda^\mu{}_\rho x_\nu y^\rho \\ &= \delta^\nu{}_\rho x_\nu y^\rho \\ &= x_\nu y^\nu. \end{aligned}$$

Como un ejemplo de Transformación de Lorentz considere un desplazamiento a lo largo del eje x

$$\{x^\mu\} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t+vx}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{x+vt}{\sqrt{1-v^2}} \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \{\Lambda^\mu{}_\nu\} \{x^\nu\}, \quad (1.45)$$

donde

$$\cosh \xi = \gamma \quad \sinh \xi = v\gamma, \quad \text{and} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (1.46)$$

y, por ejemplo:

$$t \cosh \xi + x \sinh \xi = \gamma(t + vx) = \frac{t + vx}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (1.47)$$

El $\Lambda^\mu{}_\nu$ definido en la ec. (1.45) satisface la condición en ec. (1.37),

$$\begin{aligned} \Lambda^T g \Lambda &= \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & -\cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi & \cosh \xi \sinh \xi - \cosh \xi \sinh \xi & 0 & 0 \\ \cosh \xi \sinh \xi - \cosh \xi \sinh \xi & \sinh^2 \xi - \cosh^2 \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= g \end{aligned} \quad (1.48)$$

Denotaremos los cuadvectores con índices arriba como

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}) \quad (1.49)$$

Entonces el correspondiente cuadvector con índices abajo, usando la ec. (1.27), es

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (x^0, -\mathbf{x}). \quad (1.50)$$

Con esta notación, el producto escalar de cuadvectores puede expresarse como el producto escalar de los dos vectores de cuatro componente x^μ y x_μ .

1.3.1. Ejemplos de cuadvectores

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, \mathbf{x}) \quad (1.51)$$

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, p_x, p_y, p_z) = (E, \mathbf{p}) \quad (1.52)$$

De la relatividad especial tenemos que

$$\begin{aligned} E &= \gamma m \\ \mathbf{p} &= \gamma m \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Por lo tanto, ya que $v^2 = \mathbf{v}^2 = |\mathbf{v}|^2$

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = \gamma^2 m^2 (1 - v^2) = m^2. \quad (1.54)$$

El invariante de Lorentz asociado a p^μ corresponde a la ecuación de momento energía una vez se identifica la masa de una partícula con su cuadrimomentum

$$p^2 = p_\mu p^\mu = m^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 \quad (1.55)$$

De [31]

The intuitive understanding of this equation is that the energy of a particle is partially due to its motion and partially due to the intrinsic energy of its mass. The application to particle detectors is that if you know the mass of a particular particle, or if it's going so fast that its energy and momentum are both huge so that the mass can be roughly ignored, then knowing the energy tells you the momentum and vice versa

Para esta ecuación se suele definir dos casos límites.

- *Límite no relativista:* Para $\mathbf{p} = 0$, es decir cuando la partícula está en reposo se reduce a la famosa ecuación, (con $c^2 = 1$)

$$E = m. \quad (1.56)$$

- *Límite relativista:* Para $\mathbf{p}^2 \gg m^2$, la ecuación $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ se reduce a

$$E = |\mathbf{p}|. \quad (1.57)$$

Por lo tanto para una partícula de masa cero, su energía total da cuenta de su cantidad de movimiento.

Del electromagnetismo tenemos

$$J^\mu = (J^0, \mathbf{J}) = (\rho, \mathbf{J}) \quad (1.58)$$

$$A^\mu = (A^0, \mathbf{A}) = (\phi, \mathbf{A}) \quad (1.59)$$

Del cálculo vectorial

$$\begin{aligned} \partial^\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\frac{\partial}{\partial x^1}, -\frac{\partial}{\partial x^2}, -\frac{\partial}{\partial x^3} \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= (\partial_0, -\nabla) = (\partial^0, -\nabla) \end{aligned} \quad (1.60)$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = (\partial_0, \nabla) \quad (1.61)$$

Por consiguiente:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \quad (1.62)$$

Producto escalar:

$$a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a_\mu b^\nu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a^0 b^0 - a^i b^i = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (1.63)$$

Entonces

$$\partial_\mu a^\mu = \frac{\partial a^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{a} \quad (1.64)$$

Esta expresión es conocida como la ecuación de continuidad $\partial_\mu J^\mu = 0$, y al provenir de un producto escalar entre dos cuadvectores resulta ser un invariante de Lorentz. El operador cuadrático es, usando la ec. (1.26)

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial^0 \partial^0 - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.65)$$

Por consiguiente la ecuación de onda para un campo $\phi(t, x, y, z)$ con velocidad de propagación $c^2 = 1$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi = 0, \quad (1.66)$$

es también invariante de Lorentz

Los operadores de energía y momentum de la mecánica cuántica también forma un cuadvector

$$\hat{p}^\mu = (\hat{p}^0, \hat{\mathbf{p}}) = (\hat{H}, \hat{\mathbf{p}}) \quad (1.67)$$

con \hat{H} , y $\hat{\mathbf{p}}$ dados en la ec. (1.241). Entonces

$$\hat{p}^\mu = i\partial^\mu = i(\partial^0, \partial^i) = i\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) \quad (1.68)$$

Más adelante se definirán las derivadas covariantes

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &= \partial_0 + iqA_0 \\ \mathcal{D} &= \nabla - iq\mathbf{A}. \end{aligned} \quad (1.69)$$

A partir de ellas podemos definir el cuadrivector

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu &= (\mathcal{D}_0, \mathcal{D}) \\ &= (\partial_0, \nabla) + iq(A_0, -\mathbf{A}) \\ &= (\partial_0, \partial_i) + iq(A_0, -A^i) \\ &= (\partial_0, \partial_i) + iq(A_0, A_i) \\ &= (\partial_0 + iqA_0, \partial_i + iA_i) \\ &= (\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_i) \\ &= (\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_i), \end{aligned} \quad (1.70)$$

donde hemos usado que las componentes de \mathcal{D} son (con índices abajo)

$$\mathcal{D}_i = \partial_i - iqA^i, \mathcal{D}_i = \partial_i + iqA_i. \quad (1.71)$$

Además A^μ tiene la transformación gauge

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \quad A_0 \rightarrow A'_0 = A_0 - \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad (1.72)$$

En notación de cuadrivectores

$$\begin{aligned} A^\mu \rightarrow A'^\mu &= \left(A^0 - \frac{\partial\chi}{\partial t}, \mathbf{A} + \nabla\chi \right) \\ &= \left(A^0 - \frac{\partial\chi}{\partial t}, A^i + \partial_i\chi \right) \\ &= (A^0 - \partial^0\chi, A^i - \partial^i\chi) \\ &= (A^0, A^i) - (\partial^0\chi, \partial^i\chi) \\ A^\mu \rightarrow A'^\mu &= A^\mu - \partial^\mu\chi. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Note que la ec. (1.73) se puede escribir como

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\chi(x) \quad (1.74)$$

qué es justamente la ecuación de transformación obtenida en la ec. (1.257).

Example 1.3.1.1

Calcule la fracción de la velocidad a la que puede ser acelerado un protón en el LHC. Recuperando los factores de c

$$E = \gamma m c^2 \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned} E^2(1 - \beta^2) &= m^2 c^4 \\ 1 - \beta^2 &= \frac{m^2 c^4}{E^2} . \end{aligned} \tag{1.75}$$

Despejando β , obtenemos

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}}$$

$m_p = 938.272013(23)\text{MeV}/c^2$, and $E = 7\text{ TeV}$

$$v = 0.999999991\,c$$

La longitud de un objeto esta definida para que $t' = 0$. Usando la ec. (1.45)

$$\begin{aligned} t' = 0 &= \frac{t + vx}{\sqrt{1 - v^2}} \\ 0 &= t + vx . \end{aligned} \tag{1.76}$$

Recuperando el factor de c , $t = vx/c^2$. Entonces

$$x' = \gamma(x - vt) = \gamma(x - v^2 x/c^2) = \sqrt{1 - v^2/c^2} x. \tag{1.77}$$

Por lo tanto observamos al protón contraído en un factor de 1×10^{-8} . Similarmente la dilatación temporal se obtiene haciendo $x = 0$ y

$$t' = \gamma t. \tag{1.78}$$

Example 1.3.1.2

La amplitud de decaimiento del muón es

$$\Gamma_\mu = \left(\frac{G_F}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{m_\mu^5}{96\pi^3} I(x) , \tag{1.79}$$

con $x = m_e/m_\mu$, e $I(x) = 1 - 8x^2 - 24x^4 \ln(x) + 8x^6 - x^8$. Entonces

$$\Gamma_\mu = 3.00867837568648 \times 10^{-19} \text{ GeV} \tag{1.80}$$

El tiempo de vida media del muón se define como

$$\begin{aligned} \tau_\mu &= \frac{1}{\Gamma_\mu} = 3.32371850737231 \times 10^{18} \text{ GeV}^{-1} \\ &= 3.32371850737231 \times 10^{18} \times 6.582\,118\,99 \times 10^{-25} \text{ s} \\ &= 2.197\,03(4) \times 10^{-6} \text{ s} . \end{aligned} \tag{1.81}$$

La longitud de decaimiento se define como

$$L_\mu = \frac{1}{\Gamma_\mu} = c \tau_\mu \approx 658.65 \text{ m}. \quad (1.82)$$

El tiempo de vida media se refiere al tiempo de decaimiento para una partícula en reposo. Si $v = 0.86 c$, entonces

$$\tau'_\mu = \gamma \tau_\mu = \frac{\tau_\mu}{\sqrt{1-v^2}} \approx 4.31 \times 10^{-6} \text{ s} \quad (1.83)$$

el doble de cuando está en reposo.

$$L'_\mu = c \tau'_\mu = 1290.74 \text{ m}. \quad (1.84)$$

A medida que el muón se acerca más a la velocidad de la luz, L'_μ coincide más con la distancia recorrida por el muón antes de decaer. De hecho se estima que después de ser producidos en la atmósfera de rayos cósmicos, a la superficie de la Tierra llegan unos 10000 muones por metro cuadrado cada minuto [30].

1.4. Principio de Mínima Acción

El Principio de Mínima acción establece, una vez fijado el espacio de coordenadas generalizadas sobre el espacio de configuración, que de todas las trayectorias posibles que transcurren entre t_1 y t_2 , el sistema escogerá aquella que minimice la acción S [8]. La magnitud de la acción viene dada para cada trayectoria por la integral:

$$S[q_i, \dot{q}_i] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt \quad (1.85)$$

Donde: $q_i(t)$ son las coordenadas paramétricas de una trayectoria posible. $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, es la función lagrangiana del sistema.

Puede probarse mediante principios variacionales, que de todas las trayectorias posibles, la que hace estacionaria la anterior expresión es la que satisface la siguiente condición i :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (1.86)$$

conocidas como las ecuaciones de Euler-Lagrange. La demostración se hará más adelante para el caso en el que las coordenadas generalizadas corresponden a funciones de campo.

De momento mostraremos como la segunda ley de Newton [11], puede escribirse en la forma de la ec. (1.86).

$$\begin{aligned} F &= ma \\ -\frac{\partial V(x)}{\partial x} &= m \frac{d^2 x}{dt^2} \\ &= m \frac{d\dot{x}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (1.87)$$

Podemos introducir el Lagrangiano a cada lado de la igualdad adicionando términos con la respectiva derivada parcial cero:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right) \right].$$

Reemplazando $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) = T - V$, obtenemos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

Una forma más rigurosa de escribir la ec. (1.87) puede encontrarse en [8].

El Hamiltoniano del sistema se obtiene definiendo la variable canónica conjugada de x

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}, \quad (1.88)$$

y usando la transformada de Legendre

$$H = p \dot{x} - L = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V = T + V \quad (1.89)$$

Para visualizar el principio de mínimo de acción se recomienda seguir las actividades del programa interactivo en **Java** disponible online en [9]. Una versión implementada como Notebook de IPython puede encontrarse aquí: <http://nbviewer.ipython.org/gist/rescolo/2259833f5ad640f6aeef>.

Allí se considera el problema de un objeto de 0.2Kg lanzado hacia arriba y retornado al punto de partida 3 segundos despues. Si dividimos la trayectoria en tres intervalos como se muestra en la Fig. 1.1, teniendo en cuenta que la velocidad es la pendiente del segmento, para $\Delta t = 0.75$ s $x_1 = 11.13$ m, $t_1 = 0.75$ s, $x_2 = 0$ m, $t_2 = 1.5$ s, tenemos que para la trayectoria mostrada

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt \approx \sum_i (T - V)_i \Delta t \\ &\approx \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right)^2 - mg x_i \right] \Delta t \\ &\approx 16.67 \text{ J s} \end{aligned} \quad (1.90)$$

Iterando el proceso se puede encontrar numéricamente (o a mano) la trayectoria que minimiza la acción mostrada en la Fig. 1.2 Para una dimensión podemos definir la densidad Lagrangiana como

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial}{\partial q} L(q, \dot{q}, t) \quad \text{or} \quad L(q, \dot{q}, t) = \int \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dq. \quad (1.91)$$

La ec. (1.85) puede escribirse entonces como

$$S[q_i, \dot{q}_i] = \int \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dq dt. \quad (1.92)$$

Para sistemas continuos es conveniente usar la densidad Lagrangiana. Abordaremos a continuación el sistema continuo correspondiente a la cuerda clásica unidimensional para construir la densidad Lagrangiana correspondiente. A partir de ella demostraremos las ecuaciones de Euler Lagrange para dicho sistema.

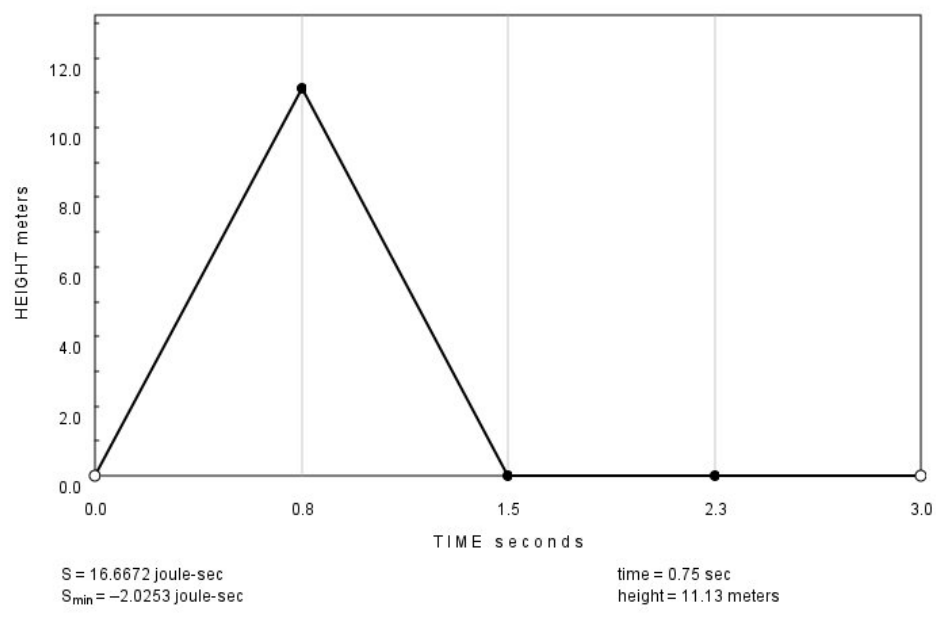


Figura 1.1: Ejemplo de cálculo de la Acción para una trayectoria arbitraria

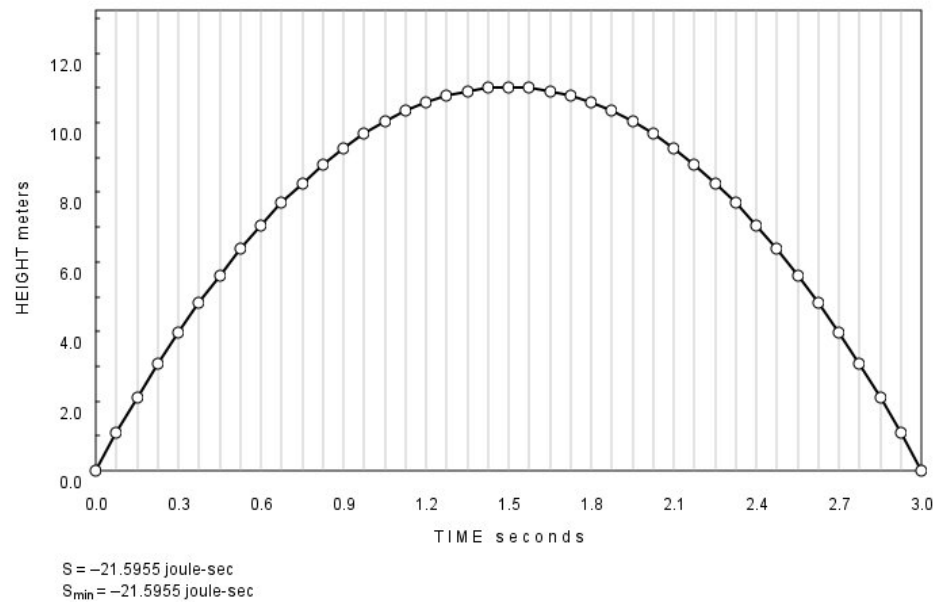


Figura 1.2: Trayectoria que minimiza la Acción

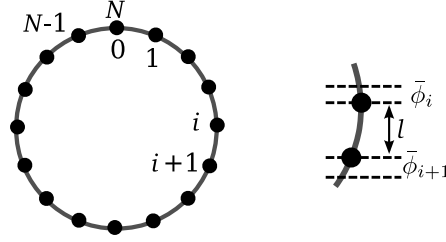


Figura 1.3: Modelo Cuerda

1.5. La cuerda clásica unidimensional

Considere una cuerda de longitud L formando un círculo de radio R . Es conveniente considerar un conjunto de N partículas de masa m a lo largo de la circunferencia, unidas por resortes de longitud l y constante elástica k . Los modos vibracionales de la cuerda a lo largo de la circunferencia se obtienen en límite de $N \rightarrow \infty$ y $l \rightarrow 0$

De acuerdo a la figura 1.3, si $\bar{\phi}_i = \bar{\phi}(z_i, t)$ es el desplazamiento de la i -ésima masa desde su posición de equilibrio, entonces el Lagrangiano del sistema de N partículas y resortes es:

$$L = \frac{1}{2}m \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2}k \sum_{i=0}^{N-1} (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2, \quad (1.93)$$

$$= \frac{1}{2}m \sum_{i=0}^{N-1} (\dot{\bar{\phi}}_i)^2 - \frac{1}{2}k \sum_{i=0}^{N-1} (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2. \quad (1.94)$$

Si μ es la densidad de la cuerda, T la tensión y v la velocidad, entonces

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{m}{l} \\ T &= kl \\ v^2 &= \frac{T}{\mu}. \end{aligned} \quad (1.95)$$

(1.95) En el límite $l \rightarrow 0$ y $N \rightarrow \infty$, tenemos

$$\bar{\phi}_i = \bar{\phi}(z_i, t) \rightarrow \bar{\phi}(z, t), \quad (1.96)$$

que representa la función de campo del desplazamiento de una masa infinitesimal de su posición de equilibrio. Entonces

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{m}{l} l (\dot{\bar{\phi}}_i)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (kl) l \left(\frac{\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i}{l} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \mu (\dot{\bar{\phi}}_i)^2 l - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} T \left(\frac{\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i}{l} \right)^2 l. \end{aligned} \quad (1.97)$$

En el límite continuo $\sum(\dots) l \rightarrow \int(\dots) dz$, entonces

$$L = \int_0^L \frac{1}{2} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} \right)^2 - T \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right)^2 \right] dz = \int_0^L \mathcal{L} dz, \quad (1.98)$$

con

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} \right)^2 - T \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (1.99)$$

y

$$S = \int \mathcal{L} dt dz. \quad (1.100)$$

Definiendo

$$\phi = \sqrt{T} \bar{\phi}, \quad (1.101)$$

tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\partial\phi/\partial t, \partial\phi/\partial z) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\mu}{T} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{T}{T} \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (1.102)$$

Note que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial t)} \right] = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (1.103)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial z)} \right] = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (1.104)$$

Si en la ec. (1.94), tomamos como coordenadas generalizadas las N $\dot{\bar{\phi}}_i$ y $\bar{\phi}_i$, entonces, podemos obtener las ecuaciones de movimiento a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.86):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\phi}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \bar{\phi}_i} = 0, \quad i = 0 \text{ hasta } N-1. \quad (1.105)$$

En el límite $l \rightarrow 0$ y $N \rightarrow \infty$, y usando las ecs. (1.103) y (1.104),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\phi}}_i} \right) &= \frac{d}{dt} \left(m \dot{\bar{\phi}}_i \right) = m \frac{\partial^2 \bar{\phi}_i}{\partial t^2} \\ &= Tl \left(\frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_i}{\partial t^2} \right) \\ &\rightarrow l\sqrt{T} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (1.106)$$

$$= l\sqrt{T} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial t)} \right]. \quad (1.107)$$

Para el segundo término de la ec. (1.105) nótese que

$$\begin{aligned} - \sum_{i=0}^{N-1} (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2 &= - (\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_0)^2 - (\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_1)^2 - \cdots - (\bar{\phi}_{(i-1)+1} - \bar{\phi}_{i-1})^2 - (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2 - \cdots \\ &= - (\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_0)^2 - (\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_1)^2 - \cdots - (\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_{i-1})^2 - (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2 - \cdots \end{aligned} \quad (1.108)$$

Entonces

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \bar{\phi}_i} \sum_{i=0}^{N-1} (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2 &= -2 (\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_{i-1}) - 2 (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i) \times (-1) \\ &= 2l \left[\frac{\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i}{l} - \frac{\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_{i-1}}{l} \right]. \end{aligned}$$

Si \bar{z}_i es el punto medio del intervalo entre z_{i-1} y z_i , entonces en el límite de $l \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \bar{\phi}_i} \sum_{i=0}^{N-1} (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2 &= 2l^2 \left\{ \frac{[\bar{\phi}(z_{i+1}, t) - \bar{\phi}(z_i, t)]/l}{l} - \frac{[\bar{\phi}(z_i, t) - \bar{\phi}(z_{i-1}, t)]/l}{l} \right\} \\ &= 2l^2 \left[\frac{\partial \bar{\phi}(\bar{z}_{i+1}, t)/\partial z}{l} - \frac{\partial \bar{\phi}(\bar{z}_i, t)/\partial z}{l} \right] \\ &= 2l^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} \\ &\rightarrow \frac{2l^2}{\sqrt{T}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \end{aligned} \tag{1.109}$$

Usando las ecs. (1.109) (1.95), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \bar{\phi}_i} &= \frac{1}{2}k \left[-\frac{\partial}{\partial \bar{\phi}_i} \sum_{i=0}^{N-1} (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2 \right] \\ &\rightarrow \frac{1}{2}k \left(\frac{2l^2}{\sqrt{T}} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ &\rightarrow l\sqrt{T} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{1.110}$$

$$= -l\sqrt{T} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \phi / \partial z)} \right]. \tag{1.111}$$

De las ecuaciones (1.106) y (1.110), obtenemos la ecuación de movimiento para el campo $\phi(z, t)$:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \tag{1.112}$$

que corresponde a la ecuación de onda en una dimensión. En tres dimensiones obtendríamos:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 0. \tag{1.113}$$

De otro lado, de las ecuaciones (1.107) y (1.111), obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange para la densidad Lagrangiana

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \phi / \partial t)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \phi / \partial z)} \right] = 0. \tag{1.114}$$

En tres dimensiones:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \phi / \partial t)} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \phi / \partial x)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \phi / \partial y)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \phi / \partial z)} \right] = 0. \tag{1.115}$$

Definiendo

$$x^\mu = (x^0, x^i) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.116)$$

en un sistema de unidades donde x^0 tenga las mismas unidades que x^i , podemos expresar las ecuaciones de Euler-Lagrange que satisface $\mathcal{L}(\partial\phi/\partial x^\mu)$, como

$$\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial\phi/\partial x^\mu)} \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial\phi/\partial x^\mu)} \right] = 0,$$

donde, en la última ecuación se ha usado la convención de suma sobre índices repetidos.

Si la densidad Lagrangiana depende también directamente de ϕ , $\mathcal{L}(\partial\phi/\partial x^\mu, \phi)$, entonces la ecuación de Euler-Lagrange para las coordenadas generalizadas $\partial\phi/\partial x^\mu$ y ϕ , es

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial\phi/\partial x^\mu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (1.117)$$

Esta última ecuación se deducirá usando métodos variacionales en la sección 1.23.

La generalización de la densidad Lagrangiana a tres dimensiones esta dada por

$$\mathcal{L}(\partial\phi/\partial t, \partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y, \partial\phi/\partial z) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (1.118)$$

1.6. Construcción de Lagrangianos covariantes

En esta sección vamos a conectar la discusión sobre el Lagrangiano de las vibraciones de la cuerda con las transformaciones de Lorentz de la relatividad especial. Dicho Lagrangiano tiene hasta ahora la siguiente dependencia funcional $\mathcal{L}(\partial_\mu \phi)$.

En la formulación de la teoría clásica de campos debemos asegurarnos de que todos los términos posibles permitidos por la simetrías asociadas al campo estén presentes en la densidad Lagrangiana. De inmediato surge la pregunta: ¿Qué posibles términos de la forma $\partial_\mu \phi$ podrían estar presentes en Lagrangiano?. Antes de responder esta pregunta, abordemos el problema algo más general donde la densidad Lagrangiana también depende del campo como mismo

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi).$$

En la ecuación (1.118), teníamos un Lagrangiano en función de $\partial_\mu \phi$, y haciendo $v \rightarrow c = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\partial_\mu \phi) &= \frac{1}{2} \left[\partial_0 \phi \partial_0 \phi - \sum_i \partial_i \phi \partial_i \phi \right] \\ &= \frac{1}{2} [\partial_0 \phi \partial^0 \phi + \partial_i \phi \partial^i \phi] \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi. \end{aligned} \quad (1.119)$$

donde se ha usado la convención de suma para índices repetidos. Note que para que la velocidad de propagación sea independiente del sistema de coordenadas se requiere su identificación con la velocidad de la luz. De modo que la queremos interpretar los términos de la densidad Lagrangiana como objetos invariantes, necesariamente se tiene que hacer en el contexto de la relatividad especial.

1.7. Transformación de Lorentz para campos escalares

El campo escalar esta definido por sus propiedades bajo transformaciones de Lorentz. Vamos a estudiar el comportamiento de un campo escalar bajo una transformación general de Lorentz:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (1.120)$$

Por definición, el campo escalar no cambia bajo la transformación de Lorentz, es decir, su forma funcional queda inalterada. Por consiguiente el campo escalar debe satisfacer que

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x), \quad (1.121)$$

como se ilustra en la Fig. 1.4. La prima en ϕ representa el cambio intrínseco en el campo ϕ como consecuencia de la transformación. Definimos el cambio correspondiente como

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x). \quad (1.122)$$

Una transformación de Lorentz infinitesimal, puede parametrizarse sin perdida de generalidad como

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \quad (1.123)$$

Para visualizar más fácilmente la situación para un campo escalar, supongamos de momento que δx^μ corresponde traslación espacio-temporal.

Tenemos

$$\phi'(x') = \phi'(x + \delta x) \quad (1.124)$$

$$\approx \phi'(x) + \frac{\partial \phi'(x)}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \quad (1.125)$$

$$= [\phi(x) + \delta\phi(x)] + \frac{\partial}{\partial x^\mu} [\phi(x) + \delta\phi(x)] \delta x^\mu \quad (1.126)$$

$$\approx \phi(x) + \delta\phi(x) + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu} \delta x^\mu, \quad (1.127)$$

donde, por simplicidad, ϕ es un campo real. Entonces,

$$\Delta\phi(x) \equiv \phi'(x') - \phi(x) = \delta\phi(x) + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu} \delta x^\mu. \quad (1.128)$$

Para una traslación, $\Delta\phi(x) = 0$, ver figura 1.4. De modo que

$$\delta\phi = -(\partial_\mu \phi) \delta x^\mu, \quad (1.129)$$

y la transformación del campo ϕ como consecuencia de la traslación es

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) - \delta\phi(x) = \phi(x) + (\partial_\mu \phi(x)) \delta x^\mu. \quad (1.130)$$

Usando la ec. (1.120), tenemos que

$$\phi'(x') = \phi(\Lambda^{-1}x'). \quad (1.131)$$

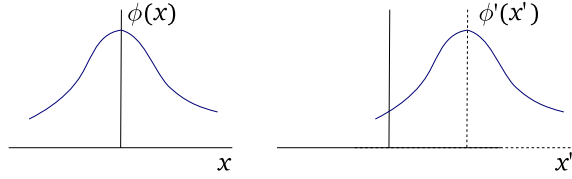


Figura 1.4: Traslación de función y coordenadas en una dimensión: $\phi(x) = \phi'(x')$

Esto es, el campo transformado, evaluado en el punto transformado, da el mismo valor que el campo evaluado en el punto antes de la transformación.

Por consiguiente, para un punto del espacio tiempo arbitrario tenemos que el campo escalar transforma bajo una transformación de Lorentz como

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x). \quad (1.132)$$

Para comprobar la invarianza de Lorentz de la Acción para el campo escalar, necesitamos las propiedades de transformación para ∂_μ . En conveniente invertir la ec. (1.120)

$$\begin{aligned} (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha x'^\alpha &= (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha \Lambda^\alpha{}_\nu x^\nu \\ &= \delta^\mu_\nu x^\nu \\ &= x^\mu, \end{aligned} \quad (1.133)$$

$$\frac{1}{x'^\nu} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \frac{1}{x^\mu}, \quad (1.134)$$

o

$$\frac{1}{x'^\mu} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \frac{1}{x^\nu}, \quad (1.135)$$

de modo que la transformación de Lorentz para $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, es

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} &= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \\ \partial'_\mu &= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu, \end{aligned} \quad (1.136)$$

Podemos ahora demostrar que la Acción obtenida del Lagrangiano en la ec.(1.119) es invariante bajo transformaciones de Lorentz haciendo uso de la ec. (1.44). Para hacer la demostración más general, podemos agregar una función general que solo dependa del campo ϕ pero no de sus derivadas, $V(\phi)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) &\rightarrow \mathcal{L}' = \frac{1}{2} \partial'_\mu \phi'(x) \partial'^\mu \phi'(x) - V(\phi'), \\ &= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu g^{\mu\rho} (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\rho \partial_\nu \phi(\Lambda^{-1}x) \partial_\sigma \phi(\Lambda^{-1}x) - V(\phi') \\ &= g^{\nu\sigma} \partial_\nu \phi(\Lambda^{-1}x) \partial_\sigma \phi(\Lambda^{-1}x) - V(\phi(\Lambda^{-1}x)) \\ &= \partial_\nu \phi(\Lambda^{-1}x) \partial^\nu \phi(\Lambda^{-1}x) - V(\phi(\Lambda^{-1}x)) \\ &= \mathcal{L}(\phi(\Lambda^{-1}x), \partial_\mu \phi(\Lambda^{-1}x)). \end{aligned} \quad (1.137)$$

Ya que la Acción involucra la integración sobre todos los puntos, esta es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Explícitamente

$$S \rightarrow S' = \int d^4x \mathcal{L} \quad (1.138)$$

Note que en unidades naturales

$$[S] = [\hbar] = 1, \quad (1.139)$$

y ya que $[d^4x] = E^{-4}$, entonces

$$[\mathcal{L}] = E^4. \quad (1.140)$$

Como $[\partial_\mu] = E$, entonces

$$[\phi] = E. \quad (1.141)$$

1.8. Principio de mínima acción para campos

Hemos visto que la acción para una oscilación mecánica en tres dimensiones se puede escribir en una notación similar a la del producto escalar de un cuadvivector de Lorentz $\partial_\mu \phi$. Cuando dicho campo se interpreta como un campo fundamental, es decir, que su velocidad de propagación es independiente de los sistemas de referencia inerciales, entonces la Acción queda invariante bajo dicho producto escalar. También hemos visto que adicionar una función del campo $V(\phi)$, la invarianza de la acción se mantiene.

Establecemos el *principio de mínima acción para campos* de la siguiente manera: La acción más general posible para un conjunto de campos contiene todos los posibles productos escalares entres los campos y sus derivadas, con las siguientes restricciones

1. La dimensión de los campos y derivadas en cada término de la correspondiente densidad lagrangiana debe ser menor o igual a cuatro.
2. La densidad Lagrangiana no debe contener derivadas altas (máximo dos derivadas)
3. Los campos fundamentales se deben anular a espacio infinito.

Con estas restricciones es suficiente mantener los primeros cuatro términos de la expansión de Taylor de $V(\phi)$ (el término constante se puede remover redefiniendo el estado de mínima energía)

$$V(\phi) = a\phi + b\phi^2 + c\phi^4 + d\phi^4, \quad (1.142)$$

La última condición excluye términos del tipo

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi, \phi \partial_\mu \partial^\mu \phi. \quad (1.143)$$

De modo que la densidad Lagrangiana más general posible para un campo escalar real es

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + a\phi + b\phi^2 + c\phi^4 + d\phi^4. \quad (1.144)$$

Realizaciones propuestas para este campo escalar incluye el de un campo de materia oscura con un potencial tipo oscilador armónico. Pero una realización ya encontrada en la naturaleza corresponde al campo de Higgs con un potencial tipo ruptura espontánea de vacío

Una realización física para la acción del campo escalar real con un potencia escalar tipo “slow-roll” corresponde al campo del inflatón en cosmología.

1.9. Campo escalar complejo

Para un campo complejo con invarianza de fase, el potencial $V(\phi, \phi^*)$ es único:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 . \quad (1.145)$$

En efecto, la densidad Lagrangiana y por consiguiente la Acción, son invariante bajo la transformación

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\theta} \phi , \quad \theta \text{ constante} . \quad (1.146)$$

Para θ infinitesimal

$$\delta\phi = \phi' - \phi = i\theta\phi \quad (1.147)$$

Por lo tanto

$$[m] = E \quad [\lambda] = 1 . \quad (1.148)$$

Más adelante justificaremos por qué no hay potencias con dimensiones mayor a E^4 del campo ϕ en la ec. (1.145). No se consideran términos con derivadas superiores porque al igual que en mecánica clásica pueden generar inestabilidades. Por lo tanto, los únicos términos con derivadas que dejen invariante la acción bajo transformaciones de Lorentz son (el primero sólo es posible para un campo real):

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi , \quad \phi^* \partial_\mu \partial^\mu \phi . \quad (1.149)$$

Una densidad Lagrangiana incluyendo estos términos se puede reescribir en términos de la densidad Lagrangiana en la ec. (1.145), hasta una deriva total. Por ejemplo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{new}} &= -\phi^* \partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 \\ &= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \partial_\mu (\phi^* \partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 \\ &= \mathcal{L} - \partial_\mu (\phi^* \partial^\mu \phi) . \end{aligned} \quad (1.150)$$

En general, si comparamos dos acciones que difieran en la derivada total de algún X^μ (en el caso anterior $X^\mu = -\phi^* \partial^\mu \phi$)

$$S_{\text{new}} = S + \int \partial_\mu (\phi^* \partial^\mu \phi) d^4x . \quad (1.151)$$

Veremos más adelante que la integral de una derivada total, con las condiciones de frontera adecuadas, no contribuye a la Acción.

1.10. Problema variacional de Noether

1.11. Tipos de conservación

Un sistema binario de estrellas conserva la energía globalmente, pero un sistema binario de estrellas de neutrones donde los efectos relativistas sean importante violan la energía globalmente, es decir, el sistema se vuelve inestable. ¿Qué pasa con la conservación de la energía en ese último caso?

1.12. Teoremas

Seguiremos la discusión basada en [33, 34, 35].

Un campo escalar complejo es equivalente a dos campos escalares independientes de la misma masa asociados a un parámetro de transformación θ . Para N campos asociados a un parámetro de transformación θ , la dependencia explícita e implícita de la densidad Lagrangiana da lugar al funcional de Acción

$$S[\phi_i, \partial_\mu \phi_i; x] = \int_R d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i; x) \quad (1.152)$$

El problema variacional de Noether, que es diferente al principio de Hamilton, puede ser establecido en los siguientes términos

¿Cuales son las condiciones generales que se deben satisfacer para que una dada variación en la variables explícitas e implícitas dejen a la Acción invariante, y de aquí $\delta S = 0$, donde δS puede o no contener un término de frontera?

Definiendo el cambio interno en el campo como en (1.326)

$$\delta \phi_i(x) = \phi'_i(x) - \phi_i(x), \quad (1.153)$$

y el cambio en x bajo una transformación de Lorentz infinitesimal como

$$x \rightarrow x' = x + \delta x \quad (1.154)$$

tenemos que la variación en las variables dependientes e independientes de la Acción son

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_R d^4x' \mathcal{L}(\phi'_i, \partial_\mu \phi'_i; x') - \int_R d^4x \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu \phi_i(x); x) \\ &= \int_R \frac{\partial x'}{\partial x} d^4x \mathcal{L}(\phi_i + \delta \phi_i, \partial_\mu(\phi_i + \delta \phi_i); x + \delta x) - \int_R d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i; x) \end{aligned} \quad (1.155)$$

Derivando (1.154),

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_R [1 + \partial_\mu (\delta x^\mu)] d^4x \left\{ \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i; x) + \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu (\delta \phi_i) \right] + (\partial_\mu \mathcal{L}) \delta x^\mu \right\} \\ &\quad - \int_R d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i; x) \\ &= \int_R d^4x [\partial_\mu (\delta x^\mu)] \mathcal{L} + \int_R d^4x \left\{ \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu (\delta \phi_i) \right] + (\partial_\mu \mathcal{L}) \delta x^\mu \right\} \\ &= \int_R d^4x \partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu) + \int_R d^4x \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i \right] - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right] \delta \phi_i \right\} \end{aligned} \quad (1.156)$$

La condición $\delta S = 0$ implica que

$$\int d^4x \sum_i \mathcal{E}_i \delta \phi_i = \int d^4x \sum_i \partial_\mu B_i^\mu, \quad (1.157)$$

o

$$\sum_i \mathcal{E}_i \delta \phi_i = \sum_i \partial_\mu B_i^\mu, \quad (1.158)$$

donde

$$\mathcal{E}_i = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \quad B_i^\mu = \mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i \quad (1.159)$$

1.13. Ecuaciones de Euler-Lagrange

El teorema de Gauss establece que

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d^3x = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.160)$$

Generalizado a cuatro dimensiones, tenemos

$$\int_{\mathcal{V}} d^4x \partial_\mu \eta^\mu = \int_\sigma d\sigma_\mu \eta^\mu, \quad (1.161)$$

donde \mathcal{V} es el volumen en cuatro dimensiones (4D) y σ la correspondiente hipersuperficie en tres dimensiones.

Aplicando las condiciones de Frontera usando el teorema de Gauss en 4D en el lado derecho de (1.157), es claro que la integral de frontera se anula si imponemos que la variación tanto de la coordenadas, δx^μ , como de los campos, $\delta \phi_i$, en la frontera se hagan cero. Esto es equivalente a la anulación de las trayectorias en los extremos para la Acción en mecánica clásica,

Obtenemos entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange para cada campo ϕ_i

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0 \quad (1.162)$$

La misma condición de nulidad de los campos en la frontera permite establecer que una densidad Lagrangiana modificada con una deriva total

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu (\eta^\mu(x)) \quad (1.163)$$

donde $\eta^\mu(x)$ es cualquier función de los campos de la densidad Lagrangiana original que también sea cero sobre la frontera, da lugar a la Acción

$$\begin{aligned} S' &= \int_R d^4x \mathcal{L}' = \int_R d^4x \mathcal{L} + \int_R d^4x \partial_\mu \eta^\mu \\ &= \int_R d^4x \mathcal{L} + \int_\sigma \eta^\mu d\sigma_\mu \\ &= S, \end{aligned} \quad (1.164)$$

para una hipersuperficie suficientemente grande. De modo que dos densidades lagrangianas que difieran solo en derivadas totales dan lugar a la misma Acción.

Usando el principio de mínima acción en términos del campo ϕ , tenemos que para la densidad Lagrangiana (1.102)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (1.165)$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.162)

$$\begin{aligned} \partial_0 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \right] + \partial_3 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_3 \phi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \phi / \partial t)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \phi / \partial z)} \right] &= 0 \\ \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right] &= 0 \\ \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1.166)$$

que corresponde a la ec. (1.112).

Generalizando a tres dimensiones vemos que la ecuación para una onda propagandose a una velocidad v , eq. (1.113),

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu \phi &= 0 \\ \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi &= 0, \end{aligned} \quad (1.167)$$

proviene de la densidad Lagrangiana (hasta derivadas totales) dada por la ec. (1.119).

1.14. Simetrías internas

La virtud del trabajo de Noether [?] fue separar los resultados en los casos de grupos de simetrías globales en los cuales el parámetro de transformación no depende del punto del espacio tiempo (como es el caso de las transformaciones a velocidad constante la relatividad especial: $v = \text{cte}$) del caso en que los grupos de simetría dependan del punto del espacio-tiempo (como los sistemas acelerados de la relatividad general donde la velocidad depende el punto del espacio-tiempo: $v(x)$).

En el caso de teorías de campos estamos más interesados en simetría de espacios internos como puede ser el cambio de fase de la función de onda en la ecuación de Schrödinger. Un cambio de fase, θ , es un caso particular del parámetro de la transformación. En general el parámetro de una transformación interna puede ser constante, $\theta = \text{cte}$, que corresponde a una transformación de fase *global*, o depender del punto del espacio tiempo, $\theta(x)$, que corresponde a una transformación de fase *local*. Las simetrías internas estan caracterizadas por la condición $\delta x^\mu = 0$

Nos enfocaremos en esta sección en la formulación de los dos teoremas de Noether para el caso de simetrías internas globales y locales.

Si la transformación depende de algún parámetro θ continuo, entonces podemos garantizar la existencia de un parámetro infinitesimal tal que

$$\delta \phi_i = a_i(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) \theta(x) + b_i^\nu(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) \partial_\nu \theta(x), \quad (1.168)$$

Para concretar, consideremos como transformación interna el cambio de fase de una función compleja

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\theta} \phi, \quad (1.169)$$

Para un θ suficientemente pequeño

$$\begin{aligned} \phi' &= e^{i\theta} \phi \\ &\approx (1 + i\theta) \phi \\ &\approx \phi + i\theta \phi. \end{aligned} \quad (1.170)$$

Definimos el cambio interno en la función como

$$\delta\phi \equiv \phi' - \phi, \quad (1.171)$$

y para el cambio infinitesimal del campo y su complejo conjugado, tenemos que haciendo $\phi_1 = \phi$ y $\phi_2 = \phi^*$

$$\delta\phi = a_1\theta, \quad \delta\phi^* = a_2\theta, \quad (1.172)$$

donde

$$a_1 = i\phi, \quad a_2 = -i\phi^*. \quad (1.173)$$

Ademas, para este caso

$$b_1^\nu = b_2^\nu = 0. \quad (1.174)$$

1.15. Primer teorema de Noether

Consideremos primero el caso en el que el parámetro de la transformación $\theta = \text{cte}$. Como $\partial_\nu \theta = 0$ en ese caso

$$\delta\phi_i = a_i(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) \theta(x). \quad (1.175)$$

Generalizando al caso de una transformación con varios parámetros, tendremos la formulación del primer teorema de Noether para simetrías internas:

Teorema 1: Si la acción S es invariante bajo un grupo continuo de simetrías globales que dependen suavemente de ρ parámetros independientes $\theta_\alpha = \text{cte}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, \rho$), tal que $\delta\phi_i = a_{\alpha i} \theta^\alpha$, entonces existen las ρ relaciones

$$\sum_i \mathcal{E}_i a_{\alpha i} \equiv \partial_\mu j_\alpha^\mu, \quad (1.176)$$

donde

$$j_\alpha^\mu \equiv \sum_i B_i^\mu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} a_{\alpha i} \quad (1.177)$$

Demostración: De la ec. (1.159)

$$\begin{aligned}\sum_i \mathcal{E}_i \delta \phi_i &= \sum_i \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i \right] \\ \sum_i \mathcal{E}_i a_{\alpha i} \theta^\alpha &= \sum_i \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} a_{\alpha i} \theta^\alpha \right] \\ \sum_i \mathcal{E}_i a_{\alpha i} \theta^\alpha &= \sum_i \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} a_{\alpha i} \right] \theta^\alpha.\end{aligned}\quad (1.178)$$

Igualando para cada θ^α

$$\sum_i \mathcal{E}_i a_{\alpha i} = \sum_i \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} a_{\alpha i} \right] \quad (1.179)$$

Si imponemos que las ecuaciones de Euler-Lagrange se satisfagan, es decir

$$\mathcal{E}_i = 0, \quad (1.180)$$

obtenemos α -ecuaciones de continuidad

$$\partial_\mu j_\alpha^\mu = 0. \quad (1.181)$$

Para entender el significado físico de la ecuación de continuidad consideremos la cuadri-corriente asociada a un único parámetro constante θ , como en el caso de un campo escalar complejo y su correspondiente conjugado. Expandiendo la ecuación de continuidad en sus componentes espaciales y temporales tenemos que

$$\begin{aligned}\partial_0 j^0 + \partial_i j^i &= 0, & \text{suma sobre } i \\ \frac{\partial j^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} &= 0.\end{aligned}\quad (1.182)$$

Integrando sobre el volumen y aplicando el teorema de Gauss

$$\int_V d^3 x \frac{\partial j^0}{\partial t} + \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{S} = 0. \quad (1.183)$$

Si interpretamos j^0 como la densidad, ρ , de una cierta carga Q , tal que

$$Q = \int_V d^3 x j^0 = \int_V d^3 x \rho, \quad (1.184)$$

entonces, si escogemos S como una superficie suficientemente grande para contener toda la distribución de carga Q en su interior, tendremos que la integral sobre la superficie se anula y por consiguiente

$$\begin{aligned}\int_V d^3 x \frac{\partial j^0}{\partial t} &= \frac{d}{dt} \int_V d^3 x \rho \\ &= \frac{dQ}{dt} \\ &= 0.\end{aligned}\quad (1.185)$$

Es decir, que la carga es independiente del tiempo, y por lo tanto se conserva.

Una consecuencia del primer teorema de Noether es que por cada simetría global de la Acción existe una carga conservada.

Cuando la conservación de la carga requiera de que las ecuaciones de Euler-Lagrange se satisfagan, diremos que la conservación de la carga es *propia*.

Note que las ecuaciones de Euler-Lagrange surgen del Problema variacional de Noether cuando se impone la parte inversa del primer teorema de Noether, es decir, aparecen cuando se imponen que las cargas se conserven como consecuencia de la condición

$$\sum_i \partial_\mu j_{\alpha i}^\mu = 0. \quad (1.186)$$

1.16. Segundo teorema de Noether

Estudiaremos una versión del segundo teorema de Noether aplicable sólo a simetrías internas [?]. Como veremos más adelante, La invarianza de la Acción de Schrödinger bajo una transformación de fase global, da lugar a una conservación global de la probabilidad: la probabilidad se conserva en todos los puntos del espacio simultáneamente. Esto no es incompatible con relatividad especial por que no involucra intercambio de información, pero si permite, en particular, que por ejemplo la teletransportación cuántica sea instantánea.

Si imponemos que el cambio de fase sea local, es decir, dependiente de cada punto del espacio tiempo, tendremos que para un campo $\phi_i = \phi, \phi^*$,

$$\phi_i \rightarrow \phi'_i = e^{i\theta(x)} \phi_i \approx (1 + i\theta(x)) \phi_i, \quad (1.187)$$

de modo que

$$\delta\phi_i = i\phi_i \theta(x). \quad (1.188)$$

En el caso en el que el parámetro de la transformación, $\theta(x)$ sea constante, recuperamos el caso de la invarianza global, que en mecánica cuántica dará lugar a la conservación global de la probabilidad. Note que la carga conservada con una transformación local de fase aún no se ha analizado.

Una transformación local interesante es la que ocurre en el caso electromagnético. Las siguientes transformaciones locales del potencial eléctrico y el vector de potencial electromagnético, dejan invariante las ecuaciones de Maxwell³

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi' = \phi + \frac{\partial}{\partial t} \theta(x), \\ \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \theta(x), \end{aligned} \quad (1.189)$$

o, si definimos el cuadvivector de potencial electromagnético

$$A^\mu = (A^0, \mathbf{A}) = (\phi, \mathbf{A}), \quad (1.190)$$

entonces

$$\delta A^\mu = A'^\mu - A^\mu = \partial_\mu \theta(x). \quad (1.191)$$

³La demostración se hará en el siguiente capítulo.

Tanto la transformación del campo ϕ como la del A^μ se pueden escribir en términos de una transformación en términos del parámetro infinitesimal local $\theta(x)$ y su derivada como

$$\delta\phi_i = a_i(\phi_i, \partial_\mu\phi_i)\theta(x) + b_i^\nu(\phi_i, \partial_\mu\phi_i)\partial_\nu\theta(x), \quad \text{para } \phi_i = \phi, \phi^*, A^\mu. \quad (1.192)$$

Ejercicio: Encontrar los a_i , b_i y $\theta(x)$ para cada ϕ_i bajo el Grupo U(1).

Diremos que un campo es de *materia* si su transformación interna es proporcional al parámetro de transformación ($b^\nu = 0$), o de radiación si su transformación interna es proporcional a la derivada del parámetro de transformación ($a = 0$). Bajo estas definiciones ϕ es un campo de materia bajo el Grupo U(1), mientras que A^μ es un campo de radiación bajo algún grupo a especificar más adelante.

Teorema 2 Si la acción S es invariante bajo un Grupo gauge continuo, entonces existen ρ relaciones

$$\sum_i \mathcal{E}_i a_{\alpha i} = \sum_i \partial_\mu (\mathcal{E}_i b_{\alpha i}^\mu) \quad (1.193)$$

Demostración: La haremos en el caso de un sólo parámetro. La generación a ρ parámetros es directa. Partiendo de la ecuación (1.178) recordando que proviene de una integral y sustituyendo la expresión para $\delta\phi_i$ en (1.192), tenemos

$$\begin{aligned} \sum_i \int d^4x \mathcal{E}_i \delta\phi_i &= \sum_i \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \delta\phi_i \right] \\ \sum_i \int d^4x \mathcal{E}_i (a_i\theta + b_i^\mu \partial_\mu\theta) &= \sum_i \int d^4x \partial_\mu \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right] (a_i\theta + b_i^\nu \partial_\nu\theta) \right\} \\ \sum_i \int d^4x \mathcal{E}_i a_i\theta + \sum_i \int d^4x \mathcal{E}_i b_i^\mu \partial_\mu\theta &= \sum_i \int d^4x \partial_\mu \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right] (a_i\theta + b_i^\nu \partial_\nu\theta) \right\}. \end{aligned} \quad (1.194)$$

Extrayendo la derivada total del término de lado izquierdo

$$\begin{aligned} \sum_i \int d^4x \mathcal{E}_i a_i\theta + \sum_i \int d^4x [\partial_\mu (\mathcal{E}_i b_i^\mu \theta) - \partial_\mu (\mathcal{E}_i b_i^\mu) \theta] &= \sum_i \int d^4x \partial_\mu \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right] (a_i\theta + b_i^\nu \partial_\nu\theta) \right\} \\ \sum_i \int d^4x \mathcal{E}_i a_i\theta - \sum_i \int d^4x [\partial_\mu (\mathcal{E}_i b_i^\mu) \theta] &= - \sum_i \int d^4x \partial_\mu \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right] (a_i\theta + b_i^\nu \partial_\nu\theta) - \mathcal{E}_i b_i^\mu \theta \right\}. \end{aligned} \quad (1.195)$$

Usando el Teorema de Gauss y escogiendo los $\theta(x)$ y $\partial_\mu\theta(x)$ de modo que se desvanezcan en la frontera, obtenemos que

$$\sum_i \mathcal{E}_i a_i = \sum_i \partial_\mu (\mathcal{E}_i b_i^\mu). \quad (1.196)$$

En el caso de un campo de materia complejo, $a_1 = -a_2$ y $b_1 = b_2 = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_i \left\{ \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi_i} \right\} a_i &= 0 \\ \sum_i \left\{ \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right] a_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi_i} a_i \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (1.197)$$

$$\begin{aligned} \sum_i \left\{ \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right] a_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} a_i \right\} &= 0 \\ \sum_i \left\{ \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} a_i \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu a_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} a_i \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (1.198)$$

Teniendo en cuenta que como veremos más adelante, para un campo complejo

$$\sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu a_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} a_i \right] = 0 \quad (1.199)$$

Entonces,

$$\sum_i \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} a_i \right] = 0. \quad (1.200)$$

Este resultado particular para campos complejos se mantiene en general para el conjunto de campos que dependan sólo del parámetro y no de la derivada del parámetro, es decir, el conjunto de campos de materia con $b_i^\mu = 0$: ver Teorema 3 de [33]. En tal caso, las corrientes conservadas son

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} a_i. \quad (1.201)$$

Note que la conservación de la carga en este caso no requiere imponer que $\mathcal{E}_i = 0$. Por lo tanto el caso de la conservación de carga *impropia* se puede considerar más fundamental e inviolable. Esto nos permite formular el *principio gauge* como la necesidad de establecer Lagrangianos que respetan las simetría internas a nivel local.

1.17. Simetrías externas

Consideremos el caso en el cual el campos es sólo afectado en su dependencia espacio-temporal como ocurre para un campo escalar de Lotentz en la ec. (1.129), es decir, $\delta \phi_i = -(\partial_\nu \phi) \delta x^\nu$,

$$\sum_i B_i^\mu = -T_\nu^\mu \delta x^\nu, \quad (1.202)$$

donde

$$T_\nu^\mu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\nu \phi_i - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \quad (1.203)$$

si los campos ϕ_i satisfacen la ecuación de movimiento tenemos que

$$\partial_\mu (T_\nu^\mu \delta x^\nu) = 0. \quad (1.204)$$

Si δx^ν es constante, como se espera en el caso de sistemas inerciales, se satisfacen las cuatro ecuaciones de continuidad (una para cada ν)

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = 0. \quad (1.205)$$

El tensor T_ν^μ proviene de asumir la homogeneidad del espacio y el tiempo y es llamado el tensor de momentum-energía. La densidad Hamiltonina se obtiene de T_0^0

$$\mathcal{H} = T_0^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} \quad (1.206)$$

$$= \pi(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} - \mathcal{L}. \quad (1.207)$$

Comparando con la expresión correspondiente en la formulación Lagrangiana de la Mecánica Clásica, tenemos que si $\phi(x)$ es la variable canónica, la variable canónica conjugada es $\pi(x)$

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \phi(x)/\partial t)}. \quad (1.208)$$

El teorema de Noether en este caso establece que la invarianza de la Acción bajo traslaciones temporales da lugar a la ecuación de continuidad (??) para $\nu = 0$

$$\partial_\mu T_0^\mu = 0 \quad (1.209)$$

cuya carga conservada corresponde a la energía

$$H = \int_V d^3x T_0^0 = \int_V d^3x \mathcal{H}. \quad (1.210)$$

De igual forma la invarianza bajo traslaciones espaciales da lugar a ecuaciones de continuidad para cada componente $\nu = i$ ($i = 1, 2, 3$)

$$\partial_\mu T_i^\mu = 0, \quad (1.211)$$

cuyas densidad de cargas conservadas, T_i^0 , que en forma vectorial escribiremos como \mathbf{T}^0 , dan lugar a la conservación del momentum

$$\mathbf{P} = \int_V d^3x \mathbf{T}^0. \quad (1.212)$$

Generalizando a un campo complejo

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) + (\partial_\nu \phi^*) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \quad (1.213)$$

1.18. Aplicación a Mecánica Cuántica

Haciendo $\hbar = 1$, el Lagrangiano que da lugar a la ecuación de Schrödinger es [10]⁴

$$\mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \psi^*) = -\frac{1}{2m} \psi^* \nabla^2 \psi - \frac{i}{2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) + \psi^* V \psi \quad (1.214)$$

$$= \frac{1}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi - \frac{i}{2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) + \psi^* V \psi \quad (1.215)$$

$$= \frac{1}{2m} \partial_i \psi^* \partial_i \psi - \frac{i}{2} (\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \psi) + \psi^* V \psi.$$

⁴A simple version is discussed in <http://physics.stackexchange.com/questions/55622/how-would-a-lagrangian-be-used-to-recover-the-schrodinger-equation>

donde la segunda forma es real: $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$. Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange (??) para la función de onda ψ^* obtenemos la ecuación de Schrödinger con $\hbar = 1$:

$$0 = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = \partial_0 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi^*)} \right] + \partial_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*}. \quad (1.216)$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} &= -\frac{i}{2} \psi^* & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi^*)} &= \frac{i}{2} \psi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi)} &= \frac{1}{2m} \partial_i \psi^* & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi^*)} &= \frac{1}{2m} \partial_i \psi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} &= \frac{i}{2} \partial_0 \psi^* + \psi^* V & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} &= -\frac{i}{2} \partial_0 \psi + V \psi. \end{aligned} \quad (1.217)$$

Entonces, reemplazando la ec. (1.217) en la ec. (1.216), tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = \partial_0 \left(\frac{i}{2} \psi \right) + \partial_i \left(\frac{1}{2m} \partial_i \psi \right) - \left(-\frac{i}{2} \partial_0 \psi + V \psi \right) \\ &= \frac{i}{2} \partial_0 \psi + \frac{1}{2m} \partial_i \partial_i \psi + \frac{i}{2} \partial_0 \psi - V \psi. \end{aligned} \quad (1.218)$$

Que puede escribirse como

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left(-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi. \quad (1.219)$$

El Lagrangiano en ec (??), y por consiguiente la Acción, es invariante bajo una transformación de fase

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta} \psi. \quad (1.220)$$

Por consiguiente, de acuerdo al Teorema de Noether, debe existir una cantidad conservada. La corriente conservada se obtiene de la ec. (??). Para los campos ψ y ψ^* , tenemos

$$\delta \psi = \psi' - \psi = (e^{i\theta} - 1) \psi \approx i\theta \psi \quad (1.221)$$

$$\delta \psi^* \approx -i\theta \psi^*. \quad (1.222)$$

Usando además la ec. (1.217) en la definición de J^0 dada por la ec. (??), tenemos

$$\begin{aligned} J^0 &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} \right] \delta \psi + \delta \psi^* \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi^*)} \right] \\ &= -\frac{i}{2} \psi^* (i\theta \psi) + (-i\theta \psi^*) \frac{i}{2} \psi \\ &= \theta \psi^* \psi, \end{aligned} \quad (1.223)$$

y

$$\begin{aligned} J^i &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi)} \right] \delta \psi + \delta \psi^* \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi^*)} \right] \\ &= \frac{1}{2m} \partial_i \psi^* (i\theta \psi) + (-i\theta \psi^*) \frac{1}{2m} \partial_i \psi \\ &= \frac{i\theta}{2m} (\partial_i \psi^* \psi - \psi^* \partial_i \psi). \end{aligned} \quad (1.224)$$

Entonces, normalizando apropiadamente la corriente escogiendo $\theta = 1$, tenemos

$$J^0 = \psi^* \psi \quad (1.225)$$

$$\mathbf{J} = \frac{i}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi). \quad (1.226)$$

De acuerdo a la ec. (1.225), la cantidad conservada corresponde a la probabilidad de la función de onda y normalizando apropiadamente la ec. (??)

$$Q_\rho = \int_V \psi^* \psi d^3x = 1. \quad (1.227)$$

En cuanto a las simetrías externas, tenemos de la ec. (??) que da lugar a las ecuaciones de continuidad (1.209)(1.211)

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_0^\mu &= 0, \\ \partial_\mu T_i^\mu &= 0 \end{aligned} \quad (1.228)$$

Las cargas conservadas se pueden obtener de las densidades de carga T_0^0 y T_i^0 .

1.18.1. Conservación del moméntum

Comencemos con las densidades de carga asociadas a la conservación del moméntum lineal. Usando las ecs. (1.217) en la ec. (1.213)

$$\begin{aligned} T_i^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} (\partial_i \psi) + (\partial_i \psi^*) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi^*)} \\ T_i^0 &= -\frac{i}{2} \psi^* (\partial_i \psi) + \frac{i}{2} (\partial_i \psi^*) \psi \end{aligned} \quad (1.229)$$

Entonces, definiendo

$$\mathbf{T}^0 = \frac{i}{2} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) \quad (1.230)$$

Procedemos ahora a reemplazar $\psi \nabla \psi^*$ por la derivada total

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^0 &= \frac{i}{2} [(\nabla(\psi^* \psi) - \psi^* \nabla \psi) - \psi^* \nabla \psi] \\ &= -i \psi^* \nabla \psi + \frac{i}{2} \nabla(\psi^* \psi). \end{aligned} \quad (1.231)$$

Integrando en el volumen

$$\int_V \mathbf{T}^0 d^3x = -i \int_V \psi^* \nabla \psi d^3x + \frac{i}{2} \nabla \int_V \psi^* \psi d^3x \quad (1.232)$$

De acuerdo a la ec. (1.227), la última integral es una constante y

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{T}^0 d^3x &= -i \int_V \psi^* \nabla \psi d^3x \\ \langle \hat{\mathbf{p}} \rangle &= \int_V \psi^* \hat{\mathbf{p}} \psi d^3x \end{aligned} \quad (1.233)$$

De modo que $\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle$ son las cargas conservadas asociadas al valor esperado el operador de momentum

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla. \quad (1.234)$$

En general, el valor esperado de un operador $\hat{\mathcal{O}}$, se define en mecánica cuántica como

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle = \int_V d^3x \psi^* \hat{\mathcal{O}} \psi.$$

1.18.2. Conservación de la energía

De otro lado

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} \partial_0 \psi + \partial_0 \psi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi^*)} - \mathcal{L} \\ &= -\frac{i}{2} \psi^* \partial_0 \psi + \frac{i}{2} \partial_0 \psi^* \psi - \frac{1}{2m} \partial_i \psi^* \partial_i \psi + \frac{i}{2} (\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \psi) - \psi^* V \psi \\ &= -\frac{1}{2m} \partial_i \psi^* \partial_i \psi - \psi^* V \psi \end{aligned} \quad (1.235)$$

Como las corrientes solo están determinadas hasta un factor de proporcionalidad, definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\equiv -T_0^0 = \frac{1}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi + \psi^* V \psi \\ &= \frac{1}{2m} \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi) - \frac{1}{2m} \psi^* \nabla^2 \psi + \psi^* V \psi. \end{aligned} \quad (1.236)$$

Integrando sobre el volumen y usando la ec. (1.233)

$$\begin{aligned} \int_V \mathcal{H} d^3x &= \frac{1}{2m} \int_V \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi) + \int_V \psi^* \left(-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi d^3x \\ &= \frac{1}{2m} \nabla \cdot \int_V (\psi^* \nabla \psi) + \int_V \psi^* \left(-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi d^3x \\ &= \frac{i}{2m} \nabla \cdot \langle \hat{\mathbf{p}} \rangle + \int_V \psi^* \left(-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi d^3x \\ &= \int_V \psi^* \left(-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi d^3x. \end{aligned} \quad (1.237)$$

Entonces

$$\begin{aligned} H &\equiv \int_V \mathcal{H} d^3x = \int_V \psi^* \left(-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi d^3x \\ &= \int_V d^3x \psi^* \hat{H} \psi = \langle \hat{H} \rangle. \end{aligned} \quad (1.238)$$

Que es un resultado bien conocido de la mecánica cuántica.

Como

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \hat{V}, \quad (1.239)$$

podemos escribir la ec. (1.219) como

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi. \quad (1.240)$$

Podemos identificar entonces los operadores de energía y momentum.

$$\hat{H} = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{\mathbf{p}} = -i \nabla. \quad (1.241)$$

Retornando a la ec. (1.233), tenemos que para la solución de partícula libre de la ecuación de Schrödinger

$$\psi = A e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (1.242)$$

la condición de normalización en ec. (1.227) implica que $|A|^2 = 1/L^3$, y

$$\int_V \mathbf{T}^0 d^3x = \mathbf{k}. \quad (1.243)$$

Los dos operadores se pueden combinar en relatividad especial definiendo el operador de cuadrimomentum

$$\hat{p}^\mu = i \partial^\mu = \begin{cases} i \partial^0 = i \partial_0 = \hat{H} & \mu = 0 \\ i \partial^i = -i \partial_i = \hat{p}^i & \mu = i \end{cases} \quad (1.244)$$

Ejercicio: De la ec. (1.238) obtenega la densidad Hamiltoniana, y usando la ec. (1.206) encontrar la densidad Lagrangiana (??).

Una interpretación satisfactoria de los operadores se puede obtener si al identificar una excitación del campo ψ con una partícula de energía E y momentum \mathbf{p} , dichas cantidades se encuentran en la fase de la función de onda:

$$\psi(x) \propto e^{ip \cdot x} = \exp(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}), \quad (1.245)$$

De esta manera, asumiendo una normalización adecuada,

$$(\hat{p}^\mu) = \int d^3x \cdot \psi^* \hat{p}^\mu \psi = p^\mu. \quad (1.246)$$

1.19. Invarianza de fase local del Lagrangiano de Schrödinger's

Cuando se habla de la función $\psi(x)$, x representa el punto del espacio tiempo en el cual deseamos conocer el valor de la función de onda. Ya que los números complejos son, pues por eso, complejos, uno no los puede representar con una posición en una línea. En su lugar, hay que representarlos por un punto en un espacio en dos dimensiones.

Además de la longitud de la flecha apuntando al número complejo también necesitamos un ángulo para especificar exactamente como dibujar la flecha apuntando al número complejo. El observable esta codificado dentro de la longitud de la flecha que representa el valor del función de onda complejo en ese punto del espacio-tiempo. Su ángulo es inobservable.

El número complejo $\psi(x)$ en la ecuación de Schrödinger es justo el número cuyo cuadrado es la probabilidad relativa de encontrar el objeto en ese punto, como hemos visto como consecuencia de la simetría asociada a que el ángulo es inobservable.

Ahora, supongamos que usted decide hacer un cambio de fase de la función de onda de forma arbitraria en cada punto del espacio, osea el ángulo θ que el número complejo ψ hace con respecto al eje real. Aquí hay un punto crucial: si el cambio de fase es *global*, es decir si el cambio de fase asociado al ángulo θ es el mismo en todos los puntos del espacio, este cambio no destruirá el delicado balance entre la energía cinética y la energía potencial en la ecuación de Scrödinger.

Sin embargo, desde el punto de vista de la relatividad especial de Einstein, la necesidad de requerir que el sistema mecánico cuántico quede inalterado sólo por cambios globales de fase parece poco natural. Una vez se escoge el fase de la función de onda en un punto del espacio-tiempo, el requerimiento de la invarianza de fase global fija esta en todos los puntos del espacio tiempo:

As usually conceived however, this arbitrariness is subject to the following limitation: once one choose [the phase of the wave function] at one space-time point, one is then not free to make any choices at other space-time points.

It seems that it is not consistent with the localized field concept that underlies the usual physical theories. In the present paper we wish to explore the possibility of requiring all the interactions to be invariant under independent [change of phases] at all space-time points.

Yang-Mills, *Physical Review*, 1954

Un cambio de fase que dependa del punto del espacio-tiempo, $\theta(x)$, de otro lado, sería similar a lo que pasa en la teoría electromagnética cuando es expresada en términos de potenciales escalares y vectoriales. Ellos se pueden cambiar por derivadas de funciones arbitrarias de una forma tal que los campos eléctricos y magnéticos medidos permanecen invariantes. Como veremos, estas características están profundamente conectas con la conservación local de la carga eléctrica.

Desde un punto de vista más cuantitativo, debido a que la energía y la cantidad de movimiento del electrón aparecen en la fase de su función de onda

$$\psi(x) \propto e^{ip \cdot x} = \exp(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}), \quad (1.247)$$

entonces, un cambio de fase local

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\theta(x)}\psi, \quad (1.248)$$

cambia la energía y la cantidad de movimiento del electrón. Esto hace necesario la existencia de un nuevo campo que compense esos cambios para garantizar su conservación entre el sistema completo del electrón y el nuevo campo.

Historicamente primero se implemento la invarianza de Lorentz en Mecánica Cuántica cambiando el correspondiente Lagrangiano de Schödinger. Sin embargo, el Lagrangiano resultante es insuficiente pues tiene una invarianza de fase global que contradice los principios de la relativad especial. El Lagrangiano definitivo de la electrodinámica cuántica, que construiremos en detalle luego, incorpora además de la invarianza de Lorentz, la invarianza de fase local. Aquí, no seguiremos el camino histórico, sino uno inverso en el que primero modificaremos el Lagrangiano de Schödinger por uno que sea invariante bajo cambios de fase locales. Como las interacciones van a resultar como consecuencia de imponer la invarianza de fase local, es suficiente hacer el análisis partiendo de la Lagrangiana libre de interacciones, es decir, sin considerar el término $\psi^*V\psi$.

Comenzamos de nuevo con el Lagrangiano de Schödinger escrito como en la ec. (1.214), pero sin el término de interacción:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \psi^*) &= \frac{1}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi - \frac{i}{2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) + \psi^* V \psi \\ \mathcal{L}_{\text{free}} &= \frac{1}{2m} \sum_i \partial_i \psi^* \partial_i \psi - \frac{i}{2} (\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \psi).\end{aligned}\quad (1.249)$$

Este Lagrangiano no es invariante bajo cambios de fase locales de la función de onda:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \psi &\rightarrow \partial_\mu \psi' = \partial_\mu (e^{i\theta(x)} \psi) \\ &= (\partial_\mu e^{i\theta(x)}) \psi + e^{i\theta(x)} \partial_\mu \psi \\ &= e^{i\theta(x)} (i \partial_\mu \theta(x)) \psi + e^{i\theta(x)} \partial_\mu \psi \\ &= e^{i\theta(x)} [i \partial_\mu \theta(x) + \partial_\mu] \psi.\end{aligned}\quad (1.250)$$

Para tener un nuevo Lagrangiano invariante bajo transformaciones de fase locales, llamadas simplemente transformaciones gauge, necesitamos introducir un nuevo término para compensar el término que proviene de la derivada de $e^{i\theta(x)}$. Éste término debe tener índice μ como el de la derivada normal:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\mu \psi &\rightarrow \mathcal{D}'_\mu \psi' = (\partial_\mu + X'_\mu) (e^{i\theta(x)} \psi) \\ &= e^{i\theta(x)} [i \partial_\mu \theta(x) + \partial_\mu] \psi + X'_\mu (e^{i\theta(x)} \psi) \\ &= e^{i\theta(x)} [i \partial_\mu \theta(x) + \partial_\mu + X'_\mu] \psi.\end{aligned}\quad (1.251)$$

La condición de transformación del nuevo término X_μ , para poder compensar el término que proviene de la derivada de la fase local, $i \partial_\mu \theta(x)$, es justamente

$$X_\mu \rightarrow X'_\mu = X_\mu - i \partial_\mu \theta(x). \quad (1.252)$$

Reemplazándolo en la ec. (1.251), tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\mu \psi &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu \psi)' = \mathcal{D}'_\mu \psi' = (\partial_\mu + X'_\mu) (e^{i\theta(x)} \psi) \\ &= e^{i\theta(x)} [i \partial_\mu \theta(x) + \partial_\mu + X_\mu - i \partial_\mu \theta(x)] \psi \\ &= e^{i\theta(x)} [\partial_\mu + X_\mu] \psi \\ &= e^{i\theta(x)} (\mathcal{D}_\mu \psi).\end{aligned}\quad (1.253)$$

Note que $\mathcal{D}_\mu \psi$ transforma igual que el campo ψ , y debido a este es llamada la *derivada covariante* de ψ . Similarmente

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}_\mu \psi)^* &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu \psi)^{'*} = (\partial_\mu + X_\mu^*) (\psi^* e^{-i\theta(x)}) \\ &= [-i \partial_\mu \theta(x) + \partial_\mu + X_\mu^* + i \partial_\mu \theta(x)] \psi^* e^{-i\theta(x)} \\ &= [\partial_\mu + X_\mu^*] \psi^* e^{-i\theta(x)} \\ &= (\mathcal{D}_\mu \psi)^* e^{-i\theta(x)}.\end{aligned}\quad (1.254)$$

Es conveniente redefinir X_μ en término de un campo A_μ y unas constantes adecuadas

$$A_\mu \equiv \frac{1}{iq} X_\mu, \quad (1.255)$$

tal que la derivada covariante pueda escribirse de forma convenientes como

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu . \quad (1.256)$$

Las propiedades de transformación de A_μ pueden ser obtenidas de las de X_μ en la ec. (1.252):

$$\begin{aligned} iqA_\mu &\rightarrow iqA'_\mu = iqA_\mu - i\partial_\mu\theta(x) \\ A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\theta(x) . \end{aligned} \quad (1.257)$$

Para obtener las propiedades de la transformación de la derivada covariante misma, podemos comenzar de la definición

$$\mathcal{D}_\mu\psi \rightarrow (\mathcal{D}_\mu\psi)' = U(\mathcal{D}_\mu\psi) , \quad (1.258)$$

done $U(x) = e^{i\theta(x)}$. Es importante enfatizar que el conjunto de transformaciones $U_3(x) = U_1(x)U_2(x)$ también esta en el grupo. También contiene la identidad $U_{\text{identity}} = e^0$, el inverso $U_j^{-1}(x) = U_j^*(x)$, y finalmente la propiedad de asociatividad bajo la operación del grupo $(U_1(x)U_2(x))U_3(x) = U_1(x)(U_2(x)U_3(x))$. Además, como $U_1(x)U_2(x) = U_2(x)U_1(x)$, el grupo es Abeliano. Este grupo Abeliano de números complejos de módulo 1 es llamado el grupo $U(1)$, y es isomorfo al grupo de rotaciones en dos dimensiones por un ángulo θ .

Para un elemento U de un grupo general, tenemos como definición de derivada covariante que la correspondiente derivada del campo transforme como el campo. En este caso general el campo transforma como

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi , \quad (1.259)$$

de modo que la derivada covariante se puede definir como

$$\mathcal{D}_\mu\psi \rightarrow (\mathcal{D}_\mu\psi)' = U(\mathcal{D}_\mu\psi) . \quad (1.260)$$

Para encontrar las propiedades de la derivada covariante en este contexto general, necesitamos evaluar cual es la transformación de la derivada covariante como tal, es decir

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\mu\psi)' &= \mathcal{D}'_\mu\psi' = U(\mathcal{D}_\mu\psi) \\ \mathcal{D}'_\mu(U\psi) &= U(\mathcal{D}_\mu\psi) . \end{aligned} \quad (1.261)$$

Si mantenemos en mente que $\mathcal{D}'_\mu U$ es todavía un operador, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_\mu U &= U\mathcal{D}_\mu \\ \mathcal{D}'_\mu U U^{-1} &= U\mathcal{D}_\mu U^{-1} \\ \mathcal{D}'_\mu &= U\mathcal{D}_\mu U^{-1} . \end{aligned} \quad (1.262)$$

Es decir, para comprobar esta identidad, debemos aplicar el nuevo operador sobre algún campo. Para mantener la generalidad del resultado evitaremos usar la propiedad conmutativa del algún grupo particular

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_\mu\psi &= U\mathcal{D}_\mu(U^{-1}\psi) \\ \partial_\mu\psi + iqA'_\mu\psi &= U(\partial_\mu + iqA_\mu)(U^{-1}\psi) \\ \partial_\mu\psi + iqA'_\mu\psi &= U[U^{-1}\partial_\mu\psi + (\partial_\mu U^{-1})\psi + iqA_\mu U^{-1}\psi] \\ \partial_\mu\psi + iqA'_\mu\psi &= \partial_\mu\psi + U(\partial_\mu U^{-1})\psi + iqUA_\mu U^{-1}\psi . \end{aligned}$$

Después de cancelar el término $\partial_\mu \psi$ en ambos lados, y factorizando el campo ψ , tenemos que

$$\begin{aligned} iqA'_\mu &= iqUA_\mu U^{-1} + U(\partial_\mu U^{-1}) \\ A_\mu \rightarrow A'_\mu &= UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{q} U(\partial_\mu U^{-1}). \end{aligned} \quad (1.263)$$

Esta expresión es completamente general y será usada posteriormente en el contexto de grupos más complicados. En el caso particular de un Grupo Abelianio $U(1)$, tenemos simplemente que

$$\begin{aligned} A'_\mu &= A_\mu - \frac{i}{q} [-i\partial_\mu \theta(x)] UU^* \\ A_\mu \rightarrow A'_\mu &= A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \theta(x). \end{aligned} \quad (1.264)$$

Definimos la *invarianza gauge local* como una forma arbitraria de escoger el factor de fase complejo de un campo cargado⁵ en todos los puntos del espacio tiempo.

De esta forma, podemos cambiar el Lagrangiano libre original por uno nuevo que sea invariante bajo transformaciones de fase locales, asegurándonos de considerar todos los términos extra posibles, en particular los asociados al nuevo campo A_μ :

$$\mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \psi^*, A_\nu, \partial_\mu A_\nu) = \frac{1}{2m} \sum_i (\mathcal{D}_i \psi)^* \mathcal{D}_i \psi - \frac{i}{2} [\psi^* \mathcal{D}_0 \psi - (\mathcal{D}_0 \psi)^* \psi] + \mathcal{L}(A_\nu, \partial_\mu A_\nu). \quad (1.265)$$

donde

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \theta(x). \quad (1.266)$$

Esta es justamente la transformación que deja el campo electromagnético invariante, y como veremos, el Lagrangiano faltante $\mathcal{L}_{\text{EM}} = \mathcal{L}(A_\nu, \partial_\mu A_\nu)$ dará lugar precisamente a las ecuaciones de Maxwell!. El nuevo Lagrangiano es ahora invariante bajo transformaciones de fase (y deberemos imponer que \mathcal{L}_{EM} también lo sea). De hecho:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= \frac{1}{2m} \sum_i (\mathcal{D}_i \psi)' (\mathcal{D}_i \psi)' - \frac{i}{2} [\psi'^* (\mathcal{D}_0 \psi)' - (\mathcal{D}_0 \psi)' \psi'] + \mathcal{L}'_{\text{EM}} \\ &= \frac{1}{2m} \sum_i (\mathcal{D}_i \psi)^* e^{-i\theta(x)} e^{i\theta(x)} (\mathcal{D}_i \psi) \\ &\quad - \frac{i}{2} [\psi^* e^{-i\theta(x)} e^{i\theta(x)} (\mathcal{D}_0 \psi) + \mathcal{L}_{\text{EM}} - (\mathcal{D}_0 \psi)^* e^{-i\theta(x)} e^{i\theta(x)} \psi] + \mathcal{L}_{\text{EM}}. \\ &= \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (1.267)$$

Para preservar la invarianza uno nota que es necesario contrarrestar la variación de θ con x, y, z , y t introduciendo el campo electromagnético A_μ . De esta forma, una vez logremos especificar \mathcal{L}_{EM} , la interacción electromagnética será obtenida como resultado de imponer la invarianza de fase local bajo el grupo Abelianio $U(1)$, correspondiente a las transformaciones de fase locales. Para implementar

⁵como el electrón descrito por la ecuación usual de Schrödinger.

por completo el principio gauge local necesitamos especificar completamente el \mathcal{L}_{EM} de una forma compatible con la transformación gauge del campo A_μ y las transformaciones de Lorentz, lo cual será desarrollado en el próximo capítulo.

Por ahora veremos las consecuencias del principio variacional de Noether para simetrías internas, expresado por la ec. (1.178), sobre los campos ψ y ψ^* .

Mostraremos que en efecto, para esta densidad Lagrangiana particular los términos

$$\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu a_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} a_i = 0$$

En efecto, usando $a_1 = i\psi$ y $a_2 = -i\psi^*$, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu a_i &= i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \partial_\mu \psi - i \partial_\mu \psi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} \\ &= \sum_j \frac{i}{2m} (\partial_j \psi^* - iq A_j \psi^*) \partial_\mu \psi - \sum_j \frac{i}{2m} \partial_i \psi^* (\partial_j \psi + iq A_j \psi) \\ &\quad + i \left(-\frac{i}{2} \psi^* \right) \partial_0 \psi - i \partial_0 \psi^* \left(\frac{i}{2} \psi \right) \\ &= \sum_j \frac{q}{2m} [(\partial_j \psi^*) \psi + \psi^* \partial_j \psi] A_j + \frac{1}{2} [(\partial_0 \psi^*) \psi + \psi^* \partial_0 \psi] \end{aligned} \quad (1.268)$$

y

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} a_i &= i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \psi - i \psi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} \\ &= \sum_j \frac{i}{2m} (\partial_j \psi^* - iq A_j \psi^*) (iq A_j) \psi - \sum_j \frac{i}{2m} \psi^* (-iq A_j) (\partial_j \psi + iq A_j \psi) \\ &\quad + i \frac{i}{2} (\partial_0 \psi^* - iq A_0 \psi^*) \psi - i \left(\frac{-i}{2} \right) \psi^* (\partial_0 \psi + iq A_0) \\ &= - \sum_j \frac{q}{2m} [(\partial_j \psi^*) \psi + \psi^* \partial_j \psi] A_j - \frac{1}{2} [(\partial_0 \psi^*) \psi + \psi^* \partial_0 \psi] \end{aligned} \quad (1.269)$$

Por lo tanto, la corriente conservada corresponde para los campos ψ^6 y ψ^* es, de la ec. (1.201)

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} a_i \\ &= \begin{cases} q\psi^* \psi & \mu = 0 \\ -\frac{i}{2m} [\psi^* \mathcal{D}^i \psi - (\mathcal{D}^i \psi^*) \psi] & \mu = i \end{cases} \end{aligned} \quad (1.270)$$

⁶El término con b_3^μ se puede anular usando condiciones de frontera para el campo $\phi_3 \rightarrow A_\mu$.

1.20. Ecuación de Scrödinger en presencia de un campo electromagnético

La expansión del Lagrangiano en términos de los campos ψ , ψ^* , y A_μ es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2m} \sum_i (\partial_i \psi + iq A_i \psi)^* (\partial_i \psi + iq A_i \psi) - \frac{i}{2} [\psi^* (\partial_0 \psi + iq A_0 \psi) - (\partial_0 \psi + iq A_0 \psi)^* \psi] + \mathcal{L}_{\text{EM}} \\
&= \frac{1}{2m} \sum_i (\partial_i \psi^* - iq A_i \psi^*) (\partial_i \psi + iq A_i \psi) - \frac{i}{2} [\psi^* (\partial_0 \psi + iq A_0 \psi) - (\partial_0 \psi^* - iq A_0 \psi^*) \psi] + \mathcal{L}_{\text{EM}} \\
&= \frac{1}{2m} \sum_i (\partial_i \psi^* \partial_i \psi - iq \psi^* A_i \partial_i \psi + iq \partial_i \psi^* A_i \psi + q^2 A_i A_i \psi^* \psi) + \mathcal{L}_{\text{EM}} \\
&\quad - \frac{i}{2} [\psi^* \partial_0 \psi + iq \psi^* A_0 \psi - (\partial_0 \psi^*) \psi + iq A_0 \psi^* \psi] \\
&= \frac{1}{2m} \sum_i (\partial_i \psi^* \partial_i \psi - iq \psi^* A_i \partial_i \psi + iq \partial_i \psi^* A_i \psi + q^2 A_i A_i \psi^* \psi) + \mathcal{L}_{\text{EM}} \\
&\quad - \frac{i}{2} [\psi^* \partial_0 \psi - (\partial_0 \psi^*) \psi + 2iq \psi^* A_0 \psi] + \mathcal{L}_{\text{EM}} .
\end{aligned} \tag{1.271}$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2m} \sum_i \partial_i \psi^* \partial_i \psi - \frac{i}{2} [\psi^* \partial_0 \psi - (\partial_0 \psi^*) \psi] \\
&\quad + \frac{1}{2m} \sum_i [-iq \psi^* A_i \partial_i \psi + iq (\partial_i \psi^*) A_i \psi + q^2 A_i A_i \psi^* \psi] \\
&\quad + q \psi^* A_0 \psi + \mathcal{L}_{\text{EM}} .
\end{aligned} \tag{1.272}$$

De aquí podemos obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange para cada campo.

In the following developments we will use heavily the covariant and contravariant form of the four-vector A_μ defined in eqs: (1.339), (1.342), such that the tridimensional vector is defined in term of the spacial covariant components

$$\mathbf{A} = (A^1, A^2, A^3) = -(A_1, A_2, A_3) .$$

1.20.1. Euler-Lagrange equation for ψ^*

In particular for ψ^* we have

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} &= 0 \\
 \partial_0 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi^*)} \right] + \partial_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \psi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} &= 0 \\
 \frac{i}{2} \partial_0 \psi - \frac{1}{2m} \partial_i [\partial^i \psi + iq A^i \psi] - \left[-\frac{1}{2m} (-iq A_i \partial^i \psi + q^2 A_i A^i \psi) - \frac{i}{2} (\partial_0 \psi + 2iq A_0 \psi) \right] &= 0 \\
 i \partial_0 \psi - q A_0 \psi - \frac{1}{2m} [\partial_i (\partial^i \psi + iq A^i \psi) + iq A_i (\partial^i \psi + iq A^i \psi)] &= 0 \\
 i(\partial_0 + iq A_0) \psi - \frac{1}{2m} (\partial_i + iq A_i) (\partial^i \psi + iq A^i \psi) &= 0 \\
 i \mathcal{D}_0 \psi + \frac{1}{2m} \sum_i \mathcal{D}_i \mathcal{D}_i \psi &= 0, \quad (1.273)
 \end{aligned}$$

If we define

$$\mathcal{D} \equiv \nabla - iq \mathbf{A}. \quad (1.274)$$

we have in components:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_i &= \partial_i - iq A^i \\
 \mathcal{D}_i &= \partial_i + iq A_i. \quad (1.275)
 \end{aligned}$$

Then we have the new wave equation:

$$\begin{aligned}
 i \mathcal{D}_0 \psi &= -\frac{1}{2m} \mathcal{D} \cdot \mathcal{D} \psi \\
 i \mathcal{D}_0 \psi &= -\frac{1}{2m} \mathcal{D}^2 \psi, \quad (1.276)
 \end{aligned}$$

que corresponde a la ecuación de Scrödinger con la derivada normal reemplazada por la derivada covariante.

Expandiendo esta ecuación tenemos

$$\begin{aligned}
 i \left(\frac{\partial}{\partial t} + iq A_0 \right) \psi &= -\frac{1}{2m} \sum_i (\partial_i + iq A_i)^2 \psi \\
 \left(i \frac{\partial}{\partial t} - q A_0 \right) \psi &= -\frac{1}{2m} \sum_i (\partial_i - iq A^i)^2 \psi \\
 \left(i \frac{\partial}{\partial t} - q \phi \right) \psi &= -\frac{1}{2m} (\nabla - iq \mathbf{A})^2 \psi \\
 \left(\hat{H} - q \phi \right) \psi &= -\frac{-i^2}{2m} (\nabla - iq \mathbf{A})^2 \psi \\
 &= \frac{1}{2m} (i \nabla + q \mathbf{A})^2 \psi \\
 &= \frac{1}{2m} (-i \nabla - q \mathbf{A})^2 \psi \\
 &= \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - q \mathbf{A})^2 \psi. \quad (1.277)
 \end{aligned}$$

In this way, the Scrödinger equation in presence of the electromagnetic field, can be obtained from the original Scrödinger equation but with the *minimum substitution*:

$$\hat{H} \rightarrow \hat{H} - q\phi \qquad \hat{\mathbf{p}} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}. \quad (1.278)$$

De la ecuación (1.277) podemos obtener la ecuación de Schödinger en presencia de un campo electromagnético

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\frac{1}{2m}(-i\nabla - q\mathbf{A})^2 + qA_0 \right] \psi. \quad (1.279)$$

Para que la mecánica cuántica sea consistente con las ecuaciones de Maxwell es necesario que las transformaciones gauge (1.257) de los potenciales de Maxwell estén acompañados por una transformación de la función de onda, $\psi \rightarrow \psi'$, donde ψ' satisface la ecuación

$$\begin{aligned} i\mathcal{D}'^0\psi' &= -\frac{1}{2m}\mathcal{D}'^2\psi' \\ i\frac{\partial}{\partial t}\psi' &= \left[\frac{1}{2m}(-i\nabla - q\mathbf{A}')^2 + qA'_0 \right] \psi'. \end{aligned} \quad (1.280)$$

Como la forma de la ecuación (1.280) es exactamente la misma que la forma de (1.279) entonces ambas describen la misma física. Se dice que la ec. (1.279) es covariante gauge, lo que significa que mantiene la misma forma bajo una transformación gauge.

■ **Ejemplo:**

Demuestre que la ec. (1.280) es covariante:

Como

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta(x)}\psi \quad (1.281)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'\psi' &= [(\nabla - iq\mathbf{A}) - i\nabla\theta] e^{i\theta(x)}\psi \\ &= i(\nabla\theta)e^{i\theta(x)}\psi + e^{i\theta(x)}\nabla\psi - iq\mathbf{A}e^{i\theta(x)}\psi - i(\nabla\theta)e^{i\theta(x)}\psi \\ &= e^{i\theta(x)}(\nabla - iq\mathbf{A})\psi \\ &= e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}\psi) \end{aligned} \quad (1.282)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'^2\psi' &= \mathcal{D}'(\mathcal{D}'\psi') \\ &= [(\nabla - iq\mathbf{A}) - i\nabla\theta] e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}\psi) \\ &= i(\nabla\theta)e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}\psi) + e^{i\theta(x)}\nabla(\mathcal{D}\psi) - iq\mathbf{A}e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}\psi) - i\nabla\theta e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}\psi) \\ &= e^{i\theta(x)}(\nabla - iq\mathbf{A})(\mathcal{D}\psi) \\ &= e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}^2\psi) \end{aligned} \quad (1.283)$$

De la misma manera

$$\mathcal{D}'^0\psi' = e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}^0\psi) \quad (1.284)$$

De modo que

$$\mathcal{D}^\mu \psi \rightarrow \mathcal{D}'^\mu \psi' = e^{i\theta(x)} (\mathcal{D}^\mu \psi) \quad (1.285)$$

y la derivada covariante del campo transforma como el campo. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} i\mathcal{D}'^0 \psi' &= -\frac{1}{2m} \mathcal{D}'^2 \psi' \\ ie^{i\theta(x)} \mathcal{D}^0 \psi &= -\frac{1}{2m} e^{i\theta(x)} \mathcal{D}^2 \psi \\ i\mathcal{D}^0 \psi &= -\frac{1}{2m} \mathcal{D}^2 \psi \end{aligned} \quad (1.286)$$

En resumen, para

$$\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu + iqA^\mu \quad (1.287)$$

y reemplazando $\theta \rightarrow q\theta$ tenemos

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \theta(x) \quad (1.288)$$

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{iq\theta(x)} \psi$$

$$\mathcal{D}^\mu \psi \rightarrow \mathcal{D}'^\mu \psi' = e^{iq\theta(x)} (\mathcal{D}^\mu \psi). \quad (1.289)$$

En esta convención q corresponde al *generador* de la transformación y θ al parámetro de la transformación.

1.20.2. Corrientes conservadas

Aplicamos el segundo teorema de Noether con (con el reemplazo $\theta \rightarrow q\theta$

$$\begin{aligned} \phi_1 : \psi, & \quad a_1 = iq\psi, & \quad b_1 = 0 \\ \phi_2 : \psi^*, & \quad a_2 = -i\psi^*, & \quad b_2 = 0 \\ \phi_3 : A^\mu, & \quad a_3 = 0, & \quad b_2 = -\delta_\nu^\mu, \end{aligned} \quad (1.290)$$

tenemos que para los campos ψ y ψ^* , asumiendo que el campo A^μ satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange, tenemos que

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (1.291)$$

donde

$$j^\mu = \begin{cases} q\psi^*\psi & \mu = 0 \\ -\frac{i}{2m} [\psi^* \mathcal{D}^i \psi - (\mathcal{D}^i \psi^*) \psi] & \mu = i \end{cases} \quad (1.292)$$

Podemos interpretar la corriente conservada como la asociada a la conservación de la carga eléctrica, tal que

$$\langle \hat{Q} \rangle = \int_V d^3x \psi^* \hat{Q} \psi = q \int_V d^3x \psi^* \psi = q, \quad (1.293)$$

donde

$$\hat{Q}\psi = q\psi. \quad (1.294)$$

Es importante hacer notar que para T_0^0 , y T_i^0 deberíamos obtener

$$\hat{H} = i \frac{\partial}{\partial t} - q\phi \quad \hat{\mathbf{p}} = -i \nabla - q\mathbf{A}. \quad (1.295)$$

De otro lado, si aplicamos el segundo teorema de Noether al campo de radiación

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu (\mathcal{E}_3 b_3^\mu) \\ 0 &= \partial_\mu (\mathcal{E}_3 \delta_\nu^\mu) \\ 0 &= \partial_\mu \partial_\rho \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho A_\nu)} \delta_\nu^\mu \right] - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \delta_\nu^\mu \\ 0 &= \partial_\mu \partial_\rho \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho A_\mu)} \right] - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu}. \end{aligned} \quad (1.296)$$

El segundo término da lugar a la misma corriente conservada fermiónica

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = \partial_\mu j^\mu = 0, \quad (1.297)$$

Por consiguiente, la identidad resultante

$$\partial_\mu \partial_\rho \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho A_\mu)} \right] = 0, \quad (1.298)$$

se puede interpretar como la necesidad de introducir el tensor antisimétrico

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)}, \quad (1.299)$$

tal que

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0. \quad (1.300)$$

Para obtener una forma para $F_{\mu\nu}$, es conveniente imponer que la densidad Lagrangiana asociada sólo a las nuevas contribuciones de los campos A_ν y sus derivadas $\partial_\mu A_\nu$, denotada como \mathcal{L}_{EM} sea invariante gauge local bajo la transformación del campo A_μ en (1.288). Esto implica que \mathcal{L}_{EM} solo puede depender de las derivadas de los campos, y por consiguiente $F^{\mu\nu}$ debe ser una combinación antisimétrica de las derivadas de los campos

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1.301)$$

Con esta definición, bajo la transformación (1.288)

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}. \quad (1.302)$$

Por consiguiente, el único término posible que a la vez es invariante de Lorentz e invariante gauge local es

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (1.303)$$

The approach to change the Action for a new one invariant under local phase transformations, is that the electron cannot be longer considered as an isolated *naked* particle. The electron must be always surrounded by some cloud of virtual particles associated with the electromagnetic field in order to guarantee the conservation of the energy and momentum of the system. In general the wave function of the electron can be represented as the exponential of iEt and $i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$, so that a local phase transformation will change the energy E and the momentum \mathbf{p} of the electron. This changes must be compensated with the corresponding changes in A_μ .

Moreover, to be consistent, we could start with the free Lagrangian before the change of the normal derivative by the covariant derivative. The interactions are not longer imposed by hand but a consequence of the improved Action.

Combinando todos los resultados, podemos escribir el Lagrangiano final como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2m} \sum_i \partial_i \psi^* \partial_i \psi - \frac{i}{2} [\psi^* \partial_0 \psi - (\partial_0 \psi^*) \psi] \\ & + j^\nu A_\nu \\ & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (1.304)$$

Las ecuaciones de movimiento para el campo A_ν , se obtienen del Lagrangiano

$$\mathcal{L}_{A_\nu} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\nu A_\nu, \quad (1.305)$$

como se mostrará en el próximo capítulo.

1.20.3. Interpretación física

Al ser una función compleja, la función de onda del electrón puede escribirse en coordenadas polares como

$$\psi = |\psi| e^{i\theta(x)} \quad (1.306)$$

donde $\theta(x)$ suele ser una expansión en ondas planas en términos de frecuencias angular ω y números de onda \mathbf{k} , que interpretadas en el contexto de la mecánica cuántica corresponden con los factores adecuados a la energía E y a la cantidad de movimiento \mathbf{p} del electrón. Por lo tanto una transformación gauge local sobre el electrón

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{i\alpha(x)} = |\psi| e^{i[\theta(x) + \alpha(x)]}, \quad (1.307)$$

equivale a un cambio en la energía y la cantidad de movimiento del electrón. Por consiguiente el papel de los cuatros campos $A_\mu(x)$ es muy importante porque están permanente compensando los cambios en la energía y las tres cantidades de movimiento del electrón de manera que la Acción invariante gauge local, con la densidad Lagrangiana modificada con derivadas covariantes, pueda conservar la energía y la cantidad de movimiento en cualquier punto del espacio tiempo. En la práctica esto implica que el electrón desnudo no es un observable físico. Lo que llamamos electrón es realmente al combinación del electrón como tal y su propio campo electromagnético que garantiza la conservación apropiada de la energía y cantidad de movimiento.

1.21. Ecuación de Klein-Gordon

Si modificamos el Lagrangiano en ec. (1.102), para incluir un término adicional ($v = c = 1$)

$$\mathcal{L}(\partial\phi/\partial t, \partial\phi/\partial z) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 - m^2\phi^2 \right]. \quad (1.308)$$

entonces, la ec. (??) es solución a la ecuación resultante de aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + m^2\phi &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + m^2 \right) \phi &= 0, \end{aligned} \quad (1.309)$$

Generalizando a 3 dimensiones tenemos el Lagrangiano de Klein-Gordon

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \nabla\phi \cdot \nabla\phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \end{aligned} \quad (1.310)$$

que dan lugar a la ecuación de Klein-Gordon

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi = 0. \quad (1.311)$$

Una forma de derivar la ecuación de Schrödinger es usar escribir la ecuación de conservación de la energía mecánica en términos de operadores aplicados a la función de onda

$$\hat{H}\psi = \left(\frac{1}{2m} \hat{\mathbf{p}}^2 + v \right) \psi, \quad (1.312)$$

De esta manera, la versión mecánico cuántica de la conservación de momentum-energía de la relatividad especial se podría obtener de

$$\begin{aligned} \hat{p}_\mu \hat{p}^\mu \psi &= \left(\hat{H}^2 - \sum_i \hat{p}^i \hat{p}^i \right) \psi \\ &= (-\partial_0^2 + \nabla^2) \psi \\ &= m^2 \psi, \end{aligned} \quad (1.313)$$

de donde obtenemos precisamente la ecuación (1.311)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \psi = 0. \quad (1.314)$$

Aunque la interpretación en mecánica cuántica de la ecuación de momentum-energía requiere promover también el campo a un operador, una vez se establece la teoría cuántica de campos correspondiente, el coeficiente m se puede interpretar como la masa del campo ψ .

1.22. Invarianza de fase local para campo escalar complejo

Invarianza de fase local del campo escalar complejo, $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (\mathcal{D}_\mu \phi)^* \mathcal{D}^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= (\partial_\mu \phi^* - iqA_\mu \phi^*) (\partial^\mu \phi + iqA^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + iq (\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi) A^\mu + q^2 \phi^* \phi A_\mu A^\mu - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\end{aligned}\quad (1.315)$$

$$\begin{aligned}\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} &= \partial_\mu (\partial^\mu + iqA^\mu) \phi - (-iq \partial_\mu \phi A^\mu + q^2 A_\mu A^\mu \phi - m^2 \phi) \\ &= \partial_\mu (\partial^\mu + iqA^\mu) \phi + iq \partial_\mu \phi A^\mu - q^2 A_\mu A^\mu \phi + m^2 \phi.\end{aligned}\quad (1.316)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}-iq \phi^* \left\{ \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} \right\} &= -iq \phi^* \partial_\mu (\partial^\mu + iqA^\mu) \phi + q^2 A_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + iq^3 A_\mu A^\mu \phi^* \phi - iqm^2 \phi^* \phi \\ &= -iq \partial_\mu [\phi^* (\partial^\mu + iqA^\mu) \phi] + iq (\partial_\mu \phi^*) (\partial^\mu + iqA^\mu) \phi + q^2 A_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + iq^3 A_\mu A^\mu \phi^* \phi - iqm^2 \phi^* \phi \\ &= -iq \partial_\mu [\phi^* \mathcal{D}^\mu \phi] + iq \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - q^2 A^\mu (\partial_\mu \phi^*) \phi + q^2 A_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + iq^3 A_\mu A^\mu \phi^* \phi - iqm^2 \phi^* \phi.\end{aligned}\quad (1.317)$$

Similarmente

$$\begin{aligned}iq \left\{ \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \right\} \phi &= iq \partial_\mu [(\mathcal{D}^\mu \phi) \phi^*] - iq \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + q^2 A^\mu (\partial_\mu \phi^*) \phi - q^2 A_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - iq^3 A_\mu A^\mu \phi^* \phi + iqm^2 \phi^* \phi.\end{aligned}\quad (1.318)$$

Sumando las dos expresiones, todos los términos con excepción de los primeros se cancelan entre si, dando lugar a

$$\sum_i \mathcal{E}_i a_{\alpha i} = \partial_\mu j^\mu, \quad (1.319)$$

donde

$$j^\nu = -iq [\phi^* \mathcal{D}^\nu \phi - (\mathcal{D}^\nu \phi) \phi^*], \quad (1.320)$$

que corresponde a la carga eléctrica. Note que dicho resultado se puede obtener más directamente usando la ec. (1.201).

Note además que

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \phi &= (\partial_\mu + iqA_\mu) (\partial^\mu + iqA^\mu) \phi = \partial_\mu (\partial^\mu + iqA^\mu) \phi + iqA_\mu (\partial^\mu + iqA^\mu) \phi \\ &= \partial_\mu (\partial^\mu + iqA^\mu) \phi + iqA_\mu \partial^\mu \phi - q^2 A_\mu A^\mu \phi.\end{aligned}\quad (1.321)$$

Por lo tanto la ecuación de movimiento asociada al campo ϕ^*

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = (\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu + m^2) \phi = 0 \quad (1.322)$$

Que corresponde a la ecuación de Klein-Gordon pero con la derivada normal reemplazada por la derivada covariante.

1.23. Principio de Mínima Acción para \mathcal{L}

Consideremos primero el problema de hallar la condiciones extremal sobre el funcional de acción. Definamos

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (1.323)$$

En tres dimensiones, la acción de la ec. (1.100), queda

$$S[\phi, \partial_\mu \phi] = \int_R d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (1.324)$$

donde $d^4x = dt dx dy dz$. El principio de Hamilton para el campo ϕ requiere que la acción sea extremal (es decir que $\delta S = 0$, donde

$$\delta S = S' - S, \quad (1.325)$$

es la variación funcional de primer orden en S para variaciones arbitrarias del campo ϕ que se hagan cero en la frontera.

Considere una variación sólo de los campos, tal que ($x = x^\mu$)

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) \quad (1.326)$$

Con la condición adicional de que la variación del campo sea cero en la frontera, como ocurre con el campo electromagnéticos en el infinito.

De otro lado, con $\delta x = x' - x$, la expansión de Taylor para $f(x + \delta x)$ es

$$f(x + \delta x) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \dots \quad (1.327)$$

Para \mathcal{L} , tenemos de la ec. (1.326)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi') &= \mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_\mu \phi + \partial_\mu(\delta\phi)) \\ &= \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) \end{aligned} \quad (1.328)$$

Entonces, de imponer que $\delta S = 0$, tenemos que para una transformación interna

$$\begin{aligned} \delta S &= S' - S = \int_R d^4x \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi') - \int_R d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \\ &= \int_R d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) \right] \\ &= \int_R d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right] \right\} \delta\phi + \int_R d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right] \\ \delta S &= \int_R d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right] \right\} \delta\phi + \int_\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right] d\sigma_\mu = 0. \end{aligned} \quad (1.329)$$

Donde hemos aplicado el Teorema de Gauss

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d^3x = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.330)$$

generalizado a cuatro dimensiones. De la condición de frontera, tenemos que la variación de $\delta\phi$ es cero sobre la hipersuperficie σ , de modo que

$$\int_R d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \right\} \delta\phi = 0. \quad (1.331)$$

Como $\delta\phi$ es cualquier posible variación al *interior* de la hipersuperficie, el integrando debe anularse y resultan las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (1.332)$$

Usando el principio de mínima acción en términos del campo ϕ , tenemos que para la densidad Lagrangiana (1.102)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (1.333)$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.162)

$$\begin{aligned} \partial_0 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} \right] + \partial_3 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_3 \phi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi / \partial t)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi / \partial z)} \right] &= 0 \\ \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right] &= 0 \\ \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1.334)$$

que corresponde a la ec. (1.112).

Generalizando a tres dimensiones vemos que la ecuación para una onda propagandose a una velocidad v , eq. (1.113),

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 0, \quad (1.335)$$

proviene de una densidad Lagrangiana (hasta derivadas totales)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{v^2} \partial_0 \phi \partial_0 \phi - \sum_i \partial_i \phi \partial_i \phi \right]. \end{aligned} \quad (1.336)$$

Definiendo $x^0 = vt$, podemos escribir la densidad Lagrangiana como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \quad (1.337)$$

donde

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = 0, \nu = 0 \\ -1, & \mu = i, \nu = i \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases} \quad (1.338)$$

Que corresponde a un nuevo producto escalar entre $\partial\phi/\partial x^\mu$ y $\partial\phi/\partial x^\nu$ con la métrica $g_{\mu\nu}$. En general si tenemos dos cuadvectores *covariantes* (en términos de superíndices)

$$A^\mu \rightarrow (A^0, A^1, A^2, A^3) \quad B^\mu \rightarrow (B^0, B^1, B^2, B^3) \quad (1.339)$$

su producto escalar bajo la métrica $g^{\mu\nu}$ es

$$\begin{aligned} A \cdot B &\equiv A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 \\ &= \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu. \end{aligned} \quad (1.340)$$

Si definimos el cuadvector *contravariante* (en términos de subíndices)

$$B_\mu \rightarrow (B_0, B_1, B_2, B_3), \quad (1.341)$$

como

$$\begin{aligned} B_\mu &= \sum_\nu g_{\mu\nu} B^\nu \\ B_\mu &\rightarrow (B^0, -B^1, -B^2, -B^3), \end{aligned} \quad (1.342)$$

entonces, podemos escribir el nuevo producto escalar como

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \sum_\mu A^\mu \left(\sum_\nu g_{\mu\nu} B^\nu \right) \\ &= \sum_\mu A^\mu B_\mu. \end{aligned} \quad (1.343)$$

El producto definido anteriormente es invariante de Lorentz si v es independiente del sistema de referencia inercial.

1.24. Problemas

- 1.1 Obtenga el Hamiltoniano a partir de Lagrangiano en (1.98) y encuentre la expresión para la densidad Lagrangiana en términos de ϕ .
- 1.2 Demuestre las ecuaciones (??)(??).
- 1.3 ¿Que cambios se requieren al Lagrangiano de la ecuación de Dirac para que la Acción sea invariante bajo transformaciones Gauge Locales?. Ver sección ??.
- 1.4 A partir del Lagrangiano de la Mecánica Cuántica invariante bajo transformaciones de fase local encuentre la ecuación de Schrödinger en presencia del campo electromagnético. Ver sección ??.

1.5 Calcule T_0^i para el Lagrangiano de Schrödinger

$$\begin{aligned} T_0^i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi)} \partial_0 \psi + \partial_0 \psi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi^*)} \\ &= \frac{1}{2m} (\partial_i \psi^* \partial_0 \psi + \partial_0 \psi^* \partial_i \psi) \end{aligned} \tag{1.344}$$

De modo que $T_i^0 \neq T_0^i$.

Capítulo 2

Campos bosónicos

Se mostrará como la invarianza de la Acción bajo transformaciones es el punto de partida en la construcción de densidades Lagrangianas únicas.

2.1. Construcción de Lagrangianos covariantes

En esta sección vamos a conectar la discusión sobre el Lagrangiano de las vibraciones de la cuerda con el Lagrangiano de Schrödinger en presencia de un campo electromagnético. Dicho Lagrangiano tiene hasta ahora la siguiente dependencia funcional

$$\mathcal{L}_{\text{Schrödinger-local}}(\psi, \partial_\mu \psi, \psi^*, \partial_\mu \psi^*, A_\mu)$$

Un segundo ingrediente del principio gauge local es que debemos asegurarnos de todos los términos posibles asociados a un campo estén presente en el Lagrangiano. De inmediato surge la pregunta: ¿Qué posibles términos de la forma $\partial_\mu A_\nu$ podrían estar presentes en Lagrangiano?. Antes de responder esta pregunta general, abordemos el problema más simple

$$\mathcal{L}(A_0, \partial_\mu A_0) = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi).$$

En la ecuación (1.336), teníamos un Lagrangiano en función de $\partial_\mu \phi$, y haciendo $v \rightarrow c = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\partial_\mu \phi) &= \frac{1}{2} \left[\partial_0 \phi \partial_0 \phi - \sum_i \partial_i \phi \partial_i \phi \right] \\ &= \frac{1}{2} [\partial_0 \phi \partial^0 \phi + \partial_i \phi \partial^i \phi] \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi. \end{aligned}$$

2.1.1. Ecuaciones covariantes

Con el cuadvivector (1.68) podemos construir la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu \phi &= m^2 \phi \\ i\partial_\mu i\partial^\mu \phi &= m^2 \phi \\ -\partial_\mu \partial^\mu \phi &= m^2 \phi \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi &= 0.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Que corresponde a la ecuación de Klein-Gordon (1.311). Una expresión escrita en términos de productos escalares de Lorentz se dice que esta en *forma covariante*. El Lagrangiano covariante que da lugar a ésta ecuación es (ver ec. (1.309) (1.310)).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \tag{2.2}$$

El Lagrangiano más general posible para el campo ϕ es en general bastante arbitrario:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + f(\phi), \tag{2.3}$$

donde $f(\phi)$ es una función de campos escalar real ϕ . Si $f(\phi)$ es una función polinómica del campo ϕ , tenemos por ejemplo.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 + a\phi + b\phi^3. \tag{2.4}$$

Un término de la forma $\partial_\mu \partial^\mu \phi$ puede reabsorberse en la ec. (2.4) como una derivada total. Un posible término $J_\mu \partial^\mu \phi$, con J_μ constante, también puede reescribirse como una derivada total. Un término constante no afecta las ecuaciones de movimiento. Imponer la simetría $\phi \rightarrow -\phi$ anula los dos últimos términos. Potencias de ϕ mayores de cuatro daría lugar a una Teoría Cuántica de Campos no renormalizable.

La dimensión del campo ϕ puede obtenerse usando que la acción es adimensional

$$[S] \supset \left[\int d^4x m^2 \phi^2 \right] = E^{-4} E^2 [\phi]^2 \rightarrow [\phi] = E^1 \tag{2.5}$$

Diremos entonces que la dimensión de ϕ es 1 (en unidades de energía). Similarmente

$$[S] \supset \left[\int d^4x \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right] = E^{-4} [\partial_\mu]^2 E^2 \rightarrow [\partial_\mu] = E^1 \tag{2.6}$$

Como era de esperarse debido a que la derivada tiene unidades de longitud inversa.

Si hacemos $\lambda = a = b = 0$ en la ec. (2.4), y usando las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.162), se obtiene

$$\begin{aligned}(\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu - m^2) \phi &= 0 \\ (\hat{E}^2 - \hat{\mathbf{P}}^2 - m^2) \phi &= 0\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$(\square + m^2) \phi = 0, \tag{2.8}$$

donde

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (2.9)$$

Es el D'Alembartiano [14]. Ec. (2.7) corresponde a la forma de operadores de la ecuación de energía-momentum relativista. La ec. (2.8) se conoce como la ecuación de Klein-Gordon, con Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (2.10)$$

Una expresión escrita en términos de productos escalares de Lorentz se dice que esta en *forma covariante*. Por lo tanto la ecuación de Klein-Gordon y su correspondiente Lagrangiano están en forma covariante. También tienen la simetría $\phi \rightarrow -\phi$. A ϕ se le denomina *campo escalar*.

The field $A^\mu(x)$ transforms simultaneously as field and as vector under Lorentz transformation

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x). \quad (2.11)$$

2.2. Campos escalares complejos

Entre más simetrías posea una Acción menos arbitraria es. Podemos ilustrar esta afirmación si consideramos una Acción para un campo escalar complejo que además de ser invariante de Lorentz, se además invariante bajo transformaciones de fase.

En ese caso la Acción, y la correspondiente densidad Lagrangiana son únicas y están dadas por una función polinómica de $\phi^* \phi$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2. \quad (2.12)$$

Términos de orden superior se pueden obtener a partir de esa Lagrangiana única y por eso no se consideran.

De las ecuaciones de Euler-Lagrange para ϕ^* , usando el Lagrangiano en ec. (??)

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} &= 0 \\ \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi &= 0 \\ (\square + m^2) \phi &= 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

y de la ecuaciones de Euler-Lagrange para ϕ ,

$$(\square + m^2) \phi^* = 0. \quad (2.14)$$

De este modo tanto ϕ , como ϕ^* , satisfacen la ecuación de Klein-Gordon. Cada campo además corresponde a una partícula de masa m como en el caso de ϕ_1 y ϕ_2

Estamos ahora interesado en las simetrías internas del Lagrangiano. Entonces la corriente conservada puede definida en la sección 1.23, eq. (??)

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \delta \phi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \\ J^\mu &= \partial^\mu \phi^* \delta \phi + \delta \phi^* \partial^\mu \phi. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Además de la invarianza de Lorentz, el Lagrangiano en ec. (??) también es invariante bajo el grupo de transformaciones $U(1)$ definido en las sección 2.3.1, pero con una fase constante

$$U = e^{i\theta} \approx 1 + i\theta.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \phi &\xrightarrow{U} \phi' = e^{i\theta} \phi \approx (1 + i\theta) \phi \\ &= \phi + i\theta \phi. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Entonces,

$$\delta\phi = i\theta\phi \quad (2.17)$$

$$\delta\phi^* = -i\theta\phi^*. \quad (2.18)$$

Reemplazando en ec. (2.15)

$$J^\mu \propto -i\theta(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi), \quad (2.19)$$

y

$$\rho = J^0 \propto -i\theta(\phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t} - \phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t}). \quad (2.20)$$

Definimos J^μ como

$$J^\mu = i(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*), \quad (2.21)$$

Como ρ puede ser negativo no puede interpretarse como una probabilidad, como se hizo con la función de onda de la ecuación de Schrödinger. Esto presentó un obstaculo en la interpretación inicial de la ecuación de Klein-Gordon. Sin embargo una vez se cuantiza el campo escalar la probabilidad de los estados cuánticos queda bien definida [12].

2.3. Ecuaciones de Maxwell en notación covariante

Ecuaciones homogéneas:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.22)$$

Ecuaciones inhomogéneas:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}. \quad (2.23)$$

La primera ecuación establece la ausencia de cargas magnéticas, la segunda corresponde a la Ley de Faraday y la tercera a la Ley de Gauss. La cuarta sin el término de desplazamiento eléctrico introducido por Maxwell corresponde a la Ley de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}. \quad (2.24)$$

Tomando la divergencia en esta expresión tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.25)$$

que corresponde a la ecuación de continuidad (??) para ρ constante

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (2.26)$$

De este modo la Ley de Ampère da lugar a la conservación de carga eléctrica pero solo a nivel global: una pérdida de carga eléctrica en un punto del universo puede ser compensada por la aparición instantánea de carga eléctrica en otro lugar del universo. La conservación global podría necesitar la propagación instantánea de señales, y esto está en conflicto con la relatividad especial.

Tomando la divergencia de la Ley de Ampère modificada por Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (2.27)$$

obtenemos la ecuación de continuidad (2.26). Dicha ecuación establece que la razón de decrecimiento de la carga en un volumen arbitrario V es debido precisa y únicamente al flujo de la corriente fuera de su superficie; de modo que la carga no puede ser creada ni destruida dentro de V . Ya que V puede ser arbitrariamente pequeño esto significa que la carga eléctrica debe conservarse localmente. El término extra introducido por Maxwell está motivado por un requerimiento de conservación local.

A la luz del teorema de Noether la conservación local de la carga eléctrica debe provenir de una transformación continua y *local* que deje invariante a la ecuaciones de Maxwell. Las invarianza gauge de la ecuaciones de Maxwell juegan este papel. Las cargas conservadas localmente pueden determinarse a partir de la dinámica del sistema [23], además del uso de cargas conocidas que participen en alguna reacción. Por ejemplo se puede estudiar la forma como responde una partícula de carga desconocida a campos electromagnéticos para determinar su carga.

El principio gauge local, que pretendemos formular, va más allá del teorema de Noether estableciendo una relación entre las simetrías, las leyes de conservación y la dinámica. Este se constituye en el paradigma para estudiar las interacciones relevantes en física de partículas.

Para mostrar la invarianza gauge que exhiben las ecuaciones de Maxwell, es conveniente reescribirlas en forma covariante. Para ello es conveniente usar el potencial escalar eléctrico ϕ y el potencia vectorial magnético \mathbf{A} .

Las siguientes ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones homogéneas de Maxwell

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.28)$$

Ya que

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\nabla \times \nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \\ &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Usando el cuadvivector en ec. (1.59) y expandiendo la ec. (2.28), tenemos

$$\begin{aligned}
 E^i &= -\left(\frac{\partial A^0}{\partial x^i} + \frac{\partial A^i}{\partial x^0}\right) \\
 &= \left(\frac{\partial A^0}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_0}\right) \\
 &= \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \\
 &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad \mu = i, \quad \nu = 0
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$E^i = F^{i0} \tag{2.30}$$

donde hemos definido el Tensor de intensidad electromagnética como:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{2.31}$$

A A^μ se le denomina *campo vectorial*. Similarmente

$$\begin{aligned}
 B^k &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \\
 \epsilon_{lmk} B^k &= \epsilon_{lmk} \epsilon_{ijk} \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \\
 &= (\delta_{li} \delta_{mj} - \delta_{lj} \delta_{mi}) \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \\
 &= \frac{\partial A^m}{\partial x^l} - \frac{\partial A^l}{\partial x^m} \\
 &= -\frac{\partial A^m}{\partial x_l} + \frac{\partial A^l}{\partial x_m} \\
 &= \partial^m A^l - \partial^l A^m \\
 &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad \mu = m, \quad \nu = l.
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\epsilon_{lmk} B^k = F^{ml} \tag{2.33}$$

Por consiguiente la ec. (2.73) es también equivalente a las dos ecuaciones homogéneas de Maxwell. En forma matricial,

$$\begin{aligned}
 F^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 & \partial^0 A^2 - \partial^2 A^0 & \partial^0 A^3 - \partial^3 A^0 \\ \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 & 0 & \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 & \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 \\ \partial^2 A^0 - \partial^0 A^2 & \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2 & 0 & \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 \\ \partial^3 A^0 - \partial^0 A^3 & \partial^3 A^1 - \partial^1 A^3 & \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & \epsilon_{213} B^3 & \epsilon_{312} B^2 \\ E^2 & \epsilon_{123} B^3 & 0 & \epsilon_{321} B^1 \\ E^3 & \epsilon_{132} B^2 & \epsilon_{231} B^1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

La ec. (2.73) satisface la identidad,

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0 \quad (2.35)$$

Definiendo el tensor dual como

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma},$$

la ec. (2.35) puede escribirse como

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.36)$$

Para reescribir las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas en forma covariante usaremos además el cuadvivector J^μ de la ec. (1.58). Usando la ec. (2.29), la primera ecuación de Maxwell inhomogénea (2.84) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{\partial E^i}{\partial x^i} &= J^0 \\ \frac{\partial}{\partial x^i} F^{i0} &= J^0 \\ \partial_i F^{i0} &= J^0 \\ \partial_\mu F^{\mu 0} &= J^0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Usando las ecs. (2.29), (2.32), la segunda ecuación de Maxwell inhomogénea (2.84) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \frac{\partial B^j}{\partial x^i} - \frac{\partial E^k}{\partial t} &= J^k \\ -\frac{\partial(\epsilon_{ikj} B^j)}{\partial x^i} - \frac{\partial E^k}{\partial t} &= J^k \\ -\partial_i F^{ki} - \partial_0 F^{k0} &= J^k \\ \partial_i F^{ik} + \partial_0 F^{0k} &= J^k \\ \partial_\mu F^{\mu k} &= J^k \end{aligned} \quad (2.38)$$

Las ecuaciones (2.78), (2.38) pueden escribirse en forma compacta como

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= J^\nu \\ &= \begin{cases} \partial_\mu (\partial^\mu A^0 - \partial^0 A^i) = J^0 & \text{para } \nu = 0 \\ \partial_\mu (\partial^\mu A^i - \partial^i A^\mu) = J^i & \text{para } \nu = i \end{cases} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Los resultados sobre la notación covariante de la ecuaciones de Maxwell están resumidos en la Tabla 2.1 De la parte izquierda de la ecuación (2.39), podemos ver que

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

Por consiguiente, la cuatricorrente J^μ es conservada:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (2.40)$$

	E, B	A^μ	$F^{\mu\nu}$
Homogéneas	Ec. (2.83)	(2.28)	(2.73) ó (2.35) ó (2.36)
Inhomogéneas	(2.84)		(2.39)

Tabla 2.1: Ecuaciones de Maxwell

2.3.1. Lagrangiano Electromagnético

La ec. (2.28) es invariante bajo las siguientes transformaciones

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \quad \phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad (2.41)$$

Ya que

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}' = -\nabla\phi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi = \mathbf{E} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla\chi}_{=0} = \mathbf{B} \quad (2.43)$$

Esto implica que diferentes observadores en diferentes puntos del espacio, usando diferentes calibraciones para sus medidas, obtienen los mismos campos. Las ecs. (2.41), corresponden a *transformaciones gauge locales*

En notación de cuadvectores

$$\begin{aligned} A^\mu \rightarrow A'^\mu &= \left(\phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}, \mathbf{A} + \nabla\chi \right) \\ &= \left(\phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}, A^i + \partial_i\chi \right) \\ &= (\phi - \partial^0\chi, A^i - \partial^i\chi) \\ &= (\phi, A^i) - (\partial^0\chi, \partial^i\chi) \\ A^\mu \rightarrow A'^\mu &= A^\mu - \partial^\mu\chi \end{aligned} \quad (2.44)$$

Sea U un elemento del Grupo de Transformaciones $U(1)$:

$$U = e^{i\theta(x)} \in U(1) \quad (2.45)$$

El Grupo está definido por el conjunto infinito de elementos $U_i = e^{i\theta(x_i)}$. Entonces

- Producto de Grupo

$$U_1 \cdot U_2 = e^{i[\theta(x_1)+\theta(x_2)]} \equiv e^{i\theta(x_3)} \in U(1)$$

- Identidad:

$$\theta(x) = 0 \quad \text{tal que} \quad U_I = 1$$

- Inverso

$$\theta(-x) = -\theta(x) \quad \text{tal que} \quad U^{-1} = e^{-i\theta(x)}$$

Note que si

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \frac{i}{e}(\partial^\mu U)U^{-1} \quad (2.46)$$

(Si $\theta = \text{cte}$, $A^\mu = A'^\mu$, invarianza de fase). Si θ es suficientemente pequeño

$$U = e^{i\theta(x)} \approx 1 + i\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2) \quad U^{-1} = e^{-i\theta(x)} \approx 1 - i\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (2.47)$$

Entonces

$$\begin{aligned} A'^\mu &= -\frac{1}{e}(i\partial^\mu \theta(x))[1 + i\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2)][1 - i\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2)] + A^\mu[1 + i\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2)][1 - i\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2)] \\ &= A^\mu + \frac{1}{e}\partial^\mu \theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Por consiguiente, si $\chi(x) = -(1/e)\theta(x)$, entonces la ec. (2.44) es la versión infinitesimal de la transformación $U(1)$ en ec. (2.46). Del Teorema de Noether debe existir una carga conservada corresponde a la carga eléctrica, asociada la corriente J^μ , de la cual aún no hemos especificado su origen.

Bajo esta transformación

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} \rightarrow F'^{\mu\nu} &= (\partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu) \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu \partial^\nu \chi - \partial^\nu A^\mu + \partial^\nu \partial^\mu \chi \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial^\nu \chi + \partial^\mu \partial^\nu \chi \\ &= F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.49)$$

De este modo las ecuaciones homogéneas de Maxwell (2.73) son invariantes gauge. Como la transformación gauge solo afecta al campo A^μ , las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell (2.39) también son invariantes gauge. De esta forma las ecuaciones de Maxwell corresponde a una Teoría Gauge!. Esto fue una curiosidad hasta los 1950.

Para ilustrar la relación entre la conservación local de la carga eléctrica y la transformación gauge, que no es una conexión simple, considere las ecuaciones de Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (2.50)$$

que automáticamente incluyen la conservación local de carga, expresada por la ecuación de continuidad

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (2.51)$$

Además las ecuaciones de Maxwell permanecen invariantes bajo la transformación gauge

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi, \quad (2.52)$$

ya que dicha transformación deja invariante a $F^{\mu\nu}$. De aquí la sugerencia de la invarianza gauge esta relacionada de alguna manera a la conservación de la carga. De hecho la acción más general posible para el campo A^μ compatible tanto con la invarianza de Lorentz y la invarianza gauge local corresponde a la acción que da lugar a las ecuaciones de Maxwell.

2.4. Vector field Lagrangian

Ya estamos en capacidad de responder la siguiente pregunta: ¿Cual es el Lagrangiano más general posible para el campo de cuatro componentes $A^\mu(x)$ compatible con la invarianza de Lorentz y la invarianza bajo transformaciones gauge?

Las correspondientes transformaciones son

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x). \quad (2.53)$$

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi(x) ? \quad (2.54)$$

Definiendo

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ G^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu \end{aligned}$$

El Lagrangiano que da lugar a una Acción invariante de Lorentz para el cuadvivector A^μ es, hasta derivadas totales y potencias en los campos de hasta dimensión 4:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}G_{\mu\nu} \\ & - J^\mu A_\mu + \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu + \lambda_1 \partial_\nu A^\nu(x) A_\mu(x) A^\mu(x) + \lambda_2 A^\mu A_\mu A^\nu A_\nu \\ & + \lambda_3 F^{\mu\nu}(x) A_\mu(x) A_\nu(x) + \lambda_4 G^{\mu\nu}(x) A_\mu(x) A_\nu + \dots \end{aligned} \quad (2.55)$$

- **Ejercicio:** Show that terms like $\partial^\mu A^\nu(x) \partial_\mu A_\nu(x)$, and hence $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, transforms as

$$\partial^\mu A^\nu (\Lambda^{-1}x) \partial_\mu A_\nu (\Lambda^{-1}x) \quad (2.56)$$

Hint: use the Lorentz transformation properties of ∂_μ in eq. (1.136).

In the case of $J^\mu A_\mu$:

$$\begin{aligned} J^\mu(x) A_\mu(x) & \rightarrow g_{\mu\nu} J'^\mu(x) A'^\nu(x) = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho J^\rho (\Lambda^{-1}x) \Lambda^\nu{}_\sigma A^\sigma (\Lambda^{-1}x) \\ & = \Lambda^\mu{}_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma J^\rho (\Lambda^{-1}x) A^\sigma (\Lambda^{-1}x) \\ & = g_{\rho\sigma} J^\rho (\Lambda^{-1}x) A^\sigma (\Lambda^{-1}x), \end{aligned} \quad (2.57)$$

in the case $\partial_\nu A^\nu(x) A_\mu(x) A^\mu(x)$:

$$\begin{aligned} \partial_\nu A^\nu(x) A_\mu(x) A^\mu(x) & \rightarrow \partial'_\nu A'^\nu(x') A'_\mu(x') A'^\mu(x') = (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu \Lambda^\nu{}_\rho \partial_\sigma A^\rho (\Lambda^{-1}x) A_\mu (\Lambda^{-1}x) A^\mu (\Lambda^{-1}x) \\ & = \delta^\sigma{}_\rho \partial_\sigma A^\rho (\Lambda^{-1}x) A_\mu (\Lambda^{-1}x) A^\mu (\Lambda^{-1}x) \\ & = \partial_\rho A^\rho (\Lambda^{-1}x) A_\mu (\Lambda^{-1}x) A^\mu (\Lambda^{-1}x), \end{aligned} \quad (2.58)$$

and similarly for the other terms. Under a Lorentz transformation the full Lagrangian transform as

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(\Lambda^{-1}x) \quad (2.59)$$

Since the Action involves the integration over all the points, it is invariant under the Lorentz transformation. The $J^\mu(x)$ does not involves the introduction a new vector field, because it will be identified later as the 4-current.

Terms like

$$K_\nu A^\nu(x) A_\mu(x) A^\mu(x), \quad (2.60)$$

(for K_ν constant) are not Lorentz invariant:

$$K_\nu A^\nu(x) A_\mu(x) A^\mu(x) \rightarrow K_\nu A'^\nu(x) A'_\mu(x) A'^\mu(x) = K_\nu \Lambda^\nu_\rho A^\rho(\Lambda^{-1}x) A_\mu(\Lambda^{-1}x) A^\mu(\Lambda^{-1}x). \quad (2.61)$$

$K_\nu(x) A^\nu(x) A_\mu(x) A^\mu(x)$ is Lorentz covariant but not gauge-invariant (see below).

Bajo la transformación gauge (2.54)

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &\rightarrow F'^{\mu\nu} = (\partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu) \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu \partial^\nu \chi - \partial^\nu A^\mu + \partial^\nu \partial^\mu \chi \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial^\nu \chi + \partial^\mu \partial^\nu \chi \\ &= F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Si queremos que la Acción refleje las simetrías de las ecuaciones de Maxwell debemos mantener sólo los términos del Lagrangiano para A^μ en (2.55) que sean invariantes hasta una derivada total. Bajo una transformación gauge, cada uno de los términos

$$-\frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu + \lambda_1 \partial_\mu A^\mu A_\nu A^\nu + \lambda_2 A^\mu A_\mu A^\nu A_\nu + \lambda_3 F^{\mu\nu} A_\mu A_\nu + \lambda_4 G^{\mu\nu} A_\mu A_\nu + K_\nu(x) A^\nu A_\mu A^\mu$$

dan lugar a un $\delta\mathcal{L} \neq \partial_\mu(\text{algo})$ y la Acción no es invariante bajo la transformación gauge. Para los términos restantes

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu, \quad (2.63)$$

usando la ec. (2.77), tenemos

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} - J^\mu A'_\mu + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + J^\mu A_\mu \\ &= -J^\mu A_\mu + J^\mu \partial_\mu \chi(x) - J^\mu A_\mu \\ &= \partial_\mu (J^\mu \chi) - (\partial_\mu J^\mu) \chi(x) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Para la Acción

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x [\partial_\mu (J^\mu \chi) - (\partial_\mu J^\mu) \chi(x)] \\ &= - \int d^4x (\partial_\mu J^\mu) \chi(x) \\ &= - \int d^3x \int_{-\infty}^{\infty} dt (\partial_\mu J^\mu) \chi(x). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Para tener $\delta S = 0$ necesitamos asumir de momento que $\partial_\mu J^\mu = 0$. Sin embargo, veremos que esta es una condición auto consistente.

In summary, if the electromagnetic current is conserved, then the Lagrangian is invariant under the gauge transformation (2.54). Note that the Lagrangian density is not locally gauge invariant. However, the action (and hence the theory) is gauge invariant.

Por lo tanto, el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \quad (2.66)$$

es el más general que da lugar a una Acción invariante de Lorentz e invariante gauge local.

La definición of $F^{\mu\nu}$ incluye de entrada las ecuaciones homogéneas de Maxwell. Para ver esto, note en primer lugar que las únicas componentes diferentes de cero son

$$F^{\mu\nu} = \begin{cases} F^{\mu 0} = F^{i0} & \nu = 0 \\ F^{\mu l} = F^{ml} & \nu = l \end{cases} \quad (2.67)$$

Para $\nu = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} F^{i0} &= \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \\ &= \left(\frac{\partial A^0}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_0} \right) \\ &= -\left(\frac{\partial A^0}{\partial x^i} + \frac{\partial A^i}{\partial x^0} \right) \\ &= E^i \end{aligned} \quad (2.68)$$

donde

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.69)$$

mientras que para $\nu = l$ tenemos

$$\begin{aligned} F^{ml} &= \partial^m A^l - \partial^l A^m \\ &= (\delta_{lj}\delta_{mi} - \delta_{li}\delta_{mj})\partial^i A^j \\ &= -(\delta_{lj}\delta_{mi} - \delta_{li}\delta_{mj})\partial_i A^j \\ &= (\delta_{li}\delta_{mj} - \delta_{lj}\delta_{mi})\partial_i A^j \\ &= (\delta_{li}\delta_{mj} - \delta_{lj}\delta_{mi})\frac{\partial A^j}{\partial x^i} \\ &= \epsilon_{lmk}\epsilon_{ijk}\frac{\partial A^j}{\partial x^i} \\ &= \epsilon_{lmk}(\nabla \times \mathbf{A})^k \\ &= \epsilon_{lmk}B^k, \end{aligned} \quad (2.70)$$

donde

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.71)$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \{F^{\mu\nu}\} &= \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & \epsilon_{213}B^3 & \epsilon_{312}B^2 \\ E^2 & \epsilon_{123}B^3 & 0 & \epsilon_{321}B^1 \\ E^3 & \epsilon_{132}B^2 & \epsilon_{231}B^1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

De las ecuaciones. (2.69), y (2.71)

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\nabla \times \nabla \phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \\ &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

que son justamente las ecuaciones homogéneas de Maxwell. Por consiguiente la expresión

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (2.73)$$

con los $\{F^{\mu\nu}\}$ dada en (2.72), no es más que una forma equivalente de las ecuaciones homogéneas de Maxwell. Las ecuaciones de Maxwell restante se pueden obtener a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange para A^ν :

Con miras a calcular las ecuaciones de Euler-Lagrange para el Lagrangiano en ec. (2.66), tenemos

$$\begin{aligned} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} &= (\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho)(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) \\ &= \partial^\rho A^\sigma \partial_\rho A_\sigma - \partial^\rho A^\sigma \partial_\sigma A_\rho - \partial^\sigma A^\rho \partial_\rho A_\sigma + \partial^\sigma A^\rho \partial_\sigma A_\rho \\ &= g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} (\partial_\alpha A_\beta \partial_\rho A_\sigma - \partial_\alpha A_\beta \partial_\sigma A_\rho - \partial_\beta A_\alpha \partial_\rho A_\sigma + \partial_\beta A_\alpha \partial_\sigma A_\rho). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} &= g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} (\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} \partial_\rho A_\sigma + \partial_\alpha A_\beta \delta_{\rho\mu} \delta_{\sigma\nu} - \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} \partial_\sigma A_\rho - \partial_\alpha A_\beta \delta_{\sigma\mu} \delta_{\rho\nu} \\ &\quad - \delta_{\beta\mu} \delta_{\alpha\nu} \partial_\rho A_\sigma - \partial_\beta A_\alpha \delta_{\rho\mu} \delta_{\sigma\nu} + \delta_{\beta\mu} \delta_{\alpha\nu} \partial_\sigma A_\rho + \partial_\beta A_\alpha \delta_{\sigma\mu} \delta_{\rho\nu}). \\ &= g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} \partial_\rho A_\sigma + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \partial_\alpha A_\beta - g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} \partial_\sigma A_\rho - g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta} \partial_\alpha A_\beta \\ &\quad - g^{\rho\nu} g^{\sigma\mu} \partial_\rho A_\sigma - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \partial_\beta A_\alpha + g^{\rho\nu} g^{\sigma\mu} \partial_\sigma A_\rho + g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta} \partial_\beta A_\alpha \\ &= \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu A^\mu + \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu A^\nu \\ &= 4(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} &= 4F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.74)$$

Usando la ec. (2.74), tenemos

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} &= 0 \\
-\frac{1}{4} \partial_\mu \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} (F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}) \right] + J^\rho \frac{\partial A_\rho}{\partial A_\nu} &= 0 \\
-\partial_\mu F^{\mu\nu} + J^\rho \delta_{\rho\nu} &= 0 \\
\partial_\mu F^{\mu\nu} &= J^\nu.
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Como era de esperarse una Acción invariante de Lorentz e invariante gauge local, expresada en términos del Lagrangiano (2.66), da lugar a la Teoría Electromagnética.

Tomando la derivada con respecto a ν en ambos lados tenemos

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu J^\nu. \tag{2.76}$$

De la parte izquierda de ésta ecuación tenemos

$$\begin{aligned}
\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu}) && \text{intercambiando índices mudos} \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + \partial_\nu \partial_\mu F^{\nu\mu}) && \text{conmutando derivadas} \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}) && \text{usando antisimetría de } F^{\mu\nu} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

Por consiguiente, la cuadricorriente J^μ es conservada:

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \tag{2.77}$$

De nuevo, para $\nu = 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
\partial_\mu F^{\mu 0} &= J^0 \\
\partial_i F^{i0} &= J^0 \\
\frac{\partial}{\partial x^i} F^{i0} &= J^0 \\
\frac{\partial E^i}{\partial x^i} &= J^0,
\end{aligned} \tag{2.78}$$

y por consiguiente

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho. \tag{2.79}$$

mientras que para $\nu = k$ tenemos

$$\begin{aligned}
\partial_\mu F^{\mu k} &= J^k \\
\partial_i F^{ik} + \partial_0 F^{0k} &= J^k \\
-\partial_i F^{ki} - \partial_0 F^{k0} &= J^k \\
-\frac{\partial(\epsilon_{ikj} B^j)}{\partial x^i} - \frac{\partial E^k}{\partial t} &= J^k \\
\epsilon_{ijk} \frac{\partial B^j}{\partial x^i} - \frac{\partial E^k}{\partial t} &= J^k \\
(\nabla \times \mathbf{B})^k - \frac{\partial E^k}{\partial t} &= J^k.
\end{aligned} \tag{2.80}$$

y por consiguiente

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}. \quad (2.81)$$

De esta forma, la expresión

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad \text{where} \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (2.82)$$

es completamente equivalente al conjunto completo de ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.83)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}. \quad (2.84)$$

De este modo las ecuaciones de Maxwell se pueden derivar del requerimiento de que la teoría, además de ser invariante de Lorentz, pueda expresarse en términos de potenciales de una forma que sea invariante gauge en esos potenciales. Si un cuadvivector potencial A^μ es postulado, y se impone que la teoría involucre este solamente, de una forma que sea insensible a cambios de la forma (2.44), se es conducido naturalmente a la idea de que los campos físicos entran únicamente vía la cantidad $F^{\mu\nu}$, que es invariante bajo la ec. (2.44). De aquí se puede conjeturar la ecuación de campo en base a la covarianza de Lorentz.

Esto no corresponde ciertamente a una prueba de las ecuaciones de Maxwell. A pesar de eso, la idea que la dinámica (en este caso la completa interconexión entre los efectos eléctricos y magnéticos) pueda estar íntimamente relacionada a un requerimiento de invarianza local se ha convertido en algo muy fructífero.

En términos de transformaciones globales, se puede mostrar [23] que el cambio por una constante del potencial escalar ($\chi = at$, $A_0 \rightarrow A'_0 = A_0 - a$, $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A}$ en ec.(2.41)), más la conservación de energía, da lugar a la conservación local de la carga. La conservación local en este contexto requiere que el cambio por una función del potencial escalar en en (2.41) sea compensado por el correspondiente cambio en el vector potencial magnético A . En general, cuando una cierta invarianza global es generalizada a una local, se requiere la existencia de un nuevo campo que compensa, interactuando de una manera específica. La teorías que dan lugar al Modelo Estándar y que describen las interacciones fuertes, débiles y electromagnéticas, son ejemplos de teorías dinámicas derivadas desde un requerimiento de invarianza local.

Una de las principales razones de porque la física de partículas se formula en términos de lagrangianos, es que \mathcal{L} debe ser escalar en cada espacio relevante, e invariante bajo las transformaciones (hasta derivadas totales), ya que la acción es invariante. Haciendo el Lagrangiano covariante de Lorentz por ejemplo, garantiza que todas las predicciones son invariantes de Lorentz.

2.4.1. Energía del campo electromagnético

Necesitamos la expresión para $F_{\mu\nu}$,

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\eta}F^{\rho\eta} \Rightarrow \begin{cases} F_{0i} = F_{0\nu} = g_{00}g_{ij}F^{0j} = -F^{0i} & \text{para } \mu = 0 \\ F_{ij} = F_{i\nu} = g_{ik}g_{jl}F^{kl} = F^{ij} & \text{para } \mu = i \end{cases} \quad (2.85)$$

De la ec. (??), se tiene

$$\begin{aligned} T_\nu^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\lambda)} (\partial_\nu A_\lambda) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \\ &= -F^{\mu\lambda} (\partial_\nu A_\lambda) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \end{aligned} \quad (2.86)$$

La energía del campo, corresponde a la componente T_0^0 :

$$\begin{aligned} T_0^0 &= -F^{0\lambda} (\partial_0 A_\lambda) - \mathcal{L} \\ &= -F^{0\lambda} (\partial_0 A_\lambda) + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + J^\mu A_\mu \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones (2.30), (2.33), (2.85)

$$\begin{aligned} T_0^0 &= -F^{0\lambda} (\partial_0 A_\lambda) + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + J^\mu A_\mu \\ &= -F^{0\mu} (\partial_0 A_\mu) + \frac{1}{4} \overbrace{F^{\mu 0} F_{\mu 0}}^{\nu=0} + \frac{1}{4} \overbrace{F^{\mu i} F_{\mu i}}^{\nu=i} + J^\mu A_\mu \\ &= -F^{0\mu} \partial_\mu A_0 - F^{\mu 0} F_{\mu 0} + \frac{1}{4} F^{\mu 0} F_{\mu 0} + \frac{1}{4} F^{\mu i} F_{\mu i} + J^\mu A_\mu. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Tenemos dos partes

$$\begin{aligned} -F^{\mu 0} F_{\mu 0} + \frac{1}{4} F^{\mu 0} F_{\mu 0} + \frac{1}{4} F^{\mu i} F_{\mu i} &= -F^{i0} F_{i0} + \frac{1}{4} F^{i0} F_{i0} + \frac{1}{4} \overbrace{F^{0i} F_{0i}}^{\mu=0} + \frac{1}{4} \overbrace{F^{ji} F_{ji}}^{\mu=j} \\ &= -F^{i0} F_{i0} + \frac{1}{4} F^{i0} F_{i0} + \frac{1}{4} F^{i0} F_{i0} + \frac{1}{4} F^{ji} F_{ji} \\ &= -\frac{1}{2} F^{i0} F_{i0} + \frac{1}{4} F^{ji} F_{ji}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Además

$$\begin{aligned} -F^{0\mu} \partial_\mu A_0 + J^\mu A_\mu &= -\partial_\mu (A_0 F^{0\mu}) + A_0 \partial_\mu F^{0\mu} + J^\mu A_\mu \\ &= -\partial_\mu (A_0 F^{0\mu}) - A_0 \partial_\mu F^{\mu 0} + J^\mu A_\mu \\ &= -\partial_\mu (A_0 F^{0\mu}) - A_0 J^0 + J^\mu A_\mu \\ &= -\partial_i (A_0 F^{0i}) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Entonces

$$\begin{aligned} T_0^0 &= -\partial_i (A_0 F^{0i}) - \frac{1}{2} F^{i0} F_{i0} + \frac{1}{4} F^{ji} F_{ji} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \\ &= -\partial_i (A_0 F^{0i}) + \frac{1}{2} F^{i0} F^{i0} + \frac{1}{4} F^{ji} F^{ji} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}, \quad \text{suma también sobre } i, j \\ &= \frac{1}{2} E^i E^i + \frac{1}{4} \epsilon_{ijk} B^k \epsilon_{ijl} B^l + \partial_i (A_0 E^i) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}, \quad \text{suma también sobre } i, j \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \delta_{kl} B^k B^l + \nabla \cdot (A^0 \mathbf{E}) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 + \nabla \cdot (A^0 \mathbf{E}) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \end{aligned} \quad (2.90)$$

Entonces, en ausencia de corrientes

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 + \nabla \cdot (A^0 \mathbf{E}). \quad (2.91)$$

Similarmente la densidad Lagrangiano puede escribirse como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \quad (2.92)$$

En vista a la ec. (2.87), ya que la densidad Lagrangiana está definida hasta una derivada total, como $\nabla \cdot (A^0 \mathbf{E}) = \partial_\mu (A_0 F^{\mu 0})$, la densidad Hamiltoniana también estará definida hasta una derivada total. De hecho, el Hamiltoniano es

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int_V d^3x (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \int_V d^3x \nabla \cdot (A^0 \mathbf{E}) \\ &= \frac{1}{2} \int_V d^3x (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), \end{aligned} \quad (2.93)$$

y corresponde a la expresión conocida para la energía del campo electromagnético. Hemos usado el hecho que en ausencia de corrientes todo lo que entra a un volumen debe salir y por consiguiente las integrales sobre el volumen de la divergencia de cualquier vector es cero.

Similarmente el momentum total del campo, en ausencia de corrientes, corresponde al vector de Pointing:

$$\begin{aligned} T_i^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\nu)} \partial_i A_\nu \\ &= -F^{0\nu} \partial_i A_\nu \\ &= -F^{0j} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) - F^{0j} \partial_j A_i \\ &= -F^{0j} F_{ij} - F^{0j} \partial_j A_i \\ &= -F^{0j} F^{ij} - \partial_j (F^{0j} A_i) + (\partial_j F^{0j}) A_i \\ &= E^j \epsilon_{jik} B^k + \partial_j (E^j A_i) + (J^0) A_i \\ &= -(\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i - \nabla \cdot (A^i \mathbf{E}) - \rho A^i \end{aligned} \quad (2.94)$$

En ausencia de cargas y corrientes

$$\begin{aligned} P^i &= - \int_V d^3x T_i^0 = \int_V d^3x (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i + \int_V d^3x \nabla \cdot (A^i \mathbf{E}) \\ \mathbf{P} &= \int_V d^3x (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (2.95)$$

2.4.2. Fijación del gauge

Para obtener una solución definitiva a las ecuaciones del campo electromagnético, se debe remover la arbitrariedad asociada con la libertad gauge de la ec. (2.44). De este modo los campos quedan especificados unívocamente en todas partes. De hecho, de las cuatro componentes del campo

A^μ , solo dos son independientes y corresponden a los estados de polarización de las ondas electromagnéticas [12] (Capítulo 2). A éste proceso se le denomina fijar el gauge, y consiste en imponer restricciones sobre los campos que fijan la función χ y remueven la libertad gauge.

Nosotros usaremos el Gauge de Lorentz, definido por la condición

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (2.96)$$

Si inicialmente $\partial_\mu A^\mu \neq 0$, se realiza una transformación gauge tal que $\partial_\mu A'^\mu = 0$. De acuerdo a la ec. (2.44), esto da lugar a la ecuación de onda inhomogénea

$$\square\chi = \partial_\mu A^\mu$$

que puede solucionarse mediante las técnicas usuales.

Es importante resaltar que la física queda inafectada por la escogencia del gauge. El resultado final para cualquier observable físico debe ser independiente del gauge usado para calcularlo.

Las ecuaciones de Maxwell (2.39) pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= J^\nu \\ \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= J^\nu \\ \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu &= J^\nu \\ \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) &= J^\nu. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Aplicamos ahora el gauge de Lorentz, ec. (2.96) a las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell (2.97)

$$\square A^\nu = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = J^\nu. \quad (2.98)$$

De este modo, cada componente del campo A^μ satisface la ecuación de onda (2.1), o la ecuación de Klein-Gordon (2.8) para masa cero. En ausencia de corrientes el campo A^μ puede ser expandido en ondas planas con dos grados independientes de polarización [12], de forma similar a como se hizo en la sección ?? para el campo ϕ . Una vez cuantizada la teoría, A^μ corresponde al fotón, y solo queda con dos grados de libertad independientes que corresponden a los modos transversales de la onda electromagnética [12] (capítulo 2).

La ec. (2.66), with $J^\mu = 0$, en el Gauge de Lorentz puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &= -\frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu - \partial^\nu A^\mu \partial_\mu A_\nu + \partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu) \\ &= -\frac{1}{4} [\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu (A^\nu \partial_\nu A_\mu) + A^\nu \partial_\nu (\partial^\mu A_\mu) - \partial^\nu (A^\mu \partial_\mu A_\nu) + A^\mu \partial_\mu (\partial^\nu A_\nu) + \underbrace{\partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu}_{\mu \leftrightarrow \nu}] \\ &= -\frac{1}{4} [2\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu (2A^\nu \partial_\nu A_\mu)] \\ &= -\frac{1}{2} \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu \end{aligned} \quad (2.99)$$

Incluyendo el término con corrientes, y usando el hecho de que un signo global no afecta las ecuaciones de movimiento, tenemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu + J_\mu A^\mu \quad (2.100)$$

2.5. Ecuaciones de Proca

Consideraremos ahora el efecto de adicionar un término de masa a la teoría de Maxwell. Los campos vectoriales masivos juegan un papel importante en física. Campos como W^μ , Z^μ que median las interacciones débiles son ejemplos de campos de este tipo. Las implicaciones de una masa finita para el fotón pueden inferirse de un conjunto de postulados que hacen de las ecuaciones de Proca la única generalización posible de las ecuaciones de Maxwell [15].

Teniendo en cuenta sólo el término de masa en la ec. (2.66)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu - J^\mu A_\mu. \quad (2.101)$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, tenemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}\partial_\mu \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F^{\rho\eta} F_{\rho\eta} \right] - \frac{\partial}{\partial A_\nu} \left(\frac{1}{2}m^2 A^\rho A_\rho - J^\rho A_\rho \right) &= 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu &= J^\nu. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Tomando la cuatridivergencia a ambos lados de la ecuación y usando la ec. (2.97), tenemos

$$\begin{aligned} \partial_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu \partial_\mu A^\mu + m^2 \partial_\nu A^\nu &= \partial_\nu J^\nu \\ \partial_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu + m^2 \partial_\nu A^\nu &= \partial_\nu J^\nu \\ m^2 \partial_\nu A^\nu &= \partial_\nu J^\nu \end{aligned} \quad (2.103)$$

De este modo, en ausencia de corrientes, la ecuaciones de Proca dan lugar a la condición de Lorentz. De otro lado, si asumimos que la corriente se conserva, la condición de Lorentz también aparece. Por consiguiente, si la masa de campo vectorial es diferente de cero, la condición de Lorentz, ec. (2.96), emerge como una restricción adicional que debe ser siempre tomada en cuenta. De este modo la libertad gauge de las ecuaciones de Maxwell se pierde completamente en la ecuaciones de Proca, que sin pérdida de generalidad se pueden reescribir, usando la condición de Proca

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (2.104)$$

y las ecs. (2.97), (2.102), como:

$$(\square + m^2)A^\nu = J^\nu \quad (2.105)$$

En ausencia de corrientes, cada una de las componentes del campo vectorial satisface la ecuación de Klein-Gordon (2.8). Por consiguiente m corresponde a la masa del campo vectorial A^μ .

Aplicando la condición de Lorentz a la ec. (2.101), obtenemos el Lagrangiano de la Ecuación de Proca (2.105)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu + \frac{1}{2}m^2 A^\nu A_\nu - J^\nu A_\nu, \quad (2.106)$$

donde hemos reabsorbido un signo global que no afecta las ecuaciones de movimiento. El primer término que incluye sólo derivadas de los campos es llamado *término cinético* y dependen sólo del espín de las partículas. El término cuadrático en los campos corresponde al *término de masa*, y el último corresponde a la interacción del campo con una corriente. Cuando un Lagrangiano contiene sólo términos cinéticos y de masa diremos que el campo que da lugar al Lagrangiano es libre de

interacciones, o simplemente que es un *campo libre*. Las otras partes del Lagrangiano serán llamadas *Lagrangiano de Interacción*. De este modo podemos reescribir el Lagrangiano (2.106) como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}},$$

donde,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{free}} &= -\frac{1}{2}\partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu + \frac{1}{2}m^2 A^\nu A_\nu \\ \mathcal{L}_{\text{int}} &= -J^\nu A_\nu.\end{aligned}\tag{2.107}$$

Debido a que la teoría masiva ya no es invariante gauge, la condición de Lorentz aparece automáticamente como la única restricción apropiada sobre el campo vectorial.

Una vez se toma en cuenta la condición de Lorentz el campo masivo libre puede expandirse en ondas planas con tres grados de libertad independientes de polarización. Dos de estos corresponden a los dos estados transversos que aparecen en las ondas electromagnéticas (A^1 , A^2), y el tercero (A^3) corresponde a un estado longitudinal en la dirección del momento de la partícula [12].

Aunque hemos hecho el análisis de la ecuación de Proca permitiendo un término de masa para el fotón, las implicaciones experimentales de una teoría de este tipo dan lugar a restricciones muy fuertes sobre la masa del fotón [15]. El límite actual sobre la masa del fotón es $m < 6 \times 10^{-17}$ eV (1.1×10^{-52} Kg) [16]. Debido al principio gauge local, desde el punto teórico se espera que la masa del fotón sea exactamente cero. En general, los campos vectoriales pueden ser generados a partir de otras cargas no electromagnéticas y pueden ser masivos. El reto durante varias décadas fue entender como la masa de los campos vectoriales de la interacción débil podría hacerse compatible con el principio gauge local.

Además, el Lagrangiano libre se puede reescribir como la suma de cuatro lagrangianos independientes para cada campo $\phi = A^0, A^i$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{free}} &= -\frac{1}{2}\partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu + \frac{1}{2}m^2 A^\nu A_\nu \\ &= -\frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2}m^2 \phi^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu \mathbf{A} \cdot \partial^\mu \mathbf{A} - \frac{1}{2}m^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}.\end{aligned}\tag{2.108}$$

2.6. Problemas

2.1 Muestre que

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\rho = \Lambda_\mu{}^\nu \Lambda^\mu{}_\rho = \delta_\nu^\rho$$

Compruebe esta identidad para la transformación de Lorentz de la ec. (1.45)

2.2 Muestre que el Lagrangiano electromagnético en ausencia de corrientes

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)\tag{2.109}$$

2.3 Calcule el rango de la interacción débil mediada por la partícula W^- de masa

$$m_W \approx 80 \text{ GeV}\tag{2.110}$$

Capítulo 3

Fermiones

3.1. Preliminares

3.1.1. Representaciones de grupos

$SO(2)$ y $U(1)$

Considere el grupo de rotaciones de dos ejes reales $SO(2)$. Una representación matricial corresponde al Grupo de matrices 2×2 ortogonales de determinante 1

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

donde

$$\det[R(\theta)] = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

Para generar esta matriz, podemos usar la matriz de traza nula y hermítica (n entero)

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} R(\theta) &= \exp(i\theta\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta\tau)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (i)^{2n} \frac{(\theta\tau)^{2n}}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (i)^{2n+1} \frac{(\theta\tau)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{2n!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty} i(-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sin \theta \\ -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Este grupo es Abelian, ya que

$$R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_2)R(\theta_1) \quad (3.2)$$

De otro lado el Grupo $U(1)$ corresponde a las rotaciones de un eje complejo y tiene elementos

$$U(\theta) = e^{i\theta Y}, \quad (3.3)$$

donde Y es el generador de los elementos del Grupo y su representación es un número real.

Estos dos grupos son isomorfos: para un elemento complejo $U(\theta)$ el correspondiente elemento en $SO(2)$ es la rotación por el ángulo el cual es el argumento de $U(\theta)$

$S(3)$ y $SU(2)$

Consideremos primero un grupo más simple, el correspondiente a las rotaciones en tres dimensiones. Para conocer las relaciones de conmutación de los generadores del grupo de rotaciones, podemos escribir los generadores como operadores diferenciales; de la expresión

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times (-i\nabla) \quad (3.4)$$

o en componentes

$$J^k = [\mathbf{x} \times (-i\nabla)]^k = -i \sum_j \epsilon_{ijk} x^i \partial_j = i \epsilon_{ijk} x^i \partial^j. \quad (3.5)$$

Las relaciones de conmutación del momento angular (3.6) se obtienen de forma directa

$$\begin{aligned} [J^i, J^j] \psi &= - [\epsilon_{ilm} x^l \partial_m, \epsilon_{jpk} x^p \partial_k] \psi \\ &= - \epsilon_{ilm} \epsilon_{jpk} [x^l \partial_m, x^p \partial_k] \psi \\ &= - \epsilon_{ilm} \epsilon_{jpk} [x^l \partial_m (x^p \partial_k \psi) - x^p \partial_k (x^l \partial_m \psi)] \\ &= - \epsilon_{ilm} \epsilon_{jpk} (x^l \delta_{mp} \partial_k \psi + x^l x^p \partial_m \partial_k \psi - x^p \delta_{kl} \partial_m \psi - x^p x^l \partial_q \partial_m \psi), \end{aligned}$$

cancelando las derivadas cruzadas

$$\begin{aligned} &= - \epsilon_{ilm} \epsilon_{jpk} (x^l \delta_{mp} \partial_k \psi - x^p \delta_{kl} \partial_m \psi) \\ &= - \epsilon_{ilm} \epsilon_{jpk} x^l \delta_{mp} \partial_k \psi + i \epsilon_{ilm} \epsilon_{jpk} x^p \delta_{kl} \partial_m \psi \\ &= - \epsilon_{ilm} \epsilon_{jmq} x^l \partial_q \psi + i \epsilon_{ilm} \epsilon_{jpl} x^p \partial_m \psi \\ &= - \epsilon_{ilm} \epsilon_{jmq} x^l \partial_q \psi + i \epsilon_{iml} \epsilon_{jqm} x^q \partial_l \psi \quad (l \leftrightarrow m) \text{ in 2nd term} \\ &= - \epsilon_{ilm} \epsilon_{jmq} x^l \partial_q \psi + i \epsilon_{imq} \epsilon_{jlm} x^l \partial_q \psi \quad (l \leftrightarrow q) \text{ in 2nd term,} \end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned} [J^i, J^j] \psi &= (-\epsilon_{ilm} \epsilon_{jmq} + \epsilon_{imq} \epsilon_{jlm}) x^l \partial_q \psi \\ &= (\epsilon_{ilm} \epsilon_{jqm} - \epsilon_{imq} \epsilon_{jlm}) x^l \partial_q \psi \\ &= (\delta_{ij} \delta_{lq} - \delta_{iq} \delta_{lj} - \delta_{ij} \delta_{ql} + \delta_{il} \delta_{qj}) x^l \partial_q \psi \\ &= (\delta_{il} \delta_{qj} - \delta_{iq} \delta_{lj}) x^l \partial_q \psi \\ &= \epsilon_{kij} \epsilon_{klq} x^l \partial_q \psi \\ &= i \epsilon_{kij} (-i \epsilon_{klq} x^l \partial_q) \psi \\ &= i \epsilon_{kij} J^k \psi. \end{aligned}$$

Por consiguiente, Los generadores son los operadores de momento angular J^i , que satisfacen las relaciones de conmutación

$$[J^i, J^j] = i\epsilon_{ijk}J^k. \quad (3.6)$$

donde ϵ_{ijk} son las constantes de estructura del Grupo $SU(3)$

Una representación matricial de esta álgebra se puede obtener con la llamada representación adjunta del Grupo de rotaciones en 3 dimensiones, $SO(3)$, definida a partir de las constantes de estructura [32]

$$(L^i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk}. \quad (3.7)$$

Explícitamente

$$L^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estos generan los elementos de $SO(3)$

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{\theta}) &= \exp(i\theta_j L^j) \\ &= \exp(i\theta_1 L_1 + i\theta_2 L_2 + i\theta_3 L_3) \\ &= R(\theta_1)R(\theta_2)R(\theta_3) \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde, haciendo los mismos pasos que para $SO(2)$ en (3.1),

$$R(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Claramente, el Grupo $SO(3)$ es no Abelian, es decir

$$R(\boldsymbol{\theta}_1)R(\boldsymbol{\theta}_2) \neq R(\boldsymbol{\theta}_2)R(\boldsymbol{\theta}_1)$$

La representación matricial isomorfa a $SO(3)$ pero con matrices 2×2 corresponde al Grupo $SU(2)$ de rotaciones de dos ejes complejos. Las matrices de Pauli son un conjunto de matrices que satisfacen estas mismas condiciones de conmutación:

$$\left[\frac{\tau^i}{2}, \frac{\tau^j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\tau^k}{2} \quad (3.10)$$

donde τ^i

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

dividas por dos, corresponden a los generadores del Grupo. Las constantes de estructura del Grupo corresponden a ϵ_{ijk} . Como los generadores no conmutan, $SU(2)$ es un Grupo de Lie no Abelian. Definiendo los generadores de $SU(2)$ como

$$T^i = \frac{\tau_i}{2}, \quad (3.12)$$

Las matrices de Pauli y por consiguiente T_i satisfacen

$$\begin{aligned}\tau_i^\dagger &= \tau_i \\ \text{Tr}(\tau_i) &= 0\end{aligned}\tag{3.13}$$

Además

$$\begin{aligned}\det(\tau_i) &= -1 \\ \{\tau_i, \tau_j\} &= 2\delta_{ij} \cdot I \Rightarrow \tau_i^2 = I \\ \text{Tr}(\tau^i \tau^j) &= 2\delta^{ij} \\ \tau_i \tau_j &= i\epsilon_{ijk} \tau_k + \delta_{ij} \cdot\end{aligned}\tag{3.14}$$

Un elemento del Grupo puede escribirse como

$$U(\boldsymbol{\theta}) = e^{iT^i \theta_i} \approx 1 + iT^i \theta_i = 1 + i \frac{\tau^i}{2} \theta_i.\tag{3.15}$$

Como antes, θ_i son los parámetros de la transformación. Usando las propiedades T_i , podemos mostrar que la representación matricial 2×2 , $U(\boldsymbol{\theta})$, satisface

1 Unitariedad: $U^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = U^\dagger(\boldsymbol{\theta})$. En efecto

$$\begin{aligned}U^\dagger(\boldsymbol{\theta})U(\boldsymbol{\theta}) &= e^{-iT^{i\dagger} \theta_i} e^{iT^i \theta_i} \\ &= e^{-iT^i \theta_i} e^{iT^i \theta_i} \\ &= e^{\mathbf{0}} \\ &= \mathbf{1},\end{aligned}$$

la identidad 2×2 .

2 Especial (Special): Usando la formula de Jacobi para la exponencial de una matrix, A , $e^A = e^{\text{Tr} A}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\det[U(\boldsymbol{\theta})] &= \det \left\{ \exp \left[i \text{Tr} (T^i) \theta_i \right] \right\} \\ &= e^0 \\ &= 1.\end{aligned}$$

De esta manera T_i genera el grupo de matrices 2×2 unitarias y de determinante 1: $SU(2)$.

El grupo $SU(2)$ de rotaciones de dos ejes complejos, es isomorfo al Grupo $SO(3)$ de rotaciones sobre tres ejes reales.

$SU(N)$

En general, si $N^2 - 1$ generadores Λ_i , satisfacen el álgebra

$$[\Lambda_a, \Lambda_b] = f_{abc} \Lambda_c,\tag{3.16}$$

con

$$\Lambda^\dagger = \Lambda, \quad \text{Tr}(\Lambda) = 0,\tag{3.17}$$

entonces las matrices $N \times N$

$$U(\boldsymbol{\theta}) = \exp(i\Lambda_a \theta_a) \quad (3.18)$$

son unitarias y de determinante 1, y constituyen la representación fundamental de $SU(N)$.

En el caso de $U(1)$, el único generador conmutativo satisface trivialmente el álgebra y da lugar al elemento de grupo

$$U(\theta) = e^{i\Lambda\theta} \quad (3.19)$$

que automáticamente tienen norma 1

$$|U(\theta)|^2 = U^*(\theta)U(\theta) = 1.$$

3.2. Grupo de Lorentz

Para estudiar otros posibles tipos de campos además de los escalares y vectoriales, debemos explorar las representaciones del Grupo de Lorentz en n dimensiones. El grupo de Lorentz es un subgrupo del Grupo de Poincaré que además incluye el subgrupo de las traslaciones en el espacio y el tiempo.

Seguiremos el mismo método de encontrar representaciones matriciales a partir del algebra de los generadores del Grupo (los cuales deben satisfacer la relaciones de conmutación apropiadas) para luego exponenciar estas representaciones infinitesimales.

Para el presente problema, necesitamos conocer las relaciones de conmutación de los generadores del grupo de transformaciones de Lorentz. Hemos mostrado en la ec. (3.6) que, a partir de la relación (haciendo expícito el caracter de operadores)

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{r}} \times (-i\nabla) \quad (3.20)$$

la parte correspondiente al grupo de rotaciones es

$$[\hat{J}^i, \hat{J}^j] = i\epsilon_{ijk}\hat{J}^k.$$

La ecuación (3.20) en términos de componentes esta dada en (3.5) y corresponde a

$$\hat{J}^k = i\epsilon_{ijk}x^i\partial^j \quad (3.21)$$

Definimos una representación matricial de los operadores de momento angular como

$$\begin{aligned} \hat{J}^{lm} &\equiv \epsilon_{lmk}\hat{J}^k = i\epsilon_{lmk}\epsilon_{ijk}x^i\partial^j \\ &= i(\delta_{li}\delta_{mj} - \delta_{lj}\delta_{mi})x^i\partial^j \\ &= i(x^l\partial^m - x^m\partial^l). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Que involucran tres generadores. La generalización a cuatro dimensiones da lugar a generadores adicionales \hat{J}^{0i} :

$$\hat{J}^{\mu\nu} = i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu). \quad (3.23)$$

Los seis generadores satisfacen el álgebra

$$[\hat{J}^{\mu\nu}, \hat{J}^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} \hat{J}^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} \hat{J}^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} \hat{J}^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} \hat{J}^{\nu\rho}). \quad (3.24)$$

Cualquier representación matricial de estos operadores que vaya a representar esta álgebra debe obedecer las mismas reglas de conmutación.

La exponenciación de los generadores da lugar al grupo de elementos

$$\hat{\Lambda} = \exp \left(-i\omega_{\mu\nu} \frac{\hat{J}^{\mu\nu}}{2} \right) \quad (3.25)$$

Para encontrar una representación matricial de los boosts (que son básicamente rotaciones entre el espacio y el tiempo), tenemos

$$\begin{aligned} \{x^\mu\} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t+vx}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{x+vt}{\sqrt{1-v^2}} \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \{\Lambda^\mu{}_\nu\} \{x^\nu\}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ya que

$$\begin{aligned} \cosh \xi &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{2n}}{2n!} \approx 1 + \mathcal{O}(\xi^2) \\ \sinh \xi &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!} \approx \xi + \mathcal{O}(\xi^2), \end{aligned} \quad (3.27)$$

Un boost infinitesimal a lo largo de x es

$$\{\Lambda^\mu{}_\nu\}_{x\text{-boost}} \approx \begin{pmatrix} 1 & \xi & 0 & 0 \\ \xi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(i\xi K^1), \quad (3.28)$$

donde el generador de boost es

$$K^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Similarmente una rotación por un ángulo infinitesimal $\theta = \theta_3$ alrededor del plano xy (o sobre el eje z)

$$\{\Lambda^\mu{}_\nu\}_{xy\text{-rotation}} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta & 0 \\ 0 & -\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Que como hemos visto, puede obtenerse a partir de los generadores del Grupo de rotaciones $SO(3)$, generalizados a matrices 4×4

$$\{L^i\} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & L_{3 \times 3}^i & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

$$L_{3 \times 3}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad L_{3 \times 3}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_{3 \times 3}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En general definimos los seis parámetros independientes del Grupo de Lorentz

$$\begin{aligned} \omega_{i0} = -\omega_{0i} &\equiv \xi_i \\ \omega_{12} = -\omega_{21} &\equiv 2\theta^3 & \omega_{32} = -\omega_{23} &\equiv -2\theta^2 & \omega_{13} = -\omega_{31} &\equiv 2\theta^1. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Por lo tanto

$$\xi^i = \omega^{i0} = -\omega^{0i} \quad \theta^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \omega_{jk}. \quad (3.33)$$

Las matrices 4×4

$$\begin{aligned} (J^{\mu\nu})_{\alpha\beta} &= i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} \\ (J^{\mu\nu})_{\beta}^{\alpha} &= g^{\gamma\alpha} (J^{\mu\nu})_{\gamma\beta} = i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\rho\sigma\gamma\beta} g^{\gamma\alpha} \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} (J^{\mu\nu})_{\alpha\beta} &= i(\delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} - \delta_{\beta}^{\mu} \delta_{\alpha}^{\nu}) \\ (J^{\mu\nu})_{\beta}^{\alpha} &= i g^{\gamma\alpha} (\delta_{\gamma}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} - \delta_{\beta}^{\mu} \delta_{\gamma}^{\nu}) \\ &= i(g^{\mu\alpha} \delta_{\beta}^{\nu} - \delta_{\beta}^{\mu} g^{\nu\alpha}) \\ (J^{\mu\nu})^{\alpha\beta} &= i(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

where μ and ν label which of the six matrices we want, while α and β label components of the matrices. These matrices satisfy the commutations relations (3.24), and generate the three boosts and three rotations of the ordinary Lorentz 4-vectors:

$$\Lambda^{\alpha}_{\beta} \approx \delta^{\alpha}_{\beta} - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (J^{\mu\nu})^{\alpha}_{\beta}. \quad (3.36)$$

En particular

$$\begin{aligned} (J^{ij})_{lm} &= i\epsilon^{ij\rho\sigma} \epsilon_{\rho\sigma lm} \\ &= i\epsilon^{ij\rho 0} \epsilon_{\rho 0 lm} \\ &= -i\epsilon^{ijk} \epsilon_{klm} \\ &= \epsilon^{ijk} (L_k)_{lm} \end{aligned}$$

o, en términos matriciales

$$L^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} J_{jk} \quad (3.37)$$

De modo que

$$\begin{aligned} i \sum_i \theta^i L^i &= -i \theta^i L_i \\ &= -\frac{i}{2} \epsilon^{ikl} \omega_{kl} \frac{1}{2} \epsilon_{imn} J^{mn} \\ &= -\frac{i}{4} (\delta_m^k \delta_n^l - \delta_n^k \delta_m^l) \omega_{kl} J^{mn} \\ &= -\frac{i}{4} (\omega_{kl} J^{kl} - \omega_{kl} J^{lk}) \\ &= -\frac{i}{4} (\omega_{kl} J^{kl} + \omega_{kl} J^{kl}) \\ &= -\frac{i}{2} \omega_{kl} J^{kl} . \end{aligned} \quad (3.38)$$

usando la notación de [?], definimos también

$$K^i \equiv J^{0i} = -J^{i0} , \quad (3.39)$$

Entonces

$$\begin{aligned} -i \omega_{\mu\nu} \frac{\hat{J}^{\mu\nu}}{2} &= -i \omega_{0\nu} \frac{\hat{J}^{0\nu}}{2} - i \omega_{i\nu} \frac{\hat{J}^{i\nu}}{2} \\ &= -i \omega_{0i} \frac{\hat{J}^{0i}}{2} - i \omega_{i0} \frac{\hat{J}^{i0}}{2} - i \omega_{ij} \frac{\hat{J}^{ij}}{2} \\ &= -i \omega_{i0} \hat{J}^{i0} - i \omega_{ij} \frac{\hat{J}^{ij}}{2} \\ &= i \omega_{i0} \hat{J}^{0i} - i \omega_{ij} \frac{\hat{J}^{ij}}{2} , \end{aligned} \quad (3.40)$$

y usando (3.38)

$$\begin{aligned} &= -i \xi_i K^i - i \omega_{ij} \frac{\hat{J}^{ij}}{2} \\ &= \sum_i (i \xi^i K^i + i \theta^i L^i) . \end{aligned} \quad (3.41)$$

Entonces

$$\{\Lambda\} = \exp \left(-i \omega_{\mu\nu} \frac{\hat{J}^{\mu\nu}}{2} \right) = \exp (i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K} + i \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}) . \quad (3.42)$$

3.3. 2 representaciones 2×2 del Grupo de Lorentz

Here we focus on the simplest non-trivial irreducible representations of the Lorentz algebra. These are the two-dimensional (inequivalent) representations: $(\frac{1}{2}, 0)$ and $(0, \frac{1}{2})$.

$$S(\Lambda)_{(\frac{1}{2}, 0)} = \exp \left(-i\omega_{\mu\nu} \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2} \right)$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\sigma^\mu, \bar{\sigma}^\nu] . \quad (3.43)$$

where

$$\begin{aligned} \sigma^0 &= \mathbf{1}_{2 \times 2}, & \sigma^i &\rightarrow \boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) \\ \bar{\sigma}^0 &= \mathbf{1}_{2 \times 2}, & \bar{\sigma}^i &\rightarrow \bar{\boldsymbol{\sigma}} = (-\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3) \end{aligned} \quad (3.44)$$

include the Pauli matrices (3.11).

Eq. (3.68), which yields

$$S(\Lambda)_{(\frac{1}{2}, 0)} \equiv S(\Lambda) = \exp \left(\boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) , \quad (3.45)$$

La otra representación independiente es

$$\begin{aligned} [S(\Lambda)]^* &= S(\Lambda)_{(0, \frac{1}{2})} \equiv S^*(\Lambda) = \exp \left(\boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right)^* \\ &= \exp \left(\boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2} - i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2} \right) . \end{aligned} \quad (3.46)$$

The components of $S(\Lambda)$ will be denoted as $[S(\Lambda)]_\alpha^\beta$. In such a case, S^* is another independent 2×2 representation of the Lorentz Group. It is denoted by $(0, \frac{1}{2})$, and, in order to emphasize the difference, it is convenient to denote their components with dotted indices $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dots$. We can get S^* from S^\dagger .

3.4. Lorentz transformation of the fields

Note again, that a term like

$$\phi^*(x) a^\mu \partial_\mu \phi(x) , \quad (3.47)$$

does not left the Action invariant. To have a proper formulation of the quantum mechanics through the general equation

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi , \quad (3.48)$$

with some, to be determined, relativistic Hamiltonian operator \hat{H} , we should be able to build a Lagrangian with temporal derivatives of order one. Therefore, the Lorentz invariant requires all the derivatives of order one. Consider spinor fields, which transforms as

$$\psi_\alpha(x) \rightarrow \psi'_\alpha(x) = [S(\Lambda)]_\alpha^\beta \psi_\beta(\Lambda^{-1}x) , \quad (3.49)$$

where $S(\Lambda)$ is some spinorial representation of the Lorentz Group. In matricial form, if $\Psi(x)$ is a two-component column vector,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

then, one representation 2×2 of the Lorentz Group, denoted with $(\frac{1}{2}, 0)$, can be written as

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = S\Psi(\Lambda^{-1}x). \quad (3.50)$$

In such a case, S^* is another independent 2×2 representation of the Lorentz Group. It is denoted by $(0, \frac{1}{2})$, and, in order to emphasize the difference, it is convenient to denote their components with dotted indices $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dots$. We can get S^* from S^\dagger . In fact, writing out the fields without arguments to avoid clutter,

$$\Psi^\dagger \rightarrow \Psi'^\dagger = \Psi^\dagger S^\dagger. \quad (3.51)$$

In components, and anticipating the dotted indices for S^* , we have

$$\begin{aligned} (\psi'_\alpha)^\dagger &= (\psi_\beta)^\dagger (S^\dagger)^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} \\ &= (\psi_\beta)^\dagger (S^*)_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \\ &= (\psi_\beta)^\dagger (S^*)_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

If we interpret $(\psi_\beta)^\dagger$ as the components of a new column vector transforming under $S^*(\Lambda)$, with dotted components

$$\psi_{\dot{\alpha}}^\dagger \equiv (\psi_\alpha)^\dagger \quad (3.53)$$

then we have

$$\psi'^\dagger_{\dot{\alpha}} = [S^*(\Lambda)]_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \psi_{\dot{\beta}}^\dagger, \quad (3.54)$$

or in matricial form

$$\Psi'^\dagger{}^T = S^* \Psi^\dagger{}^T \quad (3.55)$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad K^2 = K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

In summary we have the following Lorentz's transformation properties for the fields

$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x)$	Scalar field,
$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x)$	Vector field,
$\psi_\alpha(x) \rightarrow \psi'_\alpha(x) = [S(\Lambda)]_\alpha^\beta \psi_\beta(\Lambda^{-1}x)$	Left-handed spinor field,
$\psi_{\dot{\alpha}}^\dagger(x) \rightarrow \psi'^\dagger_{\dot{\alpha}}(x) = [S^*(\Lambda)]_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \psi_{\dot{\beta}}^\dagger(\Lambda^{-1}x)$	Righthanded anti-spinor field, ,

(3.57)

In the following we use only the dotted and undotted components for spinors but not the matricial form. There are two additional spin-1/2 irreducible representations of the Lorentz group. $(S^{-1})^T$ and $(S^{-1})^\dagger$, but these are equivalent to the $(\frac{1}{2}, 0)$ and the $(0, \frac{1}{2})$ representations respectively. The spinors that transform under these representations have raised spinor indices, ψ^α and $\psi^{\dagger\dot{\alpha}}$, with transformation laws

$$\begin{aligned}\psi^\alpha &\rightarrow \psi'^\alpha = \left[(S^{-1})^T \right]^\alpha_\beta \psi^\beta \\ \psi^{\dagger\dot{\alpha}} &\rightarrow \psi'^{\dagger\dot{\alpha}} = \left[(S^{-1})^\dagger \right]^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \psi^{\dagger\dot{\beta}}\end{aligned}\tag{3.58}$$

where

$$\psi^{\dagger\dot{\alpha}} \equiv (\psi^\alpha)^\dagger\tag{3.59}$$

If we interpret ψ and ψ^\dagger as two-component vectors in this internal space, we can define the scalar product by using the convention of *descending* contracted indices and *ascending* contracted dotted indices

$${}^\alpha_\alpha \quad \text{and} \quad {}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\alpha}}.\tag{3.60}$$

In this way the we can define the scalar product between two spinors as

$$\begin{aligned}\psi\psi &\equiv \psi^\alpha\psi_\alpha \rightarrow \psi'^\alpha\psi'_\alpha = \left[(S^{-1})^T \right]^\alpha_\beta \psi^\beta S_\alpha{}^\gamma \psi_\gamma \\ &= (S^{-1})^\alpha_\beta S_\alpha{}^\gamma \psi^\beta \psi_\gamma \\ &= \delta_\beta^\gamma \psi^\beta \psi_\gamma \\ &= \psi^\beta \psi_\beta.\end{aligned}\tag{3.61}$$

and similarly

$$\begin{aligned}\psi^\dagger\psi^\dagger &\equiv \psi_{\dot{\alpha}}^\dagger\psi^{\dagger\dot{\alpha}} \rightarrow \psi_{\dot{\alpha}}'^\dagger\psi'^{\dagger\dot{\alpha}} \\ &= \psi_{\dot{\alpha}}^\dagger\psi^{\dagger\dot{\alpha}}.\end{aligned}\tag{3.62}$$

To construct Lorentz invariant Lagrangians, one needs to first combine products of spinors to make objects that transforms as Lorentz tensors. When constructing Lorentz tensors from fermion fields the lowered indices must only be contracted with raised indices following the same convention established in eq. (3.60). A contravariant Lorentz tensor of rank $(n \times n)$ in this space must have an index structure with n undotted (dotted) indices follow by n dotted (undotted) indices, as for example, $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 \dots \dot{\alpha}_n$.

3.5. Lagrangian

The Scrodinger equation can be written as

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}_S\psi,\tag{3.63}$$

where

$$\hat{H}_S = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \hat{V} . \quad (3.64)$$

In order to have a well defined probability in relativistic quantum mechanics it is necessary that Lagrangian be linear in the time derivative, in order to obtain the general Schrödinger equation:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi , \quad (3.65)$$

like the Schrödinger Lagrangian. However, this automatically imply that the Lagrangian will be also linear in the spacial derivatives. A pure scalar field cannot involve a Lorentz invariant term of only first derivatives (see eq. (3.47)). Therefore the proposed field must have some internal structure associated with some representation of the Lorentz Group. Therefore we build the Lagrangian for a field of several components

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

3.5.1. Lorentz transformation

If the field is to describe the electron, it must have spin and in this way it must transform under some spin representation of the Lorentz Group

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = S(\Lambda) \psi (\Lambda^{-1} x) . \quad (3.67)$$

We work in the simpler case of 2×2 representation of the Lorentz Group. As the electron has both spin and electric charge, we need at least 4 degrees of freedom to describe it, or equivalently two complex numbers: We assume for the following discussion that ψ is one of this complex numbers.

Returning back to the space-time Lorentz transformation

$$\{\Lambda\} = \exp \left(-i \omega_{\mu\nu} \frac{\hat{J}^{\mu\nu}}{2} \right) = \exp (i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K} + i \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}) , \quad (3.68)$$

Here we focus on the simplest non-trivial irreducible representations of the Lorentz algebra. These are the two-dimensional (inequivalent) representations: $(\frac{1}{2}, 0)$ and $(0, \frac{1}{2})$. In the $(\frac{1}{2}, 0)$ representation, $\mathbf{L} = \boldsymbol{\sigma}/2$ and $\mathbf{K} = -i\boldsymbol{\sigma}/2$ in Eq. (3.68), which yields

$$S(\Lambda)_{(\frac{1}{2}, 0)} \equiv S(\Lambda) = \exp \left(\boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + i \boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) , \quad (3.69)$$

where $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ are the Pauli matrices (3.11).

We could need a new representation acting in an internal space upon a two-component field ψ_a ($a = 1, 2$). An Action with a Lagrangian term linear in the derivatives, could be Lorentz invariant if, taking into account the convention in eq. (3.60) and the dotted-undotted structure of the tensor in

this internal space, we have that if a^μ is to be a 2th rank tensor of the internal space, it must have components, e.g, $(a^\mu)^{\dot{\alpha}\beta}$. Therefore, a possible Lorentz invariant with a single derivative could be

$$\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi \rightarrow \psi'^\dagger(x) a^\mu \partial'_\mu \psi' = \psi'^\dagger_{\dot{\alpha}} a^{\mu\dot{\alpha}\gamma} (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \partial_\rho \psi'_\gamma, \quad (3.70)$$

with the first letters of the Greek alphabet are used to denote the indices of the internal Lorentz space, and the others the external one.

$$\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi \rightarrow \psi'^\dagger(x) a^\mu \partial_\mu \psi' = S_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \psi_{\dot{\beta}}^\dagger a^{\mu\dot{\alpha}\gamma} (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \partial_\rho (S_\gamma{}^\delta \psi_\delta). \quad (3.71)$$

As the coordinates η_i and θ_i in eq. (3.122) are in the internal Lorentz space, the corresponding Lorentz transformation is constant in the external Lorentz space and

$$\begin{aligned} \psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi \rightarrow \psi'^\dagger(x) a^\mu \partial_\mu \psi' &= \psi_{\dot{\beta}}^\dagger (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu S^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} a^{\mu\dot{\alpha}\gamma} S_\gamma{}^\delta \partial_\rho \psi_\delta \\ &= \psi^\dagger (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu (S^\dagger a^\mu S) \partial_\rho \psi \\ &= \psi^\dagger a^\rho \partial_\rho \psi, \end{aligned} \quad (3.72)$$

if the following condition is satisfied:

$$(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu S^\dagger a^\mu S = a^\rho, \quad (3.73)$$

or

$$\begin{aligned} (\Lambda)^\nu{}_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu S^\dagger a^\mu S &= (\Lambda)^\nu{}_\rho a^\rho, \\ \delta_\mu^\nu S^\dagger a^\mu S &= (\Lambda)^\nu{}_\rho a^\rho \\ S^\dagger a^\nu S &= (\Lambda)^\nu{}_\rho a^\rho, \end{aligned} \quad (3.74)$$

The only solution is expressed in terms of the 2×2 identity and the Pauli matrices

$$\begin{aligned} a^\mu &= \bar{\sigma}^\mu = (\mathbf{1}_{2 \times 2}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \\ &= (\sigma^0, \bar{\boldsymbol{\sigma}}), \end{aligned} \quad (3.75)$$

where

$$\sigma^0 = \mathbf{1} \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = -\boldsymbol{\sigma} = (-\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3). \quad (3.76)$$

Therefore the most general Lagrangian for two-component spinors contains at least

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\supset \frac{i}{2} \psi_{\dot{\alpha}}^\dagger (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu \psi_\alpha - m \psi^\alpha \psi_\alpha \\ &\supset \frac{i}{2} \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - m \psi \psi \end{aligned} \quad (3.77)$$

To guarantee that $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$ so that the Action will be real, the easiest way is to add the hermitian conjugate (h.c) of each of the terms. So that, the most general Lagrangian for one left spinor field is

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{i}{2} \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - m \psi \psi + \text{h.c} \\ &= \frac{i}{2} \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - m \psi \psi + \left(\frac{i}{2} \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \right)^\dagger - m (\psi \psi)^\dagger, \end{aligned}$$

and the coefficients have been choosing before hand to give the proper equations of motion. Then,

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi - m (\psi\psi + \psi^\dagger \psi^\dagger)$$

Since

$$\bar{\sigma}^{\mu\dagger} = \bar{\sigma}^\mu \quad (3.78)$$

as expected to the going to be Pauli matrices, then

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu (\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi) + \frac{i}{2} \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - m (\psi\psi + \psi^\dagger \psi^\dagger) , \quad (3.79)$$

and dropping out the total derivative, we have finally the most general Action for two-component spinors:

$$\mathcal{L} = i \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - m (\psi\psi + \psi^\dagger \psi^\dagger) . \quad (3.80)$$

If ψ have a continuos charge such that

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi \quad (3.81)$$

we can impose that the Lagrangian be invariant under changes of phase of ψ . In such a case the mass of the field must be zero and

$$\mathcal{L} = i \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi . \quad (3.82)$$

The previous Lagrangian which is invariant under

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi , \quad (3.83)$$

is the most general one if ψ have any conserved charge, and will be the one the will use in the subsequent discussions.

3.5.2. Corriente conservada y Lagrangiano de Weyl

En general

$$\begin{aligned} J^\mu &\propto \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right] \delta \psi + \delta \psi^\dagger \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^\dagger)} \right] \\ &\propto i \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu (-i\alpha \psi) \\ &\propto i \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu (-i\alpha \psi) \\ &= \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi \end{aligned} \quad (3.84)$$

y

$$J^\mu = \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi . \quad (3.85)$$

La densidad de corriente es

$$J^0 \propto \psi^\dagger \sigma^0 \psi = \psi^\dagger \psi . \quad (3.86)$$

Que podemos interpretar como una densidad de probabilidad. Por consiguiente, la ecuación de movimiento se puede interpretar directamente como una ecuación de una función de onda de la mecánica cuántica.

3.5.3. Tensor momento-energía

Usando $\sigma^0 = \mathbf{1}$,

$$\begin{aligned}
 T_0^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \partial_0 \psi + \partial_0 \psi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi^\dagger)} - \mathcal{L} \\
 &= i\psi^\dagger \partial_0 \psi - \mathcal{L} \\
 &= -i\psi^\dagger \vec{\sigma}^i \partial_i \psi \\
 &= -\psi^\dagger \sigma^i (-i\partial_i) \psi \\
 &= -\psi^\dagger (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \psi, \\
 &= \psi^\dagger \hat{H}_W \psi,
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

donde hemos definido el Hamiltoniano de Weyl como

$$\hat{H}_W = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \tag{3.88}$$

Que corresponde a la proyección del espín en la dirección de movimiento. El signo menos justifica la definición de ψ_α como un espinor de Weyl izquierdo. Como la ecuación de Schrödinger es de validez general, tenemos entonces que

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H}_W \psi \tag{3.89}$$

y, como en mecánica clásica usual

$$\langle \hat{H}_W \rangle = \int \psi^\dagger \hat{H}_W \psi d^3x. \tag{3.90}$$

Note que esta relación no es posible para el Hamiltoniano de Weyl con término de masa.

Además

$$\begin{aligned}
 T_i^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \partial_i \psi + \partial_i \psi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi^\dagger)} \\
 &= i\psi^\dagger \partial_i \psi \\
 &= -\psi^\dagger (-i\partial_i) \psi
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

de modo que

$$\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle = \int \psi^\dagger \hat{\mathbf{p}} \psi d^3x \tag{3.92}$$

3.5.4. Righthanded fermion

For the right handed two-component field $\eta^{\dagger\dot{\alpha}}$ ($\dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$). a posible Lorentz invariant with a single derivative could be

$$\begin{aligned}
 \eta^\alpha \partial_\mu \eta^\dagger &\rightarrow \eta' (a^\mu) \partial'_\mu \eta'^\dagger = \eta'^\alpha (a^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu \eta'^{\dagger\dot{\alpha}} \\
 &= \left[(S^{-1})^T \right]^\alpha{}_\beta \eta^\beta (a^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \left[(S^{-1})^\dagger \right]^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \partial_\nu \eta^{\dagger\dot{\alpha}} \\
 &= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \left[(S^{-1}) \right]^\alpha{}_\beta (a^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \left[(S^{-1})^\dagger \right]^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \eta^\beta \partial_\nu \eta^{\dagger\dot{\alpha}}.
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

if the following condition is satisfied:

$$S^{-1}a^\mu (S^{-1})^\dagger = (\Lambda)^\mu{}_\nu a^\nu, \quad (3.94)$$

The only solution is expressed in terms of the 2×2 identity and the Pauli matrices

$$a^\mu = \sigma^\mu = (\sigma^0, \boldsymbol{\sigma}), \quad (3.95)$$

and dropping out the total derivative, we have finally the most general Action for two-component spinors:

$$\mathcal{L} = i\eta\sigma^\mu\partial_\mu\eta^\dagger - m(\eta\eta + \eta^\dagger\eta^\dagger). \quad (3.96)$$

con donde hemos definido el Hamiltoniano de Weyl como

$$\hat{H}_W = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \quad (3.97)$$

Que corresponde a la proyección del espín en la dirección de movimiento. El signo más justica la definición de $\eta^{\dot{\alpha}}$ como un espinor de Weyl derecho.

3.5.5. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Queremos que el Lagrangiano de lugar a la ecuación de Schrödinger de validez general

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi \quad (3.98)$$

con el Hamiltoniano dado en la ec. (B.31), que corresponde a un Lagrangiano de sólo derivadas de primer orden y covariante, en lugar del Hamiltoniano para el caso no relativista.

De hecho, aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo ψ^\dagger al Lagrangiano en ec. (??), tenemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^\dagger)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\dagger} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\dagger} &= 0 \\ ia^\mu \partial_\mu \psi &= 0. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Expandiendo

$$\begin{aligned} i\sigma^0\partial_0\psi + i\sigma^i\partial_i\psi &= 0 \\ i\sigma^0\partial_0\psi - \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla)\psi &= 0, \\ i\sigma^0\partial_0\psi &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}})\psi, \end{aligned}$$

Como $\sigma^0 = \mathbf{1}$,

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi. \quad (3.100)$$

De la ec. (B.29)

$$\hat{H} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}, \quad (3.101)$$

A este punto, sólo nos queda por determinar los parámetros a^μ .

La ec. (B.34) puede escribirse como

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right)\psi = 0. \quad (3.102)$$

El campo ψ también debe satisfacer la ecuación de Klein-Gordon. Podemos derivar dicha ecuación aplicando el operador

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right)$$

De modo que, teniendo en cuenta que $\partial\hat{H}/\partial t = 0$,

$$\begin{aligned} \left(-i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right)\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right)\psi &= 0 \\ \left(-i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right)\left(i\frac{\partial\psi}{\partial t} - \hat{H}\psi\right) &= 0 \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + i\left(\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}\right)\psi + i\hat{H}\frac{\partial\psi}{\partial t} - i\hat{H}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \hat{H}^2\psi &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hat{H}^2\right)\psi &= 0. \end{aligned} \quad (3.103)$$

De la ec. (B.38), y usando la condición en ec. (B.37), tenemos

$$\hat{H}^2 = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}). \quad (3.104)$$

Sea A una matriz y θ un escalar. Entonces tenemos la identidad

$$(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta})^2 = \sum_i A^{i2} \theta^{i2} + \sum_{i < j} \{A^i, A^j\} \theta^i \theta^j \quad (3.105)$$

■ Demostración

$$\begin{aligned}
[(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta})]_{\alpha\beta} &= \sum_{ij} \sum_{\gamma} A_{\alpha\gamma}^i \theta^i A_{\gamma\beta}^j \theta^j \\
&= \sum_{ij} \theta^i \theta^j \sum_{\gamma} A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^j \\
&= \sum_{\gamma} \sum_{ij} \theta^i \theta^j A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^j \\
&= \sum_{\gamma} \left(\sum_i \theta^{i^2} A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^i + \sum_{i<j} \theta^i \theta^j A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^j + \sum_{i>j} \theta^i \theta^j A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^j \right) \\
&= \sum_{\gamma} \left(\sum_i \theta^{i^2} A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^i + \sum_{i<j} \theta^i \theta^j A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^j + \sum_{j>i} \theta^j \theta^i A_{\alpha\gamma}^j A_{\gamma\beta}^i \right) \\
&= \sum_{\gamma} \left[\sum_i \theta^{i^2} A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^i + \sum_{i<j} \theta^i \theta^j (A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^j + A_{\alpha\gamma}^j A_{\gamma\beta}^i) \right] \\
&= \left[\sum_i \theta^{i^2} (A^i A^i)_{\alpha\beta} + \sum_{i<j} \theta^i \theta^j \{A^i, A^j\}_{\alpha\beta} \right] \\
&= \left[\sum_i \theta^{i^2} A^{i^2} + \sum_{i<j} \theta^i \theta^j \{A^i, A^j\} \right]_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{3.106}$$

Entonces

$$\hat{H}^2 = \sigma_i^2 p_i^2 + \sum_{i<j} \{\sigma_i, \sigma_j\} p_i p_j \tag{3.107}$$

(suma sobre índices repetidos). Si

$$\begin{aligned}
\sigma_i^2 &= \mathbf{1} \\
\{\sigma_i, \sigma_j\} &= 0 \quad i \neq j.
\end{aligned} \tag{3.108}$$

que se puede resumir en

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta_{ij} \mathbf{1}. \tag{3.109}$$

todo consistente con las propiedades de las matrices de Pauli en (3.14). De modo que

$$\hat{H}^2 = -\nabla^2, \tag{3.110}$$

y reemplazando en la ec. (B.40) llegamos a la ecuación de Klein-Gordon para ψ

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \psi &= 0 \\
\Box \psi &= 0
\end{aligned} \tag{3.111}$$

Debido a la ambigüedad en el signo, podemos construir dos cuadvectores independientes

$$\sigma^\mu = (\mathbf{1}_{2 \times 2}, \boldsymbol{\sigma}) \quad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbf{1}_{2 \times 2}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \quad (3.112)$$

donde

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = -\boldsymbol{\sigma} = (-\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3) . \quad (3.113)$$

Como hemos visto, las componentes en el espacio interno son $\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu$ y $\bar{\sigma}^{\mu\alpha\dot{\alpha}}$, de modo que las matrices apropiadas son $\bar{\sigma}^\mu$, y el Lagrangiano y la ecuación de Weyl, son respectivamente de las ecs. (??) y (??)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \\ &= i\psi_\alpha^\dagger \bar{\sigma}^{\mu\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu \psi_{\dot{\alpha}} , \end{aligned} \quad (3.114)$$

que da lugar a la ecuación de movimiento

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi = 0, \quad (3.115)$$

Si ψ no tiene ninguna carga continua se puede adicionar un término de masa (con su correspondiente hermítico conjugado)

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - m(\psi\psi + \psi^\dagger\psi^\dagger) . \quad (3.116)$$

Ejercicio

Considere un espinor de Weyl que además tiene una carga continua $U(1)$

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi , \quad (3.117)$$

de modo que su término de masa esta prohibido.

Escriba el Lagrangiano más general posible para el campo ψ y un campo escalar complejo ϕ que transforma como

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-2i\alpha} \phi . \quad (3.118)$$

con un potencial escalar $V(\phi)$ con ruptura espontánea de la simetría continua $U(1)$. Especifique explícitamente las dimensiones y el carácter positivo o negativo de cada uno de los coeficientes.

Ayuda: sólo hay un término de interacción posible entre los campos fermiónicos y el campo escalar (más el correspondiente hermítico conjugado).

3.5.6. Ejercicio

Para el Lagrangiano del punto anterior, encuentre el espectro de partículas cuando la parte real del campo escalar complejo adquiera un valor esperado de vacío, v :

$$\phi = \frac{H(x) + v + iJ(x)}{\sqrt{2}}$$

y especifique cuales son los campos masivos y cuales quedan sin masas. Note entonces que un fermión sin masa también puede adquirir una masa después de la ruptura espontánea de la simetría, como consecuencia de su interacción con un campo escalar.

3.5.7. Lorentz invariance of the Weyl Action

To show that $S(\Lambda)$ is in fact a Lorentz transformation, it is convenient to write this in covariant form. If we define

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\sigma^\mu, \bar{\sigma}^\nu] . \quad (3.119)$$

We can obtain the proper boost and rotations generators:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sigma^{0i} = -i \frac{\sigma}{2} \\ L_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \sigma^{jk} = -4 \frac{i}{8} \epsilon_{ijk} \left[\frac{\sigma^j}{2}, \frac{\sigma^k}{2} \right] \\ &= -\frac{i}{2} \epsilon_{ijk} i \epsilon^{jkl} \frac{\sigma_l}{2} \\ &= \frac{1}{2} \delta_i^l \sigma_l \\ &= \frac{1}{2} \sigma_i . \end{aligned}$$

It is worth noticing that in fact $\sigma^{\mu\nu}$ satisfy the Lorentz algebra, and therefore are the generators of the Lorentz group elements:

$$\begin{aligned} S(\Lambda) &= \exp \left(-i \omega_{\mu\nu} \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2} \right) \\ &\approx 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (3.120)$$

Necesitamos satisfacer la siguiente condición

$$S^\dagger \bar{\sigma}^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \quad (3.121)$$

Ahora

$$S(\Lambda)_{(\frac{1}{2}, 0)} \equiv S(\Lambda) = \exp \left(\boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + i \boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) , \quad (3.122)$$

y expandiendo (3.121)

$$\begin{aligned} \left(1 + \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - i \boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \bar{\sigma}^\mu \left(1 + \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + i \boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) &= [1 + i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K} + i \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}]^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \\ \left(\bar{\sigma}^\mu + \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^\mu - i \boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^\mu \right) \left(1 + \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + i \boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) &= [1 + i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K} + i \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}]^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu . \end{aligned}$$

Hasta primer orden en los parametros ξ^i y θ^i ,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^\mu + \boldsymbol{\xi} \cdot \left(\bar{\sigma}^\mu \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) + i \boldsymbol{\theta} \cdot \left(\bar{\sigma}^\mu \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) + \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^\mu - i \boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^\mu &= \delta^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu + i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K}^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu + i \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \\ \bar{\sigma}^\mu + \boldsymbol{\xi} \cdot \left(\bar{\sigma}^\mu \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^\mu \right) + i \boldsymbol{\theta} \cdot \left(\bar{\sigma}^\mu \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^\mu \right) &= \delta^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu + i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K}^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu + i \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \\ \boldsymbol{\xi} \cdot \left(\bar{\sigma}^\mu \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^\mu \right) + i \boldsymbol{\theta} \cdot \left(\bar{\sigma}^\mu \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^\mu \right) &= i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K}^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu + i \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu . \end{aligned}$$

Igualando coeficientes

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^\mu \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} \bar{\sigma}^\mu &= i \mathbf{K}^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \\ \bar{\sigma}^\mu \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} \bar{\sigma}^\mu &= \mathbf{L}^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu\end{aligned}$$

La primera ecuación es

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^\mu \frac{\sigma^i}{2} + \frac{\sigma^i}{2} \bar{\sigma}^\mu &= i [K^i]^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \\ &= i [J^{0i}]^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \\ &= i [J^{0i}]^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \\ &= - (g^{0\mu} \delta_\nu^i - \delta_\nu^0 g^{i\mu}) \bar{\sigma}^\nu \\ &= - (g^{0\mu} \bar{\sigma}^i - g^{i\mu} \bar{\sigma}^0) ,\end{aligned}$$

para $\mu = 0$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^0 \frac{\sigma^i}{2} + \frac{\sigma^i}{2} \bar{\sigma}^0 &= - \bar{\sigma}^i \\ \sigma^i &= \sigma^i .\end{aligned}$$

Para $\mu = j$

$$\begin{aligned}-\sigma^j \frac{\sigma^i}{2} - \frac{\sigma^i}{2} \sigma^j &= + g^{ij} \sigma^0 \\ -\delta^{ij} \mathbf{1} &= -\delta^{ij} \mathbf{1} .\end{aligned}$$

La segunda ecuación es

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^\mu \frac{\sigma^i}{2} - \frac{\sigma^i}{2} \bar{\sigma}^\mu &= (L^i)^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \\ &= - (L_i)^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \\ &= - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (J^{jk})^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \\ &= - \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} (g^{j\mu} \delta_\nu^k - \delta_\nu^j g^{k\mu}) \bar{\sigma}^\nu \\ &= - \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} (g^{j\mu} \bar{\sigma}^k - g^{k\mu} \bar{\sigma}^j) \\ &= \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} (g^{j\mu} \sigma^k - g^{k\mu} \sigma^j) .\end{aligned}$$

Para $\mu = 0$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^0 \frac{\sigma^i}{2} - \frac{\sigma^i}{2} \bar{\sigma}^0 &= \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} (g^{j0} \sigma^k - g^{k0} \sigma^j) \\ 0 &= 0 .\end{aligned}$$

Para $\mu = l$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^l \frac{\sigma^i}{2} - \frac{\sigma^i}{2} \bar{\sigma}^l &= \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} (g^{jl} \sigma^k - g^{kl} \sigma^j) \\
\frac{\sigma^i}{2} \sigma^l - \sigma^l \frac{\sigma^i}{2} &= \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} (-\delta^{jl} \sigma^k + \delta^{kl} \sigma^j) \\
2 \frac{\sigma^i}{2} \frac{\sigma^l}{2} - 2 \frac{\sigma^l}{2} \frac{\sigma^i}{2} &= \frac{i}{2} (-\epsilon_{ilk} \sigma^k + \epsilon_{ijl} \sigma^j) \\
2 \left[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^l}{2} \right] &= \frac{i}{2} (\epsilon_{lik} \sigma^k + \epsilon_{lik} \sigma^k) \\
2i \epsilon_{lik} \frac{\sigma^k}{2} &= \frac{i}{2} (2 \epsilon_{lik} \sigma^k) \\
i \epsilon_{lik} \sigma^k &= i \epsilon_{lik} \sigma^k.
\end{aligned}$$

3.6. Espinores de Dirac

Para ir de un cuadvivector de spín barrado al sin barrar

$$\bar{\sigma}^\mu = (\mathbf{1}_{2 \times 2}, -\boldsymbol{\sigma}) \rightarrow \sigma^\mu = (\mathbf{1}_{2 \times 2}, \boldsymbol{\sigma}) \quad (3.123)$$

podemos usar la *métrica de Weyl*

$$\begin{aligned}
(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} &= \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\sigma}^\mu{}^{\dot{\beta}\beta} \\
(\bar{\sigma}^\mu)^\mu{}^{\dot{\alpha}\alpha} &= \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \sigma^\mu{}_{\beta\dot{\beta}},
\end{aligned} \quad (3.124)$$

Estas expresiones se pueden comprobar explícitamente. Por ejemplo, en el caso de la primera matriz de Pauli

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & [\bar{\sigma}^1]^{i2} \\ [\bar{\sigma}^1]^{2i} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & [\bar{\sigma}^1]^{i2} \\ [\bar{\sigma}^1]^{2i} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \epsilon^{2\beta} \epsilon^{i\dot{\beta}} [\sigma^1]_{\beta\dot{\beta}} \\ \epsilon^{1\beta} \epsilon^{2\dot{\beta}} [\sigma^1]_{\beta\dot{\beta}} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \epsilon^{21} \epsilon^{i\dot{2}} [\sigma^1]_{i\dot{2}} \\ \epsilon^{12} \epsilon^{2i} [\sigma^1]_{2i} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -[\sigma^1]_{12} \\ -[\sigma^1]_{2i} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -\sigma^1.
\end{aligned}$$

Con esto podemos reescribir el siguiente producto de espinores de Weyl que transforma como un

Nombre	Símbolo	Lorentz	$U(1)$
e_L : electrón izquierdo	ξ_α	$[S]_\alpha^\beta$	$e^{i\theta}$
$(e_L)^\dagger = e_R^\dagger$: positrón derecho	$(\xi_\alpha)^\dagger = \xi_{\dot{\alpha}}$	$[S^*]_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}$	$e^{-i\theta}$
e_R : electrón derecho	$(\eta^\alpha)^\dagger = \eta^{\dagger\dot{\alpha}}$	$[(S^{-1})^\dagger]_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}$	$e^{i\theta}$
$(e_R)^\dagger = e_L^\dagger$: positrón izquierdo	η^α	$[(S^{-1})^T]_{\beta}^{\dot{\beta}}$	$e^{-i\theta}$

Tabla 3.1: Componentes del electrón

vector en el espacio externo de Lorentz

$$\begin{aligned}
\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \eta &= \xi_{\dot{\alpha}}^\dagger \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \eta_\alpha \\
&= \xi_{\dot{\alpha}}^\dagger \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu \eta_\alpha \\
&= \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \xi_{\dot{\alpha}}^\dagger \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu \epsilon^{\alpha\beta} \eta_\alpha \\
&= \xi^{\dagger\dot{\beta}} \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu \eta^\beta \\
&= \pm \eta^\beta \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu \xi^{\dagger\dot{\beta}} \\
&= \pm \eta \sigma^\mu \xi^\dagger,
\end{aligned} \tag{3.125}$$

donde el signo $+$ ($-$) es para campos clásicos (anticommutantes). Para describir completamente un electrón, que conserva carga eléctrica bajo $U(1)$, necesitamos todas las componentes detalladas en la Tabla 3.1

Podemos especificar el Lagrangiano completo para el electrón invariante bajo $U(1)$ sin pérdida de generalidad, usando los dos fermiones izquierdos de cargas opuestas, ξ_α y η^α :

$$\xi \rightarrow \xi' = e^{i\theta} \xi \quad \eta \rightarrow \eta' = e^{-i\theta} \eta \tag{3.126}$$

como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= i \xi_{\dot{\alpha}}^\dagger \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu \xi_\alpha + i \eta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \eta^{\dagger\dot{\alpha}} - m \left(\eta^\alpha \xi_\alpha + \xi_{\dot{\alpha}}^\dagger \eta^{\dagger\dot{\alpha}} \right) \\
&= i \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi + i \eta \sigma^\mu \partial_\mu \eta^\dagger - m \left(\eta \xi + \xi^\dagger \eta^\dagger \right).
\end{aligned} \tag{3.127}$$

Definiendo el *espinor de Dirac* y su hermítico conjugado como

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} e_L \\ e_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta^{\dagger\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad \Psi^\dagger = \left((\xi_\alpha)^\dagger \quad (\eta^{\dagger\dot{\alpha}})^\dagger \right) = (\xi_{\dot{\alpha}}^\dagger \quad \eta^\alpha) \tag{3.128}$$

y usando (3.125), tenemos en primer lugar que

$$\begin{aligned}
(\xi_{\dot{\alpha}}^\dagger \quad \eta^\alpha) \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta^{\dagger\dot{\alpha}} \end{pmatrix} &= (\eta^\alpha \quad \xi_{\dot{\alpha}}^\dagger) \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta^{\dagger\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \\
&= \eta^\alpha \xi_\alpha + \xi_{\dot{\alpha}}^\dagger \eta^{\dagger\dot{\alpha}} \\
&= \eta \xi + \xi^\dagger \eta^\dagger,
\end{aligned} \tag{3.129}$$

mientras que para los términos cinéticos

$$\begin{aligned}
 (\xi_{\dot{\alpha}}^{\dagger} \quad \eta^{\alpha}) \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu} \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\mu}\xi_{\alpha} \\ \partial_{\mu}\eta^{\dagger\dot{\alpha}} \end{pmatrix} &= (\xi_{\dot{\alpha}}^{\dagger} \quad \eta^{\alpha}) \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} & 0 \\ 0 & \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\mu}\xi_{\alpha} \\ \partial_{\mu}\eta^{\dagger\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \\
 &= \xi_{\dot{\alpha}}^{\dagger} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \partial_{\mu}\xi_{\alpha} + \eta^{\alpha} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu} \partial_{\mu}\eta^{\dagger\dot{\alpha}} \\
 &= \xi^{\dagger} \bar{\sigma}^{\mu} \partial_{\mu}\xi + \eta \sigma^{\mu} \partial_{\mu}\eta^{\dagger}.
 \end{aligned} \tag{3.130}$$

Definiendo las matrices de Dirac (en la representación quirál) como

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu} \\ \bar{\sigma}^{\mu} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.131}$$

las cuales satisfacen el algebra

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}. \tag{3.132}$$

tememos en particular que,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.133}$$

tal que

$$(\gamma^0)^2 = \mathbf{1}_{4 \times 4}. \tag{3.134}$$

Usando (3.128), (3.129) y (3.130)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= i\xi^{\dagger} \bar{\sigma}^{\mu} \partial_{\mu}\xi + i\eta \sigma^{\mu} \partial_{\mu}\eta^{\dagger} - m(\eta\xi + \xi^{\dagger}\eta^{\dagger}) \\
 &= i\Psi^{\dagger} \gamma^0 \gamma^{\mu} \partial_{\mu}\Psi - m\Psi^{\dagger} \gamma^0 \Psi.
 \end{aligned} \tag{3.135}$$

Definiendo finalmente el *espinor de Dirac adjunto*

$$\bar{\Psi} = \Psi^{\dagger} \gamma^0, \tag{3.136}$$

podemos escribir finalmente el Lagrangiano para espinores de Dirac como

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \partial_{\mu}\Psi - m\bar{\Psi} \Psi. \tag{3.137}$$

En adelante para simplificar la notación nos referiremos al electrón de Dirac simplemente como ψ .

En términos de los campos de Weyl un escalar y un vector de espinores Dirac se escriben como

$$\begin{aligned}
 \bar{\Psi} \Psi &= (e_R)^{\dagger} e_L + (e_L)^{\dagger} e_R \\
 \bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Psi &= (e_L)^{\dagger} \bar{\sigma}^{\mu} e_L + (e_R)^{\dagger} \sigma^{\mu} e_R,
 \end{aligned} \tag{3.138}$$

Un tratamiento de la invarianza de Lorentz para la Acción de Dirac esta dado en el Apéndice B.

La ecuación de Dirac se obtiene facilmente de la ecuación de Euler Lagrange para el espinor adjunto $\bar{\Psi}$

$$\begin{aligned}
 \partial_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \bar{\Psi})} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} &= 0 \\
 - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} &= 0 \\
 (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m) \Psi &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.139}$$

Escrito en la forma de la ecuación de Scrodinger general, da lugar al Hamiltoniano de Dirac

$$\begin{aligned}
 i\gamma^0\partial_0\Psi &= [\gamma^i(-i\partial_i) + m]\Psi \\
 i(\gamma^0)^2\partial_0\Psi &= \gamma^0\left(\sum_i\gamma^i\hat{p}^i + m\right)\Psi \\
 i\frac{\partial}{\partial t}\Psi &= \gamma^0(\boldsymbol{\gamma}\cdot\hat{\mathbf{p}} + m)\Psi \\
 i\frac{\partial}{\partial t}\Psi &= \hat{H}_D\Psi,
 \end{aligned} \tag{3.140}$$

donde

$$\hat{H}_D = \gamma^0(\boldsymbol{\gamma}\cdot\hat{\mathbf{p}} + m) \tag{3.141}$$

Antes de intentar tomar el límite no relativista, y para ser consistentes con relatividad espacial, anse debe cambiar el Lagangiano por uno que tenga la invarianza de fase local. En tal caso el Hamiltoniano resultando se debe reducir al Hamiltoniano de Schödinger en presencia de un campo electromagnético (ver Apéndice C.3).

Capítulo 4

Ruptura espontánea de simetría

4.1. El resurgimiento del éter.

Tomado de [?].

La superconductividad electromagnética puede usarse como una analogía bastante precisa para aclarar muchos aspectos del mecanismo de Higgs en las interacciones débiles y entender la relevancia del descubrimiento de la nueva partícula encontrada recientemente en el Gran Acelerador de Hadrones (LHC de sus siglas en inglés). Dentro de un *superconductor electromagnético* la luz se propaga a través de un éter del que se conoce su composición y propiedades. El universo en su totalidad puede entenderse como un enorme *superconductor débil* del que estamos comenzando a dilucidar sus propiedades.

Existe una analogía muy precisa entre el mecanismo de Higgs y la superconductividad a bajas temperaturas. No en vano el propio mecanismo de Higgs surgió de explotar esa analogía (ver el artículo de D. Portillo en estas memorias). El descubrimiento reciente de una partícula con las propiedades esperadas para el Higgs, apunta al resurgimiento del concepto de un éter que permea todo el universo asociado con las interacciones débiles, una de las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza [?] responsable del decaimiento de los núcleos radiactivos. En este trabajo se explicará como incluso el escurridizo éter lumínico ha encontrado cabida en algunos rincones muy especiales de la naturaleza, donde se ha logrado obtener la superconductividad electromagnética.

El éter lumínico había surgido de la necesidad mecanicista de dotar al universo de un medio a través del cual se pudiesen propagar las ondas electromagnéticas. Esta visión del mundo quedó poco a poco reemplazada por la visión más simple de la relatividad espacial basada en el postulado de que las leyes de la física deben ser las mismas para todos los observadores que se muevan a velocidad constante. Aunque en la formulación inicial de la relatividad especial no quedó para nada explícito, nuestro entendimiento actual de la naturaleza del espacio y el tiempo esta estrechamente ligado con la existencia de una velocidad límite que no puede ser superada por ningún cuerpo material ni por ningún tipo de información [?]. Una partícula sin masa viaja a dicha velocidad límite, independiente de la velocidad que tenga su observador. Así mismo, si se puede determinar con suficiente precisión que la velocidad de un cuerpo es la misma independiente de la velocidad del observador, entonces necesariamente ese cuerpo debe viajar a la velocidad límite. La identificación de la velocidad límite con la velocidad de la luz es un resultado experimental sujeto a constante verificación. Cualquier desviación experimental que se encuentre al respecto podría ser evidencia de que las partículas que componen la luz tienen alguna masa.

Como la masa ha resultado ser un concepto emergente en la física moderna, la posibilidad de que

las partículas que componen la luz tengan o no masa, depende de la interacción de dichas partículas con el medio en el que se propagan. Contrario a lo que se suele establecer usualmente, el resultado negativo del experimento de Michelson y Morley [?] no implica que no existe un éter; implica que de existir un éter, la luz no interacciona con él. La presencia de otros tipos de luz, asociadas con interacciones diferentes a la electromagnética, podría hacer manifiesta la presencia de ese éter. Aún más, la existencia misma de un éter lumínico podría manifestarse bajo otras condiciones diferentes a la usuales, como por ejemplo, a temperaturas cercanas al cero absoluto y dentro de cierto tipo de materiales.

De hecho, el resurgimiento del éter sucedió casi de inmediato con el descubrimiento de la *superconductividad electromagnética* en 1911. La superconductividad electromagnética es la desaparición de la resistencia eléctrica que ocurre en algunos materiales cuando se disminuye su temperatura por debajo de algún valor crítico. La conducción de corriente eléctrica a través de un alambre superconductor es mucho más eficiente y permite generar campos magnéticos mucho más intensos que los que se obtendrían con materiales conductores convencionales a partir de la misma cantidad de energía. Además, un material superconductor tiene la propiedad de repeler los campos magnéticos externos a él. El piso de un vagón repleto de pasajeros hecho de un material superconductor, puede levitar sobre rieles imantados, como ocurre con los trenes de levitación magnética del tipo JR-Maglev en Japón [?].

El entender la superconductividad no fue inmediato porque es un proceso cuántico en el que convergen mucho conceptos teóricos desarrollados posteriormente. Un sistema cuántico como un núcleo, un átomo, una molécula, etc; tiene niveles de energía discretos que pueden ser ocupados secuencialmente dependiendo de si las partículas que interaccionan con el sistema son *bosones* o *fermiones*. Los fermiones tienen una cantidad de movimiento angular intrínseco, llamado espín, en unidades semienteras de la constante de Planck reducida, denotada por \hbar (la cual caracteriza los fenómenos cuánticos). Los bosones, de otro lado, tienen espín en unidades enteras de \hbar . La contraparte clásica del espín corresponde a la cantidad de movimiento angular de una esfera en rotación sobre un eje, determinada por el producto entre su momento de inercia¹ y su velocidad angular. La forma en que los fermiones pueden ocupar los niveles de energía esta restringido por el principio de exclusión de Pauli, que establece que un mismo nivel de energía no puede ser ocupado por dos o más fermiones con los mismos números cuánticos. El fermión más simple es el electrón que tiene como números cuánticos la carga eléctrica (de menos uno en unidades de la propia carga del electrón) y el espín que puede ser $\hbar/2$ o $-\hbar/2$. El nivel de energía fundamental de un átomo de Helio puede ser ocupado a lo sumo por dos electrones de espines opuestos. Siguiendo toda la secuencia de átomos, el Principio de exclusión de Pauli permite explicar la estructura de la tabla periódica de los elementos químicos.

Se ha logrado establecer que un metal esta conformado por una estructura cristalina, la cual también exhibe niveles de energía cuánticos cerca a su superficie. Los electrones de valencia de cada átomo, es decir los electrones del último nivel de energía atómico, pueden ocupar los niveles de energía del cristal moviéndose a través de toda su superficie. El movimiento colectivo de los electrones de valencia se comporta como un fluido de cierta profundidad que se llama mar de Fermi. Como en el mar, las profundidades son tranquilas y toda la actividad sucede en la superficie del mar de Fermi. Un rayo de luz puede viajar a través del mar de Fermi sin prácticamente interaccionar con él, manteniendo una velocidad muy cercana a la velocidad límite de la relatividad especial.

Es bien conocido que dos cargas eléctricas de signos opuestos se atraen, mientras que cargas del mismo signo se repelen. Sin embargo, cuando un metal se enfría por debajo de una temperatura

¹El momento de inercia de una esfera uniforme de radio R y masa M , alrededor de un eje que pasa por su centro es $2MR^2/5$. El “espín” de la tierra es del orden de $10^{67}\hbar$.



Figura 4.1: En la figura (a), los círculos con líneas a trazos representan las posiciones originales de los iones positivos en el cristal. Debido a la presencia del electrón de valencia, el cristal se polariza y se genera un exceso de carga positiva alrededor del electrón que resulta entonces apantallado. En la figura (b) se muestra como el exceso de carga positiva puede causar un efecto de atracción sobre otro electrón de valencia lo que permite la formación de un par de Cooper.

crítica, puede ocurrir el fenómeno sorprendente de que dos electrones se puedan atraer entre sí. A bajas temperaturas, las oscilaciones de la estructura cristalina se estabilizan y los átomos del metal empiezan a ocupar posiciones bastante fijas en el espacio. Cada átomo del metal es visto por un electrón de valencia como un ion de carga positiva y por consiguiente lo atrae creando una acumulación de carga positiva alrededor de él como se muestra en la Figura 4.1(a) adaptada de [?]. En la figura 4.1(b) se muestra el efecto de polarización de la red cristalina que corresponde a una acumulación de carga positiva alrededor del punto donde se encuentra el electrón de valencia. Cuando otro electrón de valencia se acerca a la zona polarizada por el primer electrón, siente una atracción neta hacia ese sitio. El efecto total es que dos electrones de espines opuestos se pueden atraer lo suficiente como para formar un estado ligado llamado par de Cooper. Al estar formado por pares de electrones de espines opuestos, el espín del par de Cooper es cero, y corresponde a un bosón que ya no está restringido por el principio de exclusión de Pauli. El par de Cooper entonces se puede sumergir en las profundidades mar de Fermi hasta ocupar el nivel de energía fundamental. Al final, después de que todos los electrones de valencia se han apareado, todos ellos se *condensan* en el nivel de energía fundamental.

Este tipo de condensados de bosones, que ocurren por debajo de una cierta temperatura crítica, tiene todas las características de un éter lumínico: cuando la luz se propaga a través del condensado adquiere una masa emergente que hace que su velocidad sea menor que la velocidad límite de la relatividad especial. Esta nueva velocidad ya si depende de la velocidad del observador que la mida. Si se pudiese repetir el experimento de Michelson y Morley dentro de un superconductor: ¿daría un resultado positivo!

Pero, ¿cómo es posible que un fotón adquiriera inercia?. Al tiempo en el que Clerk Maxwell estableció las ecuaciones del electromagnetismo, ya se conocía la Ley de Faraday que establece que los campos eléctricos en movimiento (las corrientes eléctricas) producen campos magnéticos. Usando principios de simetría, Maxwell completo las leyes electromagnéticas prediciendo que los campos magnéticos en movimiento producen también campos eléctricos. Como los campos eléctricos en movimiento producen campos magnéticos en movimiento, que a su vez producen de nuevo campos eléctricos en movimiento, entonces se genera un movimiento ondulatorio y las ecuaciones de Maxwell automáticamente predicen la existencia de ondas electromagnéticas. Una consecuencia inmediata es que la luz visible es simplemente un tipo especial de onda electromagnética en un rango de frecuencias determinado. Una onda electromagnética se puede representar entonces con un vector oscilante que representa el campo magnético, asociado con otro vector oscilante y perpendicular de campo

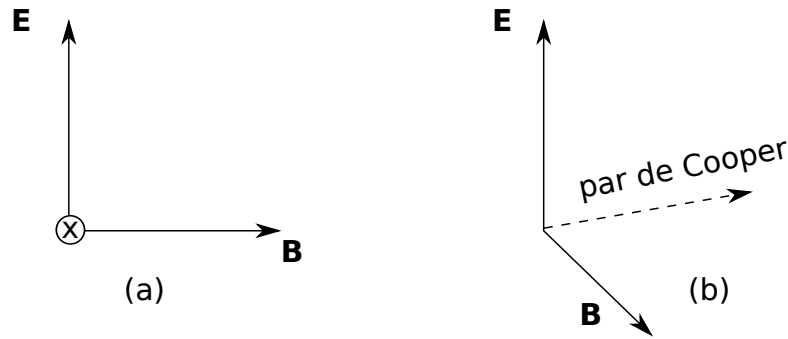


Figura 4.2: En la figura (a), se representa los campos eléctricos y magnéticos de una onda electromagnética propagándose a la velocidad de la luz en una dirección entrando a la hoja. En la figura (b) se muestra una onda electromagnética propagándose dentro de un condensado de pares de Cooper, en la dirección de la componente ilustrada del par de Cooper.

eléctrico. La luz se propaga a la velocidad límite de la relatividad especial en una dirección perpendicular al plano definido por los dos vectores como se ilustra en la figura 4.2(a). Cuando la onda electromagnética se propaga dentro de un condensado sobre la superficie de un superconductor, una componente del par de Cooper se puede acoplar a los vectores magnético y eléctrico en la dirección de propagación de la onda, causando un efecto de frenado. En el lenguaje de la ruptura espontánea de simetría, que explica la formación del condensado por debajo de una temperatura crítica, se dice que fotón se come una componente del par de Cooper para así adquirir masa, como se muestra en la figura 4.2(b). Una vez la luz adquiere masa, las interacciones electromagnéticas se convierten en interacciones de rango finito. Es decir, que a partir de cierta separación entre las cargas eléctricas dentro de un superconductor, desaparecen las fuerzas eléctricas entre ellas. Aunque cuantitativamente estos efectos son pequeños pues la masa del fotón dentro de un superconductor es del orden de una billonésima de electron-voltio [?] (similar a las masas de neutrinos), cualitativamente el comportamiento cambia drásticamente: se pasa de una interacción de rango infinito mediada por fotones de masa cero, a una interacción de *alcance restringido* mediada por fotones masivos.

Cuando se calienta un superconductor metálico por encima de su temperatura crítica correspondiente a unos pocos grados kelvin sobre el cero absoluto, todo vuelve a la normalidad. El estado no superconductor es más simétrico porque los electrones del mar de Fermi están orientados en todas direcciones. El estado superconductor representa un estado menos simétrico pues todos los pares de Cooper están orientados formando un estado coherente en una dirección específica del espacio. Al formarse el condensado se da un fenómeno de *ruptura espontánea de la simetría*: las simetrías iniciales que describen las interacciones del sistema se mantienen, pero el estado fundamental rompe la simetría.

El electromagnetismo es la interacción mejor conocida de las cuatro interacciones fundamentales [?]. Las interacciones fundamentales entre partículas están mediadas por cierto conjunto de bosones. Es así como la interacción electromagnética entre partículas cargadas, esta mediada por los fotones. Las interacción fuerte, que mantiene unidos de forma estable los componentes de los núcleos atómicos, está mediada por los gluones, los cuales tampoco requieren un medio para propagarse. La fuerza fuerte es en muchos otros aspectos similar a la fuerza electromagnética.

Sin embargo, las interacciones débiles han resultados ser fuerzas de corto alcance, mediadas por nuevos fotones llamados W y Z que son bastante masivos: del orden de cien veces la masa del protón. La pregunta de si esas masas son reales o emergentes, se reduce a descubrir la existencia del éter

a través del cual se propagan esas nuevas ondas débiles. Aunque no podemos acceder directamente a las componentes del condensado que se comen el W y el Z para adquirir masa, existe al menos otra componente del condensado que se debe materializar como partícula independiente y nueva: la partícula de Higgs.

De confirmarse que la partícula recientemente descubierta en el Gran Acelerador de Hadrones (LHC de sus siglas en inglés) corresponde al Higgs, significaría nada más y nada menos que el universo se encuentra en un estado de superconductividad débil (*superconductividad electrodébil para ser más exactos*.) El universo en su totalidad es un superconductor en el sentido de que las partículas que sólo tienen cargas débiles como los neutrinos, viajan por la materia sin mayor resistencia. De hecho nuestro cuerpo, e incluso el planeta entero, están siendo atravesados constantemente por neutrinos². Para hallar las excitaciones del éter débil, correspondientes a la partícula de Higgs, debemos calentar al menos una porción del universo por encima de la temperatura crítica de la ruptura espontánea de simetría electrodébil estimada en un cuadrillón de grados kelvin (10^{15} K). Eso es precisamente lo que se está haciendo el LHC en los puntos de colisión de los detectores ATLAS y CMS [?], de donde al parecer están emergiendo las primeras partículas de Higgs.

4.2. Campo escalar real

Escribamos el Lagrangiano para una partícula escalar real de masa m como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi) \quad (4.1)$$

con

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2. \quad (4.2)$$

Este Lagrangiano es simétrico bajo la transformación discreta $\phi \rightarrow -\phi$.

Cuando $\mu^2 > 0$, el campo tiene excitaciones alrededor del mínimo del potencial que cuestan energía y dicho término se interpreta como la masa de la partícula. Ver figura 4.3. En Teoría Cuántica de Campos al estado de mínima energía se le llama el vacío y las excitaciones alrededor del vacío corresponden a las partículas. Si $\mu^2 < 0$, no existe un mínimo del potencial alrededor del cual el campo pueda oscilar. Además el alejamiento del campo del punto de simetría del potencial no cuesta energía. Por consiguiente en ese caso, el término de interacción

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 \quad \mu^2 < 0, \quad (4.3)$$

no puede interpretarse como un término de masa en el Lagrangiano dado por la ec. (4.1).

Consideremos ahora el potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \quad \mu^2 < 0, \lambda > 0 \quad (4.4)$$

que mantiene la simetría bajo la transformación discreta $\phi \rightarrow -\phi$. $\lambda > 0$ garantiza la aparición de los dos mínimos que se muestran en la figura 4.4. Si la energía es suficientemente alta como se muestra en la figura 4.4, las excitaciones son simétricas con respecto al máximo del potencial y el término en μ^2 no puede interpretarse como masa para la partícula escalar. Sin embargo, si la energía es suficientemente baja como se muestra en la figura 4.5, las excitaciones alrededor del mínimo dan lugar a la aparición de un término de masa para el campo escalar. Además, dichas excitaciones no

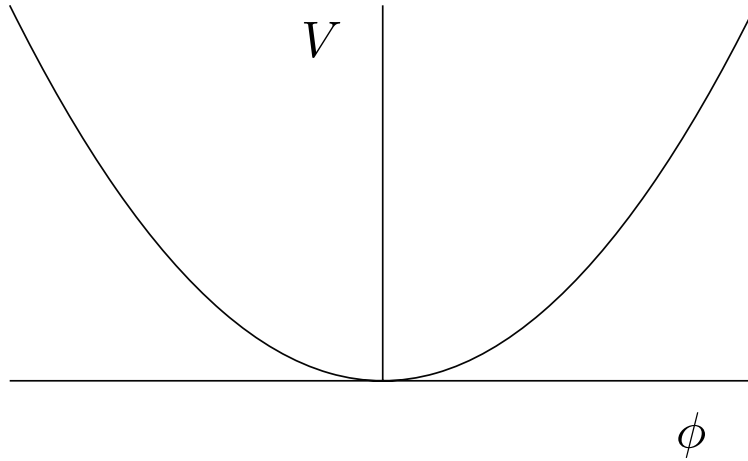


Figura 4.3: $V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2$ con $\mu^2 > 0$

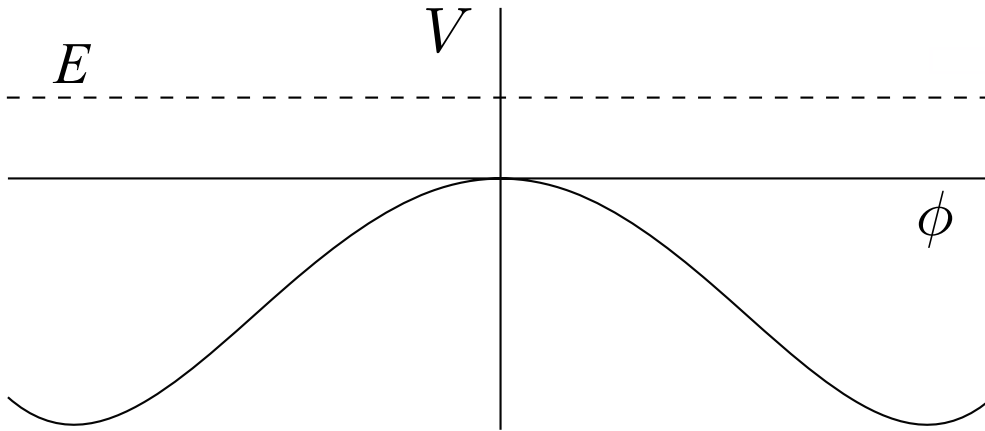


Figura 4.4: $V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$ con $\mu^2 < 0$, y $\lambda > 0$. Simetría exacta

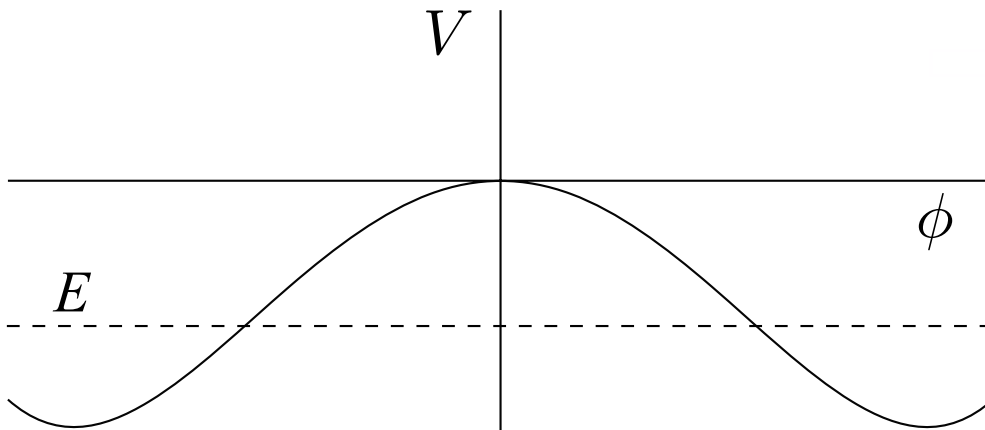


Figura 4.5: $V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$ con $\mu^2 < 0$, y $\lambda > 0$. Simetría espontáneamente rota.

respetan la simetrías $\phi \rightarrow -\phi$. En tal caso decimos que la simetría ha sido espontáneamente rota: aunque el Lagrangiano mantiene la simetría original, el vacío la rompe.

Para analizar cuantitativamente el espectro de partículas es necesario expandir el campo alrededor del mínimo y determinar las excitaciones. Establezcamos en primer lugar los mínimos del potencial. La $\partial V/\partial\phi = 0$ da lugar a

$$\mu^2\phi + \lambda\phi^3 = 0 \quad (4.5)$$

$$\phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) = 0, \quad (4.6)$$

con extremos $\phi_{\max} = 0$, y

$$\phi_{\min} \equiv \langle\phi\rangle \equiv v = \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}. \quad (4.7)$$

De hecho

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} = \mu^2 + 3\lambda\phi^2. \quad (4.8)$$

$\phi = 0$ corresponde a un máximo, mientras que la segunda derivada para $\phi = \pm\sqrt{-\mu^2/\lambda}$ es $-2\mu^2 > 0$ y corresponden a los mínimos. Expandiendo el campo alrededor del mínimo

$$\phi(x) = H(x) + v \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \\ &= \frac{1}{2}\mu^2(H+v)^2 + \frac{1}{4}\lambda(H+v)^4 \\ &= \frac{1}{2}\mu^2(H+v)^2 + \frac{1}{4}\lambda(H+v)^4 \\ &= \frac{1}{2}\mu^2(H^2 + 2vH + v^2) + \frac{1}{4}\lambda(H^2 + 2vH + v^2)^2 \\ &= \frac{1}{2}\mu^2(H^2 + 2vH + v^2) + \frac{1}{4}\lambda[H^4 + 2H^2(2vH + v^2) + (2vH + v^2)^2] \\ &= \frac{1}{2}\mu^2(H^2 + 2vH + v^2) + \frac{1}{4}\lambda[H^4 + 4vH^3 + 2H^2v^2 + 4v^2H^2 + 4v^3H + v^4] \\ &= \frac{1}{2}\mu^2(H^2 + 2vH + v^2) + \frac{1}{4}\lambda[H^4 + 4vH^3 + 6H^2v^2 + 4v^3H + v^4] \\ &= \frac{1}{2}\mu^2H^2 - \frac{3}{2}H^2\mu^2 + \mu^2vH - \mu^2vH + \frac{1}{2}\mu^2v^2 - \frac{1}{4}\mu^2v^2 + \frac{1}{4}\lambda[H^4 + 4vH^3] \\ V(H) &= \frac{1}{2}(-2\mu^2)H^2 + \lambda vH^3 + \frac{1}{4}\lambda H^4 + \frac{1}{4}\mu^2v^2, \end{aligned} \quad (4.10)$$

y

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2}\partial^\mu H\partial_\mu H - \frac{1}{2}(-2\mu^2)H^2 - \lambda vH^3 - \frac{1}{4}\lambda H^4 + \text{constant}. \quad (4.11)$$

Entonces H adquiere una masa $-2\mu^2$ y no es invariante bajo $H \rightarrow -H$.

Otro método es usar las ecuaciones de mínimo $-\mu^2 = \lambda v^2$, para eliminar un parámetro del potencial:

$$\begin{aligned} V(\phi) &= -\frac{1}{2}\lambda v^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \\ &= -\frac{1}{2}\lambda v^2(H^2 + 2vH + v^2) + \frac{1}{4}\lambda[H^4 + 4vH^3 + 6H^2v^2 + 4v^3H + v^4] \\ &= \lambda v^2H^2 + \lambda vH^3 + \frac{1}{4}\lambda H^4 + \text{constant}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

²Y por las supuestas partículas de materia oscura débilmente interactuantes, aunque estas aún no ha dejado trazas ni siquiera en los diversos experimentos de detección directa instalados en varios laboratorios subterráneos de la Tierra.

Podemos escribir el potencial en términos del nuevo campo como

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - V(H) = \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 - \frac{1}{2} \frac{m_H^2}{v} H^3 - \frac{1}{8} \frac{m_H^2}{v^2} H^4. \quad (4.13)$$

donde

$$m_H^2 = 2 |\mu^2| = 2\lambda v^2 \quad (4.14)$$

4.2.1. Ausencia de taquiones

Uno se podría preocupar por la presencia de un término de masa imaginaria en el Lagrangiano, pero como estamos hablando de transiciones de fase, estos procesos deben suceder en presencia de temperatura, por ejemplo la temperatura asociada al universo primitivo durante las fases tempranas del Big Bang. En presencia de temperatura, todas las partículas adquieren una masa térmica proporcional a la temperatura como resultado de su interacción con el plasma. De este modo, a altas temperaturas la masa de la partícula escalar esta dominada por la temperatura y al ser positiva el potencial escalar tiene un único mínimo simétrico. Cuando la temperatura baja lo suficiente para que la masa al cuadrado negativa domine, el mínimo se convierte en un máximo local altamente inestable y ocurre muy rapidamente la transición de fase al nuevo mínimo no simétrico donde la masa del escalar esta bien definida.

4.2.2. Caso complejo

Consideremos ahora un campo escalar complejo sin término de masa, pero con potencial:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - V(\phi) \quad (4.15)$$

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad \mu^2 < 0, \lambda > 0 \quad (4.16)$$

La simetría del Lagrangiano corresponde a $U(1)$ global. Este potencial corresponde al “sombrero mexicano”, como se ilustra en la Figura 4.6. Para una energía suficientemente baja de manera que el campo deba oscilar alrededor del mínimo aparecen dos tipos de excitaciones. Una sobre las paredes que cuestan energía y corresponden a un campo escalar masivo como en el caso anterior, y otra a lo largo de la circunferencia de mínimo, que corresponde a una partícula escalar sin masa, y es llamada bosón del Golstone.

El Lagrangiano escalar complejo es equivalente al Lagrangiano de dos campos escalares reales con los mismos parámetros. Para un conjunto de N campos reales tendremos (suma sobre i) [?]³:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi^i \partial_\mu \phi_i - \frac{1}{2} \mu^2 \phi_i \phi^i - \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_i \phi^i)^2, \quad (4.17)$$

que es invariante bajo una simetría $O(N)$

$$\phi^i \rightarrow \phi'^i = R^{ij} \phi^j, \quad (4.18)$$

para cualquier matriz $N \times N$ ortogonal R . El análisis para $N = 2$ da lugar a un bosón de Goldstone. El análisis para $N > 2$ es el mismo y por cada campo real que se introduzca aparece un nuevo bosón de Goldstone [?]:

³§11.1

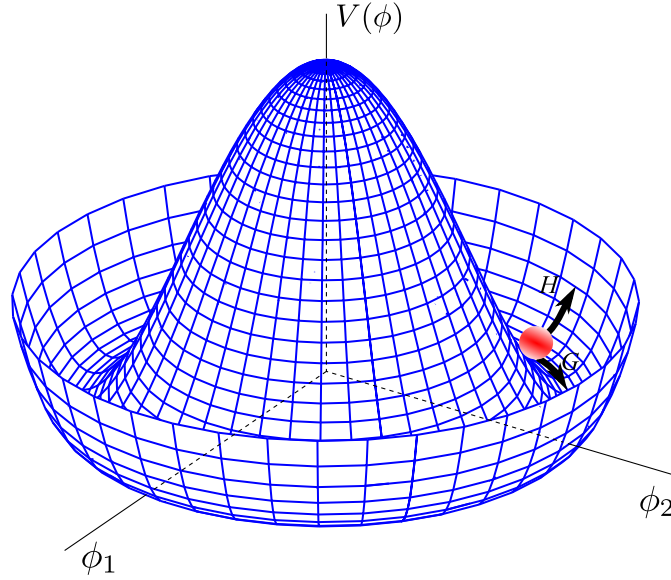


Figura 4.6: Potential for complex scalar field

[...] there are not continuous symmetries for $N = 1$, while for $N = 2$ there is a single direction of rotation. A rotation in N dimensions can be in any one of $N(N-1)$ planes, so the $O(N)$ -symmetric theory has $N(N-1)/2$ continuous symmetries. After spontaneous symmetry breaking there are $(N-1)(N-2)/2$ remaining symmetries corresponding to rotations of the $(N-1)$ [non massive] fields. The number of *broken* symmetries is the difference, $N-1$.

Entonces tenemos el siguiente teorema [?]

Goldstone's theorem states that for every spontaneously broken continuous symmetry, the theory must contain a massless particle.

Also from [?]⁴

In a global symmetry that is spontaneously broken the symmetry currents are still conserved and interactions are similarly restricted [the Lagrangian keeps the symmetry], but the vacuum state does not respect the symmetry and the particles do not form obvious symmetry multiplets. Instead, such a theory contains massless particles, Goldstone bosons, one for each generator of the spontaneously broken symmetry. The third case is that of a local, or gauge, symmetry. [...] such a symmetry requires the existence of a massless vector field for each symmetry generator, and the interactions among these fields are highly restricted.

It is now only natural to consider a fourth possibility: What happens if we include both local gauge invariance and spontaneous symmetry breaking in the same theory?

La ruptura espontánea de simetría se puede parametrizar convenientemente en este caso en coordenadas polares:

$$\phi(x) = \frac{\eta(x)}{\sqrt{2}} e^{i\bar{G}(x)}, \quad (4.19)$$

⁴Introduction to Chapter 20

donde el factor de $\sqrt{2}$ se ha puesto para obtener la normalizaciones apropiadas para la Acción, y $\bar{G}(x)$ es una función adimensional del espacio tiempo. Expandiendo la ec. (4.15)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\mu \eta - i\eta \partial^\mu \bar{G})^* (\partial_\mu \eta + i\eta \partial_\mu \bar{G}) - \frac{1}{2} \mu^2 \eta^2 - \frac{1}{4} \eta^4 \\ &= \frac{1}{2} \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta + \frac{1}{2} \eta^2 \partial^\mu \bar{G} \partial_\mu \bar{G} - \frac{1}{2} \mu^2 \eta^2 - \frac{1}{4} \eta^4.\end{aligned}\quad (4.20)$$

Como $\eta^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2$, el módulo del campo complejo, podemos expandirlo alrededor del campo que oscila en mínimo en el modo que sube por las paredes, como se describió en la fig. 4.6. Hacemos entonces el cambio de variables

$$\eta(x) = H(x) + v, \quad (4.21)$$

tal que $|\eta_{\min}| = v$. Reemplazando en el Lagrangiano anterior tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{1}{2} \partial^\mu G \partial_\mu G + \frac{H}{v} \partial^\mu G \partial_\mu G + \frac{H^2}{v^2} \partial^\mu G \partial_\mu G - \frac{1}{2} \mu^2 (H + v)^2 - \frac{1}{4} \lambda (H + v)^4 \\ &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{1}{2} \partial^\mu G \partial_\mu G + \frac{H}{v} \partial^\mu G \partial_\mu G + \frac{H^2}{v^2} \partial^\mu G \partial_\mu G - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 - \frac{1}{2} \frac{m_H^2}{v} H^3 - \frac{1}{8} \frac{m_H^2}{v^2} H^4,\end{aligned}\quad (4.22)$$

donde hemos definido el bosón de Goldstone sin masa como

$$G(x) = v \bar{G}(x), \quad (4.23)$$

y m_H está dado por la ec. (4.14).

Como era de esperarse, obtenemos un modo masivo H cuyas oscilaciones cuestan energía, y un modo G sin masa que se mueve sobre el mínimo. La prueba de la simetría de fase global espontáneamente rota estaría en el término de interacción

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{H}{v} \partial^\mu G \partial_\mu G, \quad (4.24)$$

que predice que el campo H debe decaer a dos campos G sin masa. Sin embargo, este tipo de procesos aún no se han observado en la naturaleza.

4.3. Electrodinámica cuántica escalar

En el caso de la Acción invariante gauge local bajo el Grupo $U(1)$, tenemos el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}^\mu \phi)^* \mathcal{D}_\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad \mu^2 < 0 \text{ and } \lambda > 0. \quad (4.25)$$

donde

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu. \quad (4.26)$$

Este es el Lagrangiano más general posible para un campo escalar complejo y el campo A_μ que deja la Acción invariante de Lorentz e invariante bajo la transformación gauge $U(1)$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\theta(x)} \phi(x), \quad (4.27)$$

En el caso de la superconductividad electromagnética, ϕ representaría al campo escalar asociado al par de Cooper con carga eléctrica -2 . Claramente el Lagrangiana en la ec. (4.25) es invariante local bajo tal $U(1)$ de carga eléctrica.

4.3.1. Gauge unitario

Como ϕ es un campo complejo, podemos escribirlo en coordenadas polares con un campo real asociado a la magnitud del campo complejo y otro a la fase

$$\phi(x) = \frac{\eta(x)}{\sqrt{2}} e^{i\bar{G}(x)}$$

Expandiendo el campo $\eta(x)$ alrededor del mínimo: $\eta(x) = (H(x) + v)$, tenemos

$$\phi(x) = e^{i\bar{G}(x)} \left(\frac{H(x) + v}{\sqrt{2}} \right).$$

La libertad gauge nos permite en un momento determinado escoger la fase $\theta(x)$ de la ec. (4.27) sin que ese alteren los observables de la teoría. Para el campo en coordenadas polares tenemos que

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\theta(x)} e^{i\bar{G}(x)} \left(\frac{H(x) + v}{\sqrt{2}} \right)$$

Haciendo $\theta(x) = -\bar{G}(x)$,

$$\begin{aligned} \phi \rightarrow \phi' &= e^{-i\bar{G}(x) + i\bar{G}(x)} \left(\frac{H(x) + v}{\sqrt{2}} \right) = \frac{H(x) + v}{\sqrt{2}} \\ A_\mu \rightarrow A'_\mu &= A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \theta(x). \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= [(\mathcal{D}^\mu)' \phi']^* (\mathcal{D}_\mu)' \phi' - \mu^2 (\phi^*)' \phi' - \lambda [(\phi^*)' \phi']^2 - \frac{1}{4} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})' \\ &= \frac{1}{2} [\partial^\mu H + ig A'^\mu (H + v)] [\partial_\mu H - ig A'_\mu (H + v)] - \frac{1}{2} \mu^2 (H + v)^2 - \frac{1}{4} \lambda (H + v)^4 - \frac{1}{4} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})'. \end{aligned} \quad (4.29)$$

En adelante omitiremos las primas, aunque debe estar claro que se esta trabajando en el gauge específico de la ec. (4.28). Entonces

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} \mu^2 (H + v)^2 - \frac{1}{4} \lambda (H + v)^4 + \frac{1}{2} g^2 A^\mu A_\mu (H + v)^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (4.30)$$

Usando la ec. (4.13)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{A^\mu} + \frac{1}{2} g^2 A^\mu A_\mu H^2 + g^2 v A^\mu A_\mu H, \quad (4.31)$$

donde \mathcal{L}_H esta dado por la ec. (4.13) y

$$\mathcal{L}_{A^\mu} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^2 v^2 A^\mu A_\mu. \quad (4.32)$$

Teniendo en cuenta la ec. (??) para el Lagrangiano de Proca, vemos que como consecuencia de la ruptura espontánea de simetría el campo gauge ha adquirido una masa

$$m_A = gv. \quad (4.33)$$

Por lo tanto, y sin pérdida de generaliad, podemos escribir el Lagrangiano de Proca resultante como

$$\mathcal{L}_{A^\mu} = -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2} m_A^2 A^\nu A_\nu. \quad (4.34)$$

donde hemos usado la condición de Proca, eq. (2.104): $\partial_\nu A^\nu = 0$.

El mecanismo completo mediante el cual, a partir de un Lagrangiano invariante gauge local, los bosones gauge adquieren masa se llama *mecanismo de Brout–Englert–Higgs* [18, 19]. La partícula escalar que adquiere masa se llama Higgs, mientras que el bosón de Goldstone es absorbido por campo gauge como modo longitudinal.

El número de grados de libertad independientes en el Lagrangiano original en la ec. (4.25) es cuatro. Correspondientes a los dos grados de libertad del bosón gauge no masivo y los dos del campo escalar complejo. En el Lagrangiano final en la ec. (4.31) no aparece el bosón de Goldstone. Sin embargo esto no es un problema porque dicho Lagrangiano también tiene cuatro grados de libertad correspondientes a los tres grados de libertad del bosón gauge masivo y al grado de libertad del bosón de Higgs.

4.3.2. Superconductividad

El campo H dentro del superconductor, que hereda la carga -2 de ϕ , rompe espontáneamente carga eléctrica para esa configuración especial del vacío (mínimo de energía) donde se forma el condensado de pares de Cooper. Pero la acción claramente conserva en todo momento la carga eléctrica.

A review of the use of the Proca Equations for a massive photon in superconductivity is given in [?]. A popularization review along this lines is in the book of Frank Wilczek “The Lightness of Being” (see Additional references).

The photon mass inside a superconductor is 10^{-11} GeV (or $1/1000$ of the electron mass according to [?]). Also from the article in Beamline $\lambda \sim 10 \mu\text{m}$ y $M_\gamma = \hbar/\lambda c$

There are two important length scales in a superconductor. The first measures how efficiently the condensate expels a magnetic field. In fact, the expulsion is not

Additional references:

- The Lightness of Being: Mass, Ether, and the Unification of Forces, Frank Wilczek, <http://www.amazon.com/The-Lightness-Being-Unification-Forces/dp/0465018955>
- [http://www.scholarpedia.org/article/Englert-Brout-Higgs-Guralnik-Hagen-Kibble_mechanism_\(history\)](http://www.scholarpedia.org/article/Englert-Brout-Higgs-Guralnik-Hagen-Kibble_mechanism_(history))
- Elementary Particle Physics: Volume 1: Quantum Field Theory and ..., Volume 1 By Yorikiyo Nagashima, [ElementaryParticlePhysics:Volume1:QuantumFieldTheoryand...,Volume1ByYorikiyoNagashima](http://www.amazon.com/Elementary-Particle-Physics-Volume-1-Quantum-Field-Theory-and-...-Volume-1-By-Yorikiyo-Nagashima/dp/0465018955)
- From Superconductors to Supercolliders by LANCE DIXON <http://www.slac.stanford.edu/pubs/beamline/26/1/26-1-dixon.pdf>
- Electrodynamics of Superconductors <http://www.physics.buffalo.edu/phy514/w11/index.html>
- Observan el análogo a un bosón de Higgs en un superconductor <http://francis.naukas.com/2014/09/05/analogo-al-boson-de-higgs-en-un-superconductor/>

4.4. Masas para fermiones de Weyl

Es interesante notar que el mismo mecanismo que funciona para dar masa a un bosón gauge también puede permitir la aparición de un término de masa para un fermión de Weyl. Considere un fermión de Weyl izquierdo ψ con una cierta carga, que por simplicidad, consideraremos conservada globalmente. Si además permitimos la presencia de un escalar complejo, ϕ , con el doble de dicha carga, tal que

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi \\ \phi &\rightarrow \phi' = e^{-2i\alpha} \phi,\end{aligned}\tag{4.35}$$

entonces el Lagrangiano más general posible para los dos campos es

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - h (\psi\psi\phi + \phi^* \psi^\dagger \psi^\dagger) + \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2.\tag{4.36}$$

Es importante notar a este punto que el acoplamiento h , llamado acoplamiento de Yukawa, es adimensional. Si imponemos además las condiciones $\mu^2 < 0$ y $\lambda > 0$, podemos analizar el espectro de la teoría cerca al mínimo $\langle \phi \rangle = v$, haciendo el cambio de variables a

$$\phi(x) = \frac{H(x) + v + iJ(x)}{\sqrt{2}},\tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - \frac{hv}{\sqrt{2}} (\psi\psi + \psi^\dagger \psi^\dagger) - \frac{h}{\sqrt{2}} (\psi\psi + \psi^\dagger \psi^\dagger) H - i\frac{h}{\sqrt{2}} (\psi\psi - \psi^\dagger \psi^\dagger) J \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{1}{2} \partial^\mu J \partial_\mu J - \frac{\mu^2}{2} [(H+v)^2 + J^2] - \frac{\lambda}{4} [(H+v)^2 + J^2]^2 \\ &= i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - m (\psi\psi + \psi^\dagger \psi^\dagger) - \frac{m}{v} (\psi\psi H + \psi^\dagger \psi^\dagger H + i\psi\psi J - i\psi^\dagger \psi^\dagger J) \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} \mu^2 (H+v)^2 - \frac{1}{4} \lambda (H+v)^4 \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial^\mu J \partial_\mu J + \frac{1}{2} |\mu^2| J^2 - \frac{1}{4} \lambda [2J^2 (H^2 + 2vH + v^2) + J^4],\end{aligned}$$

Usando

$$m_H^2 = 2|\mu^2| = 2\lambda v^2 > 0,$$

tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - m (\psi\psi + \psi^\dagger \psi^\dagger) - \frac{m}{v} (\psi\psi H + \psi^\dagger \psi^\dagger H + i\psi\psi J - i\psi^\dagger \psi^\dagger J) \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 - \frac{1}{2} \frac{m_H^2}{v} H^3 - \frac{1}{8} \frac{m_H^2}{v^2} H^4 \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial^\mu J \partial_\mu J + \frac{1}{4} \cancel{m_H^2 J^2} - \frac{1}{4} \cancel{m_H^2 J^2} - \frac{1}{8} \frac{m_H^2}{v^2} J^4 - \frac{1}{2} \frac{m_H^2}{v} J^2 H - \frac{1}{4} \frac{m_H^2}{v^2} J^2 H^2 \\ &= i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - m (\psi\psi + \psi^\dagger \psi^\dagger) - \frac{m}{v} (\psi\psi H + \psi^\dagger \psi^\dagger H + i\psi\psi J - i\psi^\dagger \psi^\dagger J) \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 - \frac{1}{2} \frac{m_H^2}{v} H^3 - \frac{1}{8} \frac{m_H^2}{v^2} H^4 \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial^\mu J \partial_\mu J - \frac{1}{8} \frac{m_H^2}{v^2} J^4 \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{m_H^2}{v} J^2 H - \frac{1}{4} \frac{m_H^2}{v^2} J^2 H^2.\end{aligned}\tag{4.38}$$

El espectro de partículas alrededor del mínimo asociado a la ruptura espontánea de la simetría corresponde a fermión de Weyl con masa (como podría ser por ejemplo un neutrino izquierdo masivo)

$$m = \frac{hv}{\sqrt{2}},$$

un Higgs con masa m_H^2 y un bosón de Goldstone sin masa $J(x)$. Cuando el bosón de Goldstone no puede ser reabsorbido como la masa de un bosón gauge, corresponde a una partícula física que se suele llamar el Majoron. El término de interacción $\psi\psi J$ implica que un par de fermiones de Weyl se pueden aniquilar en un Majoron (sin masa). Este tipo de procesos están fuertemente suprimidos a partir de observaciones astrofísicas pues podrían implicar por ejemplo un enfriamiento demasiado rápido de una supernova por energía perdida a través de Majorones provenientes de la aniquilación de neutrinos.

4.5. SU(2) escalar

Para construir la teoría gauge no Abelian $SU(2)$ para campos escalares, usaremos los mismos métodos desarrollados para $SU(3)$ del capítulo pasado con los siguientes cambios de notación

$$\begin{aligned} G_\mu^a &\rightarrow W_\mu^i, & i = 1, 2, 3 \\ G_{\mu\nu}^a &\rightarrow W_{\mu\nu}^i. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Consideremos un doblete escalar bajo $SU(2)$ compuesto de dos escalares complejos

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{C}, \quad (4.40)$$

con un Lagrangiano gauge local

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\Phi - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu}, \quad (4.41)$$

donde

$$\mathcal{L}_\Phi = (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad \text{con } \mu^2 < 0, \lambda > 0, \quad (4.42)$$

con

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - i g T_i W_\mu^i, \quad T_i = \frac{\tau_i}{2}, \quad (4.43)$$

y τ_i son las matrices de Pauli que satisfacen el algebra de $SU(2)$

$$\left[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2} \right] = i \epsilon^{ijk} \frac{\tau_k}{2}. \quad (4.44)$$

Las condiciones sobre los parámetros del potencial escalar garantizan un rompimiento espontáneo de la simetría. Los cuatro grados de libertad de Φ , pueden escribirse en forma polar con la parte real neutra desplazada para generar la ruptura espontánea de la simetría $SU(2)$

$$\Phi = e^{i G_j T^j} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(H(x) + v) \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

$$(4.46)$$

de modo que

$$\begin{aligned}\Phi &\approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + iG_3 & \sqrt{2}iG^+ \\ \sqrt{2}iG^- & 1 - iG_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(H(x) + v) \end{pmatrix}, \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} iG^+H + viG^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(H + v - iG_3H - iG_3v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \eta^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(H(x) + v - i\eta^0) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Para SU(2) tenemos tres generadores y tres bosones gauge. De acuerdo a la parametrización en ec. (6.34) esperamos que aparezcan tres bosones de Goldstone y un campo de Higgs con masa, de manera que todos los campos gauge adquirirán masa. Se espera entonces que el espectro consista de un bosón de Higgs y tres bosones gauge masivos.

Podemos hacer una transformación gauge similar a la de la ec. (??) sobre el campo Φ , tal que

$$\begin{aligned}\Phi &\rightarrow \Phi' = e^{i\theta_i(x)T_i} e^{iG_i(x)T_i} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(H(x) + v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(H(x) + v) \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{4.47}$$

que define el *gauge unitario*: $\theta_i(x) = -G_i(x)$. En adelante sin embargo omitiremos las primas sobre los campos transformados Φ' y $W'_{\mu\nu}$. Comenzaremos analizando la parte escalar del Lagrangiano del Modelo dada en la ec. (6.28)

$$\mathcal{L}_W = \frac{1}{2} \left[\mathcal{D}^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ H(x) + v \end{pmatrix} \right]^\dagger \mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ H(x) + v \end{pmatrix} - V(H),\tag{4.48}$$

donde $V(H)$ dado en la ec. (4.13), incluye el término de masa para el bosón de Higgs (4.14):

$$m_H^2 = 2|\mu^2| = 2\lambda v^2\tag{4.49}$$

Como

$$\begin{aligned}W_\mu &= T_i W_\mu^i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W_\mu^1 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} W_\mu^2 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} W_\mu^3 \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2} \frac{W_\mu^1 - iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} \frac{W_\mu^1 + iW_\mu^2}{\sqrt{2}} & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \\ &\equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2}W_\mu^+ \\ \sqrt{2}W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}W_3 & \frac{1}{\sqrt{2}}W_\mu^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}W_\mu^- & -\frac{1}{2}W_\mu^3 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{4.50}$$

donde hemos definido

$$W_\mu^+ \equiv \frac{W_\mu^1 + iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad W_\mu^- = (W_\mu^+)^* = \frac{W_\mu^1 - iW_\mu^2}{\sqrt{2}}.\tag{4.51}$$

\mathcal{D}_μ corresponde a la matrix 2×2

$$\mathcal{D}_\mu = \begin{pmatrix} \partial_\mu - \frac{i}{2}gW_\mu^3 & -\frac{i}{\sqrt{2}}gW_\mu^+ \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}gW_\mu^- & \partial_\mu + \frac{i}{2}gW_\mu^3 \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

Entonces

$$\mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ H(x) + v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}}gW_\mu^+(H+v) \\ \partial_\mu H + \frac{i}{2}gW_\mu^3(H+v) \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

De modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}}gW_\mu^+(H+v) \\ \partial^\mu H + \frac{i}{2}gW_\mu^3(H+v) \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}}gW_\mu^+(H+v) \\ \partial_\mu H + \frac{i}{2}gW_\mu^3(H+v) \end{pmatrix} - V(H) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +\frac{i}{\sqrt{2}}gW_\mu^+(H+v) & \partial^\mu H - \frac{i}{2}gW_\mu^3(H+v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}}gW_\mu^+(H+v) \\ \partial_\mu H - i \left(-\frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'Y_{\tilde{\Phi}}B_\mu \right) (H+v) \end{pmatrix} - V(H) \\ &= \frac{1}{4}g^2W^{\mu-}W_\mu^+(H+v)^2 + \frac{1}{2} \left[\partial^\mu H - \frac{i}{2}gW_\mu^3(H+v) \right] \left[\partial_\mu H + \frac{1}{2}gW_\mu^3(H+v) \right] - V(H) \\ &= -V(H) + \frac{1}{4}g^2W^{\mu-}W_\mu^+(H+v)^2 + \frac{1}{2}\partial^\mu H\partial_\mu H + \frac{1}{8}g^2W_{3\mu}W_\mu^3(H+v)^2, \end{aligned} \quad (4.54)$$

donde la última línea corresponde a la magnitud del “número” complejo:

$$\left[\partial_\mu H + \frac{i}{2}gW_\mu^3(H+v) \right] \quad (4.55)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W &= \frac{1}{2}\partial^\mu H\partial_\mu H - V(H) \\ &\quad + \left(\frac{gv}{4} \right)^2 W^{\mu-}W_\mu^+ + \frac{1}{4}g^2W^{\mu-}W_\mu^+H^2 + \frac{1}{2}vg^2W^{\mu-}W_\mu^+H + \frac{1}{8}g^2W_3^\mu W_\mu^3(H^2 + 2vH + v^2). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W &= (\mathcal{D}_\mu\Phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu\Phi - \mu^2\Phi^\dagger\Phi - \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2 \\ &= \frac{1}{2}\partial^\mu H\partial_\mu H - V(H) \\ &\quad + \frac{1}{4}g^2W^{\mu-}W_\mu^+H^2 + \frac{1}{2}g^2vW^{\mu-}W_\mu^+H + \frac{1}{8}g^2W_3^\mu W_\mu^3H^2 + \frac{1}{4}g^2vW_3^\mu W_\mu^3H \\ &\quad + m_W^2W^{\mu-}W_\mu^+ + \frac{1}{2}m_3^2W_3^\mu W_\mu^3, \end{aligned} \quad (4.57)$$

donde:

- Masas gauge:

$$m_W = m_3 = \frac{gv}{2}. \quad (4.58)$$

Note que todas las masas son degeneradas.

■

$$\begin{aligned}
V(H) &= \frac{1}{2}m_H^2 H^2 + \lambda v H^3 + \frac{1}{4}\lambda H^4 \\
&= \frac{1}{2}m_H^2 H^2 + \frac{m_H^2}{2v} H^3 + \frac{1}{4} \frac{m_H^2}{2v^2} H^4 \\
&= \frac{1}{2}m_H^2 H^2 \left(1 + \frac{H}{v} + \frac{H^2}{4v^2} \right).
\end{aligned} \tag{4.59}$$

con

$$m_H^2 = -2\mu^2 = 2\lambda v^2. \tag{4.60}$$

Capítulo 5

Principio gauge local

Hemos introducido ya todos los ingredientes necesarios para entender a nivel cualitativo el modelo estándar de las partículas elementales. Para permitir simetrías internas más generales que el simple cambio de fase es necesario usar siempre el hermítico conjugado, en lugar de sólo el conjugado. Con esta notación un conjunto de f fermiones (izquierdos) que conserván localmente n cargas, deben interactuar a través de $a = n^2 - 1$ bosones gauge. Si además alguno de ellos es masivo, debemos introducir por lo menos un campo escalar. Un Lagrangiano para tal sistema debe tener la forma genérica

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & i\psi_f^\dagger \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_f - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \\ & + (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi) \\ & + h^{fg} (\psi_f \psi_g \phi + \text{h.c})\end{aligned}\tag{5.1}$$

A continuación veremos cual es la forma explícita de la derivada covariante para cada una de las interacciones fundamentales.

5.1. Electrodinámica Cuántica

Para hacer el Lagrangiano en ec. (B.55) invariante gauge local bajo $U(1)_Q$, procedemos de la forma usual. El campo transforma como

$$\begin{aligned}\psi & \rightarrow \psi' = e^{ieQ\theta(x)} \psi \\ \bar{\psi} & \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-ieQ\theta(x)},\end{aligned}\tag{5.2}$$

donde Q es el generador de carga eléctrica en unidades de la carga del electrón.

La derivada covariante se define de manera que transforma de la misma forma que el campo, introduciendo el campo gauge A^μ

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieQA_\mu,\tag{5.3}$$

tal que

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \theta(x).\tag{5.4}$$

donde e es la carga eléctrica del electrón. De esta forma, si ψ_e es el campo que representa al electrón

$$eQ\psi_e = e(-1)\psi_e = -e\psi_e. \quad (5.5)$$

En efecto

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \psi &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu \psi)' = \mathcal{D}'_\mu \psi' \\ &= e^{ieQ\theta(x)} \mathcal{D}_\mu \psi, \end{aligned} \quad (5.6)$$

como corresponde a una derivada covariante.

El Lagrangiano correspondiente a la interacción de un fermión y el campo electromagnético corresponde al Lagrangiano de Dirac con la derivada normal reemplazada por la derivada covariante, y el correspondiente término cinético invariante gauge y de Lorentz asociado al nuevo campo introducido en la derivada covariante: A^μ . Este campo es necesario para compensar los cambios en la energía y momentum que sufre el electrón como consecuencia de imponer la invarianza de la Acción bajo un cambio de fase local

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (5.7)$$

y es invariante bajo transformaciones locales $U(1)_Q$. Desarrollando la expresión anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieQA_\mu) - m] \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + eQ\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Este Lagrangiano da lugar a la Acción de la teoría conocida como Electrodinámica Cuántica (QED de sus siglas en inglés). Para el Lagrangiano de un espinor Weyl izquierdo ξ_α , el término de masa esta prohibido por la invarianza gaige, y cambiando $\bar{\psi}\gamma^\mu \rightarrow \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu$, siguiendo los mismos pasos llegaríamos a

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \xi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi + eQ\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi A_\mu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange para $\bar{\psi}$, tenemos

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + eQ\gamma^\mu A_\mu \psi &= 0 \\ (i\gamma^\mu \partial_\mu - i^2 eQ\gamma^\mu A_\mu - m)\psi &= 0 \\ [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieQA_\mu) - m]\psi &= 0 \\ (i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi &= 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Que corresponde a la ecuación de Dirac en presencia del campo electromagnético. Mientras que para el campo A^μ , tenemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \partial_\mu \left[\frac{F^{\rho\eta} F_{\rho\eta}}{(\partial_\mu A_\nu)} \right] - eQ\bar{\psi}\gamma^\rho \psi \frac{\partial A_\rho}{\partial A_\nu} &= 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= -eQ\bar{\psi}\gamma^\nu \psi \end{aligned} \quad (5.11)$$

Definimos entonces la corriente electromagnética generada por el fermión como

$$j^\mu = -eQ\bar{\psi}\gamma^\mu \psi. \quad (5.12)$$

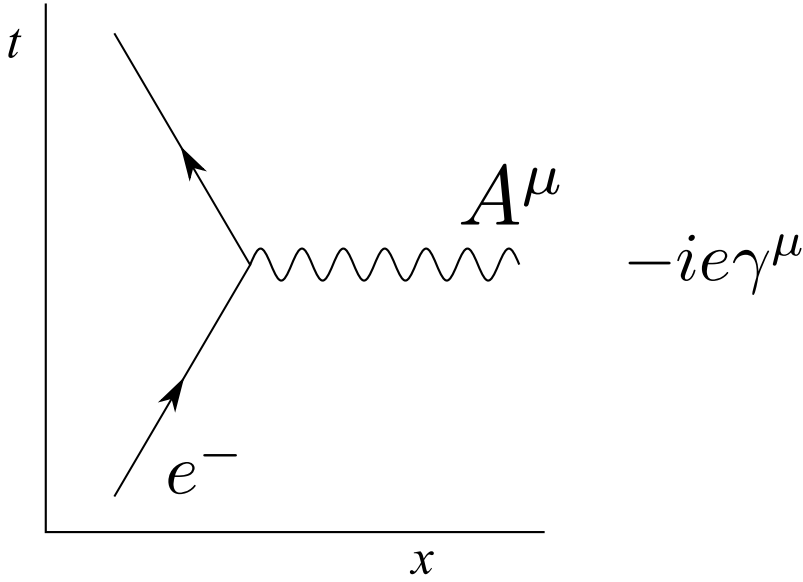


Figura 5.1: Feynman rule for QED

De nuevo, la aparición de la interacción electromagnética es una consecuencia de la invarianza gauge local.

El cálculo directo de la corriente

$$\begin{aligned}
 J^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta \psi + \delta \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \\
 &= i \bar{\psi} \gamma^\mu (-i \theta(x) Q) \psi = \theta(x) Q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi,
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

y para la ecuación de Dirac, a diferencia de la ecuación de Schrödinger, la corriente de probabilidad tiene la misma forma que la corriente electromagnética.

De esta manera podemos reescribir el Lagrangiano en términos de un Lagrangiano libre y otro de interacción

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}}, \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{free}} &= i \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\
 \mathcal{L}_{\text{int}} &= e Q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu.
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Para la QED sólo hay un término de interacción que es suficiente para explicar todos los fenómenos electromagnéticos y su interacción con la materia. Este está representado por el diagrama de Feynman mostrado en la Figura 5.1

La repulsión electromagnética está representada por la figura 5.2. En la Figura (a) el primer electrón emite un fotón y se dispersa, mientras que el segundo absorbe el fotón y se dispersa en la dirección opuesta. En la Figura (b) el primer electrón absorbe el fotón emitido por el segundo electrón. Los dos diagramas se representan por uno único con el fotón en horizontal como se muestra en la Figura (c).

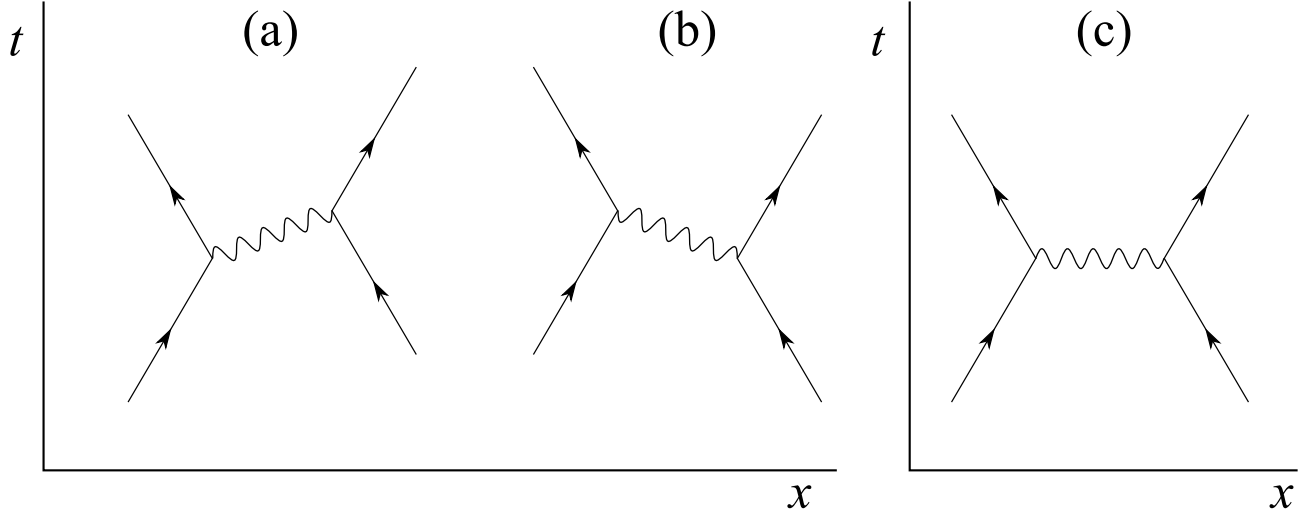


Figura 5.2: Electromagnetic repulsion. The diagrams (a) and (b) are summarized in the diagram (c)

5.1.1. Paridad

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu &= \xi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\xi A_\mu + \eta\sigma^\mu\eta^\dagger A_\mu \\ &= (e_L)^\dagger\bar{\sigma}^\mu e_L A_\mu + (e_R)^\dagger\sigma^\mu e_R A_\mu,\end{aligned}\quad (5.16)$$

de modo que el fotón se acopla por igual a los campos izquierdos que a los derechos. El Lagrangiano de la QED en términos de espinores de Weyl es:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{free} &= i(e_L)^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu e_L A_\mu + i(e_R)^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu e_R - m\left[(e_R)^\dagger e_L + (e_L)^\dagger e_R\right] - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &\quad + eQ\left[(e_L)^\dagger\bar{\sigma}^\mu e_L + (e_R)^\dagger\sigma^\mu e_R\right] A_\mu\end{aligned}\quad (5.17)$$

Se dice entonces que la corriente electromagnética conserva paridad, es decir es invariante bajo el cambio $L \leftrightarrow R$. Una demostración de esta invarianza se muestra en el Apéndice C.6

En adelante escribiremos el término sólo para el fermión izquierdo ψ (y el correspondiente antifermion derecho ψ^\dagger)

5.2. Cromodinámica Cuántica

Como se ilustra en la figura 5.3, en cromodinámica cuántica existe la posibilidad que un electrón y un positrón se aniquilen mutuamente en pura energía llevada por un fotón virtual el cual se debe materializar en un par partícula-antipartícula de acuerdo a la energía disponible. Este es el principio de funcionamiento de los aceleradores electrón-positrón donde se generan dos rayos muy energéticos de electrones y positrones los cuales se hacen colisionar en un punto alrededor de un detector de partículas. El detector esta diseñado para reconstruir los productos de la aniquilación del par electrón-positrón. Por ejemplo, si el par electrón-positrón colisiona con una energía superior a 212 MeV, existe la probabilidad que se cree un par muón (μ^-) antimuón μ^+ . En teoría cuántica de campos a dicho proceso se le llama sección eficaz y se denota como

$$\sigma(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) \quad (5.18)$$

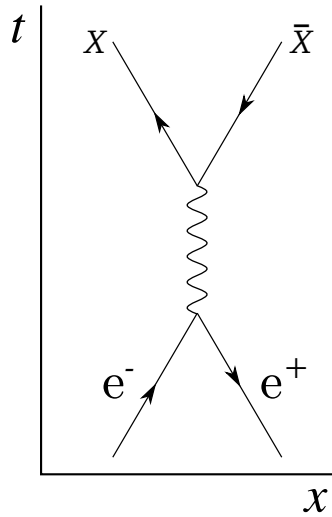


Figura 5.3: Diagrama de Feynman para la aniquilación electrón-positron y la subsecuente creación de un par partícula-antipartícula de acuerdo a la energía disponible

Leptons				
Name	Symbol	Antiparticle	Charge (e)	Mass (MeV/c ²)
Electron	e^-	e^+	-1	0.511
Electron neutrino	ν_e	$\bar{\nu}_e$	0	< 0.000 0022
Muon	μ^-	μ^+	-1	105.7
Muon neutrino	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	0	< 0.170
Tau	τ^-	τ^+	-1	1,777
Tau neutrino	ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	0	< 15.5

Figura 5.4: Leptones de: http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_particles

Aunque el cálculo de dicho proceso está fuera del alcance de una descripción clásica de los campos, dicha probabilidad debe ser proporcional al cuadrado de la carga eléctrica de la partícula producida, en este caso $Q_\mu^2 = 1$, en unidades de la carga del electrón. El conjunto fermiones elementales que interaccionan sólo de forma electrodébil se conoce como *leptones* y esta especificado en la tabla 5.4

Con el avance de la tecnología de aceleradores, en la década de los 50 y 60 del siglo pasado se logró establecer la existencia de un zoológico de nuevas partículas, la mayoría de ellas correspondientes a *hadrónes* en el proceso:

$$\sigma(e^+ e^- \rightarrow \text{hadrónes}). \quad (5.19)$$

Los protones, neutrones, piones, kaones y demás hadrones, son partículas compuestas de constituyentes elementales llamados quarks. Por ejemplo los protones, neutrones y piones están constituidos de quarks up y down. Los hadrones están divididos en bariones, B , constituidos de tres quarks, y los mesones, M , de dos. Para satisfacer el principio de exclusión de Pauli, y justificar el confinamiento

Quarks				
Name ♦	Symbol ♦	Antiparticle ♦	Charge (e) ♦	Mass (MeV/c ²) ♦
up	u	\bar{u}	$+\frac{2}{3}$	1.5-3.3
down	d	\bar{d}	$-\frac{1}{3}$	3.5-6.0
charm	c	\bar{c}	$+\frac{2}{3}$	1,160-1,340
strange	s	\bar{s}	$-\frac{1}{3}$	70-130
top	t	\bar{t}	$+\frac{2}{3}$	169,100-173,300
bottom	b	\bar{b}	$-\frac{1}{3}$	4,130-4,370

Figura 5.5: Quarks de: http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_particles

de los hadrones, se requiere que cada quark contenga N_c cargas diferentes, llamadas cargas de color, de manera que la carga de color de un hadrón sea cero, de forma similar a como la carga eléctrica de un átomo es cero a pesar de que sus constituyentes poseen carga eléctrica. Muchos resultados experimentales respaldan la existencia de tres cargas de color para cada quark, $N_c = 3$. De este modo cada quark $q = u, d, c, s, t, b$, con las propiedades mostradas en la tabla 5.5, viene en tres colores

$$q_\alpha = q_1, q_2, q_3 = q_r, q_b, q_g, \quad (5.20)$$

donde los últimos subíndices hacen referencia a los colores red, blue, green. De este modo los Bariones y mesones están descritos por combinaciones singletes de color del tipo $q_r q_b q_g$ y $q_r \bar{q}_r$,

$$B = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} |q_\alpha q_\beta q_\gamma\rangle \quad M = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta^{\alpha\beta} |\bar{q}_\alpha q_\beta\rangle \quad (5.21)$$

Estos estados son singletes de color.

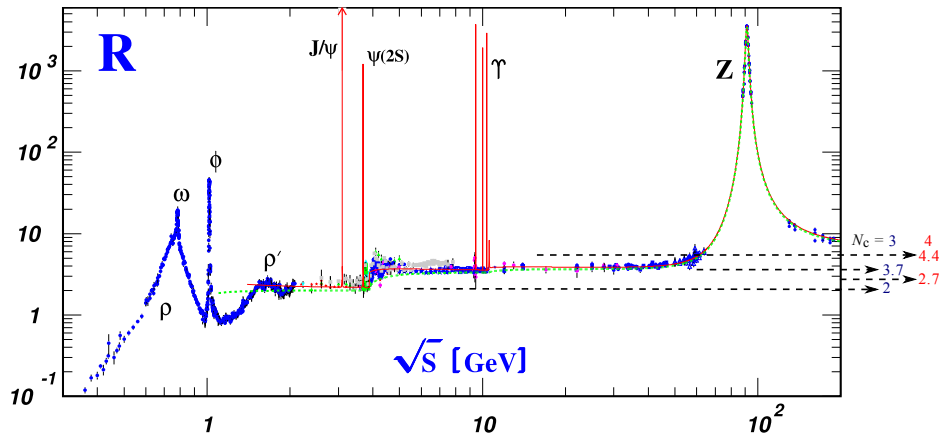
Una de las determinaciones de N_c proviene del observable

$$R \approx \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrones})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (5.22)$$

Para $f = u, d, s, c, b, t$, (en orden de masa) tenemos que para una energía donde se pueden producir hadrones compuestos de hasta quarks f_{\max}

$$R \approx \frac{\sum_{f=u}^{f_{\max}} \sum_{\alpha=1}^{N_c} \sigma(e^+e^- \rightarrow f_\alpha \bar{f}_\alpha)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$

$$R \approx N_c \frac{\sum_{f=u}^{f_{\max}} \sigma(e^+e^- \rightarrow f\bar{f})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (5.23)$$

Figura 5.6: Datos para R

De este modo R está dado por la suma de las cargas eléctricas al cuadrado

$$\begin{aligned}
 R &\approx N_c \frac{\sum_f Q_f^2}{Q_\mu^2} \\
 &= N_c \sum_{f=u}^{f_{\max}} Q_f^2 \\
 &= \begin{cases} N_c \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{-1}{3}\right)^2 \right] = \frac{2}{3} N_c & f = u, d, s, f_{\max} = s \\ N_c \left[2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{-1}{3}\right)^2 \right] = \frac{10}{9} N_c & f_{\max} = c \\ N_c \left[2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{-1}{3}\right)^2 \right] = \frac{11}{9} N_c & f_{\max} = b \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 2 & N_c = 3, f_{\max} = s \\ \frac{10}{3} & N_c = 3, f_{\max} = c \\ \frac{11}{3} & N_c = 3, f_{\max} = b \end{cases} \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

En la figura, tomada de [5], se muestra el gráfico de R con respecto a \sqrt{s} (la energía de centro de masa de la colisión). Se observan dos escalones, uno que va hasta una energía $\sqrt{s} \approx 4$ GeV que corresponden a $f = u, d, s$, con un $R \approx 2$, y otro hasta $\sqrt{s} \approx 40$ GeV que corresponde a $f = u, d, s, c, b$, con un $R \approx 3.7 \approx 11/3$. Los dos valores de R son compatibles con los esperados de la ec. (5.24). Como referencia también se señalan los valores para $N_c = 4$ (en rojo). Si queremos que el color sea una carga conservada como la carga eléctrica, ésta debe ser la consecuencia de una simetría gauge local. Para tener tres cargas diferentes la posibilidad más simple es imponer la simetría $SU(3)_c$, tal que tengamos un vector compuesto de 3 espinores de Dirac en el espacio de color:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_b \\ \psi_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_r \\ q_b \\ q_g \end{pmatrix} \quad q = u, d, c, s, t, b. \quad (5.25)$$

El Lagrangiano de Dirac con invarianza gauge global $SU(3)$, para un quark, se puede escribir como

$$\mathcal{L}_{\text{global}} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi, \quad (5.26)$$

El análisis es completamente simiar si se usa el Lagrangiano sólo para los fermiones de Weyl izquierdos

$$\mathcal{L}_{\text{global}} = i\bar{\Psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\Psi \quad (5.27)$$

La transformación gauge local bajo $SU(3)$ es

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \exp\left(i\theta_a(x)\frac{\lambda^a}{2}\right)\Psi. \quad (5.28)$$

donde $a = 1, \dots, 8$, $\lambda_a/2$ son los ocho generadores de $SU(3)$ y $\theta_a(x)$ son los parámetros de la transformación global. Los generadores de $SU(3)$

$$\Lambda^a \equiv \frac{\lambda^a}{2}, \quad (5.29)$$

satisfacen el álgebra

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2}\right] = if^{abc}\frac{\lambda^c}{2}, \quad (5.30)$$

donde f^{abc} son las constantes de estructura fina de $SU(3)$.

Las ocho matrices 3×3 λ^a se pueden construir a partir de las tres matrices de Pauli, pero su forma explícita no es necesaria en la siguiente discusión.

En un análisis similar al de la sección [B.1.7](#) tenemos que la Acción invariante gauge local bajo $SU(3)_c$, se obtiene de reemplazar la derivada normal por la derivada covariante. Para compensar los 8 cambios asociados a los 8 parámetros $\theta_a(x)$, la derivada covariante debe definirse en términos de 8 campos vectoriales G_a^ν

$$\mathcal{L}_{\text{local}} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \mathcal{L}(G_a^\nu, \partial_\mu G_a^\nu). \quad (5.31)$$

donde

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \Psi' = U(x)\Psi \\ \mathcal{D}_\mu\Psi &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu\Psi)' = U(x)\mathcal{D}_\mu\Psi, \end{aligned} \quad (5.32)$$

con la matriz 3×3

$$U(x) = \exp\left[i\theta_a(x)\frac{\lambda^a}{2}\right], \quad (5.33)$$

y

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig_s\frac{\lambda_a}{2}G_\mu^a \equiv \partial_\mu - ig_s G_\mu \quad (5.34)$$

donde hemos definido la matriz 3×3 G_μ , como

$$(G_\mu)_{\alpha\beta} = \left(\frac{\lambda_a}{2}\right)_{\alpha\beta} G_\mu^a \quad (5.35)$$

Este Lagrangiano da lugar a la interacción fuerte y es llamado el Lagrangiano de la Cromodinámica Cuántica, o el Lagrangiano de la QCD de sus siglas en Inglés.

De [\(5.32\)](#), tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu\Psi &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu\Psi)' = \mathcal{D}'_\mu\Psi' = U(x)\mathcal{D}_\mu\Psi \\ \mathcal{D}'_\mu U\Psi &= U(x)\mathcal{D}_\mu\Psi. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Por consiguiente

$$\mathcal{D}'^\mu U = U \mathcal{D}^\mu \quad (5.37)$$

$$\mathcal{D}^\mu \rightarrow (\mathcal{D}^\mu)' = U \mathcal{D}^\mu U^{-1} \quad (5.38)$$

Desarrollando a ambos lados

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\mu \psi &\rightarrow (\mathcal{D}^\mu \psi)' = \mathcal{D}'^\mu \psi' = \mathcal{D}^\mu \psi' \\ (\partial^\mu - ig_s G'^\mu) U \psi &= U \mathcal{D}^\mu U^{-1} U \psi \\ (\partial^\mu - ig_s G'^\mu) U \psi &= U (\partial^\mu - ig_s G^\mu) \psi \\ U \partial^\mu \psi + (\partial^\mu U) \psi - ig_s G'^\mu U \psi &= U \partial^\mu \psi - ig_s U G^\mu \psi \\ (\partial^\mu U) \psi - ig_s G'^\mu U \psi &= -ig_s U G^\mu \psi \\ -ig_s G'^\mu U \psi &= -(\partial^\mu U) \psi - ig_s U G^\mu \psi, \end{aligned} \quad (5.39)$$

de modo que

$$\begin{aligned} G'^\mu U &= \frac{1}{ig_s} (\partial^\mu U) + U G^\mu \\ G'^\mu &= -\frac{i}{g_s} (\partial^\mu U) U^{-1} + U G^\mu U^{-1}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Como U es unitaria, la transformación de los campos gauge puede escribirse como

$$G^\mu \rightarrow (G^\mu)' = U G^\mu U^\dagger - \frac{i}{g_s} (\partial^\mu U) U^\dagger. \quad (5.41)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Lambda^a G'^\mu_a &\approx (1 + i\theta_b \Lambda^b) \Lambda^c G^\mu_c (1 - i\theta_d \Lambda^d) - \frac{i}{g_s} [i(\partial^\mu \theta_e) \Lambda^e (1 - i\theta_f \Lambda^f)] \\ &= (\Lambda^c + i\theta_b \Lambda^b \Lambda^c) (1 - i\theta_d \Lambda^d) G^\mu_c - \frac{i}{g_s} [i(\partial^\mu \theta_e) \Lambda^e (1 - i\theta_f \Lambda^f)] \\ &\approx [\Lambda^c - i\theta_d \Lambda^c \Lambda^d + i\theta_b \Lambda^b \Lambda^c] G^\mu_c + \frac{1}{g_s} \Lambda^e \partial^\mu \theta_e \\ &= [\Lambda^c - i\theta_b (\Lambda^c \Lambda^b - \Lambda^b \Lambda^c)] G^\mu_c + \frac{1}{g_s} \Lambda^e \partial^\mu \theta_e \\ &= \Lambda^a G^\mu_a - i(f^{acb} \Lambda^a) G^\mu_c \theta_b + \frac{1}{g_s} \Lambda^a \partial^\mu \theta_a \\ &= \Lambda^a \left(G^\mu_a + \frac{1}{g_s} \partial^\mu \theta_a + f^{acb} G^\mu_c \theta_b \right) \end{aligned} \quad (5.42)$$

de donde

$$G^\mu_a \rightarrow G'^\mu_a \approx G^\mu_a + \frac{1}{g_s} \partial^\mu \theta_a + f^{abc} G^\mu_b \theta_c \quad (5.43)$$

que se reduce al caso Abelian cuando las constantes de estructura son cero. Como era de esperarse cada campo gauge tiene asociado un parámetro de transformación gauge $\theta_a(x)$.

Note entonces que en el lenguaje de los teoremas de noether, el campo G^μ_a transforma como un campo material y un campo de radiación a la vez, es decir, su transformación depende tanto del

QED	QCD	Diferencia
$\bar{\psi} (i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m) \psi + \mathcal{L}(A_\nu, \partial A_\nu)$	$\bar{\Psi} (i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m) \Psi + \mathcal{L}(G_\nu, \partial G_\nu)$	$1 \times 1 \rightarrow 3 \times 3$
$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$	$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - igG_\mu$	$1 \times 1 \rightarrow 3 \times 3$
$A_\mu \rightarrow \hat{Q} A_\mu$	$G_\mu = \Lambda_a G_\mu^a$	$1 \times 1 \rightarrow 3 \times 3$
$A^\mu \rightarrow A'^\mu = U A^\mu U^* - \frac{i}{g_s} (\partial^\mu U) U^*$	$G^\mu \rightarrow G'^\mu = U G^\mu U^\dagger - \frac{i}{g_s} (\partial^\mu U) U^\dagger$	$1 \rightarrow 8, a = 1, \dots, 8$
$A^\mu \rightarrow A'^\mu_a \approx A^\mu + \frac{1}{e} \partial^\mu \theta$	$G_a^\mu \rightarrow G'^\mu_a \approx G_a^\mu + \frac{1}{g_s} \partial^\mu \theta_a + f_a^{bc} G_b^\mu \theta_c$	$1 \times 1 \rightarrow 3 \times 3$
		radiación \rightarrow radiación-materia

Tabla 5.1: Comparación

parámetro como de la derivada del parámetro. Por consiguiente, es conveniente definir la derivada covariante del campo G_ν^a , tal que

$$\mathcal{D}_\mu G_\nu = (\mathbf{1} \partial_\mu - ig_s G_\mu) G_\nu \quad (5.44)$$

o en componentes

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_\mu]_b^a G_\nu^b &= (\delta_b^a \partial_\mu - ig_s [G_\mu]_b^a) G_\nu^b \\ &= \left(\delta_b^a \partial_\mu - ig_s [\tilde{\Lambda}_c]_b^a G_\mu^c \right) G_\nu^a \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu G_\nu \rightarrow (\mathcal{D}_\mu G_\nu)' &= \left[\partial_\mu - ig_s \left(U G_\mu U^\dagger - \frac{i}{g_s} (\partial_\mu U) U^\dagger \right) \right] \left(U G_\nu U^\dagger - \frac{i}{g_s} (\partial_\nu U) U^\dagger \right) \\ &= [\partial_\mu - ig_s U G_\mu U^\dagger - (\partial_\mu U) U^\dagger] \left(U G_\nu U^\dagger - \frac{i}{g_s} (\partial_\nu U) U^\dagger \right) \\ &= \partial_\mu \left(U G_\nu U^\dagger - \frac{i}{g_s} (\partial_\nu U) U^\dagger \right) - ig_s U G_\mu U^\dagger \left(U G_\nu U^\dagger - \frac{i}{g_s} (\partial_\nu U) U^\dagger \right) \\ &\quad - (\partial_\mu U) U^\dagger \left(U G_\nu U^\dagger - \frac{i}{g_s} (\partial_\nu U) U^\dagger \right) \\ &= \cancel{(\partial_\mu U) G_\nu U^\dagger} + U (\partial_\mu G_\nu) U^\dagger + U G_\nu \partial_\mu U^\dagger - \frac{i}{g_s} \partial_\mu [(\partial_\nu U) U^\dagger] \\ &\quad - ig_s U G_\mu G_\nu U^\dagger - U G_\mu U^\dagger (\partial_\nu U) U^\dagger \\ &\quad - \cancel{(\partial_\mu U) G_\nu U^\dagger} + \frac{i}{g_s} (\partial_\mu U) U^\dagger (\partial_\nu U) U^\dagger \\ &= U (\partial_\mu G_\nu) U^\dagger + U G_\nu \partial_\mu U^\dagger - \frac{i}{g_s} \partial_\mu [U U^\dagger (\partial_\nu U) U^\dagger] \\ &\quad - ig_s U G_\mu G_\nu U^\dagger - U G_\mu U^\dagger \partial_\nu (U U^\dagger) + U G_\mu U^\dagger U \partial_\nu U^\dagger \\ &\quad + \frac{i}{g_s} \partial_\mu [U U^\dagger (\partial_\nu U) U^\dagger] - \frac{i}{g_s} U \partial_\mu [U^\dagger (\partial_\nu U) U^\dagger] \end{aligned} \quad (5.46)$$

Ya que

$$\begin{aligned} \partial_\mu [U^\dagger (\partial_\nu U) U^\dagger] &= \partial_\mu [U^\dagger U \partial_\nu U^\dagger] \\ &= \partial_\mu \partial_\nu U^\dagger \end{aligned} \quad (5.47)$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\mu G_\nu &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu G_\nu)' = U [(\partial_\mu - ig_s G_\mu) G_\nu] U^\dagger + U \left[G_\nu \partial_\mu + G_\mu \partial_\nu - \frac{i}{g_s} \partial_\mu \partial_\nu \right] U^\dagger \\ &= U (\mathcal{D}_\mu G_\nu) U^\dagger + U \left[G_\nu \partial_\mu + G_\mu \partial_\nu - \frac{i}{g_s} \partial_\mu \partial_\nu \right] U^\dagger.\end{aligned}\quad (5.48)$$

Definiendo

$$G_{\mu\nu} = \mathcal{D}_\mu G_\nu - \mathcal{D}_\nu G_\mu, \quad (5.49)$$

que recupera la definición en el caso Abelian

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (5.50)$$

Tenemos que

$$G_{\mu\nu} \rightarrow G'_{\mu\nu} = U G_{\mu\nu} U^\dagger. \quad (5.51)$$

$$[\mathcal{D}_\mu]_a^b G_b^\nu \rightarrow \left\{ [\mathcal{D}_\mu]_a^b G_b^\nu \right\}' = [\mathcal{D}_\mu]_a^b G_b^\mu + \frac{1}{g_s} \partial^\mu \theta_a + f^{abc} \theta_c [\mathcal{D}_\mu]_b^d G_d^\mu \quad (5.52)$$

Esta propiedad puede ser obtenida si usamos la representación adjunta de $SU(3)$, consistente en las 8 matrices 8×8

$$\left[\tilde{\Lambda}^a \right]_{bc} = -i f_{bc}^a. \quad (5.53)$$

En efecto, haciendo uso de la identidad para $SU(N)$

$$f^{abe} f^{cde} = \frac{2}{N} (\delta^{ac} \delta^{bd} - \delta^{ad} \delta^{bc}) + d^{ace} d^{bde} - d^{ade} d^{bce} \quad (5.54)$$

donde d^{abc} es totalmente simétrico en a, b, c y está definido a partir de la representación fundamental como

$$\{\Lambda^a, \Lambda^b\} = \frac{1}{N} \delta^{ab} + d^{ab}{}_c \Lambda^c \quad (5.55)$$

Para $SU(2)$

$$\{T_i, T_j\} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{1}. \quad (5.56)$$

Para $SU(3)$

$$\{\Lambda_a, \Lambda_b\} = \frac{1}{3} \delta_{ab} \mathbf{1} + d^{ab}{}_c \Lambda^c. \quad (5.57)$$

Ejemplo: En el caso de $SU(2)$ $d^{ijk} = 0$, definiendo Σ_i como las matrices 3×3 generadores de $SU(2)$ en la representación adjunta

$$(\Sigma_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk} \quad (5.58)$$

Debemos comprobar que

$$\begin{aligned} [\Sigma_i, \Sigma_j] &= i\epsilon_{ijk}\Sigma_k \\ [\Sigma_i, \Sigma_j]_{lm} &= i\epsilon_{ijk}(\Sigma_k)_{lm} \end{aligned} \quad (5.59)$$

Ya que

$$\begin{aligned} (\Sigma_i \Sigma_j)_{lm} &= (\Sigma_i)_{lk}(\Sigma_j)_{km} = -\epsilon_{ilk}\epsilon_{jkm} = \epsilon_{ilk}\epsilon_{jmk} = \delta_{ij}\delta_{lm} - \delta_{im}\delta_{lj} \\ -(\Sigma_j \Sigma_i)_{lm} &= -(\Sigma_j)_{lk}(\Sigma_i)_{km} = \epsilon_{jlk}\epsilon_{ikm} = -\epsilon_{jlk}\epsilon_{imk} = -\delta_{ji}\delta_{lm} + \delta_{jm}\delta_{li} \end{aligned} \quad (5.60)$$

Entonces

$$\begin{aligned} [\Sigma_i, \Sigma_j]_{lm} &= (\Sigma_i \Sigma_j - \Sigma_j \Sigma_i)_{lm} \\ &= \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \\ &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} \\ &= i\epsilon_{ijk}(-i\epsilon_{klm}) \\ &= i\epsilon_{ijk}(\Sigma_k)_{lm} \end{aligned} \quad (5.61)$$

Ejercicio: Demostar que la representación adjunta satisface el álgebra de $SU(3)$

Entonces, la derivada covariante es

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_\mu]_c^b &= \mathbf{1}\partial_\mu - ig_s \tilde{\Lambda}_a G^a \\ &= \delta_c^b \partial_\mu - ig_s \left[\tilde{\Lambda}_a G_\mu^a \right]_c^b \\ &= \delta_c^b \partial_\mu - g_s f_a^{bc} G_\mu^a \end{aligned} \quad (5.62)$$

Similarmente, definiendo la matriz 3×3 ,

$$G^{\mu\nu} = \frac{i}{g_s} [\mathcal{D}^\mu, \mathcal{D}^\nu] \equiv \frac{\lambda_a}{2} G_a^{\mu\nu}, \quad (5.63)$$

tenemos

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu}\psi &= \frac{i}{g_s} [\partial^\mu - ig_s G^\mu, \partial^\nu - ig_s G^\nu] \psi \\ &= \frac{i}{g_s} [(\partial^\mu - ig_s G^\mu)(\partial^\nu - ig_s G^\nu)\psi - (\partial^\nu - ig_s G^\nu)(\partial^\mu - ig_s G^\mu)\psi] \\ &= \frac{i}{g_s} \{ \partial^\mu \partial^\nu \psi - g_s^2 G^\mu G^\nu \psi - ig_s [\partial^\mu (G^\nu \psi) + G^\mu \partial^\nu \psi] - \partial^\nu \partial^\mu \psi + g_s^2 G^\nu G^\mu \psi + ig_s [\partial^\nu (G^\mu \psi) + G^\nu \partial^\mu \psi] \} \\ &= \frac{i}{g_s} \{ (\partial^\mu \partial^\nu - \partial^\nu \partial^\mu) \psi - g_s^2 (G^\mu G^\nu - G^\nu G^\mu) \psi - ig_s [(\partial^\mu G^\nu) - (\partial^\nu G^\mu)] \psi \\ &\quad - ig_s [G^\nu \partial^\mu \psi + G^\mu \partial^\nu \psi - G^\mu \partial^\nu \psi + G^\nu \partial^\mu \psi] \} \\ &= [\partial^\mu G^\nu - \partial^\nu G^\mu - ig_s (G^\mu G^\nu - G^\nu G^\mu)] \psi \\ &= \{ \partial^\mu G^\nu - \partial^\nu G^\mu - ig_s [G^\mu, G^\nu] \} \psi \end{aligned} \quad (5.64)$$

De modo que

$$G^{\mu\nu} = \partial^\mu G^\nu - \partial^\nu G^\mu - ig_s [G^\mu, G^\nu], \quad (5.65)$$

que se reduce al caso Abeliano cuando los bosones gauge conmutan. En términos de componentes

$$\begin{aligned} \Lambda^a G_a^{\mu\nu} &= \Lambda^a \partial^\mu G_a^\nu - \Lambda^a \partial^\nu G_a^\mu - ig_s [\Lambda^b G_b^\mu, \Lambda^c G_c^\nu] \\ &= \Lambda^a \partial^\mu G_a^\nu - \Lambda^a \partial^\nu G_a^\mu - ig_s [\Lambda^b, \Lambda^c] G_b^\mu G_c^\nu \\ &= \Lambda^a \partial^\mu G_a^\nu - \Lambda^a \partial^\nu G_a^\mu - ig_s (i\Lambda^a f_{abc}) G_b^\mu G_c^\nu \\ &= \Lambda^a \partial^\mu G_a^\nu - \Lambda^a \partial^\nu G_a^\mu + \Lambda^a g_s f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Por consiguiente

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \equiv \tilde{G}_a^{\mu\nu} + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu, \quad (5.67)$$

con

$$\tilde{G}_a^{\mu\nu} = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu \quad (5.68)$$

A diferencia del caso Abeliano $G^{\mu\nu}$ ya no es invariante bajo transformaciones gauge

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu} &\rightarrow G'^{\mu\nu} = \frac{i}{g_s} [\mathcal{D}'^\mu, \mathcal{D}'^\nu] \\ &= \frac{i}{g_s} [U \mathcal{D}^\mu U^{-1}, U \mathcal{D}^\nu U^{-1}] \\ &= U G^{\mu\nu} U^{-1}. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Note que con la definición (5.63), la derivada covariante de la matrix $G^{\mu\nu}$, transforma como la matrix $G^{\mu\nu}$

$$\mathcal{D}_\mu G^{\mu\nu} \rightarrow (\mathcal{D}_\mu G^{\mu\nu})' = U \mathcal{D}_\mu G^{\mu\nu} U^{-1}. \quad (5.70)$$

Para poder obtener un invariante bajo transformaciones gauge a partir del producto $G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}$, debemos utilizar la traza

$$\begin{aligned} \text{Tr} (G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}) &\rightarrow \text{Tr} (G'^{\mu\nu} G'_{\mu\nu}) = \text{Tr} (U G^{\mu\nu} U^{-1} U G_{\mu\nu} U^{-1}) \\ &= \text{Tr} (U G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} U^{-1}) \\ &= \text{Tr} (U^{-1} U G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}) \\ &= \text{Tr} (G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (5.71)$$

Teniendo en cuenta la normalización de las matrices de Gell-Man

$$\begin{aligned} \text{Tr} (\lambda^a \lambda^b) &= 2\delta^{ab} \\ \text{Tr} (\Lambda^a \Lambda^b) &= \frac{1}{2}\delta^{ab}, \end{aligned} \quad (5.72)$$

tenemos (suma sobre indices repetidos de $SU(3)$)

$$\begin{aligned} \text{Tr} (G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}) &\rightarrow \text{Tr} (G'^{\mu\nu} G'_{\mu\nu}) = \text{Tr} (\Lambda^a G_a^{\mu\nu} \Lambda^b G_{\mu\nu}^b) \\ &= \text{Tr} (\Lambda^a \Lambda^b) G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^b \\ &= \frac{1}{2} \delta^{ab} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^b \\ &= \frac{1}{2} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Haciendo explícitamente la traza tenemos (suma sobre índices a, b, c, \dots repetidos aunque no estén contraidos)

$$\begin{aligned}
G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a &= \left(\tilde{G}_a^{\mu\nu} + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \right) \left(\tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s f_{ade} G_\mu^d G_\nu^e \right) \\
&= \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s f_{ade} \tilde{G}_a^{\mu\nu} G_\mu^d G_\nu^e + g_s f^{abc} \tilde{G}_{\mu\nu}^a G_b^\mu G_c^\nu + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \\
&= \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s f^{abc} \tilde{G}_a^{\mu\nu} G_\mu^b G_\nu^c + g_s f^{abc} \tilde{G}_{\mu\nu}^a G_b^\mu G_c^\nu + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \\
&= \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s f^{abc} \tilde{G}_a^{\mu\nu} G_\mu^b G_\nu^c + g_s f^{abc} \tilde{G}_{\mu\nu}^a G_b^\mu G_c^\nu + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \\
&= \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a + 2g_s f^{abc} \tilde{G}_a^{\mu\nu} G_\mu^b G_\nu^c + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e
\end{aligned} \tag{5.74}$$

Expandiendo el Lagrangiano en ec. (5.31), tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig_s \frac{\lambda_a}{2} G_\mu^a \right) \Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{2} \text{Tr} (G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}) \\
&= i\bar{\Psi}\gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig_s \frac{\lambda_a}{2} G_\mu^a \right) \Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a \\
&= i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi + g_s \bar{\Psi}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} G_\mu^a \Psi - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a \\
&= i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi + g_s \bar{\Psi}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi G_\mu^a - \frac{1}{4} \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a \\
&\quad - \frac{1}{4} \left(2g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \right) \\
&= \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{SI}},
\end{aligned} \tag{5.75}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{free}} &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi \\
\mathcal{L}_{\text{gauge}} &= g_s \bar{\Psi}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi G_\mu^a - \frac{1}{4} \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a \\
\mathcal{L}_{\text{SI}} &= -\frac{1}{4} \left(2g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \right).
\end{aligned} \tag{5.76}$$

Hemos dividido el Lagrangiano en tres partes

- El Lagrangiano libre de Dirac
- Una parte gauge que puede escribirse como un Lagrangiano electromagnético:

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) - J_a^\nu G_\nu^a, \tag{5.77}$$

donde

$$J_a^\mu = -g_s \bar{\Psi}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi, \tag{5.78}$$

es la nueva corriente conservada de interacción fuerte que surge como consecuencia de la invarianza gauge local $SU(3)$; y

- Una parte de auto-interacciones gauge:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{SI}} &= -\frac{g_s}{2} f^{abc} \tilde{G}_{\mu\nu}^a G_b^\mu G_c^\nu - \frac{g_s^2}{4} f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \\ &= -\frac{g_s}{2} f^{abc} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) G_\mu^b G_\nu^c - \frac{g_s^2}{4} f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e.\end{aligned}\quad (5.79)$$

que se desaparecen en el caso Abeliano.

El Lagrangiano de interacción es:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g_s \bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi G_\mu^a - \frac{g_s}{2} f^{abc} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) G_\mu^b G_\nu^c - \frac{g_s^2}{4} f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e. \quad (5.80)$$

From [?] (pag 136):

The quarks have an additional type of polarization that is not related to geometry. The idiot physicists, unable to come up with any wonderful Greek words anymore, call this type of polarization by the unfortunate name of “color”, which has nothing to do with color in the normal sense. At a particular time, a quark can be in one of three conditions, or “colors”—R, G, or B (can you guess what they stand for?). A quark’s “color” can be changed when the quark emits or absorbs a gluon. The gluons come in eight different types, according to the “colors” they can couple with. For example, if a red quark changes to green, it emits a red-antigreen gluon—a gluon that takes the red from quark and gives it green (“antigreen” means the gluon is carrying green in the opposite direction). This gluon could be absorbed by a green quark, which changes to red (see Fig. 5.7). There are eight different possible gluons, such as red-antired, red-antiblue, red-antigreen, and so on (you’d think there’d be nine, but for technical reasons, one is missing)¹. The theory is not very complicated. The complete rule of gluons is: gluons couple with things having “color”—it just requires a little bookkeeping to keep track of where the “colors go”. There is, however, an interesting possibility created by this rule: gluons can couple with other gluons (see Fig. 5.8).

El primer término da lugar a interacciones de cambio de color de quarks como la que se ilustra en la Figura 5.7

$$\begin{pmatrix} r\bar{r} & r\bar{b} & r\bar{g} \\ b\bar{r} & b\bar{b} & b\bar{g} \\ g\bar{r} & g\bar{b} & g\bar{g} \end{pmatrix}, \quad \text{with } r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g} = 0. \quad (5.81)$$

Mientras que el segundo y tercer término dan lugar a autointeracciones de los gluones como se muestra en la Figura 5.8

¹Ver ec. 5.81.

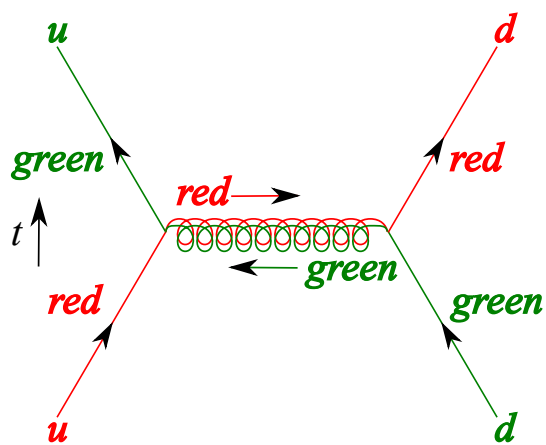


Figura 5.7: Quark-gluon interaction

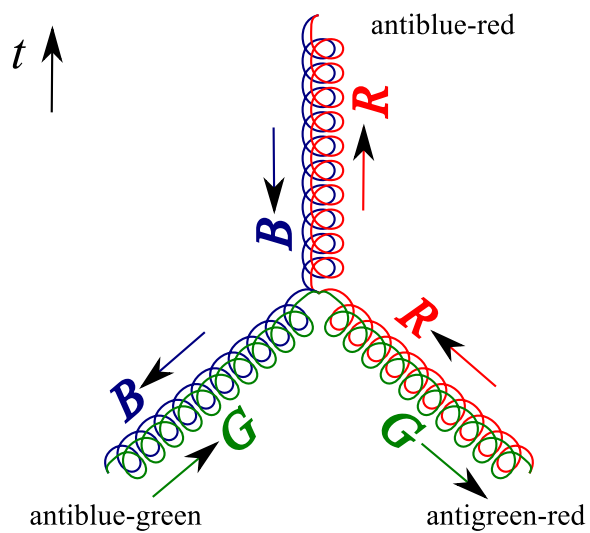
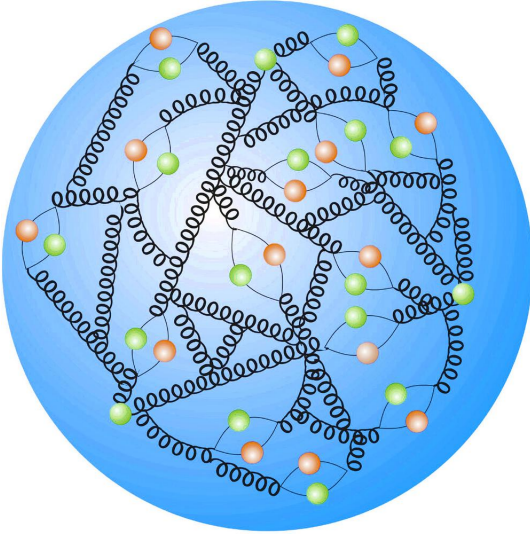


Figura 5.8: Triple-gluon self-interaction. The anticolors are the colors running back in time.



Todas las interacciones están determinadas en términos de una única constante de acoplamiento g_s . Las autointeracciones gauge pueden explicar aspectos de la interacción fuerte como la libertad asintótica, que consiste en que las interacciones fuertes se vuelven más débiles a distancias cortas.

En términos de índices de color la corriente, y las otras partes del Lagrangiano, pueden escribirse como

$$J_a^\mu = -g_s \bar{q}^\alpha \gamma^\mu q^\beta \left(\frac{\lambda_a}{2} \right)_{\alpha\beta}. \quad (5.82)$$

Note que tanto para la Electrodinámica Cuántica como para la Cromodinámica Cuántica la corriente $\bar{\psi}\Gamma\psi$ es vectorial. Para las interacciones débiles la estructura es más complicada y requiere un conocimiento más profundo de la ecuación de Dirac y sus soluciones.

5.3. Soluciones a la ecuación de Dirac

5.3.1. Lagrangiano de Weyl

En adelante trabajaremos en la representación de Weyl que en forma compacta es

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (5.83)$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma^\mu &= (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) \\ \bar{\sigma}^\mu &= (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3) \end{aligned} \quad (5.84)$$

Hemos escrito las matrices de Dirac en bloques 2×2 , y es natural escribir similarmente las cuatro componentes del campo de Dirac como un par de campos de dos componentes

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (5.85)$$

Donde $\psi_{L,R}$ son espinores de Weyl de dos componentes. En la representación de Weyl el Lagrangiano se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \\
&= i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi^\dagger\gamma^0\psi \\
&= i\psi^\dagger\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}\partial_\mu\psi - m\psi^\dagger\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\psi \\
&= i\begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_\mu\psi_L \\ \partial_\mu\psi_R \end{pmatrix} - m\begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\
&= i\psi_L^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L + i\psi_R^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R - m(\psi_L^\dagger\psi_R + \psi_R^\dagger\psi_L)
\end{aligned} \tag{5.86}$$

5.3.2. Ecuaciones de Weyl

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para el Lagrangiano en ec.(C.24), dan como resultado

$$\begin{aligned}
i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L - m\psi_R &= 0 \\
i\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R - m\psi_L &= 0
\end{aligned} \tag{5.87}$$

Expandiendo

$$\begin{aligned}
i\sigma^0\partial_0\psi_L - i\sigma^i\partial_i\psi_L - m\psi_R &= 0 \\
i\sigma^0\partial_0\psi_R + i\sigma^i\partial_i\psi_R - m\psi_L &= 0
\end{aligned} \tag{5.88}$$

que pueden escribirse como

$$\begin{aligned}
i\partial_0\psi_L - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi_L - m\psi_R &= 0 \\
i\partial_0\psi_R + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi_R - m\psi_L &= 0
\end{aligned} \tag{5.89}$$

Para el Lagrangiano invariante gauge local $U(1)$ en ec.(??), tendríamos

$$\begin{aligned}
i\bar{\sigma}^\mu\mathcal{D}_\mu\psi_L - m\psi_R &= 0 \\
i\sigma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi_R - m\psi_L &= 0
\end{aligned} \tag{5.90}$$

Expandiendo, para \mathcal{D}^μ dado en la ec.(??), con $q = -e$

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \tag{5.91}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
i(\partial_0 + iqA_0)\psi_L - i\sigma^i(\partial_i + iqA_i)\psi_L - m\psi_R &= 0 \\
i(\partial_0 + iqA_0)\psi_R + i\sigma^i(\partial_i + iqA_i)\psi_R - m\psi_L &= 0
\end{aligned} \tag{5.92}$$

de donde

$$\begin{aligned}
(i\partial_0 - qA_0)\psi_L - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\psi_L - m\psi_R &= 0 \\
(i\partial_0 - qA_0)\psi_R + \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\psi_R - m\psi_L &= 0
\end{aligned} \tag{5.93}$$

5.4. Espín

El momento angular está descrito por el álgebra

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{L}_k \quad (5.94)$$

Si dos operadores no conmutan no es posible conocer sus autovalores simultáneamente. Sin embargo

$$[\hat{L}_i, \hat{L}^2] = 0 \quad (5.95)$$

y por convención podemos escoger $\langle \hat{L}_z \rangle$ y \hat{L}^2 como los dos observables de momento angular.

Las matrices de Pauli forman una representación del álgebra de momento angular

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{S}_k \quad (5.96)$$

donde el *operador de espín* se define como

$$\hat{S}_i = \frac{\sigma_i}{2} \quad (5.97)$$

Los autovalores del operador de espín son entonces

$$\hat{S}_z \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (5.98)$$

que corresponde a autovalores $\lambda = \pm 1/2$ con autovectores

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.99)$$

que son autoestados de espín up y espín down respectivamente. Una función de onda de espín ha de poder expandir en términos de estos autoestados

$$|\psi\rangle = c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle \quad (5.100)$$

donde $|c_1|^2$ y $|c_2|^2$ corresponden a las probabilidades de encontrar el estado con espín up o espín down respectivamente. Además

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1 \quad (5.101)$$

y ψ es un espinor. La ecuación de Schrödinger para un espinor es, por ejemplo

$$i\frac{\partial\psi_R}{\partial t} = \hat{H}\psi_R \quad (5.102)$$

donde

$$\psi_R = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (5.103)$$

con ψ_i las funciones de onda convencionales. Dicha ecuación debe ser invariante bajo rotaciones en el espacio de espín

$$\psi_R \rightarrow \psi'_R = \exp(i\frac{\sigma^i}{2}\theta_i)\psi_R. \quad (5.104)$$

Esta es justo las ecuaciones que aparecen cuando se hace $m = 0$ en la ec.(5.89). Para ψ_R

$$\hat{H} = i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \quad (5.105)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R \\ &= i\psi_R^\dagger \partial_0 \psi_R + i\psi_R^\dagger \sigma^i \partial_i \psi_R \\ &= i\psi_R^\dagger \partial_0 \psi_R - i\psi_R^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \psi_R \end{aligned} \quad (5.106)$$

Como el Lagrangiano debe ser escalar entonces $\psi_R^\dagger \boldsymbol{\sigma} \psi_R$ debe ser un vector en el espacio de espín. En efecto, escogiendo los coeficientes como

$$\begin{aligned} c_1 &= e^{-i\phi/2} \cos(\theta/2) \\ c_2 &= e^{i\phi/2} \sin(\theta/2) \end{aligned} \quad (5.107)$$

entonces

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = c_1 c_1^* + c_2 c_2^* = \cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2) = 1. \quad (5.108)$$

Para

$$\begin{aligned} \psi_R &= e^{-ip \cdot x} (c_1 |\uparrow\rangle + c_2 |\downarrow\rangle) = e^{-ip \cdot x} \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = e^{-ip \cdot x} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= e^{-ip \cdot x} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi/2} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} = e^{-ip \cdot x} |+\rangle \end{aligned} \quad (5.109)$$

donde

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi/2} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}. \quad (5.110)$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \psi_R^\dagger \sigma_1 \psi_R &= (c_1^\dagger \quad c_2^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= (c_2^\dagger \quad c_1^\dagger) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= c_2^\dagger c_1 + c_1^\dagger c_2 \\ &= \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) e^{-i\phi} + \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) e^{i\phi} \\ &= (e^{-i\phi} + e^{i\phi}) \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \\ &= (2 \cos \phi) \frac{1}{2} \sin \theta \\ &= \cos \phi \sin \theta \end{aligned} \quad (5.111)$$

Similarmente

$$\begin{aligned} \psi_R^\dagger \sigma_2 \psi_R &= \sin \phi \sin \theta \\ \psi_R^\dagger \sigma_3 \psi_R &= \cos \theta \end{aligned} \quad (5.112)$$

Por consiguiente $\psi^\dagger \sigma_i \psi$ son las componentes de un vector unitario $\psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \psi$ con ángulo polar θ y ángulo azimutal ϕ . Posibles escalares se pueden construir con otros vectores disponibles, por ejemplo \mathbf{p} , como en la ec. (5.106).

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} &= \sigma^i \frac{p^i}{|\mathbf{p}|} \\
 &= \sigma^1 \cos \phi \sin \theta + \sigma^2 \sin \phi \sin \theta + \sigma^3 \cos \theta \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta (\cos \phi - i \sin \phi) \\ \sin \theta (\cos \phi - i \sin \phi) & -\cos \theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.113}$$

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} |+\rangle &= \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi/2} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \\
 &= e^{-i\phi/2} \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \\
 &= e^{-i\phi/2} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos(\theta/2) + \sin \theta \sin(\theta/2) \\ e^{i\phi} [\sin \theta \cos(\theta/2) - \cos \theta \sin(\theta/2)] \end{pmatrix} \\
 &= e^{-i\phi/2} \begin{pmatrix} \cos(\theta - \theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta - \theta/2) \end{pmatrix} \\
 &= e^{-i\phi/2} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \\
 &= + |+\rangle
 \end{aligned} \tag{5.114}$$

(El gorro en este caso, significa vector unitario). Decimos entonces que

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \psi_R = +e^{-ip \cdot x} |+\rangle = +\psi_R \tag{5.115}$$

es un estado de helicidad positiva o derecha. Como $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$ denota la proyección de espín sobre la dirección de movimiento, para la helicidad derecha, dicha proyección es positiva.

Si definimos ademas

$$\psi_L = e^{-ip \cdot x} |-\rangle \tag{5.116}$$

donde

$$|-\rangle = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi/2} \sin(\theta/2) \\ e^{i\phi/2} \cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \tag{5.117}$$

entonces

$$\psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \psi = -(\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) \tag{5.118}$$

y

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \psi_L = -e^{-ip \cdot x} |-\rangle = -\psi_L \tag{5.119}$$

ψ es un estado de helicidad negativa o izquierda. Además

$$\langle - | - \rangle = \langle + | + \rangle = 1 \quad \langle + | - \rangle = \langle - | + \rangle = 0 \tag{5.120}$$

donde $\langle - | = | - \rangle^\dagger$, etc.

5.5. Solución de partícula libre

Consideraremos inicialmente dos casos $m^2 \gg \mathbf{p}^2$ y $m^2 \ll \mathbf{p}^2$.

De la ecuación relativista

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2, \quad (5.121)$$

tenemos que para el caso no relativista $m^2 \gg \mathbf{p}^2$, podemos tomar $\mathbf{p} = 0$, de modo que

$$E^2 = m^2 \Rightarrow E = \pm m \quad (5.122)$$

La aparición de soluciones de Energía negativa. . .

A $\mathbf{p} = 0$ proponemos las soluciones de energía positiva $E = +m$

$$\psi_L = u_L e^{-iEt} = \psi_L = u_L e^{-imt} \quad \psi_R = u_R e^{-iEt} = u_R e^{-imt} \quad (5.123)$$

En este caso las ecs. (5.89) se reducen a

$$\begin{aligned} i\partial_0 \psi_L - m\psi_R &= 0 \\ i\partial_0 \psi_R - m\psi_L &= 0 \end{aligned} \quad (5.124)$$

de modo que para que (5.123) sea solución, se debe satisfacer que

$$u_L = u_R = u \quad (5.125)$$

con

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = |+\rangle. \quad (5.126)$$

El espinor completo es

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = e^{-imt} \begin{pmatrix} |+\rangle \\ |+\rangle \end{pmatrix} \quad (5.127)$$

Con norma

$$\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = |+\rangle^\dagger |+\rangle + |+\rangle^\dagger |+\rangle = 1 \quad (5.128)$$

Para el caso relativista $m^2 \ll \mathbf{p}^2$, podemos hacer $m = 0$ y las ecuaciones (5.89) se desacoplan

$$\begin{aligned} i\partial_0 \psi_L - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \psi_L &= 0 \\ i\partial_0 \psi_R + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \psi_R &= 0 \end{aligned} \quad (5.129)$$

Proponemos como soluciones de energía positiva

$$\psi_L = u_L e^{-ip \cdot x} = \psi_L = u_L e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} \quad \psi_R = u_R e^{-ip \cdot x} = u_R e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} \quad (5.130)$$

reemplazando en las ecs. (5.129) tenemos

$$\begin{aligned} E\psi_L + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi_L &= 0 \\ E\psi_R - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi_R &= 0 \end{aligned} \quad (5.131)$$

De modo que para que las ecs. (5.130) sean solución se debe satisfacer que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{p}}{E} \psi_L &= -\psi_L \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{p}}{E} \psi_R &= \psi_R\end{aligned}\quad (5.132)$$

pero de la ec. (5.121), tenemos que para $m = 0$, $E = |\mathbf{p}|$, y $\mathbf{p}/E = \mathbf{p}/|\mathbf{p}| = \hat{\mathbf{p}}$. Entonces

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \psi_L &= -\psi_L \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \psi_R &= \psi_R\end{aligned}\quad (5.133)$$

Comparando con las ecuaciones (5.115) y (5.119) vemos que para las soluciones de energía positiva $\psi_{R,L}$ corresponden en efecto a estado de helicidad derecha e izquierda respectivamente. Explícitamente

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \psi_L = e^{-ip \cdot x} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} |-\rangle = -e^{-ip \cdot x} |-\rangle = -\psi_L \quad (5.134)$$

El espinor de cuatro componentes para la solución de energía positiva es

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = e^{-ip \cdot x} \begin{pmatrix} |-\rangle \\ |+\rangle \end{pmatrix} \quad (5.135)$$

$$\begin{aligned}\bar{\psi} \psi &= \bar{u} u = \psi^\dagger \gamma^0 \psi \\ &= (|-\rangle^\dagger \quad |+\rangle^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |-\rangle \\ |+\rangle \end{pmatrix} \\ &= (\langle -| \quad \langle +|) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |-\rangle \\ |+\rangle \end{pmatrix} \\ &= (\langle +| \quad \langle -|) \begin{pmatrix} |-\rangle \\ |+\rangle \end{pmatrix} \\ &= \langle +|-\rangle + \langle -|+\rangle = 0\end{aligned}\quad (5.136)$$

Es convención escoger la normalización del espinor de Dirac tal que

$$\bar{u} u = 2m \quad (5.137)$$

que de hecho es cero cuando $m = 0$.

Para las soluciones de energía negativa tenemos

$$\hat{\psi}_L = u_L e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + Et)} \quad \hat{\psi}_R = u_R e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + Et)} \quad (5.138)$$

Para explorar las características de esta solución podemos reemplazar en la ec. (5.131) $E \rightarrow -E$, $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$, de modo que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \hat{\psi}_L &= +\hat{\psi}_L \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \hat{\psi}_R &= -\hat{\psi}_R\end{aligned}\quad (5.139)$$

De modo que la antipartícula de una partícula de helicidad izquierda tiene helicidad derecha. Dentro de los errores experimentales actuales se puede afirmar que en la naturaleza solo se ha observado el neutrino izquierdo y su correspondiente antineutrino derecho.

Para $m \neq 0$, tenemos de la ecs. (5.89) y (5.130) (ver ec. (5.131))

$$\begin{aligned} E\psi_L + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi_L &= m\psi_R \\ E\psi_R - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi_R &= m\psi_L \end{aligned} \quad (5.140)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left(\frac{E + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m} \right) \psi_L &= \psi_R \\ \left(\frac{E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m} \right) \psi_R &= \psi_L. \end{aligned} \quad (5.141)$$

En este caso sin embargo, la helicidad no esta bien definida y sólo podemos afirmar que ψ_L corresponde a la solución que tiene mayor probabilidad de ser izquierda que derecha. Para calcular dicha probabilidad es necesario especificar los espinores $u_{L,R}$ (ver [2], Capítulo 6). El resultado es que la probabilidad de que ψ_R sea derecho se obtiene de

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}|\psi_R\rangle &= +\frac{1}{2} \left(1 + \frac{v}{c} \right) |\psi_R\rangle \rightarrow \begin{cases} +|\psi_R\rangle & v \rightarrow c \quad (\text{relativistic}) \\ +\frac{1}{2}|\psi_R\rangle & v \rightarrow 0 \quad (\text{non-relativistic}) \end{cases} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}|\psi_L\rangle &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{v}{c} \right) |\psi_R\rangle \end{aligned} \quad (5.142)$$

mientras que la probabilidad de que sea izquierdo se obtiene de

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}|\psi_R\rangle &= +\frac{1}{2} \left(1 - \frac{v}{c} \right) |\psi_R\rangle \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}|\psi_L\rangle &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{v}{c} \right) |\psi_R\rangle \end{aligned} \quad (5.143)$$

Si en un decaimiento β solo se emiten electrones izquierdos, el grado de polarización del electrón emitido es, usando la ec. (5.143)

$$\langle \psi_R | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} | \psi_R \rangle + \langle \psi_L | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} | \psi_L \rangle = +\frac{1}{2} \left(1 - \frac{v}{c} \right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v}{c} \right) = -\frac{v}{c} \quad (5.144)$$

El grafico de polarización versus $-v/c$, [2] (§9.1), debe corresponder a una línea recta de pendiente 45°. Si sólo se emiten electrones derechos sería

$$+\frac{1}{2} \left(1 + \frac{v}{c} \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v}{c} \right) = \frac{v}{c} \quad (5.145)$$

Mientras que si se emiten por igual electrones derechos e izquierdos la polarización total sería cero.

Las soluciones en ec. (5.141) pueden ser intercambiadas por $\psi_L \rightarrow -\psi_R$. Esto se puede ver como una transformación de paridad definida por

$$\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r} \qquad t \rightarrow t \qquad \psi_L \leftrightarrow \psi_R. \quad (5.146)$$

De aquí el nombre de la transformación. Como $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$ y $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, entonces

$$\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p} \qquad \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}, \quad (5.147)$$

Entonces es de esperarse que el momentum angular intrínseco, transforme como el momentum angular, y

$$\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S} \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\sigma} \rightarrow \boldsymbol{\sigma}. \quad (5.148)$$

Bajo la transformación de paridad

$$\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p} \qquad \boldsymbol{\sigma} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} \qquad \psi_L \leftrightarrow \psi_R, \quad (5.149)$$

Las ecuaciones (5.141) quedan invariantes. Además bajo dicha transformación

$$\sigma^\mu \partial_\mu = \sigma^0 \partial_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \rightarrow \sigma^0 \partial_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla = \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \quad (5.150)$$

de modo que el Lagrangiano correspondiente, dado en la ec. (C.24) también es invariante bajo la transformación de paridad

$$\sigma^\mu \partial_\mu \rightarrow \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \qquad \psi_L \leftrightarrow \psi_R \quad (5.151)$$

5.5.1. Ecuaciones de Euler–Lagrange

Siguiendo los mismos procedimientos anteriores debemos llegar a los siguientes resultados. Para el campo Ψ

$$(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\Psi = 0, \quad (5.152)$$

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu G_\nu^a)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G_\nu^a} \\ &= \partial_\mu \left\{ -\tilde{G}_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_s f_{dbc} G_b^\rho G_c^\sigma \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu G_\nu^a)} (\partial_\rho G_\sigma^d - \partial_\sigma G_\rho^d) \right\} - g_s \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi \\ & \quad + \frac{g_s}{2} f^{dbc} \tilde{G}_d^{\rho\sigma} (\delta_{\rho\nu} \delta_{ba} G_\sigma^c + G_\rho^b \delta_{\sigma\nu} \delta_{ca}) + \frac{g_s}{4} f^{ibc} f_{ide} (g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} G_\alpha^b G_\beta^c G_\rho^d G_\sigma^e) \\ &= \partial_\mu \left\{ -\tilde{G}_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_s f_{dbc} G_b^\rho G_c^\sigma (\delta_{\rho\mu} \delta_{\sigma\nu} \delta_{da} - \delta_{\sigma\mu} \delta_{\rho\nu} \delta_{da}) \right\} - g_s \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi \\ & \quad + \frac{g_s}{2} f^{dac} \tilde{G}_d^{\nu\sigma} G_\sigma^c + \frac{g_s}{2} f^{dba} \tilde{G}_d^{\rho\nu} G_\rho^b \\ & \quad + \frac{g_s}{4} f^{ibc} f_{ide} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} (\delta_{\alpha\nu} \delta_{ba} G_\beta^c G_\rho^d G_\sigma^e + G_\alpha^b \delta_{\beta\nu} \delta_{ca} G_\rho^d G_\sigma^e + G_\alpha^b G_\beta^c \delta_{\rho\nu} \delta_{da} G_\sigma^e + G_\alpha^b G_\beta^c G_\rho^d \delta_{\sigma\nu} \delta_{ea}) \\ &= -\partial_\mu \left\{ \tilde{G}_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu + \frac{1}{2} g_s f_{abc} G_b^\nu G_c^\mu \right\} - g_s \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi \\ & \quad - \frac{g_s}{2} f^{adc} \tilde{G}_d^{\nu\sigma} G_\sigma^c - \frac{g_s}{2} f^{adb} \tilde{G}_d^{\nu\rho} G_\rho^b \\ & \quad + \frac{g_s}{4} f^{iac} f_{ide} g^{\rho\nu} g^{\sigma\beta} G_\beta^c G_\rho^d G_\sigma^e + \frac{g_s}{4} f^{iba} f_{ide} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\nu} G_\alpha^b G_\rho^d G_\sigma^e + \frac{g_s}{4} f^{ibc} f_{iae} g^{\nu\alpha} g^{\sigma\beta} G_\alpha^b G_\beta^c G_\sigma^e \\ & \quad + \frac{g_s}{4} f^{ibc} f_{ida} g^{\rho\alpha} g^{\nu\beta} G_\alpha^b G_\beta^c G_\rho^d. \end{aligned} \quad (5.153)$$

Desarrollando los cuatro últimos términos, tenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{g_s}{4} f^{iac} f_{ide} g^{\rho\nu} g^{\sigma\beta} G_\beta^c G_\rho^d G_\sigma^e + \frac{g_s}{4} f^{iba} f_{ide} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\nu} G_\alpha^b G_\rho^d G_\sigma^e + \frac{g_s}{4} f^{ibc} f_{iae} g^{\nu\alpha} g^{\sigma\beta} G_\alpha^b G_\beta^c G_\sigma^e \\
& + \frac{g_s}{4} f^{ibc} f_{ida} g^{\rho\alpha} g^{\nu\beta} G_\alpha^b G_\beta^c G_\rho^d \\
& = \frac{g_s}{4} f^{iac} f_{ide} G_d^\nu G_c^\mu G_\mu^e + \frac{g_s}{4} f^{iba} f_{ide} G_e^\nu G_b^\mu G_\mu^d + \frac{g_s}{4} f^{ibc} f_{iae} G_b^\nu G_c^\mu G_\mu^e + \frac{g_s}{4} f^{ibc} f_{ida} G_c^\nu G_b^\mu G_\mu^d \\
& = \frac{g_s}{4} f^{dac} f_{dje} G_j^\nu G_c^\mu G_\mu^e + \frac{g_s}{4} f^{dca} f_{dje} G_e^\nu G_c^\mu G_\mu^j + \frac{g_s}{4} f^{dbc} f_{dae} G_b^\nu G_c^\mu G_\mu^e + \frac{g_s}{4} f^{dbc} f_{dea} G_c^\nu G_b^\mu G_\mu^e \\
& = \frac{g_s}{4} f^{dac} f_{dje} G_j^\nu G_c^\mu G_\mu^e + \frac{g_s}{4} f^{dca} f_{dje} G_e^\nu G_c^\mu G_\mu^j + \frac{g_s}{4} f_{dac} f^{dje} G_j^\nu G_c^\mu G_\mu^e + \frac{g_s}{4} f_{dca} f^{dje} G_e^\nu G_j^\mu G_\mu^c \\
& = -\frac{g_s}{4} f^{abc} G_\mu^b f_{cej} G_e^\mu G_j^\nu - \frac{g_s}{4} f^{abc} G_\mu^b f_{cej} G_e^\mu G_j^\nu - \frac{g_s}{4} f_{abc} G_\mu^b f_{cej} G_e^\mu G_j^\nu - \frac{g_s}{4} f_{abc} G_\mu^b f_{cej} G_e^\mu G_j^\nu \\
& = -g_s f_{abc} G_\mu^b f^{cej} G_e^\mu G_j^\nu
\end{aligned} \tag{5.154}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
& \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu G_\nu^a)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G_\nu^a} \\
& = \partial_\mu \left(-\tilde{G}_a^{\mu\nu} - g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \right) - g_s \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi - g_s f^{acd} G_\mu^c \tilde{G}_d^{\mu\nu} - g_s f_{acd} G_\mu^c f^{dej} G_e^\mu G_j^\nu \\
& = -\partial_\mu G_a^{\mu\nu} - g_s f^{acd} G_\mu^c G_d^{\mu\nu} - g_s \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi = 0.
\end{aligned} \tag{5.155}$$

Entonces las Ecuaciones de Euler Lagrange para G_ν^a , son

$$\partial_\mu G_a^{\mu\nu} + g_s f^{acd} G_\mu^c G_d^{\mu\nu} = -g_s \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi. \tag{5.156}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_\mu G_a^{\mu\nu} - i g_s f^{acd} G_\mu^c G_d^{\mu\nu} = -g_s \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi \\
& \delta_d^a \partial_\mu G^{\mu\nu d} - i g_s (-i f^{cad}) G_\mu^c G_d^{\mu\nu} = -g_s \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi \Psi \\
& \delta_d^a \partial_\mu G^{\mu\nu d} - i g_s \left[\tilde{\Lambda}_c \right]_d^a G_\mu^c G^{\mu\nu d} = -g_s \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi \Psi \\
& [\mathcal{D}_\mu]^a_d G^{\mu\nu d} = -g_s \bar{\Psi} \gamma^\nu \Lambda^a \Psi \\
& \mathcal{D}_\mu \mathbf{G}^{\mu\nu} = -g_s \bar{\Psi} \gamma^\nu \mathbf{\Lambda} \Psi.
\end{aligned} \tag{5.157}$$

por lo tanto

$$\mathcal{D}_\mu \mathbf{G}^{\mu\nu} = \mathbf{J}^\nu \tag{5.158}$$

donde $\mathbf{G}^{\mu\nu}$ y $\mathbf{\Lambda}$ son vectores en el espacio $SU(3)$. Además, hemos definido la derivada covariante en la representación adjunta como matrix 8×8

$$\mathcal{D}_\mu = \mathbf{1} \partial_\mu - i g_s \tilde{\Lambda}_a G_\mu^a \tag{5.159}$$

y finalmente

$$J_a^\mu = -g_s \bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi. \quad (5.160)$$

La ec.(5.157) puede reescribirse como:

$$\partial_\mu G_a^{\mu\nu} = -g_s \left[f_{abc} G_\mu^b G_c^{\mu\nu} + \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi \right] \quad (5.161)$$

y usando el hecho que $\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$:

$$\begin{aligned} \partial_\nu \partial_\mu G_a^{\mu\nu} &= \partial_\nu \partial_\mu \tilde{G}^{\mu\nu} + g_s \partial_\nu \partial_\mu (f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu) \\ &= 0 + \frac{1}{2} [g_s \partial_\nu \partial_\mu (f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu) + g_s \partial_\nu \partial_\mu (f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu)] \\ &= \frac{1}{2} [g_s \partial_\nu \partial_\mu (f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu) + g_s \partial_\mu \partial_\nu (f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu)] \\ &= \frac{1}{2} [g_s \partial_\nu \partial_\mu (f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu) + g_s \partial_\nu \partial_\mu (f_{acb} G_c^\nu G_b^\mu)] \\ &= \frac{1}{2} [g_s \partial_\nu \partial_\mu (f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu) - g_s \partial_\mu \partial_\nu (f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu)] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.162)$$

como en el caso Abelian, tenemos la corriente conservada

$$\partial_\nu j^\nu = 0, \quad (5.163)$$

donde

$$j_a^\nu = -g_s \left[f_{abc} G_\mu^b G_c^{\mu\nu} + \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi \right]. \quad (5.164)$$

El primer término corresponde a las autointeracciones y el segundo a la corriente de color generada por los quarks.

5.5.2. Corrientes conservadas

$$\mathcal{E}_1 a_1 + \mathcal{E}_2 a_2 + \mathcal{E}_3 a_3 = \partial_\mu (\mathcal{E}_1 b_1^\mu + \mathcal{E}_2 b_2^\mu + \mathcal{E}_3 b_3^\mu). \quad (5.165)$$

Asumimos que la ecuaciones de Euler Lagrange para los fermiones se satisfacen (además $b_1^\mu = b_2^\mu =$, entonces

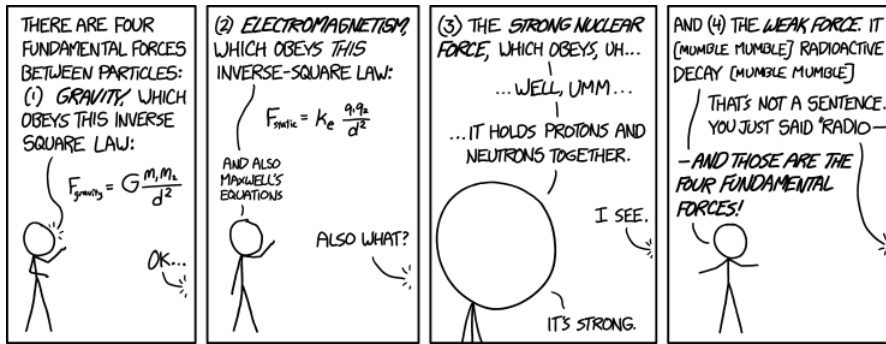
$$\mathcal{E}_3 a_3 = \partial_\mu (\mathcal{E}_3 b_3^\mu). \quad (5.166)$$

Como $a_3 = f_a^{bc} G_c^\mu$, $b_3^\mu = \delta_\nu^\mu / g_s$, entonces

$$\left\{ \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu G_\nu^a)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G_\nu^a} \right\} f_a^{bc} G_c^\mu = \frac{1}{g_s} \partial_\mu \left\{ \left(\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu G_\nu^a)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G_\nu^a} \right) \delta_\nu^\rho \right\} \quad (5.167)$$

Capítulo 6

Modelo Estándar



- Of these four forces, there's one we don't really understand.
- Is it the weak force or the strong?
- It's gravity.

<http://xkcd.com/1489/>

6.1. Contenido de partículas

La materia conocida esta constituida de un conjunto de *fermiones de Dirac* elementales definidos en la Tabla 6.1 donde podemos definir los tripletes de color de quarks como

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Tipo	Nombre	Simbolo	Carga
leptones	electrón	e	-1
	neutrino	ν	0
quarks	quark up	u_1, u_2, u_3	$2/3$
	quark down	d_1, d_2, d_3	$-1/3$

Tabla 6.1: Fermiones elementales: The symbol represent both the particle, e.g e^- , as the antiparticle, e.g, e^+ . The lectric chage is given in units of the electron chage e

Nombre	Símbolo	$(SU(3)_c, SU(2)_L, U(1)_Y)$
$\Xi_{1\alpha}$: Doblete leptónico	$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, Y_L)$
$\Xi_{2\alpha}$: Doblete de quarks	$Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, Y_Q)$
η_1^α : positrón izquierdo	$(e_R)^\dagger$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, Y_E)$
η_2^α : anti-up izquierdo	$(u_R)^\dagger$	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, Y_U)$
η_3^α : anti-down izquierdo	$(d_R)^\dagger$	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, Y_D)$

Tabla 6.2: Espinores de Weyl izquierdos para la primera generación del modelo estándar

Este conjunto de partículas esta bien definido para interacciones que conservan paridad como la interacción electromagnética o la fuerte. Para introducir la interacciones débiles usaremos más bien espinores de Weyl

6.2. Interacciones débiles

En el contexto de las interacciones débiles un e_L es completamente equivalente a un campo ν_L . Es decir, el Lagrangiano debe ser invariante bajo una transformación $SU(2)_L$ de esos campos. La diferencia entre ellos son sus respectivas cargas electricas y sus masas. Asumiendo que ambos campos tienen una misma hipercarga, asociada a una nueva simetría Abelianna $U(1)_Y$, podríamos esperar que la corriente electromagnética apropiada pueda obtenerse a partir del Grupo semisimple $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Además las respectivas masas se podrían obtener a partir del mecanismo de Higgs.

La simetría $SU(2)_L$ entre las partes izquierdas del neutrino y el electrón, y entre las partes izquierdas de los quarks up y down, se establece definiendo los dobletes:

$$L \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

De otro lado, La invarianza bajo $U(1)_Y$ requiere que

$$\begin{aligned} Y_L &= Y_{\nu_L} = Y_{e_L} \\ Y_Q &= Y_{u_L} = Y_{d_L}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

El generador de carga eléctrica \hat{Q} , se va obtener a partir de una combinación lineal del generador diagonal de $SU(2)_L$, T_3 , y del generador de hipercarga, Y .

Para considerar las interacciones débiles en conjunto con las interacciones electromagnéticas y fuertes, es conveniente definir los campos de la primera generación en términos de los espinores (ξ_α) y anti-espinores (η^α) de Weyl izquierdos, de acuerdo a las convenciones de la Tabla 3.1. El contenido de partículas con sus propiedades de transformación bajo el Grupo semisimple $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ está dado en la Tabla 6.2

Donde el $\mathbf{3}$ o el $\bar{\mathbf{3}}$ de $SU(3)_c$ quieren decir que, además, para cada quark

$$u_L = \begin{pmatrix} u_{L1} \\ u_{L2} \\ u_{L3} \end{pmatrix} \quad (u_R)^\dagger = ((u_R)^\dagger_1 \quad (u_R)^\dagger_2 \quad (u_R)^\dagger_3), \quad (6.4)$$

etc.

Bajo la simetría $SU(2)_L$, los campos transforman como:

$$\begin{aligned}
 L &\rightarrow L' = \exp(iT^i\theta_i)L \approx (1 + iT^i\theta_i)L \\
 Q &\rightarrow Q' = \exp(iT^i\theta_i)Q \approx (1 + iT^i\theta_i)Q \\
 e_R &\rightarrow e'_R = e_R \\
 u_R &\rightarrow u'_R = u_R \\
 d_R &\rightarrow d'_R = d_R.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

donde

$$T^i = \frac{\tau^i}{2}, \tag{6.6}$$

y τ^i son las matrices de Pauli dadas en la ec. (3.11).

6.2.1. Productos $SU(2)$

Sean A y B C , dobletes $SU(2)$. En el Lagrangiano (6.20), hemos construido invariantes $SU(2)$ de la forma $C^\dagger B$, por ejemplo. Pero hay otra forma de construir el producto invariante

Para los dobletes $SU(2)_L$

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C^1 \\ C^2 \end{pmatrix}, \tag{6.7}$$

podemos definir un producto que es invariante bajo $SU(2)$ como el producto escalar bajo la “métrica” de $SU(2)$

$$\begin{aligned}
 \epsilon^{ab} A_a B_b &\rightarrow \epsilon_{ab} A'_a B'_b = \epsilon_{ab} U_{ac} U_{bd} A_c B_d \\
 &= (U_{11}U_{22} - U_{12}U_{21}) (A_1 B_2 - A_2 B_1) \\
 &= \epsilon^{ab} \det \mathbf{U} A_a B_b \\
 &= \epsilon^{ab} A_a B_b.
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Teniendo en cuenta que

$$\epsilon^{ab} A_a B_b = A_1 B_2 - A_2 B_1. \tag{6.9}$$

Con el contenido de campos de A , siempre es posible definir un nuevo doblete adjunto de $SU(2)$, definido como

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_2^* \\ -A_1^* \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

En tal caso es posible escribir el producto escalar $SU(2)$ es una forma matricial, la cual muestra una invarianza más evidente

$$\begin{aligned}
 \tilde{A} \cdot B &\equiv \epsilon^{ab} \tilde{A}_a B_b = \tilde{A}_1 B_2 - \tilde{A}_2 B_1 \\
 &= A_2^* B_2 - (-A_1^*) B_1 \\
 &= A_2^* B_2 + A_1^* B_1 \\
 &= A_2^* B_2 + A_1^* B_1 \\
 &= \delta^{ac} A_a^* B_c \\
 &= A^\dagger B.
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Usando la correspondiente identidad para los delta de Kronecker

$$\begin{aligned}\epsilon^{ab}\tilde{A}_a B_b &= \delta^{ac} A_a^* B_c \\ &= \epsilon^{ad}\epsilon^{cd} A_a^* B_c,\end{aligned}\tag{6.12}$$

y con el intercambio $a \leftrightarrow d$, tenemos que

$$\begin{aligned}\tilde{A}_a (\epsilon^{ab} B_b) &= \epsilon^{da}\epsilon^{ca} A_d^* B_c \\ &= \epsilon^{ad}\epsilon^{ac} A_d^* B_c \\ &= \epsilon^{ad} A_d^* (\epsilon^{ac} B_c).\end{aligned}\tag{6.13}$$

Por consiguiente

$$\tilde{A}_a = \epsilon^{ad} A_d^*.\tag{6.14}$$

En forma matricial, tenemos

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^* \\ A_2^* \end{pmatrix} \\ &= i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^* \\ A_2^* \end{pmatrix} \\ &= i\tau_2 A^*.\end{aligned}\tag{6.15}$$

En el caso de un doblete de fermiones Ξ , el símbolo \dagger se usa para denotar el conjugado de fermiones de Weyl. El doblete adjunto en ese caso se puede definir como

$$\tilde{\Xi} = i\tau_2 \begin{pmatrix} \Xi_1^\dagger \\ \Xi_2^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Xi_2^* \\ -\Xi_1^* \end{pmatrix}\tag{6.16}$$

Para evitar confusiones con los invariantes $SU(2)$, usaremos entonces la definición de producto escalar en el espacio $SU(2)$ para escribir los correspondientes invariantes, por ejemplo

$$\tilde{\Xi} \cdot \bar{\sigma}^\mu \Xi = \epsilon_{ab} \tilde{\Xi}^a \bar{\sigma}^\mu \Xi^b.\tag{6.17}$$

Para evitar confusión con el conjugado de espinores de Weyl, usaremos el producto escalar con la métrica $SU(2)$ para escribir los correspondientes invariantes.

Simetría gauge local $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$

Los términos de masa de Dirac, usando las convenciones de la Tabla 6.2 no son invariante bajo la simetría $SU(2)_L$ porque no hay forma de escribir términos escalares usando combinaciones los campos Ξ y η . De la ec. (3.127), y usando la definición para los dobletes adjuntos de $SU(2)_L$ en la ec. (6.16), el Lagrangiano más general posible para los campos de la Tabla 6.2 compatibles con las

simetría de Lorentz y el grupo global $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sum_{i=1}^2 i\epsilon_{ab} \tilde{\Xi}_i^a \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \Xi_i^b + \sum_{i=1}^3 i\eta_i \sigma^\mu \partial_\mu \eta_i^\dagger \\
&= \sum_{i=1}^2 i\tilde{\Xi}_i \cdot \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \Xi_i + \sum_{i=1}^3 i\eta_i \sigma^\mu \partial_\mu \eta_i^\dagger \\
&= i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L + i\tilde{Q} \cdot \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu Q + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu e_R + i(u_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu u_R + i(d_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu d_R \\
&= i(\nu_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \nu_L + i(e_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu e_L + i(u_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu u_L + i(d_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu d_L \\
&\quad + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu e_R + i(u_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu u_R + i(d_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu d_R,
\end{aligned} \tag{6.18}$$

donde

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} (e_L)^\dagger \\ -(\nu_L)^\dagger \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} (d_L)^\dagger \\ -(u_L)^\dagger \end{pmatrix}, \tag{6.19}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L &= i\epsilon_{ab} \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L \\
&= i\tilde{L}^1 \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L^2 - i\left(-\tilde{L}^2\right) \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L^1 \\
&= i(e_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu e_L + i(\nu_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \nu_L
\end{aligned}$$

y lo mismo para Q .

Para obtener las interacciones del modelo estándar, reemplazamos las derivadas normales por derivadas covariantes.

Proponemos entonces el Lagrangiano

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= i\tilde{Q} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q + i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L + ie_R^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R + id_R^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R + iu_R^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R \\
&\quad - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{6.20}$$

donde

$$\mathcal{D}^\mu \equiv \partial^\mu - ig_s \frac{\lambda^a}{2} G_a^\mu - ig \frac{\tau^i}{2} W_i^\mu - ig' Y B^\mu. \tag{6.21}$$

y además

$$\begin{aligned}
\Lambda^a &\equiv \frac{\lambda^a}{2}, \quad a = 1, 2, \dots, 8 && 8 \text{ generadores de } SU(3)_c \\
T^i &\equiv \frac{\tau^i}{2}, \quad i = 1, 2, 3 && 3 \text{ generadores de } SU(2)_L \\
Y &&& \text{generador de } U(1)_Y,
\end{aligned}$$

A este nivel, tanto los 15 fermiones de Weyl (cada quark izquierdo y derecho viene en tres colores), como los 12 bosones gauge, *tienen masa nula*. Necesitamos entonces un mecanismo de ruptura espontánea

de simetría para generar por lo menos masa para los tres bosones gauge asociados a la interacción débil.

Además,

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g\epsilon_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \end{aligned} \quad (6.22)$$

y $G_{\mu\nu}$ en ec. ??

6.2.2. Ruptura espontánea de simetría

Todas las partículas en este lagrangiano son no masivas. Esto funciona sólo para los gluones y uno de los bosones gauge abelianos, pero no es realista para los bosones gauge cargados. Para solucionar este problema se postula la existencia de un nuevo doblete escalar complejo (y su correspondiente adjunto de $SU(2)$) con cuatro grados de libertad:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} (\phi^0)^* \\ -\phi^- \end{pmatrix}. \quad (6.23)$$

El “ \pm ” y el superíndice 0, se ponen de forma conveniente para obtener expresiones consistentes. Es claro que $(\phi^+)^* = \phi^-$.

Es posible ahora construir invariantes $SU(2)$ con las siguientes combinaciones de campos similares al del término de masa de Dirac en (3.127)

$$\begin{aligned} -\eta_1 \Xi_1^a \cdot \tilde{\Phi} - \left(\eta_1 \Xi_1^a \cdot \tilde{\Phi} \right)^\dagger &= -\eta_1 \Xi_1^a \cdot \tilde{\Phi} - \text{h.c} \\ &= -\eta_1^b \epsilon_{ab} \Xi_1^a \cdot \tilde{\Phi}^b - \text{h.c} \\ &= -(e_R)^\dagger \epsilon_{ab} L^a \tilde{\Phi}^b - \text{h.c} \\ &= (e_R)^\dagger L^1 \tilde{\Phi}^2 + (e_R)^\dagger L^1 \tilde{\Phi}^2 + \text{h.c} \\ &= (e_R^-)^\dagger \nu_L \phi^- + (e_R^-)^\dagger e_L^- \phi^0 + \text{h.c}, \end{aligned} \quad (6.24)$$

donde h.c, denota el hermítico conjugado de cada término (para garantizar que el Lagrangiano sea real) y hemos puesto la carga del electrón para hacer explícita la conservación de la carga eléctrica.

Note que

$$(e_R)^\dagger \epsilon_{ab} L^a \tilde{\Phi}^b = (e_R)^\dagger L \cdot \tilde{\Phi}. \quad (6.25)$$

El Lagrangiano completo involucrando estos campos es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{Q} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q + i\bar{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R + i(d_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R + i(u_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R \\ &\quad - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ &\quad + \left(\widetilde{\mathcal{D}_\mu \Phi} \right) \cdot \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \tilde{\Phi} \cdot \Phi - \lambda \left(\tilde{\Phi} \cdot \Phi \right)^2 \\ &\quad - \left[h_e (e_R)^\dagger L \cdot \tilde{\Phi}_b + h_d (d_R)^\dagger Q \cdot \tilde{\Phi} + h_u (u_R)^\dagger Q \cdot \Phi + \text{h.c} \right] \\ &= \mathcal{L}_{\text{fermion}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{WBH} - \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

donde $\mu^2 < 0$, y $\lambda > 0$,

$$\tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^*, \quad (6.27)$$

Resumiendo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{fermion}} &= i\tilde{Q} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q + i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L \\ &\quad + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R + i(d_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R + i(u_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R \\ \mathcal{L}_{\text{gauge}} &= -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ \mathcal{L}_{WBH} &= \widetilde{(\mathcal{D}_\mu \Phi)} \cdot \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \tilde{\Phi} \cdot \Phi - \lambda (\tilde{\Phi} \cdot \Phi)^2 \\ -\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &= h_e (e_R)^\dagger L \cdot \tilde{\Phi}_b + h_d (d_R)^\dagger Q \cdot \tilde{\Phi} + h_u (u_R)^\dagger Q \cdot \Phi + \text{h.c} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Para el potencial escalar usaremos la forma más conveniente del producto matricial para el invariante de $SU(2)_L$ por que no hay ambigüedad con el conjugado de un campo escalar.

Para los campos del Lagrangiano, debemos asegurarnos de que todos los términos invariantes gauge locales y renormalizables sean considerados. De hecho un término de interacción entre fermiones y el campo escalar, correspondiente a una interacción de Yukawa son invariantes bajo transformaciones $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ si

$$\begin{aligned} Y_L + Y_{\tilde{\Phi}} - Q_e &= 0 \\ Y_Q + Y_{\tilde{\Phi}} - Q_d &= 0 \\ Y_Q + Y_\Phi - Y_{u_R} &= Y_Q - Y_{\tilde{\Phi}} - Q_u = 0, \end{aligned}$$

De este conjunto de 3 ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} Y_L + Y_Q + Y_{\tilde{\Phi}} &= Q_e + Q_d \\ Y_Q - Y_{\tilde{\Phi}} &= Q_u. \end{aligned} \quad (6.29)$$

las tres hipercargas para los dobletes

$$Y_L = -\frac{1}{2}, \quad Y_\Phi = \frac{1}{2}, \quad Y_Q = \frac{1}{6}. \quad (6.30)$$

En el análisis anterior hemos fijado $Y_{\tilde{\Phi}} = -Y_\Phi$.

Bajo una transformación gauge local las derivadas covariantes de los campos (y por consiguiente los campos) transforman como:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu L &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu L)' = \exp(-i\theta_i T^i - i\beta Y_L) \mathcal{D}_\mu L \\ \mathcal{D}_\mu Q &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu Q)' = \exp(-i\alpha_a \Lambda^a - i\theta_i T^i - i\beta Y_Q) \mathcal{D}_\mu Q \\ \mathcal{D}_\mu \Phi &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu \Phi)' = \exp(-i\theta_i T^i - i\beta Y_\Phi) \mathcal{D}_\mu \Phi \\ \mathcal{D}_\mu e_R &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu e_R)' = \exp(-i\beta Y_{e_R}) \mathcal{D}_\mu e_R = \exp(-i\beta Q_{e_R}) \mathcal{D}_\mu e_R \\ \mathcal{D}_\mu d_R &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu d_R)' = \exp(-i\alpha_a \Lambda^a - i\beta Y_{d_R}) \mathcal{D}_\mu d_R = \exp(-i\alpha_a \Lambda^a - i\beta Q_{d_R}) \mathcal{D}_\mu d_R \\ \mathcal{D}_\mu u_R &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu u_R)' = \exp(-i\alpha_a \Lambda^a - i\beta Y_{u_R}) \mathcal{D}_\mu u_R = \exp(-i\alpha_a \Lambda^a - i\beta Q_{u_R}) \mathcal{D}_\mu u_R. \end{aligned} \quad (6.31)$$

donde $Q_{e_R} = -1$, etc, son las cargas eléctricas asociadas a los campos.

Sin perdida de generalidad los cuatro grados de libertad de Φ , pueden escribirse en la forma

$$\Phi = e^{iG_j(x)T^j} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[H(x) + v] \end{pmatrix}. \quad (6.32)$$

El potencial escalar, definido por

$$V(\Phi) = \mu^2 \tilde{\Phi} \cdot \Phi + \lambda (\tilde{\Phi} \cdot \Phi)^2 \quad (6.33)$$

con $\mu^2 < 0$ y $\lambda > 0$.

6.2.3. Spontaneous symmetry breaking in $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$

Retornando al doblete de Higgs del modelo estándar en la ec. (6.32), los cuatro grados de libertad de Φ , pueden escribirse en forma polar con la parte real neutra desplazada para generar la ruptura espontánea de la simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$

$$\Phi = e^{iG_j T^j} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(H(x) + v) \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

Para $SU(2)_L \times U(1)_Y$ tenemos cuatro generadores y cuatro bosones gauge. De acuerdo a la parametrización en ec. (6.34) esperamos que aparezcan tres bosones de Goldstone y un campo de Higgs con masa, de manera que quedará un generador no roto correspondiente a una simetría remanente del vacío $U(1)_Q$

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \xrightarrow{\langle \tilde{\Phi} \rangle} U(1)_Q. \quad (6.35)$$

Se espera entonces que el espectro consista de un bosón de Higgs, tres bosones gauge masivos, y un bosón gauge sin masa.

Podemos hacer una transformación gauge similar a la de la ec. (??) sobre el campo $\tilde{\Phi}$, tal que

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(H(x) + v) \end{pmatrix}, \quad (6.36)$$

que define el *gauge unitario*. En adelante sin embargo omitiremos las primas sobre los campos transformados Φ' y $W'_{\mu\nu}$.

Comenzaremos analizando la parte escalar del Lagrangiano del Modelo dada en la ec. (6.28)

$$\mathcal{L}_{WBH} = \frac{1}{2} \left[\mathcal{D}^\mu \left(\widetilde{\begin{pmatrix} 0 \\ H(x) + v \end{pmatrix}} \right) \cdot \mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ H(x) + v \end{pmatrix} - V(H) \right], \quad (6.37)$$

donde $V(H)$ dado en la ec. (4.13), incluye el término de masa para el bosón de Higgs (4.14):

$$m_H^2 = 2 |\mu^2| = 2\lambda v^2 \quad (6.38)$$

De la ec. (4.50)

$$W_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}W_3 & \frac{1}{\sqrt{2}}W_\mu^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}W_\mu^- & -\frac{1}{2}W_\mu^3 \end{pmatrix}. \quad (6.39)$$

\mathcal{D}_μ corresponde a la matrix 2×2 , dada en la ec. (4.52), con el reemplazo

$$\mp \frac{i}{2} g W_\mu^3 \rightarrow -i \left(\pm \frac{1}{2} g W_\mu^3 + g' Y B_\mu \right) \quad (6.40)$$

$$\mathcal{D}_\mu = \begin{pmatrix} \partial_\mu - i \left(\frac{1}{2} g W_\mu^3 + g' Y B_\mu \right) & -\frac{i}{\sqrt{2}} g W_\mu^+ \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} g W_\mu^- & \partial_\mu - i \left(-\frac{1}{2} g W_\mu^3 + g' Y B_\mu \right) \end{pmatrix}. \quad (6.41)$$

Entonces

$$\mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ H(x) + v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} g W_\mu^+ (H + v) \\ \partial_\mu H - i \left(-\frac{1}{2} g W_\mu^3 + g' Y_{\tilde{\Phi}} B_\mu \right) (H + v) \end{pmatrix}. \quad (6.42)$$

De modo que, como se mostro en

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WBH} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} g \widetilde{W^{\mu+}} (H + v) \\ \partial^\mu H - i \left(-\frac{1}{2} g W_3^\mu + g' Y_{\tilde{\Phi}} B^\mu \right) (H + v) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} g W_\mu^+ (H + v) \\ \partial_\mu H - i \left(-\frac{1}{2} g W_\mu^3 + g' Y_{\tilde{\Phi}} B_\mu \right) (H + v) \end{pmatrix} - V(H) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial^\mu H + i \left(-\frac{1}{2} g W_3^\mu + g' Y_{\tilde{\Phi}} B^\mu \right) (H + v) \\ \frac{i}{\sqrt{2}} g W^{\mu-} (H + v) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} g W_\mu^+ (H + v) \\ \partial_\mu H - i \left(-\frac{1}{2} g W_\mu^3 + g' Y_{\tilde{\Phi}} B_\mu \right) (H + v) \end{pmatrix} - V(H) \\ &= \frac{1}{4} g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ (H + v)^2 - V(H) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\partial^\mu H + i \left(-\frac{1}{2} g W_3^\mu + g' Y_{\tilde{\Phi}} B^\mu \right) (H + v) \right] \times \\ &\quad \left[\partial_\mu H - i \left(-\frac{1}{2} g W_\mu^3 + g' Y_{\tilde{\Phi}} B_\mu \right) (H + v) \right] \\ &= -V(H) + \frac{1}{4} g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ (H + v)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} g W_3^\mu + g' Y_{\tilde{\Phi}} B^\mu \right)^2 (H + v)^2 \end{aligned} \quad (6.43)$$

donde la última línea corresponde a la magnitud del “número” complejo:

$$\left[\partial_\mu H - i \left(-\frac{1}{2} g W_\mu^3 + g' Y_{\tilde{\Phi}} B_\mu \right) (H + v) \right] \quad (6.44)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WBH} &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - V(H) \\ &\quad + \left(\frac{gv}{4} \right)^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{4} g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ H^2 + \frac{1}{2} v g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ H + \mathcal{L}_{ZAH}, \end{aligned} \quad (6.45)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ZAH} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} g^2 W_3^\mu W_\mu^3 - \frac{1}{2} g g' Y_{\tilde{\Phi}} W_3^\mu B_\mu - \frac{1}{2} g g' Y_{\tilde{\Phi}} W_3^\mu B_\mu + g'^2 Y_{\tilde{\Phi}}^2 B^\mu B_\mu \right) \times \\ &\quad (H^2 + 2vH + v^2) \end{aligned} \quad (6.46)$$

Haciendo $Y_{\hat{\Phi}} = 1/2$ como en la ec. (6.30),

$$\mathcal{L}_{ZAH} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} W_3^\mu & B^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} (H^2 + 2vH + v^2) \quad (6.47)$$

Sea

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g & g' \\ -g' & g \end{pmatrix}, \quad (6.48)$$

con $\tan \theta_W = g'/g$, tal que $g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W$, como en la ec. (??). Note que V es una matrix ortogonal que satisface $VV^T = V^TV = \mathbf{1}$. Si (ver ec. (??)),

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = V^T \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (6.49)$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ZAH} &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} W_3^\mu & B^\mu \end{pmatrix} VV^T \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} VV^T \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} (H^2 + 2vH + v^2) \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} Z^\mu & A^\mu \end{pmatrix} \left[V^T \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} V \right] \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} (H^2 + 2vH + v^2) \end{aligned} \quad (6.50)$$

$$\begin{aligned} V^T \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} V &= \frac{1}{g^2 + g'^2} \begin{pmatrix} g^3 + gg'^2 & -g^2g' - g'^3 \\ +g^2g' - g^2g' & -gg'^2 + gg'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & g' \\ -g' & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{g^2 + g'^2} \begin{pmatrix} g^3 + gg'^2 & -g^2g' - g'^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & g' \\ -g' & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{g^2 + g'^2} \begin{pmatrix} g^4 + g^2g'^2 + g^2g'^2 + g'^4 & g^3g' + gg'^3 - g^3g' - gg'^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ZAH} &= \frac{1}{2} \left(\frac{g^2 + g'^2}{4} \right) Z^\mu Z_\mu (H^2 + 2vH + v^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{g}{2} \right)^2 (1 + \tan^2 \theta_W) Z^\mu Z_\mu (H^2 + 2vH + v^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 Z^\mu Z_\mu (H^2 + 2vH + v^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{gv}{2 \cos \theta_W} \right)^2 Z^\mu Z_\mu + \frac{1}{2} \left(\frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 Z^\mu Z_\mu H^2 \\ &\quad + \left(\frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 v Z^\mu Z_\mu H \end{aligned} \quad (6.52)$$

Retornando a la ec. (6.45), tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{WBH} &= \widetilde{(\mathcal{D}_\mu \Phi)} \cdot \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \tilde{\Phi} \cdot \Phi - \lambda (\tilde{\Phi} \cdot \Phi)^2 \\
&= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - V(H) \\
&\quad + \frac{1}{4} g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ H^2 + \frac{1}{2} v g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ H \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 Z^\mu Z_\mu H^2 + \left(\frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 v Z^\mu Z_\mu H \\
&\quad + \frac{1}{2} m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu,
\end{aligned} \tag{6.53}$$

donde:

- Masas gauge:

$$m_W = \frac{gv}{2} \quad m_Z = \frac{gv}{2 \cos \theta_W}, \tag{6.54}$$

y

$$m_Z = \frac{m_W}{\cos \theta_W}. \tag{6.55}$$

■

$$\begin{aligned}
V(H) &= \frac{1}{2} m_H^2 H^2 + \lambda v H^3 + \frac{1}{4} \lambda H^4 \\
&= \frac{1}{2} m_H^2 H^2 + \frac{m_H^2}{2v} H^3 + \frac{1}{4} \frac{m_H^2}{2v^2} H^4 \\
&= \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \left(1 + \frac{H}{v} + \frac{H^2}{4v^2} \right).
\end{aligned} \tag{6.56}$$

con

$$m_H^2 = -2\mu^2 = 2\lambda v^2. \tag{6.57}$$

■

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}, \tag{6.58}$$

tal que

$$g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W. \tag{6.59}$$

6.2.4. Lagrangiano de Yukawa

En el gauge unitario

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &= h_e (e_R)^\dagger \epsilon^{ab} L_a \tilde{\Phi}_b + h_d (d_R)^\dagger \epsilon^{ab} Q_a \tilde{\Phi}_b + h_u (u_R)^\dagger \epsilon_{ab} Q_a \Phi_b + \text{h.c} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} [h_e ((e_L)^\dagger e_R + (e_R)^\dagger e_L) + h_d ((d_L)^\dagger d_R + (d_R)^\dagger d_L) + h_u ((u_L)^\dagger u_R + (u_R)^\dagger u_L)] \times \\
&\quad [H(x) + v].
\end{aligned} \tag{6.60}$$

Definiendo los fermiones de Dirac, términos de espinores de Weyl como

$$e = \begin{pmatrix} e_L \\ e_R \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_L \\ d_R \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_L \\ u_R \end{pmatrix} \quad (6.61)$$

y usando la ec. (3.138), podemos escribir

$$\mathcal{L} = \frac{v}{\sqrt{2}} (h_e \bar{e}e + h_d \bar{d}d + h_u \bar{u}u) \left[\frac{H(x)}{v} + 1 \right],$$

definiendo

$$m_f = \frac{h_f v}{\sqrt{2}} \quad (6.62)$$

tenemos

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = m_e \bar{e}e + m_d \bar{d}d + m_u \bar{u}u + \frac{m_e}{v} \bar{e}e H + \frac{m_d}{v} \bar{d}d H + \frac{m_u}{v} \bar{u}u H. \quad (6.63)$$

Vemos entonces que si la masa de los fermiones no es fundamental sino emergente, necesariamente se predice la existencia de interacciones entre fermiones y el Higgs!

6.2.5. interacciones Fermión-gauge

De la ec. (6.28) tenemos

$$\mathcal{L}_{\text{fermion}} = i\tilde{Q} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q + i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L + ie_R^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R + id_R^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R + iu_R^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R. \quad (6.64)$$

Donde,

$$\begin{aligned} \tilde{Q} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q &= \epsilon_{ab} \tilde{Q}^a \bar{\sigma}^\mu (\mathcal{D}_\mu Q)^b \\ \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L &= \epsilon_{ab} \tilde{L}^a \bar{\sigma}^\mu (\mathcal{D}_\mu L)^b. \end{aligned} \quad (6.65)$$

Los términos de interacción generados por la simetría gauge para el campo L son:

$$\begin{aligned} i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L - i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L &= i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu (-igT_i W_\mu^i - ig' Y_L B_\mu) L \\ &= \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu (gT_1 W_\mu^1 + gT_2 W_\mu^2 + gT_3 W_\mu^3 + g' Y_L B_\mu) L \\ &= \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \left[\frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & 0 \end{pmatrix} + gT_3 W_\mu^3 + g' Y_L B_\mu \right] L \\ &= i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & 0 \end{pmatrix} L + \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu [gT_3 W_\mu^3 + g' Y_L B_\mu] L \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \begin{pmatrix} e_L W_\mu^+ \\ \nu_L W_\mu^- \end{pmatrix} + \mathcal{L}_{AZL}, \end{aligned} \quad (6.66)$$

donde

$$\mathcal{L}_{AZL} = \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu [gT_3 W_\mu^3 + g' Y_L B_\mu] L. \quad (6.67)$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{g}{\sqrt{2}} \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \begin{pmatrix} e_L W_\mu^+ \\ \nu_L W_\mu^- \end{pmatrix} = \frac{g}{\sqrt{2}} \left[\epsilon^{12} \tilde{L}_1 \bar{\sigma}^\mu \nu_L W_\mu^- + \epsilon^{21} \tilde{L}_2 \bar{\sigma}^\mu e_L W_\mu^+ \right], \quad (6.68)$$

y usando (6.19)

$$\frac{g}{\sqrt{2}} \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \begin{pmatrix} e_L W_\mu^+ \\ \nu_L W_\mu^- \end{pmatrix} = \frac{g}{\sqrt{2}} \left[(e_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \nu_L W_\mu^- + (\nu_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu e_L W_\mu^+ \right]. \quad (6.69)$$

Reemplazando en (6.66)

$$\begin{aligned} i \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L - i \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L &= \frac{g}{\sqrt{2}} \left[(\nu_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu e_L W_\mu^+ + (e_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \nu_L W_\mu^- \right] + \mathcal{L}_{AZL} \\ &= \mathcal{L}_{WL} + \mathcal{L}_{AZL}, \end{aligned} \quad (6.70)$$

donde

$$\mathcal{L}_{WL} = \frac{g}{\sqrt{2}} \left[(\nu_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu e_L W_\mu^+ + (e_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \nu_L W_\mu^- \right]. \quad (6.71)$$

Generalizando para todos los campos:

$$\mathcal{L}_{WL} \rightarrow \frac{g}{\sqrt{2}} \left[\nu_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu e_L W_\mu^+ + u_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu d_L W_\mu^+ + \text{h.c.} \right]. \quad (6.72)$$

Usando la ec. (6.58)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{AZL} &= \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \left[g T_3 (c_W Z_\mu + s_W A_\mu) + g' Y_L (-s_W Z_\mu + c_W A_\mu) \right] L \\ &= \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \left[g T_3 c_W Z_\mu + g T_3 s_W A_\mu - g' Y_L s_W Z_\mu + g' Y_L c_W A_\mu \right] L \\ &= \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \left[(g c_W T_3 - g' s_W Y_L) Z_\mu + (g s_W T_3 + g' c_W Y_L) A_\mu \right] L, \end{aligned} \quad (6.73)$$

donde $c_W = \cos \theta_W$, $s_W = \sin \theta_W$. Usando la relación entre g y g' (6.59):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{AZL} &= \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \left[\left(g c_W T_3 - g \frac{s_W^2}{c_W} Y_L \right) Z_\mu + (g s_W T_3 + g s_W Y_L) A_\mu \right] L \\ &= g s_W \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \left[(\cot \theta_W T_3 - \tan \theta_W Y_L) Z_\mu + (T_3 + Y_L) A_\mu \right] L. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Como el generador asociado a A_μ debe ser el generador de carga eléctrica, tenemos que

$$e = g \sin \theta_W \quad (6.75)$$

donde e es la carga eléctrica del electrón, y el generador de carga

$$\hat{Q} = T_3 + Y, \quad (6.76)$$

de modo que

$$\hat{Q} L = (T_3 + Y) L = \begin{pmatrix} Q_\nu & 0 \\ 0 & Q_e \end{pmatrix} L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} L. \quad (6.77)$$

La ec. (6.76), se conoce como la relación Gell-Mann–Nishijima, y establece la condición que se debe satisfacer para obtener apropiadamente la QED a partir de la interacción electrodébil asociada al grupo semisimple $SU(2)_L \times U(1)_Y$. De esta forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{AZL} &= e\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu (\cot \theta_W T_3 - \tan \theta_W Y_L) LZ_\mu + e\tilde{L} \cdot \gamma^\mu \hat{Q}_L LA_\mu \\ &= e\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \left[\cot \theta_W T_3 - \tan \theta_W (\hat{Q}_L - T_3) \right] LZ_\mu + e\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \hat{Q}_L LA_\mu \\ &= \frac{e}{2c_W s_W} \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \left[\tau_3 - 2s_W^2 \hat{Q}_L \right] LZ_\mu + e\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \hat{Q}_L LA_\mu.\end{aligned}\quad (6.78)$$

Generalizando para los otros campos, tenemos

$$\mathcal{L}_{AZL} \rightarrow \sum_{F=Q,L,e_R,d_R,u_R} \frac{e}{2c_W s_W} \tilde{F} \cdot \bar{\sigma}^\mu \left[\tau_3 - 2s_W^2 \hat{Q}_L \right] FZ_\mu + e\tilde{F} \cdot \bar{\sigma}^\mu \hat{Q}_L FA_\mu. \quad (6.79)$$

con

$$\tilde{F} \cdot \bar{\sigma}^\mu \rightarrow F^\dagger \sigma^\mu \quad \text{for } F = e_R, d_R, u_R. \quad (6.80)$$

Usando los acoplamientos gauge de los quarks con los gluones (5.76), de los fermiones con el W_μ^\pm (6.72) y con Z_μ y A_μ (6.79) para expandir $\mathcal{L}_{\text{fermion}}$ en (6.64), tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{fermion}} &= i\tilde{Q} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q + i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L + ie_R^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R + id_R^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R + iu_R^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R \\ &= iu_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu u_L + iu_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu u_R + id_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu d_L + id_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu d_R \\ &\quad + ie_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu e_L + ie_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu e_R + i\nu_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \nu_L \\ &\quad + g_s \left(u_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \frac{\lambda^a}{2} u_L + u_R^\dagger \sigma^\mu \frac{\lambda^a}{2} u_R + d_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \frac{\lambda^a}{2} d_L + d_R^\dagger \sigma^\mu \frac{\lambda^a}{2} d_R \right) G_\mu^a \\ &\quad + \frac{g}{\sqrt{2}} [\nu_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu e_L W_\mu^+ + u_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu d_L W_\mu^+ + \text{h.c.}] \\ &\quad + \sum_{F=Q,L,e_R,d_R,u_R} \frac{e}{2c_W s_W} \tilde{F} \cdot \bar{\sigma}^\mu \left[\tau_3 - 2s_W^2 \hat{Q}_L \right] FZ_\mu \\ &\quad + e \left(e_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \hat{Q}_e e_L + e_R^\dagger \sigma^\mu \hat{Q}_e e_R \right. \\ &\quad \left. + u_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \hat{Q}_u u_L + u_R^\dagger \sigma^\mu \hat{Q}_u u_R + d_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \hat{Q}_d d_L + d_R^\dagger \sigma^\mu \hat{Q}_d d_R \right) A_\mu.\end{aligned}\quad (6.81)$$

6.2.6. Self-interactions

El Lagrangiano gauge

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \quad (6.82)$$

se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{gauge}} = & -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z^{\mu\nu}Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(F_W^\dagger)^{\mu\nu}(F_W)_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\tilde{G}_a^{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu}^a \\
& - ie \cot \theta_W \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu}W_\mu^+ Z_\nu - (F_W)^{\mu\nu}W_\mu^- Z_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ Z^{\mu\nu} \right] \\
& - ie \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu}W_\mu^+ A_\nu - (F_W)^{\mu\nu}W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ F^{\mu\nu} \right] \\
& - \frac{e^2}{2\sin^2 \theta_W} \left[(W_\mu^+ W^{\mu-})^2 - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-} \right] \\
& - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+ W^{\mu-} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- Z^\nu) \\
& - e^2 \cot^2 \theta_W (2W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu Z^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- A^\nu) \\
& - e^2 (W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- A^\nu) \\
& - \frac{1}{4} \left(g_s \tilde{G}_a^{\mu\nu} f_{ade} G_\mu^d G_\nu^e + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \right), \tag{6.83}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
(F_W)_{\mu\nu} &= \partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+ \\
\tilde{G}^{\mu\nu} &= \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu. \tag{6.84}
\end{aligned}$$

6.2.7. Notación de Dirac para la primera generación

Recopilando los resultados para \mathcal{L}_{WBH} (6.53), $\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$ (6.63), $\mathcal{L}_{\text{fermion}}$ (D.38), y $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ (6.83), tenemos para $f = \nu_e, e, u, d$; $q = u, d$ [con $f' = e$ (d) para $f = \nu_e$ (u)], podemos escribir en notación de Dirac:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{1 \text{ gen}} = & \sum_f i \bar{f} (\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) f \\
& - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z^{\mu\nu}Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(F_W^\dagger)^{\mu\nu}(F_W)_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\tilde{G}_a^{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu}^a \\
& + \frac{1}{2}\partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2}m_H^2 H^2 \left(1 + \frac{H}{v} + \frac{H^2}{4v^2} \right) \\
& + \left(m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2}m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \right) \left(1 + 2\frac{H}{v} + \frac{H^2}{v^2} \right) \\
& + g_s \sum_q \bar{q} \gamma^\mu \left(\frac{\lambda_a}{2} \right) q G_\mu^a + e \sum_f \bar{f} \gamma^\mu Q_f f A_\mu \\
& + \frac{e}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (v_f - a_f \gamma_5) f Z_\mu \\
& + \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\sum_f \bar{f} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) f' W_\mu^+ + \text{h.c} \right] + \sum_f \frac{m_f}{v} \bar{f} f H
\end{aligned}$$

	u	d	ν_e	e
$2v_f$	$1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W$	$-1 + \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W$	1	$-1 + 4 \sin^2 \theta_W$
$2a_f$	1	-1	1	-1

Tabla 6.3: Acoplamientos de corrientes neutras

$$\begin{aligned}
& -ie \cot \theta_W \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ Z_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- Z_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ Z^{\mu\nu} \right] \\
& -ie \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ A_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ F^{\mu\nu} \right] \\
& - \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left[(W_\mu^+ W^{\mu-})^2 - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-} \right] \\
& - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+ W^{\mu-} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- Z^\nu) \\
& - e^2 \cot^2 \theta_W (2W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu Z^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- A^\nu) \\
& - e^2 (W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- A^\nu) \\
& - \frac{1}{4} \left(g_s \tilde{G}_a^{\mu\nu} f_{ade} G_\mu^d G_\nu^e + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \right). \quad (6.85)
\end{aligned}$$

donde

$$v_f = T_3^f - 2 \sin^2 \theta_W Q_f \qquad a_f = T_3^f \gamma_5 \quad (6.86)$$

Los valores explícitos para v_f y a_f en el modelo estándar, están dados en la Tabla [D.1](#).

6.2.8. Dinámica de sabor

El Modelo Estándar esta compuesto de las siguientes tres familias de fermiones $i = 1, 2, 3$. A cada familia se le asigna una carga de *sabor* diferente

$$\begin{aligned}
L_i = \begin{pmatrix} \nu_L^i \\ e_L^i \end{pmatrix} : \quad & L_1 = \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \end{pmatrix} & L_2 = \begin{pmatrix} \nu_L^\mu \\ \mu_L \end{pmatrix} & L_3 = \begin{pmatrix} \nu_L^\tau \\ \tau_L \end{pmatrix} & e_R^i : e_R, \mu_R, \tau_R \\
Q_i^\alpha = \begin{pmatrix} u_L^{i\alpha} \\ d_L^{i\alpha} \end{pmatrix} : \quad & Q_1^\alpha = \begin{pmatrix} u_L^\alpha \\ d_L^\alpha \end{pmatrix} & Q_2^\alpha = \begin{pmatrix} c_L^\alpha \\ s_L^\alpha \end{pmatrix} & Q_3^\alpha = \begin{pmatrix} t_L^\alpha \\ b_L^\alpha \end{pmatrix} & u_R^i : u_R, c_R, t_R \\
& & & & d_R^i : d_R, s_R, b_R. \quad (6.87)
\end{aligned}$$

Con

$$Y_{L_i} = -\frac{1}{2} \quad Y_{Q_i} = \frac{1}{6} \quad Y_{e_R^i} = -1 \quad Y_{u_R^i} = \frac{2}{3} \quad Y_{d_R^i} = -\frac{1}{3}. \quad (6.88)$$

De los procesos entre familias, es decir de cambio de sabor, sabemos que

- No se han observado procesos de corrientes neutras que cambian sabor.
- Los bosones gauge cargados W_μ^\pm decaen siempre a leptones de la misma generación y con la misma intensidad.

Proponemos entonces el Lagrangiano

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & i\tilde{Q}'_i \bar{\sigma}^\mu \cdot \mathcal{D}_\mu Q'^i + i\tilde{L}'_i \bar{\sigma}^\mu \cdot \mathcal{D}_\mu L'^i + i(e'_R)_i^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R'^i + i(d'_R)_i^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R'^i + i(u'_R)_i^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R'^i \\
& - \sum_{ij} \left(h_{ij}^E (e'_R)_i^\dagger L'_j \cdot \tilde{\Phi} + h_{ij}^D (d'_R)_i^\dagger Q'_j \cdot \tilde{\Phi} + h_{ij}^U (u'_R)_i^\dagger Q'_j \cdot \Phi + \text{h.c} \right) \\
& - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\
& + \left(\widetilde{\mathcal{D}_\mu \Phi} \right) \cdot \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \tilde{\Phi} \cdot \Phi - \lambda \left(\tilde{\Phi} \cdot \Phi \right)^2.
\end{aligned} \tag{6.89}$$

Para aclarar la notación, obviando de momento la definición definitiva de h_{ij} y las primas sobre los campos, consideremos el Lagrangiano de Yukawa para el sector down

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \supset & h_{ij}^D (d'_R)_i^\dagger Q'_j \cdot \tilde{\Phi} + \text{h.c} \\
\supset & - h_{ij}^D d_{Ri}^\dagger \epsilon_{ab} \tilde{\Phi}^a Q_j^b + \text{h.c} \\
\supset & - h_{ij}^D \epsilon_{ab} d_{Ri}^\dagger \tilde{\Phi}^a Q_{j\alpha}^b + \text{h.c} \\
\supset & - h_{ij}^D \epsilon_{ab} (d_{R\gamma}^\dagger)_i^\alpha \tilde{\Phi}^a Q_{j\alpha}^{b\gamma} + \text{h.c},
\end{aligned} \tag{6.90}$$

donde i, a, γ, α son índices en los espacios de familia, $SU(2)_L$, $SU(3)_c$ y de Weyl, respectivamente. Por ejemplo el primer termino de la sumatoria

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \supset & h_{11}^D (d_{R1}^\dagger)_1^\alpha \gamma_0^{\eta\rho} \tilde{\Phi}^1 Q_{1\alpha}^{21} + \dots \\
\supset & h_{11}^D \overline{d_R^r} \phi^{0*} d_L^r + \dots
\end{aligned} \tag{6.91}$$

corresponde a la interacción de Yukawa del quark down rojo (r) con un campo escalar complejo neutro en carga eléctrica pero de isospín débil $1/2$. En forma compacta la primera expresión en la ec. (6.90) puede escribirse como (en el gauge unitario)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \supset & (\mathbf{d}'_R)^\dagger \mathbf{h}^D \mathbf{Q}' \cdot \tilde{\Phi} + \text{h.c} \\
\supset & (\mathbf{d}'_R)^\dagger \mathbf{h}^D \left(\frac{H(x) + v}{\sqrt{2}} \right) \mathbf{d}'_L + \text{h.c} \\
\supset & (\mathbf{d}'_R)^\dagger \frac{\mathbf{h}^D}{\sqrt{2}} H(x) \mathbf{d}'_L + (\mathbf{d}'_R)^\dagger \frac{\mathbf{h}^D v}{\sqrt{2}} \mathbf{d}'_L + \text{h.c} \\
\supset & (\mathbf{d}'_R)^\dagger \frac{\mathbf{h}^D}{\sqrt{2}} H(x) \mathbf{d}'_L + (\mathbf{d}'_R)^\dagger \mathbf{M}^D \mathbf{d}'_L + \text{h.c}.
\end{aligned} \tag{6.92}$$

La matrix 3×3 \mathbf{M}^D es en general una matriz compleja no diagonal, la cual se debe diagonalizar con una transformación biunitaria (de similaridad). Retornado a la ec. (6.89), tenemos que para definir apropiadamente la masa de los quarks, rotamos de los autoestados de interacción a los autoestados de masa con la matrices unitarias

$$d_{R,Lj}' = (V_{R,L}^D)_{jk} d_{R,Lk} \quad (d'_{R,L})_j^\dagger = (d'_{R,L})_k^\dagger (V_{R,L}^D)_{kj}^\dagger \tag{6.93}$$

Tal que

$$(V_{R,L}^D)_{ij}^\dagger (V_{R,L}^D)_{jk} = \delta_{ik} \quad (V_R^D)_{ki}^\dagger M_{ij}^D (V_L^D)_{jl} = m_k^D \delta_{kl} \tag{6.94}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_R^{D\dagger} \left(\mathbf{M}^D \mathbf{M}^{D\dagger} \right) \mathbf{V}_R^D &= \left(\mathbf{V}_R^{D\dagger} \mathbf{M}^D \mathbf{V}_L^D \right) \left(\mathbf{V}_L^{D\dagger} \mathbf{M}^{D\dagger} \mathbf{V}_R^D \right) \\ &= \mathbf{M}_{\text{diag}}^D \mathbf{M}_{\text{diag}}^{D\dagger}, \end{aligned} \quad (6.95)$$

donde $\mathbf{M}_{\text{diag}}^D = \text{diag}(m_1^D, m_2^D, m_3^D)$,

$$\mathbf{M}_{\text{diag}}^D = \mathbf{V}_R^{D\dagger} \mathbf{M}^D \mathbf{V}_L^D. \quad (6.96)$$

Similarmente

$$\mathbf{V}_L^{D\dagger} \left(\mathbf{M}^{D\dagger} \mathbf{M}^D \right) \mathbf{V}_L^D = \mathbf{M}_{\text{diag}}^{D\dagger} \mathbf{M}_{\text{diag}}^D, \quad (6.97)$$

Con definiciones similares para los campos u_i y e_i .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &\supset (d'_R)_i^\dagger M_{ij}^D d'_{Lj} \\ &= (d_R)_k^\dagger (V_R^{D\dagger})_{ki} M_{ij}^D (V_L^D)_{jl} d_{Ll} \\ &= (d_R)_k^\dagger m_k^D \delta_{kl} d_{Ll} \\ &= m_k^D (d_R)_k^\dagger d_{Lk} \end{aligned} \quad (6.98)$$

Para las diferentes combinaciones de términos de corrientes

$$\begin{aligned} (u'_L)_i^\dagger \bar{\sigma}^\mu d'_{Li} &= (u_L)_k^\dagger \bar{\sigma}^\mu (V_L^{U\dagger})_{ki} (V_L^D)_{il} d_{Ll} \\ &= V_{kl} (u_L)_k^\dagger \bar{\sigma}^\mu d_{Ll} \\ (\nu'_L)_i^\dagger \bar{\sigma}^\mu e'_{Li} &= (\nu'_L)_i^\dagger \bar{\sigma}^\mu (V_L^E)_{ij} e_{Lj} \\ &= (\nu'_L)_i^\dagger (V_L^E)_{ij} \bar{\sigma}^\mu e_{Lj} \\ &= (\nu_L)_j^\dagger \bar{\sigma}^\mu e_{Lj} \end{aligned} \quad (6.99)$$

Donde hemos definido la matriz de Cabibbo–Kobayashi–Maskawa (CKM) como

$$\begin{aligned} V &= V_L^{U\dagger} V_L^D \\ V^\dagger V &= V_L^{D\dagger} V_L^U V_L^{U\dagger} V_L^D = \mathbf{1} \Rightarrow \sum_j V_{ij}^\dagger V_{jk} = \delta_{ik} \Rightarrow \sum_j V_{ji}^* V_{jk} = \delta_{ik} \Rightarrow \sum_j |V_{ji}|^2 = \sum_j |V_{ij}|^2 = 1 \end{aligned} \quad (6.100)$$

y los autoestados débiles de los neutrinos como

$$\nu_{Li}' = (V_L^{E\dagger})_{ij} \nu_{Lj} \quad (6.101)$$

Con esta definición, las corrientes débiles cargadas para los leptones siguen siendo universales. Similarmente

$$\begin{aligned} (u'_L)_i^\dagger \bar{\sigma}^\mu u'_{Li} &= u_{Lk}^\dagger \bar{\sigma}^\mu (V_L^{U\dagger})_{ki} (V_L^U)_{il} u_{Ll} \\ &= \delta_{kl} (u_L)_k^\dagger \bar{\sigma}^\mu u_{Ll} \\ &= (u_L)_k^\dagger \bar{\sigma}^\mu u_{Lk} \end{aligned} \quad (6.102)$$

De modo que todas las corrientes neutras permanecen universales después de la redefinición de los campos fermiónicos. A éste resultado, basado en la unitariedad de las transformaciones biunitarias se le llama *Mecanismo GIM*. En muchas extensiones del Modelo Estándar las matrices que transforman los fermiones a sus autoestados de masa no son unitarias y dan lugar a corrientes débiles neutras que cambian sabor (FCNC de sus siglas en inglés).

Teniendo en cuenta estos resultados podemos escribir finalmente el Lagrangiano completo del Modelo Estándar en la Gauge Unitario, para los fermiones de Dirac:

$$f = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, e, \mu, \tau, u, c, t, d, s, b; \quad q = u, c, t, d, s, b; \quad l = e, \mu, \tau \quad (6.103)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SM}} = & \sum_f i \bar{f} (\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) f \\ & - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (F_W^\dagger)^{\mu\nu} (F_W)_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a \\ & + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \left(1 + \frac{H}{v} + \frac{H^2}{4v^2} \right) \\ & + \left(m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \right) \left(1 + 2 \frac{H}{v} + \frac{H^2}{v^2} \right) \\ & + g_s \sum_q \bar{q} \gamma^\mu \left(\frac{\lambda_a}{2} \right) q G_\mu^a + e \sum_f \bar{f} \gamma^\mu Q_f f A_\mu \\ & + \frac{e}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (v_f - a_f \gamma_5) f Z_\mu \\ & + \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\sum_{l=e}^{\tau} \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l W_\mu^+ + \sum_{ij} V_{ij} \bar{u}_i \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d_j W_\mu^+ + \text{h.c} \right] \\ & + \sum_f \frac{m_f}{v} \bar{f} f H \\ & - ie \cot \theta_W \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ Z_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- Z_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ Z^{\mu\nu} \right] \\ & - ie \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ A_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ F^{\mu\nu} \right] \\ & - \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left[(W_\mu^+ W^{\mu-})^2 - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-} \right] - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+ W^{\mu-} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- Z^\nu) \\ & - e^2 \cot^2 \theta_W (2 W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu Z^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- A^\nu) \\ & - e^2 (W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- A^\nu) \\ & - \frac{1}{4} \left(g_s \tilde{G}_a^{\mu\nu} f_{ade} G_\mu^d G_\nu^e + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \right). \end{aligned} \quad (6.104)$$

donde $m_{\nu_l} = 0$.

6.3. Fenomenología Electrodébil

El Lagrangiano del Modelo contiene los parámetros $g_s, g, \sin \theta_W, v, m_H$. Alternativamente uno puede escoger como parámetros, en lugar de $g, \sin \theta_W, v$ [5]

$$\begin{aligned} G_F &= 1.166\,371(6) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \\ \alpha^{-1} &= 137.035\,999\,679(94) \\ m_Z &= 91.1876(20) \text{ GeV} \\ \alpha_s(m_Z) &= 0.1176(20). \end{aligned} \quad (6.105)$$

donde $\alpha_i = g_i^2/(4\pi)$. Esto tiene la ventaja de usar las tres cantidades experimentales mejor medidas. Las relaciones

$$\sin^2 \theta_W = 1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2}, \quad m_W^2 \sin^2 \theta_W = \frac{\pi \alpha}{\sqrt{2} G_F} \quad (6.106)$$

determinan entonces

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_W &= 0.212 \\ m_W &= 80.94 \text{ GeV} \end{aligned} \quad (6.107)$$

Si se usa $\alpha(M_Z) \approx 1/128$ entonces

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_W &= 0.233 \\ m_W &= 79.84 \text{ GeV} \end{aligned} \quad (6.108)$$

Los valores medidos son $\sin^2 \theta_W = 0.23149(13)$, $m_W = 80.398(25) \text{ GeV}$, y pueden ser reproducidos por el modelo estándar una vez se tienen en cuenta correcciones perturbativas inducidas por partículas virtuales.

El acelerador e^+e^- LEP, que funcionó hasta desde 1998 hasta el 2000 [29], operó a energías suficientes para producir millones de Z . Combinado con otros resultados experimentales, se pudo verificar todo el Lagrangiano del Modelo Estándar hasta un nivel del 1 por mil. Con excepción de las interacciones asociadas con el Higgs.

La universalidad de los decaimientos del Z está soportada por los resultados experimentales siguientes donde sólo se muestran los decaimientos leptónicos del Z diferentes de cero [5]

$$\begin{aligned} \Gamma(Z \rightarrow e^+e^-) &= 83.92(12) \text{ MeV} & \Gamma(Z \rightarrow \mu^+\mu^-) &= 83.99(18) \text{ MeV} & \Gamma(Z \rightarrow \tau^+\tau^-) &= 84.08(22) \text{ MeV} \\ \text{Br}(Z \rightarrow e^+e^-) &= 3.363(4) \% & \text{Br}(Z \rightarrow \mu^+\mu^-) &= 3.366(7) \% & \text{Br}(Z \rightarrow \tau^+\tau^-) &= 3.370(8) \% \end{aligned} \quad (6.109)$$

Mientras que para el W^\pm , en %,

$$\text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) = 10.65(17), \quad \text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu \mu^-) = 10.59(15), \quad \text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_\tau \tau^-) = 11.44(22) \quad (6.110)$$

La diferencia de $\bar{\nu}_\tau \tau$ respecto a los otros representa un efecto a 2.8σ . La universalidad de los acoplamientos leptónicos de W puede comprobarse también indirectamente a través de los decaimientos débiles mediados por corrientes cargadas. Los datos actuales verifican la universalidad de los

acoplamientos de corrientes cargadas leptónicas al nivel del 0.2% [5]. Sin necesidad de entrar en detalles de los cálculos de las amplitudes de decaimiento, podemos usar el hecho de que ellas son proporcionales a los acoplamientos al cuadrado correspondiente, de modo que un cociente entre amplitudes de decaimiento es igual, en primera aproximación, a los cocientes de los acoplamientos al cuadrado. Tendremos en cuenta además que el Branching es la amplitud de decaimiento a un canal específico dividido por la suma de las amplitudes de decaimiento a todos los canales posibles.

Para los decaimientos del Z el Modelo Estándar predice, además de la ausencia de eventos del tipo $Z \rightarrow e^+ \mu^-$, que para un cierto $l = e, \mu, \tau$, o $q = d, s, b$

$$\begin{aligned} \frac{\text{Br}(Z \rightarrow l^+ l^-)}{\text{Br}(Z \rightarrow \bar{q} q)} &\approx \frac{(|v_l|^2 + |a_l|^2)}{N_c(|v_q|^2 + |a_q|^2)} \\ &= \frac{\left[\left(-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W\right)^2 + \frac{1}{4} \right]}{N_c \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W\right)^2 + \frac{1}{4} \right]} \\ &\approx \frac{0.776}{N_c} = \begin{cases} 0.338 & N_c = 2 \\ 0.225 & N_c = 3 \\ 0.169 & N_c = 4 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.111)$$

Para ser comparado con el resultado experimental de por ejemplo

$$\frac{\text{Br}(Z \rightarrow e^+ e^-)}{\text{Br}(Z \rightarrow \bar{b} b)} = \frac{3.363(4)}{15.12(5)} \approx 0.222 \quad (6.112)$$

que de nuevo da lugar al $N_c = 3$, que seguiremos tomando en adelante.

Los Branchings de decaimiento en la ec. (6.110) y ec. (6.109) pueden ser calculados sin entrar en detalles del cálculo de las amplitudes. Teniendo en cuenta que el canal $Z \rightarrow \bar{t} t$ esta cerrado

$$\begin{aligned} \text{Br}(Z \rightarrow e^+ e^-) &= \frac{\Gamma(Z \rightarrow e^+ e^-)}{\Gamma_{\text{total}}} \\ &= \frac{(|v_e|^2 + |a_e|^2)}{\sum_l [(|v_l|^2 + |a_l|^2) + (|v_{\nu_l}|^2 + |a_{\nu_l}|^2)] + N_c [\sum_{i=1}^2 (|v_{u_i}|^2 + |a_{u_i}|^2) + \sum_{i=1}^3 (|v_{d_i}|^2 + |a_{d_i}|^2)]} \\ &= \frac{(|v_e|^2 + |a_e|^2)}{3[(|v_e|^2 + |a_e|^2) + (|v_{\nu_e}|^2 + |a_{\nu_e}|^2)] + 3[2(|v_u|^2 + |a_u|^2) + 3(|v_d|^2 + |a_d|^2)]} \\ &= \frac{(|v_e|^2 + |a_e|^2)}{21|a_e|^2 + 3[|v_e|^2 + |v_{\nu_e}|^2] + 3[2|v_u|^2 + 3|v_d|^2]} \\ &= \frac{(-1 + 4s^2\theta_W)^2 + 1}{21 + 3[(-1 + 4s^2\theta_W)^2 + 1] + 3[2(1 - \frac{8}{3}s^2\theta_W)^2 + 3(-1 + \frac{4}{3}s^2\theta_W)^2]} \\ &= \frac{2 - 8s^2\theta_W + 16s^4\theta_W}{42 - 80s^2\theta_W + \frac{320}{3}s^4\theta_W} \\ &\approx 3.43 \% \end{aligned} \quad (6.113)$$

Para W^\pm tenemos por ejemplo

$$\text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) = \frac{\Gamma(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-)}{\Gamma_{\text{total}}} \quad (6.114)$$

donde, teniendo en cuenta que los canales a top están cerrados, y usando la condición de unitariedad de la matriz CKM en ec. (6.100), tenemos

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\text{total}} &= \sum_l \Gamma(W^- \rightarrow \bar{\nu}_l l^-) + N_c \sum_i [\Gamma(W^- \rightarrow \bar{u}_1 d_i) + \Gamma(W^- \rightarrow \bar{u}_2 d_i)] \\
 &= \Gamma(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) \{3 + N_c \sum_i [|V_{1i}|^2 + |V_{2i}|^2]\} \\
 &= \Gamma(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) (3 + 2N_c)
 \end{aligned} \tag{6.115}$$

entonces

$$\text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) = \frac{1}{3 + 2N_c} = 11.1\% \tag{6.116}$$

Una mejor predicción de dichos resultados en el contexto del Modelo Estándar requiere tener en cuenta las correcciones radiativas.

El ME también tiene una predicción concreta para la amplitud del Z a neutrinos, Γ_{inv} :

$$\begin{aligned}
 \frac{\Gamma_{\text{inv}}}{\Gamma_l} &= \frac{\sum_l \Gamma(Z \rightarrow \bar{\nu}_l \nu_l)}{\Gamma(Z \rightarrow e^+ e^-)} \\
 &= \frac{N_\nu \Gamma(Z \rightarrow \bar{\nu}_e \nu_e)}{\Gamma(Z \rightarrow e^+ e^-)} \\
 &\approx \frac{N_\nu (|v_{\nu_e}|^2 + |a_{\nu_e}|^2)}{|v_e|^2 + |a_e|^2} \\
 &= \frac{2N_\nu}{(-1 + 4 \sin^2 \theta_W)^2 + 1} \\
 &\approx \begin{cases} 5.865 & N_\nu = 3 \\ 7.819 & N_\nu = 4 \end{cases},
 \end{aligned} \tag{6.117}$$

mientras que el valor medido experimentalmente para esta cantidad 5.942(16) [5], es una evidencia muy fuerte de que sólo existen tres neutrinos livianos.

6.3.1. Decaimientos débiles mediados por corrientes cargadas

De la corrientes cargadas para leptones tenemos

$$\mathcal{L}_{cc} \supset \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\sum_l \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l W_\mu^+ + \bar{l} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_l W_\mu^- \right] \tag{6.118}$$

Esto da lugar a los posibles diagramas para decaimientos de leptones a bosones virtuales, y bosones a leptones mostrados en la figura 6.1. Las flechas representan el flujo de número leptónico. La flecha de tiempo es de izquierda a derecha. Al lado izquierdo del vértice entran partículas y salen antipartículas. Mientras que al lado derecho entran antipartículas y salen partículas. Del primer y cuarto diagrama obtenemos el diagrama de Feynman para el decaimiento $\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$, mostrado en la figura 6.2. El propagador para el bosón W de momentum q resulta ser

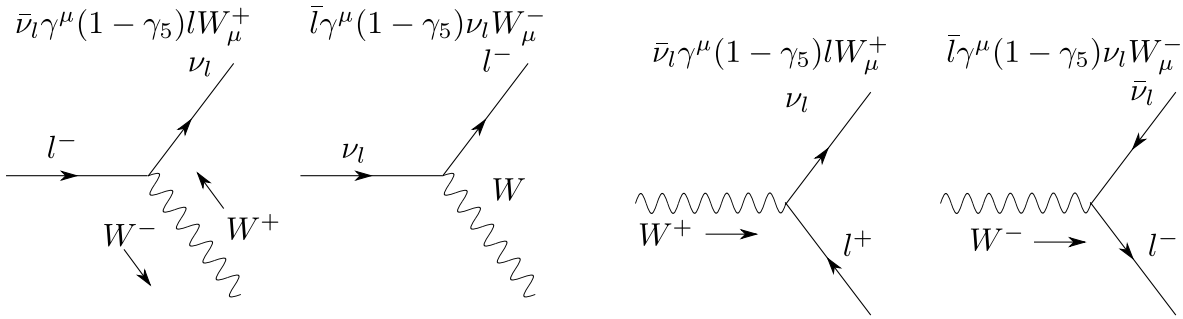
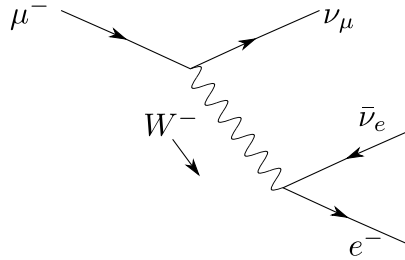


Figura 6.1: Diagramas de Feynman para las corrientes cargadas

Figura 6.2: diagrama de Feynman para el decaimiento $\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$

$$\tilde{D}_{\mu\nu} = \frac{1}{q^2 - m_W^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_W^2} \right). \quad (6.119)$$

Para los propósitos actuales la obtención de este resultado no es necesaria, el punto importante es que cuando los momentum de las partículas iniciales y finales son mucho más pequeñas que m_W , esto se reduce a

$$\tilde{D}_{\mu\nu} = -\frac{g_{\mu\nu}}{m_W^2}. \quad (6.120)$$

Este resultado se entiende fácilmente cuando se compara con el propagador de una partículas escalar masiva $1/(q^2 - M^2) \rightarrow -1/M^2$. Las componentes espaciales de W_μ con $\mu = 1, 2, 3$, a bajas energías tienen el mismo propagador que el de una partícula escalar, mientras W_0 , tiene el signo opuesto.

El Lagrangiano efectivo para el decaimiento del muón, $\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$ es entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{g^2}{8} [\bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu] \frac{g_{\mu\nu}}{m_W^2} [\bar{e} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \nu_e] \\ &= \frac{g^2}{8m_W^2} [\bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu] [\bar{e} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \nu_e] \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu] [\bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e], \end{aligned} \quad (6.121)$$

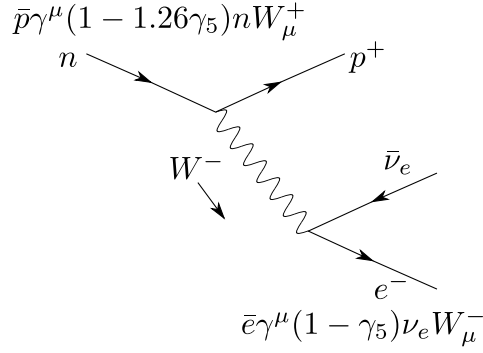


Figura 6.3: Decaimiento del neutrón.

donde

$$\begin{aligned}
 \frac{G_F}{\sqrt{2}} &= \frac{g^2}{8m_W^2} \\
 &= \frac{g^2 4}{8g^2 v^2} \\
 &= \frac{1}{2v^2},
 \end{aligned} \tag{6.122}$$

y

$$\begin{aligned}
 v &= \left(\sqrt{2} G_F \right)^{-1/2} = 246.2 \text{ GeV} \\
 &\approx 2.9 \times 10^{15} \text{ K} \\
 &\approx 4.9 \times 10^{-14} \text{ m} \\
 &\approx 1.6 \times 10^{-22} \text{ s}.
 \end{aligned} \tag{6.123}$$

De otro lado, para el decaimiento β , $n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e$, de acuerdo a la figura 6.3, tenemos

$$\mathcal{L} = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} [\bar{p}\gamma^\mu(1 - 1.26\gamma_5)n] [\bar{e}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)\nu_e]. \tag{6.124}$$

con G_F dado en la ec. (6.105) y $G_\beta = 1.10 \times 10^{-5} \text{ GeV}^2$. La corriente hadrónica tiene la forma V-1.26A. El factor 1.26 puede entenderse como debido a las correcciones a nivel hadrónico de una corriente que es de la forma V-A a nivel del quarks, como en la ec. (6.104). A nivel de quarks el decaimiento del neutrón (udd) al protón (uud) corresponde al decaimiento de uno de los quarks down del neutrón $d \rightarrow ue^- \bar{\nu}_e$

$$\mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{11} [\bar{u}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)d] [\bar{e}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)\nu_e]. \tag{6.125}$$

De modo que $G_\beta = G_F V_{11} = G_F \cos \theta_C$, donde θ_C es el ángulo de Cabbibo. Una vez se tienen en cuenta correcciones electrodébiles se obtiene el valor $|V_{11}| = 0.97418(27)$ [25]. Las magnitudes de los elementos de la matriz CKM son[25]

$$V \approx \begin{pmatrix} 0.97419 & 0.2257 & 0.0359 \\ 0.2256 & 0.97334 & 0.0415 \\ 0.00874 & 0.0407 & 0.999133 \end{pmatrix} \sim \mathbf{1} \tag{6.126}$$

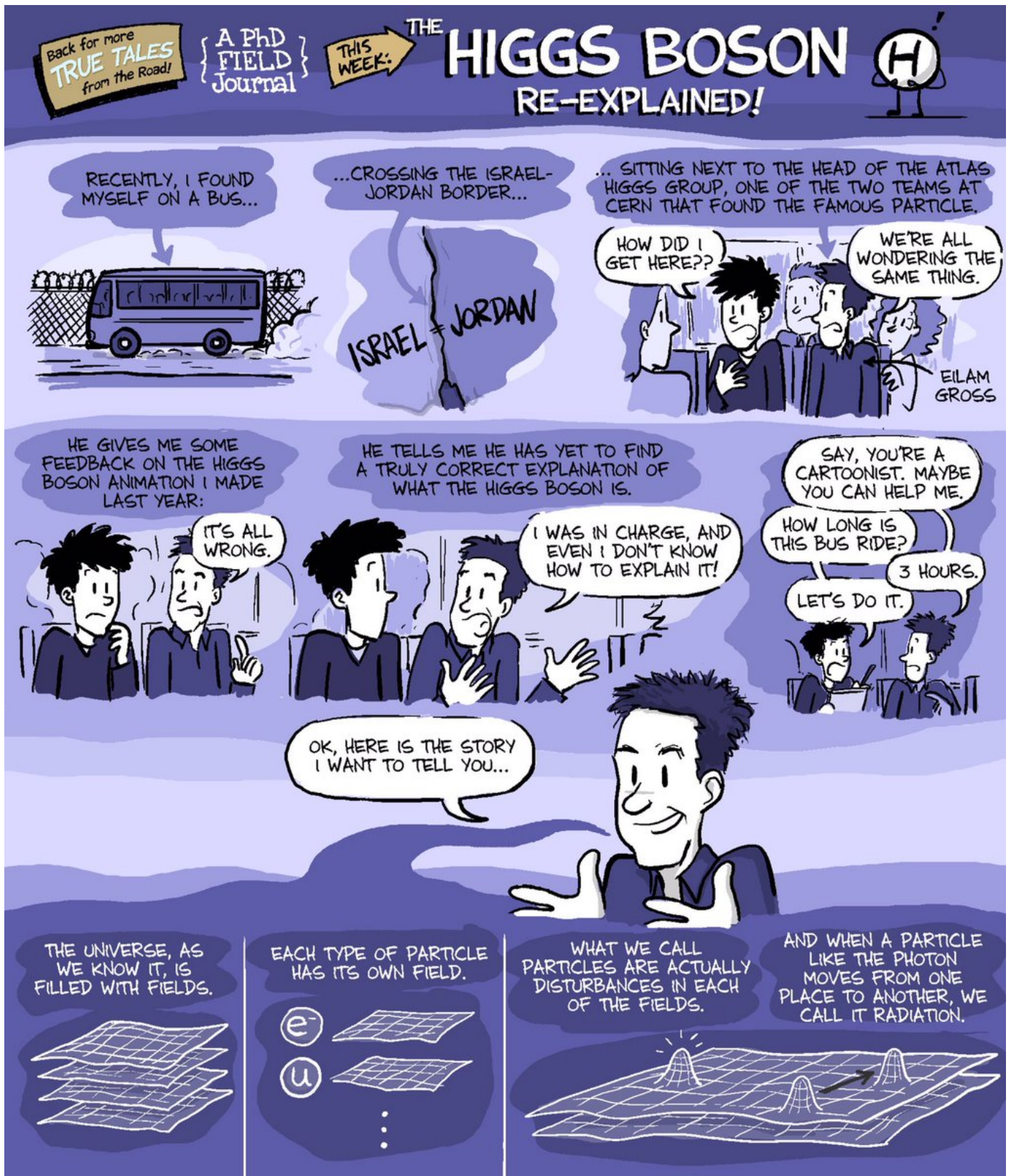
Para cerrar esta notas, transcribo a continuación el último párrafo de la conferencia de Steven Weinberg en 1979 con motivo de la entrega del premio nobel del física por el desarrollo del modelo estándar de las interacciones fundamentales:














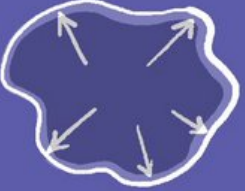

[...] And nothing makes me more optimistic than the discovery of broken symmetries. In the seventh book of the Republic, Plato describes prisoners who are chained in a cave and can see only shadows that things outside cast on the cave wall. When released from the cave at first their eyes hurt, and for a while they think that the shadows they saw in the cave are more real than the objects they now see. But eventually their vision clears, and they can understand how beautiful the real world is. We are in such a cave, imprisoned by the limitations on the sorts of experiments we can do. In particular, we can study matter only at relatively low temperatures, where symmetries are likely to be spontaneously broken, so that nature does not appear very simple or unified. We have not been able to get out of this cave, but by looking long and hard at the shadows on the cave wall, we can at least make out the shapes of symmetries, which though broken, are exact principles governing all phenomena, expressions of the beauty of the world outside.

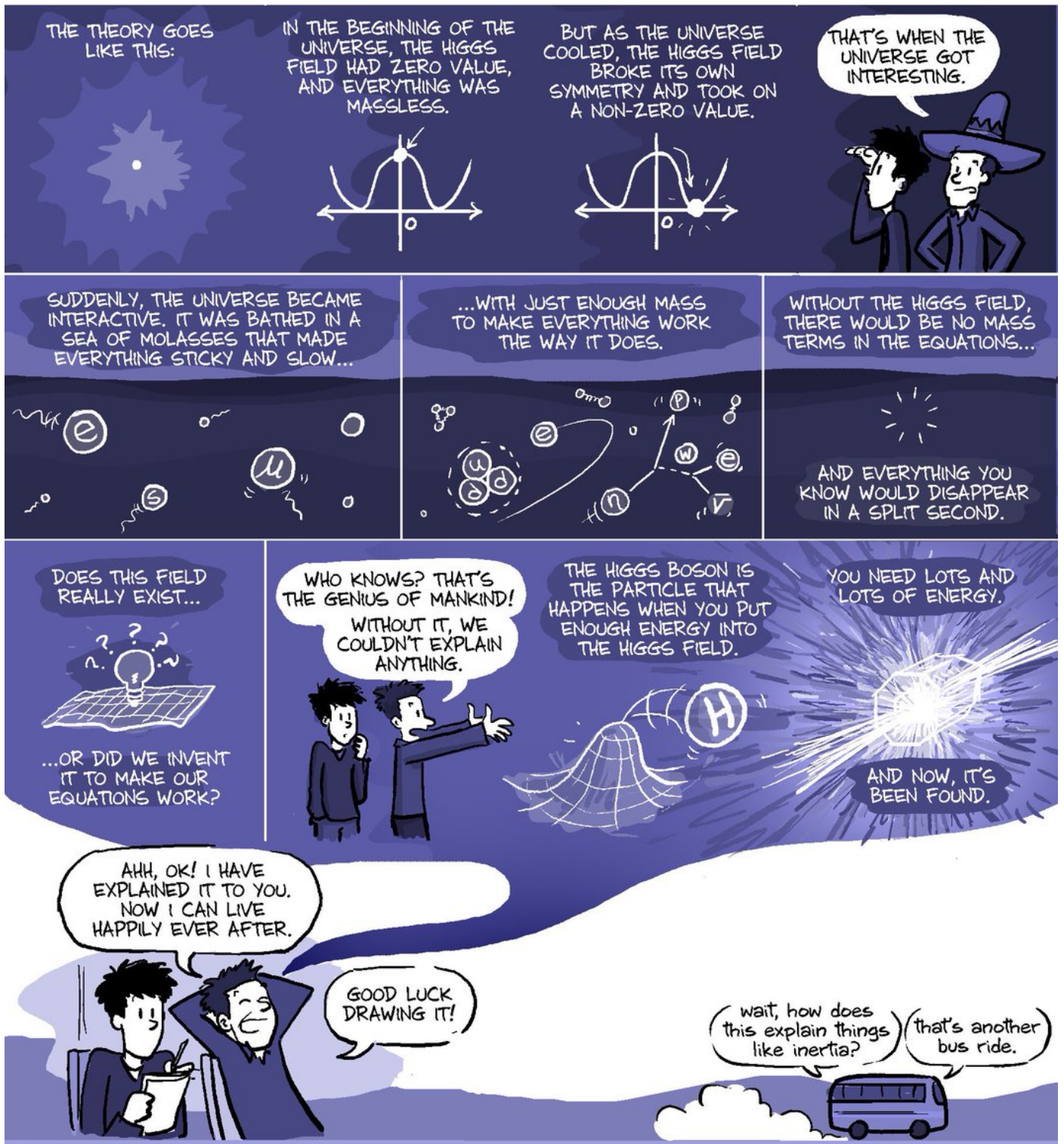
S. Weinberg, Nobel lecture, 1979

6.4. Resumen

A modo de resumen, usaremos a continuación la siguiente secuencia de la historieta de <http://www.phdcomics.com> re-explicando el bosón de Higgs:



<p>NOW, TO DESCRIBE REALITY, PHYSICISTS START BY WRITING A SET OF EQUATIONS THAT DEFINE THE ENERGY OF A SYSTEM:</p> $\mathcal{L} = T - V$ <p>THE LAGRANGIAN KINETIC ENERGY POTENTIAL ENERGY</p>	<p>PHYSICISTS ASSUME THAT THESE EQUATIONS ARE "SYMMETRIC."</p> 	<p>WHY? BECAUSE A THEORY OF EVERYTHING SHOULD BE BEAUTIFUL.</p> <p>AND SYMMETRY IS BEAUTIFUL.</p> 	
<p>SYMMETRY IS THE "QUEEN" OF PHYSICS.</p> <p>IT PROTECTS REALITY FROM DIVERGENCE.</p> 	<p>SIMPLY PUT, IT MEANS THAT NO MATTER HOW YOU ROTATE OR REFLECT THE EQUATIONS...</p> <p>... THEY SHOULD STILL END UP LOOKING THE SAME (LOCALLY AND GLOBALLY).</p> 	<p>WITHOUT SYMMETRY, THE EQUATIONS DESCRIBING REALITY BECOME INFINITE AND UNDEFINED.</p> 	
<p>WHEN PHYSICISTS FIRST FORMULATED THESE EQUATIONS FOR BASIC PARTICLES, THEY NOTICED SOMETHING WEIRD...</p> 	<p>IN ORDER TO PRESERVE SYMMETRY, THEY HAD TO MIX IN EXTRA TYPES OF FIELDS.</p> 	<p>THESE FIELDS TURNED OUT TO BE THE PARTICLES THAT TRANSMIT FORCES IN NATURE:</p> <ul style="list-style-type: none"> ⑧ photon ⑨ gluon ⑩ Z, W BOSON 	<p>THE EQUATIONS DICTATED THAT THESE FORCE PARTICLES HAD TO HAVE ZERO MASS.</p> <p>BUT THIS PRESENTED A PROBLEM.</p>
<p>SOME OF THE FORCE PARTICLES COULDN'T BE MASSLESS.</p> 	<p>IF THEY WERE MASSLESS, THEY WOULD MOVE AT THE SPEED OF LIGHT, AND HAVE INFINITE RANGE.</p> <p>BUT EXPERIMENTS SHOWED THEY DIDN'T.</p> 	<p>SO, PHYSICISTS IN THE 1960'S FACED A PROBLEM: HOW DO YOU PRESERVE SYMMETRY...</p> <p>...WHILE STILL GIVING MASS TO THESE PARTICLES?</p> 	<p>ENTER THE HIGGS FIELD.</p> 
<p>IN THE 60'S, FRANCOIS ENGLERT AND OTHERS FIGURED OUT THAT AN EXTRA FIELD WOULD ADD THE NECESSARY DEGREE OF FREEDOM NEEDED TO GIVE THESE PARTICLES MASS.</p> 	<p>THIS FIELD WAS SCALAR, MEANING THAT IT WAS DIRECTIONLESS AND IT WAS EVERYWHERE.</p> 	<p>BUT ADDING THIS FIELD TO THE EQUATIONS MEANT THAT ALL THE OTHER PARTICLES HAD TO INTERACT WITH IT.</p> 	<p>IN THE EQUATIONS, THIS INTERACTION COMES OUT AS THE MASS OF THE PARTICLES.</p> $m\bar{\psi}\psi$ <p>MASS TERM</p> $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + \dots$



6.5. Lecturas recomendadas

Libros:

- [1, 2, 20]

Artículos originales

- Teorías no abelianas [37]
- Mecanismo de Higgs [19]
- Teoría electrodébil [38]

Apéndice A

Potencial de Yukawa

A.1. Ecuación de Klein-Gordon

La interacción entre un protón y un neutrón fue determinada experimentalmente por Tomonaga en 1934 [?]

$$V(r) = A \frac{e^{-r/\Lambda}}{r}, \quad (\text{A.1})$$

con

$$\Lambda \approx 1/(7 \times 10^{12} \text{ cm}^{-1}) = 1.43 \times 10^{-13} \text{ cm} = 1.43 \times 10^{-15} \text{ m}. \quad (\text{A.2})$$

Consideremos el principio de incertidumbre

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta p &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta t \Delta E &\geq \frac{\hbar}{2}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

La segunda relación de incertidumbre aplicada a la ecuación de Klein-Gordon [23], brinda un nuevo entendimiento de la relación entre el rango y la masa en ec. (A.1). Δt es el tiempo que el sistema cuántico interactúa con el aparato de medida y $\Delta E = \hbar/(2\Delta t)$ es el error mínimo que se obtiene en la medida de la energía, tal que $E = E_0 \pm \Delta E$. Es decir, para medir la energía con una precisión ΔE , uno necesita un tiempo mayor que $\hbar/(2\Delta E)$.

Si $\Delta E < mc^2$ eso quiere decir que podemos medir la cantidad mc^2 con alguna certeza. Es decir que una partícula de masa m se puede llegar a observar. Si $\Delta E > mc^2$ entonces una partícula de masa m puede existir durante un tiempo Δt . A tal partícula se le llama virtual porque no es observable.

El momentum de una partícula de número de onda k es $p = \hbar k$, de modo que la incertidumbre en el momentum para una partícula relativista es

$$\Delta p = \hbar \Delta k \approx \hbar \frac{\Delta \omega}{c} = \frac{\Delta E}{c} \quad (\text{A.4})$$

Si la masa de la partícula es cero entonces E puede tender a cero, que corresponde al caso de una partícula no masiva con un momentum tendiendo a cero. La cantidad por la cual la conservación de energía es violada, ΔE , también puede llegar a ser muy pequeña. De modo que un fotón virtual

de frecuencia muy baja puede existir durante un tiempo casi infinito. Durante ese tiempo un fotón viajando a la velocidad de la luz podría viajar una distancia casi infinita y puede dar cuenta de una interacción de rango infinito.

Sin embargo, para una partícula de masa m . La violación de energía para producir esta debe ser de al menos mc^2 , o $\Delta E > mc^2$. Por el principio de incertidumbre la máxima distancia que puede recorrer es $\Lambda = c\Delta t$

$$\begin{aligned}\Lambda &\geq \frac{\hbar c}{2\Delta E} \\ &\geq \frac{c\hbar}{2mc^2} \\ &\geq \frac{\hbar}{2mc} \\ &\geq \frac{1}{2m} \quad \text{Natural Units.}\end{aligned}\tag{A.5}$$

De la componente escalar de la ecuación de Proca, (2.106), obtenemos la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar real $\phi = A^0$,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \rho\phi\tag{A.6}$$

Donde ρ es la densidad de carga que actúa como fuente del campo ϕ .

Posteriormente discutiremos en detalles porque m corresponde a la masa de la partícula. La idea básica es que ϕ tiene excitaciones alrededor del mínimo del potencial $V = (1/2)m^2\phi^2$ que corresponde a la energía de un oscilador armónico. Esta energía es equivalente a masa. Note que $m^2 < 0$ no puede interpretarse como masa. En este caso ϕ describirá excitaciones alrededor de la parte plana del potencial. Como estas excitaciones no cuestan energía, corresponde a una partícula sin masa.

El campo ϕ puede pensarse como proveniente de una fuente de la misma manera como el campo electromagnético surge de partículas cargadas. Como en el caso del electromagnetismo, en esta sección podemos considerar los campos sin preocuparnos de las fuentes. En tal caso tendremos una teoría en la cual el campo escalar juega el papel de partícula mediadora de la interacción.

Si el campo escalar se generaliza para que pueda tener otros números cuánticos, como carga eléctrica, entonces estos pueden ser las fuentes de las respectivas cargas y corrientes en las ecuaciones para campos vectoriales. Esto se estudiará en la sección ???. En tal caso podríamos tener por ejemplo “átomos” formados de partículas escalares que se excitan emitiendo fotones.

En las secciones 2.1.1 y 2.5, hemos visto que el Lagrangiano en ec. (A.6) da lugar a las ecuaciones de Klein-Gordon en presencia de una densidad de carga

$$(\square + m^2)\phi = \rho\tag{A.7}$$

De acuerdo a la ec. (2.107), tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{free}} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ \mathcal{L}_{\text{int}} &= \rho\phi\end{aligned}\tag{A.8}$$

En analogía con el electromagnetismo donde las densidades de carga y corrientes son la fuente del campo A^μ , podemos pensar en ρ como la fuente del campo ϕ . En el caso del electromagnetismo el

análisis de las ecuaciones de Maxwell en forma covariante, ec. (2.39), para las componentes A^0 y J^0 , en el gauge de Coulomb:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (\text{A.9})$$

da lugar a la Ley de Coulomb, que corresponde a una interacción de rango infinito [12]. Veremos a continuación que un análisis similar para un campo escalar masivo (o para la componente cero de un campo vectorial masivo) da lugar a una interacción de corto rango.

Consideremos el caso más simple de una fuente puntual para el campo ϕ :

$$\rho(x) = g\delta(\mathbf{x}) \quad (\text{A.10})$$

donde g es una constante. Entonces ρ es independiente del tiempo y genera un campo (un potencial) independiente del tiempo. Entonces, como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0,$$

tenemos

$$(-\nabla^2 + m^2)\phi(\mathbf{x}) = g\delta(\mathbf{x}) \quad (\text{A.11})$$

Para resolver la ecuación diferencial es más conveniente transformar $\phi(\mathbf{x})$ al espacio de momentos. Su transformada de Fourier es

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\phi}(\mathbf{k}). \quad (\text{A.12})$$

La transformada inversa es

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}). \quad (\text{A.13})$$

Ademas tenemos la propiedad

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (\text{A.14})$$

Reemplazando ec. (A.12) en (A.11), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k (\mathbf{k}^2 + m^2) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) &= g\delta(\mathbf{x}) \\ &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ (\mathbf{k}^2 + m^2) \tilde{\phi}(\mathbf{k}) &= \frac{g}{(2\pi)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{g}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m^2}. \quad (\text{A.15})$$

Reemplazando en la ec. (A.12) y definiendo $r \equiv |\mathbf{x}|$

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[\frac{g}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m^2} \right] \\ &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\mathbf{k}^2 + m^2} \\ &= \frac{g}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}^2 + m^2} \int_0^\pi e^{i|\mathbf{k}|r \cos \theta} \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $u = \cos \theta$, $du = -\sin \theta d\theta$,

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &= -\frac{g}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}^2 + m^2} \int_1^{-1} e^{i|\mathbf{k}|ru} du, \\ \phi(\mathbf{x}) &= \frac{g}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}^2 + m^2} \int_{-1}^1 e^{i|\mathbf{k}|ru} du.\end{aligned}\tag{A.16}$$

Ya que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 e^{i|\mathbf{k}|ru} du &= \frac{e^{i|\mathbf{k}|r} - e^{-i|\mathbf{k}|r}}{i|\mathbf{k}|r} \\ \phi(\mathbf{x}) &= \frac{g}{i(2\pi)^2 r} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}| \frac{e^{i|\mathbf{k}|r} - e^{-i|\mathbf{k}|r}}{\mathbf{k}^2 + m^2} \\ &= \frac{g}{i(2\pi)^2 r} \left(\int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}| \frac{e^{i|\mathbf{k}|r}}{\mathbf{k}^2 + m^2} - \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}| \frac{e^{-i|\mathbf{k}|r}}{\mathbf{k}^2 + m^2} \right) \\ &= \frac{g}{i(2\pi)^2 r} \left(\int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}| \frac{e^{i|\mathbf{k}|r}}{\mathbf{k}^2 + m^2} - \underbrace{\int_0^{-\infty} d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}| \frac{e^{i|\mathbf{k}|r}}{\mathbf{k}^2 + m^2}}_{|\mathbf{k}| \rightarrow -|\mathbf{k}|} \right) \\ &= \frac{g}{i(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}| \frac{e^{i|\mathbf{k}|r}}{\mathbf{k}^2 + m^2} \\ &= \frac{g}{i(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}| e^{i|\mathbf{k}|r}}{(|\mathbf{k}| + im)(|\mathbf{k}| - im)}\end{aligned}\tag{A.17}$$

Definiendo

$$f(z) = \frac{ze^{izr}}{z + im}$$

y usando la integral de Cauchy para el contorno correspondiente al semiplano positivo que incluye el polo en $z = im$

$$\int_C \frac{f(z)}{z - im} dz = 2\pi i f(im) = 2\pi i \frac{im e^{-mr}}{2im} = \pi i e^{-mr}\tag{A.18}$$

tenemos que

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}\tag{A.19}$$

A la luz de la interacción fuerte, un protón y un neutrón son indistinguibles y son llamados nucleones. En primera aproximación la interacción fuerte puede ser tratada como una interacción de Yukawa en el rango de los fermis entre los nucleones, mediada por mesones, como el pión. Ver sec. 2.2 de [23].

Para ver esto considere un nucleón como fuente de un mesón intermediario. De acuerdo a la

ec. (A.19),

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{x}) &= \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-m|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' g \delta(\mathbf{x}') \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \phi(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{A.21}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{\text{int}} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial(\partial\phi/\partial t)} \frac{\partial\phi}{\partial t} - \mathcal{L}_{\text{int}} \\
 &= -\mathcal{L}_{\text{int}} \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

$$H_{\text{int}} = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x d^3x' \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{A.23}$$

El Hamiltoniano de interacción en ec. (A.23) representa la interacción entre dos nucleones mediante el intercambio de un mesón. En forma análoga a como dos electrones intercambian un fotón mediante la interacción electromagnética. En el caso de $m = 0$, H_{int} , corresponde a la de energía potencial de Coulomb. El potencial por unidad de carga al cuadrado, puede escribirse como

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r} \tag{A.24}$$

El potencial en (A.24) recibe el nombre de *potencial de Yukawa* y corresponde a una interacción de rango $r \sim 1/m$.

Comparando con la ec. (A.1) tenemos

$$m \approx \frac{1}{\Lambda} \tag{A.25}$$

que es compatible con la ec. (A.5). Usando el valor medido de Λ en la ec. (A.2)

$$\begin{aligned}
 m &\approx \frac{1}{1.43 \times 10^{-15} \text{m}} \frac{1.973 \times 10^{-16} \text{m}}{\text{GeV}^{-1}} \\
 &\approx 138 \text{MeV}
 \end{aligned} \tag{A.26}$$

La masa del pión π^0 , es $m_{\pi^0} = 134.8766(6) \text{MeV}$.

En el caso general tenemos que $\phi(x)$ satisface la ecuación de Klein-Gordon en el espacio libre, ec. (A.7)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\phi = 0 \tag{A.27}$$

con solución,

$$\phi \propto \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t) \quad (\text{A.28})$$

que, consistente con la discusión en la sección 1.3, ec.(2.7), da lugar a la condición

$$m^2 = \omega^2 - \mathbf{k}^2. \quad (\text{A.29})$$

De este modo m , puede interpretarse como la masa de la partícula ϕ .

Para complementar la discusión, condere el caso de un aparato de medida con el mínimo requerimiento para descubrir el π^0 . El tiempo que el π^0 tarda en cruzar del protón al nucleón debe ser al menos de r/c . El aparato de medida debe operar a una escala de tiempos

$$\Delta t < \frac{r}{c}. \quad (\text{A.30})$$

La incertidumbre en la enrgía será

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} = \frac{\hbar c}{2r}. \quad (\text{A.31})$$

Reemplazando $\Delta E = \frac{1}{2}mc^2$ para que la medida $E \pm \Delta E$ sea significativa a dos σ , tenemos que

$$r \geq \frac{\hbar}{mc}. \quad (\text{A.32})$$

De este modo r es la medidad de la separación entre n y p , tal que en el tiempo disponible, el π^0 pueda robar la energía necesaria para llegar a existir y cruzar de uno a otro. Usando $m = 138 \text{ MeV}$, tenemos

$$r \geq \frac{1}{0.138} \text{ GeV}^{-1} \times \frac{1.973 \times 10^{-16} \text{ m}}{\text{GeV}^{-1}} = 1.43 \times 10^{-15} \text{ m}. \quad (\text{A.33})$$

El valor obtenido de Λ es compatible con r . Λ es el rango efectivo de la fuerza asociada. A continuación Yukawa considero la posibilidad de que el quantum ϕ pudiera ser emitido en la transición $n \rightarrow p$, a través del proceso

$$n \rightarrow p + \phi^- \quad (\text{A.34})$$

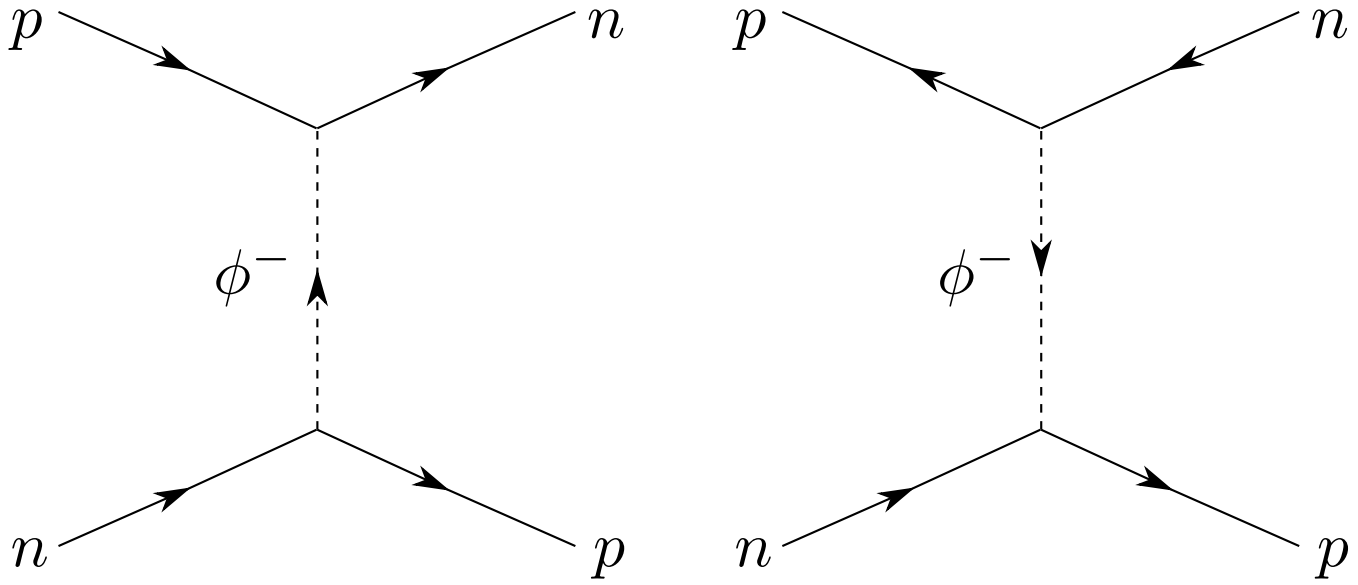
donde la conservación de la carga determina la carga de ϕ^- . Sin embargo el proceso viola la conservación de la energía ya que $m_n = 939.565 \text{ MeV}$, $m_p = 938.272 \text{ MeV}$, de modo que $m_n < m_p + m_\phi$, si $m_\phi \sim 100 \text{ MeV}$, así esto no puede ocurrir como un proceso real de emisión. Sin embargo, Yukawa notó que si (A.34) se combina con el proceso inverso

$$p + \phi^- \rightarrow n \quad (\text{A.35})$$

entonces una interacción n - p podría tomar lugar a través del mecanismo mostrado en la figura A.1(a). Es decir a través del intercambio de un quantum ϕ^- . El otro diagrama compatible con la conservación de la carga también aparece en la figura

En el espacio de momentos, la cantidad relevante que representa el intercambio de piones, es la que aparece en la ec. (A.17) y se conoce como el *propagador*:

$$\text{propagador:} \quad \frac{1}{\mathbf{k}^2 - m^2} \quad (\text{A.36})$$

Figura A.1: Intercambio de Yukawa de un sólo ϕ

En el caso electromagnético tendremos simplemente

$$1/\mathbf{k}^2. \quad (\text{A.37})$$

Para partículas α incidiendo sobre un metal y siendo dispersadas por un ángulo θ entre \mathbf{q} y \mathbf{q}' , tal que se satisface la condición de dispersión elástica $\mathbf{q}^2 = \mathbf{q}'^2$ (dispersión de Rutherford)

$$\mathbf{k}^2 = (\mathbf{q} - \mathbf{q}')^2 = 2\mathbf{q}^2(1 - \cos \theta) = 4\mathbf{q}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (\text{A.38})$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{cross section} &\propto \frac{1}{\mathbf{k}^2} \\ &\propto \sin^{-4} \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

que explica la famosa variación angular de la dispersión de Rutherford, en la cual las partículas α son dispersadas por los núcleos positivamente cargados del metal. Ver figura [A.2](#)

En general tendremos

$$\text{propagador:} \quad \frac{1}{k^2 - m^2}, \quad (\text{A.40})$$

donde $k = (k_0, \mathbf{k})$

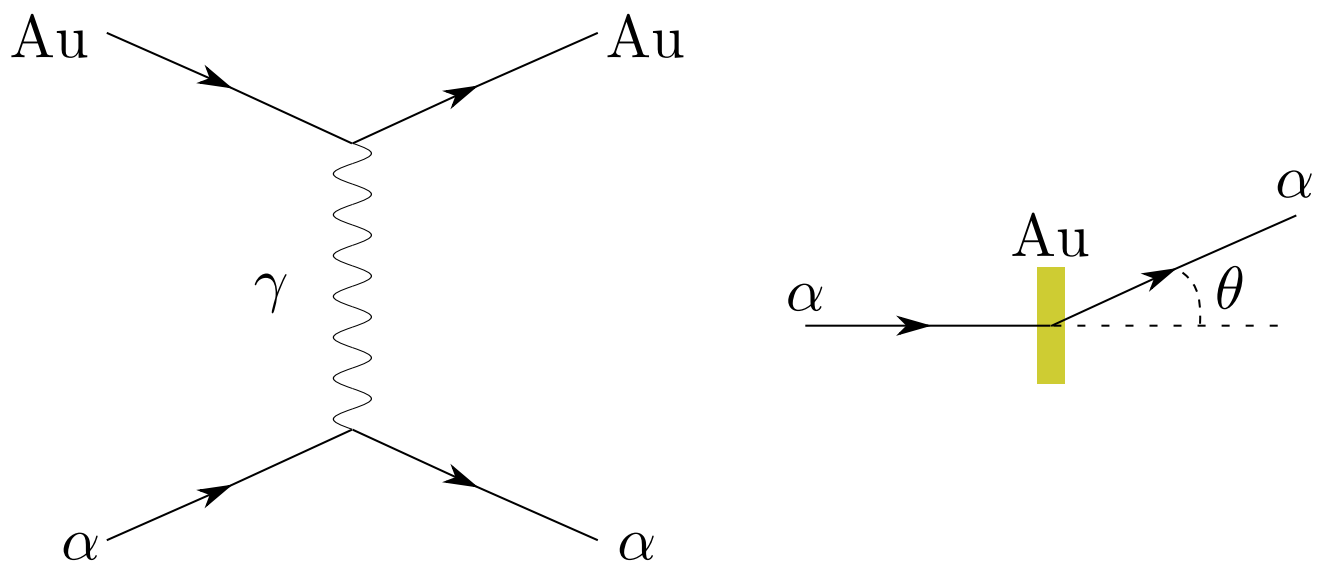


Figura A.2: Dispersión de partículas α a través de una lámina de oro

Apéndice B

Dirac Action

B.1. Dirac's Action

The Scrodinger equation can be written as

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}_S\psi, \quad (\text{B.1})$$

where

$$\hat{H}_S = \quad (\text{B.2})$$

In order to have a well defined probabiltly in relativistic quantum mechanics it is necessary that Lagrangian be linear in the time derivative, in order to obtain the general Scödinger equation:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi, \quad (\text{B.3})$$

like the Scrödinger Lagrangian. However, this automatically imply that the Lagrangian will be also linear in the spacial derivatives. A pure scalar field cannot involve a Lorentz invariant term of only first derivatives (see eq. (3.47)). Therefore the proposed field must have some internal structure associated with some representation of the Lorentz Group. Therefore we build the Lagrangian for a field of several components

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

B.1.1. Lorentz transformation

If the field is to describe the electron. it must have spin and in this way it must transform under some spin representation of the Lorentz Group

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x). \quad (\text{B.5})$$

One possible invariant could be the term $\psi^\dagger(x)\psi(x)$. However, under a Lorentz transformation we should have $\psi^\dagger S^\dagger S \psi$. As we cannot assume that $S(\Lambda)$ is unitary, the solution is to define the *adjoint* spinor

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger b. \quad (\text{B.6})$$

which transforms as

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \psi'^\dagger(x)b = \psi^\dagger(\Lambda^{-1}x) S^\dagger(\Lambda)b, \quad (\text{B.7})$$

and,

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x)\psi'(x) = \psi^\dagger(\Lambda^{-1}x) S^\dagger(\Lambda)bS(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) \quad (\text{B.8})$$

The condition that must be fulfilled for Lorentz invariance of the Action is

$$S^\dagger(\Lambda)bS(\Lambda) = b, \quad (\text{B.9})$$

and therefore,

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x)\psi'(x) = \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)\psi(\Lambda^{-1}x), \quad (\text{B.10})$$

and:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) &= \psi^\dagger(\Lambda^{-1}x) b S^{-1}(\Lambda) \\ &= \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x) S^{-1}(\Lambda). \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

A Action with a Lagrangian term linear in the derivatives, could be Lorentz invariant if, taking into account:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi'(x) = \bar{\psi}_a(\Lambda^{-1}x) S_{ab}^{-1}(\Lambda)\gamma_{bc}^\mu(\Lambda^{-1})^\rho_\mu \partial_\rho S_{cd}(\Lambda)\psi_d(\Lambda^{-1}x) \\ &= \bar{\psi}\psi(\Lambda^{-1}x) (\Lambda^{-1})^\rho_\mu (S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)) \partial_\rho\psi(\Lambda^{-1}x) \\ &= \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x), \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

if the following condition is satisfied:

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu_\sigma \gamma^\sigma. \quad (\text{B.13})$$

the most general Lagrangian for this field is

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (\text{B.14})$$

Where the coefficients have been already fixed by convenience. Since the Action is real, it is convenient to rewrite this as

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= -\frac{1}{2}\partial_\mu(i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= -\frac{i}{2}(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{i}{2}(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Para que este nuevo Lagrangiano sea real se requiere que,

$$\begin{aligned} b^\dagger &= b \\ b^2 &= I \\ b\gamma_\mu^\dagger b &= \gamma_\mu \end{aligned} \tag{B.16}$$

ya que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\dagger &= \left(\frac{i}{2} \psi^\dagger \gamma_\mu^\dagger b \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \psi^\dagger \gamma_\mu^\dagger b \psi \right) - m \psi^\dagger b \psi \\ &= \left(\frac{i}{2} \psi^\dagger b^2 \gamma_\mu^\dagger b \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \psi^\dagger b^2 \gamma_\mu^\dagger b \psi \right) - m \psi^\dagger b \psi \\ &= \left(\frac{i}{2} \bar{\psi} b \gamma_\mu^\dagger b \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} b \gamma_\mu^\dagger b \psi \right) - m \bar{\psi} \psi \\ &= \left(\frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \right) - m \bar{\psi} \psi \end{aligned}$$

B.1.2. Corriente conservada y Lagrangiano de Dirac

De la ec. (??)

$$\begin{aligned} J^0 &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \right] \delta \psi + \delta \bar{\psi} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \bar{\psi})} \right] \\ &= i \bar{\psi} \gamma^0 \delta \psi \end{aligned} \tag{B.17}$$

El Lagrangiano es invariante bajo transformaciones de fase globales, $U(1)$

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\alpha} \psi \approx \psi - i\alpha \psi, \tag{B.18}$$

de modo que

$$\delta \psi = -i\alpha \psi. \tag{B.19}$$

Por consiguiente

$$J^0 = \alpha \bar{\psi} \gamma^0 \psi \tag{B.20}$$

Para que J^0 pueda interpretarse como una densidad de probabilidad, se debe cumplir

$$b\gamma^0 = I \tag{B.21}$$

La densidad de corriente es

$$J^0 \propto \psi^\dagger \psi. \tag{B.22}$$

Que podemos interpretar como una densidad de probabilidad.

De la ec. (B.21), ya que la inversa de es única:

$$b = \gamma^0. \tag{B.23}$$

$\bar{\psi}$ se define como la *adjunta* de ψ :

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0. \quad (\text{B.24})$$

It is convenient at this point to summarize the properties for γ^0 :

$$\begin{aligned} \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0 & (\gamma^0)^2 &= 1 & \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 &= \gamma^\mu \\ S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 S(\Lambda) &= \gamma^0. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

En general

$$\begin{aligned} J^\mu &\propto \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right] \delta \psi + \delta \bar{\psi} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right] \\ &\propto i \bar{\psi} \gamma^\mu (-i \alpha \psi) \\ &\propto i \bar{\psi} \gamma^\mu (-i \alpha \psi) \\ &= \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

y

$$J^\mu = \psi^\dagger \gamma^\mu \psi. \quad (\text{B.27})$$

B.1.3. Tensor momento-energía

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \partial_0 \psi + \partial_0 \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \bar{\psi})} - \mathcal{L} \\ &= i \bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi - \mathcal{L} \\ &= -i \bar{\psi} \gamma^i \partial_i \psi + m \bar{\psi} \psi, \\ &= \bar{\psi} (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) \psi, \\ &= \psi^\dagger \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) \psi, \\ &= \psi^\dagger \hat{H} \psi, \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

donde

$$\hat{H} = \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) \quad (\text{B.29})$$

la ecuación de Schrödinger de validez general es entonces:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \quad (\text{B.30})$$

y, como en mecánica clásica usual

$$\langle \hat{H} \rangle = \int \psi^\dagger \hat{H} \psi d^3x. \quad (\text{B.31})$$

Además

$$\begin{aligned} T_i^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \partial_i \psi + \partial_i \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \bar{\psi})} \\ &= i \bar{\psi} \gamma^0 \partial_i \psi \\ &= -\psi^\dagger (-i \partial_i) \psi \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

de modo que

$$\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle = \int \psi^\dagger \hat{\mathbf{p}} \psi d^3x \quad (\text{B.33})$$

B.1.4. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Queremos que el Lagrangiano de lugar a la ecuación de Schrödinger de validez general

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \quad (\text{B.34})$$

con el Hamiltoniano dado en la ec. (B.31), que corresponde a un Lagrangiano de sólo derivadas de primer orden y covariante, en lugar del Hamiltoniano para el caso no relativista.

De hecho, aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo $\bar{\psi}$ al Lagrangiano en ec. (??), tenemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} &= 0 \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Expandiendo

$$\begin{aligned} i\gamma^0 \partial_0 \psi + i\gamma^i \partial_i \psi - m\psi &= 0 \\ i\gamma^0 \partial_0 \psi - \boldsymbol{\gamma} \cdot (-i\boldsymbol{\nabla})\psi - m\psi &= 0, \\ i\gamma^0 \partial_0 \psi &= (\boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m)\psi, \end{aligned}$$

de donde

$$i\gamma^{02} \frac{\partial}{\partial t} \psi = \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m)\psi. \quad (\text{B.36})$$

tenemos que

$$(\gamma^0)^2 = 1. \quad (\text{B.37})$$

De la ec. (B.29)

$$\hat{H} = \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m), \quad (\text{B.38})$$

A este punto, sólo nos queda por determinar los parámetros γ^μ .

La ec. (B.34) puede escribirse como

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) \psi = 0. \quad (\text{B.39})$$

El campo ψ también debe satisfacer la ecuación de Klein-Gordon. Podemos derivar dicha ecuación aplicando el operador

$$\left(-i \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right)$$

De modo que, teniendo en cuenta que $\partial\hat{H}/\partial t = 0$,

$$\begin{aligned}
 \left(-i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right) \left(i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right) \psi &= 0 \\
 \left(-i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right) \left(i\frac{\partial\psi}{\partial t} - \hat{H}\psi\right) &= 0 \\
 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + i\left(\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}\right)\psi + i\hat{H}\frac{\partial\psi}{\partial t} - i\hat{H}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \hat{H}^2\psi &= 0 \\
 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hat{H}^2\right)\psi &= 0.
 \end{aligned} \tag{B.40}$$

De la ec. (B.38), y usando la condición en ec. (B.37), tenemos

$$\begin{aligned}
 \hat{H}^2 &= (\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + \gamma_0 m)(\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + \gamma_0 m) \\
 &= (\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p})(\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}) + m\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}\gamma_0 + m\gamma_0^2\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m^2
 \end{aligned} \tag{B.41}$$

Sea

$$\begin{aligned}
 \beta &= \gamma^0 \\
 \alpha^i &= \beta\gamma^i \\
 \gamma^i &= \beta\alpha^i
 \end{aligned} \tag{B.42}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{H}^2 &= (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) + m\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}\beta + m\beta\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m^2 \\
 &= (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) + m(\boldsymbol{\alpha}\beta + \beta\boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{p} + m^2
 \end{aligned} \tag{B.43}$$

Sea A una matriz y θ en un escalar. Entonces tenemos la identidad

$$(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta})^2 = \sum_i A^{i2}\theta^{i2} + \sum_{i<j} \{A^i, A^j\} \theta^i\theta^j \tag{B.44}$$

■ Demostración

$$\begin{aligned}
[(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta})]_{\alpha\beta} &= \sum_{ij} \sum_{\gamma} A_{\alpha\gamma}^i \theta^i A_{\gamma\beta}^j \theta^j \\
&= \sum_{ij} \theta^i \theta^j \sum_{\gamma} A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^j \\
&= \sum_{\gamma} \sum_{ij} \theta^i \theta^j A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^j \\
&= \sum_{\gamma} \left(\sum_i \theta^{i^2} A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^i + \sum_{i<j} \theta^i \theta^j A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^j + \sum_{i>j} \theta^i \theta^j A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^j \right) \\
&= \sum_{\gamma} \left(\sum_i \theta^{i^2} A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^i + \sum_{i<j} \theta^i \theta^j A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^j + \sum_{j>i} \theta^j \theta^i A_{\alpha\gamma}^j A_{\gamma\beta}^i \right) \\
&= \sum_{\gamma} \left[\sum_i \theta^{i^2} A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^i + \sum_{i<j} \theta^i \theta^j (A_{\alpha\gamma}^i A_{\gamma\beta}^j + A_{\alpha\gamma}^j A_{\gamma\beta}^i) \right] \\
&= \left[\sum_i \theta^{i^2} (A^i A^i)_{\alpha\beta} + \sum_{i<j} \theta^i \theta^j \{A^i, A^j\}_{\alpha\beta} \right] \\
&= \left[\sum_i \theta^{i^2} A^{i^2} + \sum_{i<j} \theta^i \theta^j \{A^i, A^j\} \right]_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{B.45}$$

Entonces

$$\hat{H}^2 = \alpha_i^2 p_i^2 + \sum_{i<j} \{\alpha_i, \alpha_j\} p_i p_j + m(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i + m^2 \tag{B.46}$$

(suma sobre índices repetidos). Si

$$\begin{aligned}
\alpha_i^2 &= 1 \\
\{\alpha_i, \alpha_j\} &= 0 \quad i \neq j \\
\alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0
\end{aligned} \tag{B.47}$$

$$\hat{H}^2 = -\nabla^2 + m^2 \tag{B.48}$$

y reemplazando en la ec. (B.40) llegamos a la ecuación de Klein-Gordon para ψ

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \psi &= 0 \\
(\square + m^2) \psi &= 0
\end{aligned} \tag{B.49}$$

En términos de las matrices γ^μ las condiciones en ec. (B.47) son

$$\begin{aligned}
(\gamma^0)^2 &= 1 \\
(\alpha^i)^2 = 1 &\rightarrow \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 \gamma^i = -(\gamma^i)^2 = 1 \rightarrow (\gamma^i)^2 = -1 \\
\gamma^i \gamma^0 + \gamma^0 \gamma^i &= \{\gamma^i, \gamma^0\} = 0
\end{aligned} \tag{B.50}$$

De modo que

$$\begin{aligned}\{\alpha^i, \alpha^j\} &= \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 \gamma^j + \gamma^0 \gamma^j \gamma^0 \gamma^i = 0 & i \neq j \\ & - \gamma^0 \gamma^0 \gamma^i \gamma^j - \gamma^0 \gamma^0 \gamma^j \gamma^i = 0 & i \neq j \\ & \gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = 0 & i \neq j \\ & \{\gamma^i, \gamma^j\} = 0 & i \neq j\end{aligned}\tag{B.51}$$

Las ecuaciones (B.50)(B.51) pueden escribirse como

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}\tag{B.52}$$

donde

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^i)\tag{B.53}$$

Además, de la ec. (B.25)

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu.\tag{B.54}$$

Cualquier conjunto de matrices que satisfagan el álgebra en ec. (B.52) y la condición en ec. (B.54), se conocen como matrices de Dirac. A ψ se le llama espinor de Dirac.

En términos de la matrices γ^μ , el Lagrangiano de Dirac y la ecuación de Dirac, son respectivamente de las ecs. (??) y (??)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi,\tag{B.55}$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0,\tag{B.56}$$

donde

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0.\tag{B.57}$$

B.1.5. Propiedades de las matrices de Dirac

De la ec. (B.54)

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma^{0\dagger} = \gamma^0 & \mu = 0 \\ \gamma^{i\dagger} = -\gamma^{02} \gamma^i = -\gamma^i & \mu = i \end{cases}.\tag{B.58}$$

Definiendo

$$\gamma_5 = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3,\tag{B.59}$$

entonces,

$$\begin{aligned}\gamma_5^2 &= -\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \\ \gamma_5^2 &= +\gamma_0^2 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \\ \gamma_5^2 &= +\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \\ \gamma_5^2 &= -\gamma_2 \gamma_3 \gamma_2 \gamma_3 \\ \gamma_5^2 &= \gamma_2 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_3 \\ \gamma_5^2 &= \mathbf{1}.\end{aligned}\tag{B.60}$$

$$\gamma_5^2 = \mathbf{1},\tag{B.61}$$

Teniendo en cuenta que $\gamma_\mu^2 \propto \mathbf{1}$ y conmuta con las demás matrices, tenemos por ejemplo

$$\begin{aligned}\gamma_5\gamma_3 &= i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3^2 = \gamma_3^2 i\gamma_0\gamma_1\gamma_2 = -\gamma_3 i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_3\gamma_5 \\ \gamma_5\gamma_2 &= -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2^2\gamma_3 = -\gamma_2^2 i\gamma_0\gamma_1\gamma_3 = -\gamma_2 i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_2\gamma_5 \\ \gamma_5\gamma_1 &= i\gamma_0\gamma_1^2\gamma_2\gamma_3 = \gamma_1^2 i\gamma_0\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_1 i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_1\gamma_5 \\ \gamma_5\gamma_0 &= i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0 = -\gamma_0^2 i\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_0\gamma_5.\end{aligned}\tag{B.62}$$

De modo que

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0.\tag{B.63}$$

Expandiendo el anticonmutador tenemos

$$\begin{aligned}\gamma_\mu\gamma_5 &= -\gamma_5\gamma_\mu \\ \gamma_5\gamma_\mu\gamma_5 &= -\gamma_\mu \\ \text{Tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_5) &= -\text{Tr}\gamma_\mu \\ \text{Tr}(\gamma_5\gamma_5\gamma_\mu) &= -\text{Tr}\gamma_\mu \\ \text{Tr}\gamma_\mu &= -\text{Tr}\gamma_\mu,\end{aligned}\tag{B.64}$$

y por consiguiente

$$\text{Tr}\gamma_\mu = 0.\tag{B.65}$$

De otro lado, si

$$\tilde{\gamma}_\mu \equiv U\gamma_\mu U^\dagger,\tag{B.66}$$

para alguna matriz unitaria U , entonces $\tilde{\gamma}_\mu$ corresponde a otra representación de álgebra de Dirac en ec. (B.52), ya que

$$\begin{aligned}\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} &= \{U\gamma^\mu U^\dagger, U\gamma^\nu U^\dagger\} \\ &= U\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}U^\dagger \\ &= 2g^{\mu\nu}UU^\dagger \\ &= 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}.\end{aligned}\tag{B.67}$$

Claramente, la condición en ec. (B.54) se mantiene para la nueva representación. Como γ_0 es hermitica, siempre es posible escoger una representación tal que $\tilde{\gamma}_0 \equiv U\gamma_0 U^\dagger$ sea diagonal. Como $\gamma_0^2 = 1$, sus entradas en la diagonal deben ser ± 1 , y como $\text{Tr}\tilde{\gamma}_0 = 0$, debe existir igual número de $+1$ que de -1 . Por lo tanto la dimensión de γ_0 (y de γ_μ) debe ser par: $2, 4, \dots$. Para un fermion sin masa

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\partial_0\psi + i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^i\partial_i\psi = i\psi^\dagger\partial_0\psi + i\psi^\dagger\alpha^i\partial_i\psi,\tag{B.68}$$

solo se requieren tres matrices 2×2 que satisfacen

$$\{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta^{ij},\tag{B.69}$$

y por lo tanto pueden identificarse con las tres matrices de Pauli. Como en general tenemos 4 matrices independientes, su dimensión mínima debe ser 4.

Como $\tilde{\gamma}^i = \gamma^0\gamma^i\gamma^0 = \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$, podemos definir la *representación de paridad*

$$\tilde{\gamma}^0 = \gamma^0, \quad \tilde{\gamma}^i = -\gamma^i, \quad \text{para} \quad U = \gamma^0\tag{B.70}$$

B.1.6. Lorentz invariance of the Dirac Action

We need to satisfy the following conditions

$$\begin{aligned} S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) &= \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \\ S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 S(\Lambda) &= \gamma^0 \quad \text{or} \quad S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}(\Lambda). \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

We now set the notation

$$\Lambda = 1 + \xi_i b^i + \frac{1}{2} \theta_i \epsilon_{ijk} r^{jk}, \quad (\text{B.72})$$

$$b^i = -iJ^{i0} \quad r^{jk} = -iJ^{jk}. \quad (\text{B.73})$$

In order to find a representation of the Lorentz Group in terms of the Dirac matrices we propose

$$S(\Lambda) = 1 + \xi_i B^i + \frac{1}{2} \theta_i \epsilon_{ijk} R^{jk}. \quad (\text{B.74})$$

Instead of show the Lorentz invariance of the Dirac Action, we use the conditions derived from the invariance, to find a representation in terms of the Dirac matrices for B^i and R^{jk} . As a consistency check, the resulting representation would satisfy the Lorentz algebra. In this way, by using eq. (B.72) and (B.74), we obtain from

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu, \quad (\text{B.75})$$

that

$$\begin{aligned} B^i &= \frac{1}{2} \gamma^0 \gamma^i \\ R^{jk} &= \frac{1}{2} \gamma^j \gamma^k, \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

which can be written in covariant form if we define

$$\mathcal{S}^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (\text{B.77})$$

In fact, the six set of non-zero independently generators are

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{0i} &= \frac{i}{4} (\gamma^0 \gamma^i - \gamma^i \gamma^0) = \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^i = iB^i \\ \mathcal{S}^{ij} &= \frac{i}{4} (\gamma^i \gamma^j - \gamma^j \gamma^i) = \frac{i}{2} \gamma^i \gamma^j = iR^{ij}. \end{aligned} \quad (\text{B.78})$$

It is worth notices that in fact $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ satisfy the Lorentz algebra, and therefore are the generators of the Lorentz group elements:

$$\begin{aligned} S(\Lambda) &= \exp \left(-i\omega_{\mu\nu} \frac{\mathcal{S}^{\mu\nu}}{2} \right) \\ &\approx 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{B.79})$$

Another consistency check is

$$S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 S(\Lambda) = \gamma^0, \quad (\text{B.80})$$

or equivalently

$$\begin{aligned} S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 &= \gamma^0 S^{-1}(\Lambda) \\ \left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu\dagger}\right)\gamma^0 &= \gamma^0 \left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right) \\ \mathcal{S}^{\mu\nu\dagger}\gamma^0 &= \gamma^0\mathcal{S}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{B.81})$$

Taking into account that

$$\gamma^{\mu\dagger}\gamma^{\nu\dagger}\gamma^0 = (\gamma^0)^2\gamma^{\mu\dagger}(\gamma^0)^2\gamma^{\nu\dagger}\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^\nu, \quad (\text{B.82})$$

we have

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\mu\nu\dagger}\gamma^0 &= -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]^\dagger\gamma^0 \\ &= -\frac{i}{4}[\gamma^{\nu\dagger}, \gamma^{\mu\dagger}]\gamma^0 \\ &= \frac{i}{4}[\gamma^{\mu\dagger}, \gamma^{\nu\dagger}]\gamma^0 \\ &= \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\gamma^0 \\ &= \gamma^0\mathcal{S}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{B.83})$$

B.1.7. Dirac's Lagrangian

Para una matriz de n dimensiones existen n^2 matrices hermíticas (o anti-hermíticas) independientes. Si se sustrae la identidad quedan $n^2 - 1$ matrices hermíticas (o anti-hermíticas) independientes de traza nula. En el caso $n = 2$ corresponden a las 3 matrices de Pauli. En el caso de la ecuación de Dirac se requieren 4 matrices independientes, por lo tanto deben ser matrices 4×4 . En efecto para $n = 4$ existen 15 matrices independientes de traza nula dentro de las cuales podemos acomodar sin problemas las 4 γ^μ .

De [?]:

All Dirac matrix elements will now be written in the form

$$\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x), \quad (\text{B.84})$$

where Γ is a 4×4 complex matrix. The most general such matrix can always be expanded in terms of 16 independent 4×4 matrices multiplied by complex coefficients. In short the matrices Γ can be regarded as a *16-dimensional complex vector space* spanned by 16 matrices.

It is convenient to choose the 16 matrices, Γ_i , so that they have well defined transformation properties under the Lorentz Transformations. Since the γ^μ 's have such properties, we are lead to choose the following 16 matrices for this basis:

Matriz Γ	Transformación	Número	Escalar en Dirac
1	Escalar (S)	1	$\bar{\psi}\psi$
γ_5	Pseudoescalar (P)	1	$\bar{\psi}\gamma_5\psi$
γ_μ	Vector (V)	4	$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$
$\gamma_\mu\gamma_5$	Vector axial (A)	4	$\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$
$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$	Tensor antisimétrico (T)	6	$\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$
		16	

Tabla B.1: Matrices Γ_i .

En la Tabla C.1 se muestran las matrices de traza nula con sus propiedades de transformación bajo el Grupo de Lorentz. En la última se muestra el correspondiente escalar en el espacio de Dirac $\bar{\psi}\Gamma\psi$. Demostración

$$\begin{aligned}
J^\mu(x) &\equiv \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) \\
&= \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)\gamma^\nu\psi(\Lambda^{-1}x) \\
&= \Lambda^\mu{}_\nu J^\nu(\Lambda^{-1}x).
\end{aligned} \tag{B.85}$$

In [?]: Problem 5.4:

$$\bar{\psi}\gamma_5\psi \rightarrow \bar{\psi}S^{-1}(\Lambda)\gamma^5 S(\Lambda)\psi = (\det \Lambda)\bar{\psi}\gamma_5\psi \tag{B.86}$$

The solution is in Appendix C. of Burgess book, by using

$$\gamma^5 = \frac{i}{24}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta \tag{B.87}$$

and

$$\det \Lambda = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\Lambda^\mu{}_1\Lambda^\nu{}_2\Lambda^\alpha{}_3\Lambda^\beta{}_4. \tag{B.88}$$

Apéndice C

Soluciones a la ecuación de Dirac

C.1. Fermiones quirales de cuatro componentes

Sea

$$\begin{aligned} P_L &\equiv \frac{1 - \gamma_5}{2} \\ P_R &\equiv \frac{1 + \gamma_5}{2}. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Además

$$\begin{aligned} \psi_L &\equiv P_L \psi \\ \psi_R &\equiv P_R \psi. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Entonces

$$\psi = \psi_L + \psi_R. \quad (\text{C.3})$$

Las matrices $P_{L,R}$ tienen las propiedades

$$\begin{aligned} P_L + P_R &= 1 & P_{L,R}^2 &= P_{L,R} P_{L,R} = P_{L,R} \\ P_L P_R &= 0 & P_{L,R}^\dagger &= P_{L,R}. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Usando la ec. (B.63)

$$P_{L,R} \gamma^\mu = \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \gamma^\mu = \gamma^\mu \frac{1 \pm \gamma_5}{2} = \gamma^\mu P_{R,L} \quad (\text{C.5})$$

Para escribir el Lagrangiano en término de los nuevos $\psi_{L,R}$ debemos tener en cuenta que

$$\overline{\psi_{L,R}} = (P_{L,R} \psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger P_{L,R} \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 P_{R,L} = \overline{\psi} P_{R,L} \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i \overline{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \overline{\psi} \psi \\ &= i \overline{\psi} (P_L + P_R) \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \overline{\psi} (P_L + P_R) \psi \\ &= i \overline{\psi} P_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi + i \overline{\psi} P_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \overline{\psi} P_L \psi - m \overline{\psi} P_R \psi \\ &= i \overline{\psi} P_L P_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi + i \overline{\psi} P_R P_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \overline{\psi} P_L P_L \psi - m \overline{\psi} P_R P_R \psi \\ &= i \overline{\psi} P_L \gamma^\mu \partial_\mu P_R \psi + i \overline{\psi} P_R \gamma^\mu \partial_\mu P_L \psi - m \overline{\psi} P_L P_L \psi - m \overline{\psi} P_R P_R \psi \\ &= i \overline{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + i \overline{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L - m (\overline{\psi}_R \psi_L + \overline{\psi}_L \psi_R). \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

En términos de espinores izquierdos y derechos de cuatro componentes la transformación de paridad

$$\begin{array}{llll} t \rightarrow t & \mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x} & \psi_L(t, \mathbf{x}) \rightarrow \psi_R(t, -\mathbf{x}), & \psi_R(t, \mathbf{x}) \rightarrow \psi_L(t, -\mathbf{x}) \\ \partial_0 \rightarrow \partial_0 & \nabla \rightarrow -\nabla & \psi_L(t, \mathbf{x}) \rightarrow \psi_R(t, -\mathbf{x}), & \psi_R(t, \mathbf{x}) \rightarrow \psi_L(t, -\mathbf{x}). \end{array} \quad (\text{C.8})$$

Además $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \rightarrow (-\mathbf{r}) \times (-\mathbf{p}) = \mathbf{L}$, y como γ^μ esta asociado al momento angular intrínscico, entonces también $\gamma^\mu \rightarrow \gamma^\mu$

Entonces la transformación de paridad da lugar a (sin tener en cuenta el cambio de argumento en los campos que desaparece en la integral de la Acción)

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R &= \overline{\psi}_R \gamma^0 \partial_0 \psi_R + \overline{\psi}_R \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla \psi_R \rightarrow \overline{\psi}_L \gamma^0 \partial_0 \psi_L - \overline{\psi}_L \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla \psi_L \\ &= \overline{\psi}_L \gamma^0 \partial_0 \psi_L + \overline{\psi}_L \boldsymbol{\gamma}^\dagger \cdot \nabla \psi_L \\ &= \overline{\psi}_L \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 \partial_0 \psi_L + \overline{\psi}_L \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \gamma^0 \cdot \nabla \psi_L \\ &= \overline{\psi}_L \tilde{\gamma}^0 \partial_0 \psi_L + \overline{\psi}_L \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \nabla \psi_L \\ &= \overline{\psi}_L \tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu \psi_L. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Entonces

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = i \overline{\psi}_R \tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu \psi_R + i \overline{\psi}_L \tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu \psi_L - m(\overline{\psi}_R \psi_L + \overline{\psi}_L \psi_R), \quad (\text{C.10})$$

donde $\tilde{\gamma}^\mu = U \gamma^\mu U^\dagger$, con $U = \gamma^0$. Como las dos representaciones dan lugar a la misma física, podemos decir que la Acción en términos de espinores L, R de cuatro componentes es invariante bajo la transformación de paridad.

La existencia de ambos espinores $\psi_{L,R}$ garantizan que el Lagrangiano de Dirac es invariante bajo la transformación de paridad.

La corriente de la electrodinámica cuántica en ec. (5.12) (o la de la cromodinámica cuántica, ec. (5.82)) conservan paridad ya que, siguiendo los mismos pasos que en la ec. (C.7)

$$\overline{\psi} \gamma^\mu \psi = \overline{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L + \overline{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R \rightarrow \overline{\psi}_L \tilde{\gamma}^\mu \psi_L + \overline{\psi}_R \tilde{\gamma}^\mu \psi_R. \quad (\text{C.11})$$

Si para alguna partícula, como es el caso del neutrino, no existe la componente derecha, entonces la correspondiente interacción vectorial viola paridad y no puede tener ni interacciones electromagnéticas ni fuertes, es decir, no se acopla con el fotón o los gluones. Además dicha partícula no puede tener masa de Dirac. En el caso del neutrino esto se entiende pues al no tener carga eléctrica sólo requiere dos grados de libertad independientes.

De otro lado, si una determinada interacción, como es el caso de la interacción débil, solo participa la componente izquierda de la ec. (C.11), está corresponde a una interacción del tipo

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L &= \overline{\psi} P_R \gamma^\mu P_L \psi = \overline{\psi} \gamma^\mu P_L \psi \\ &= \overline{\psi} \gamma^\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \psi \\ &= \frac{1}{2} \overline{\psi} (\gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma_5) \psi, \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

que de acuerdo a la asignación en la Tabla corresponde a una corriente V-A.

C.1.1. Fermiones de Weyl

Sea ψ un campo que satisface una ecuación covariante de segundo orden. La parte cinética del Lagrangiano sin términos de masa y sin términos de interacción debe tener la forma

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\partial_\mu \psi^\dagger a^{\mu\dagger} \psi - m\psi^\dagger b\psi \quad (\text{C.13})$$

La Acción debe ser real, de modo que el Lagrangiano también. En efecto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\dagger &= \left(\frac{i}{2}\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\partial_\mu \psi^\dagger a^{\mu\dagger} \psi \right)^\dagger - m\psi^\dagger b^\dagger \psi \\ &= \left(-\frac{i}{2}\partial^\mu \psi^\dagger a_\mu^\dagger \psi + \frac{i}{2}\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi \right) - m\psi^\dagger b^\dagger \psi \\ &= \mathcal{L} \quad \text{si } b^\dagger = b. \end{aligned}$$

Como al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange a este Lagrangiano debemos obtener la ecuación de Schrödinger

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi \quad (\text{C.14})$$

con \hat{H} una función por determinar del operador $\hat{\mathbf{p}}$, entonces

$$a_\mu^\dagger = a_\mu \quad (\text{C.15})$$

El Lagrangiano en ec. (C.13) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{i}{2}\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\partial_\mu (\psi^\dagger a^\mu \psi) + \frac{i}{2}\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi - m\psi^\dagger b\psi \\ &= i\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\partial_\mu (\psi^\dagger a^\mu \psi) - m\psi^\dagger b\psi \\ \mathcal{L} &= i\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi - m\psi^\dagger b\psi \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Ahora utilizaremos el método desarrollado en capítulos anteriores para analizar el Lagrangiano. Calcularemos las ecuaciones de Euler-Lagrange, la corriente conservada y el tensor de momento-energía.

C.2. Soluciones a la ecuación de Dirac

C.2.1. Lagrangiano de Weyl

En la ec. (C.69), obtuvimos el Hamiltoniano en ec. (C.78)

$$\hat{H} = \gamma_0(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m. \quad (\text{C.17})$$

Una escogencia particular de las cuatro matrices γ^μ , conocida como la representación de Weyl, o representación quiral, puede escribirse en términos de las matrices de Pauli. Escritas en bloques 2×2 , tenemos

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.18})$$

Con $\sigma^0 = 1$. Con la matriz de transformación

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.19})$$

podemos obtener la representación de Dirac, tal que U diagonaliza γ^0 ,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix} \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.20})$$

En adelante trabajaremos en la representación de Weyl que en forma compacta es

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.21})$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma^\mu &= (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) \\ \bar{\sigma}^\mu &= (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3) \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Hemos escrito las matrices de Dirac en bloques 2×2 , y es natural escribir similarmente las cuatro componentes del campo de Dirac como un par de campos de dos componentes

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (\text{C.23})$$

Donde $\psi_{L,R}$ son espinores de Weyl de dos componentes. En la representación de Weyl el Lagrangiano se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi^\dagger\gamma^0\psi \\ &= i\psi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \partial_\mu\psi - m\psi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \psi \\ &= i \begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\mu\psi_L \\ \partial_\mu\psi_R \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\ &= i\psi_L^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L + i\psi_R^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R - m(\psi_L^\dagger\psi_R + \psi_R^\dagger\psi_L) \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

C.3. Límite no relativista en presencia de un campo electromagnético

En el límite no relativista, la ecuación de Dirac en presencia de un campo electromagnético (electrodinámica cuántica en la sección 5.1) debe contener la ecuación de Schrödinger en presencia de un campo electromagnético. Combinando las ecuaciones (5.93) tenemos

$$\begin{aligned} (i\partial_0 - qA_0)(\psi_L + \psi_R) - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)(\psi_L - \psi_R) - m(\psi_L + \psi_R) &= 0 \\ (i\partial_0 - qA_0)(\psi_L - \psi_R) - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)(\psi_L + \psi_R) + m(\psi_L - \psi_R) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Esta forma es útil porque de la solución de partículas libre esperamos que $\psi_L - \psi_R$ sea pequeña. Como antes prongamos como solución

$$\psi_L = u_L e^{-ip \cdot x} \quad \psi_R = u_R e^{-ip \cdot x} \quad (\text{C.26})$$

Para solucionar este sistema de ecuaciones acopladas definimos

$$\begin{aligned} \phi &= e^{imt}(\psi_L + \psi_R) \Rightarrow (\psi_L + \psi_R) = e^{-imt} \phi \\ \chi &= e^{imt}(\psi_L - \psi_R) \Rightarrow (\psi_L - \psi_R) = e^{-imt} \chi \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

donde

$$\begin{aligned} \phi &= e^{imt}(\psi_L + \psi_R) = e^{imt} e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} (u_L + u_R) = e^{i(m-E)t} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} (u_L + u_R) \\ \chi &= e^{imt}(\psi_L - \psi_R) = e^{imt} e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} (u_L - u_R) = e^{i(m-E)t} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} (u_L - u_R) \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Reemplazando (C.27) en eq. (C.25)

$$\begin{aligned} e^{-imt} [m\phi + (i\partial_0 - qA_0)\phi - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\chi - m\phi] &= 0 \\ e^{-imt} [m\chi + (i\partial_0 - qA_0)\chi - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\phi + m\chi] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

de donde

$$\begin{aligned} (i\partial_0 - qA_0)\phi - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\chi &= 0 \\ (i\partial_0 - qA_0 + 2m)\chi - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\phi &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

Para una solución $\chi \propto e^{i(-Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}$, dentro de un sistema atómico, tenemos

$$(i\partial_0 - qA_0 + 2m)\chi = (E - qV + 2m)\chi \quad (\text{C.31})$$

Para los potenciales de coulomb atómicos $qV = qA_0 \sim 10eV$, y como $m \approx 0.5 \text{ MeV}$ para el electrón, entonces

$$(i\partial_0 - qA_0 + 2m)\chi \rightarrow (i\partial_0 + 2m)\chi \quad (\text{C.32})$$

de la ec. (C.28) tenemos

$$(i\partial_0 + 2m)\chi = [(E - m) + 2m]\chi \quad (\text{C.33})$$

En el límite no relativista de $|\mathbf{p}| \approx 0$ (estamos en la solución de energía positiva), de la ec. (5.121) $E \approx +m$ y $E - m \approx 0$, entonces

$$(i\partial_0 + 2m)\chi \approx 2m\chi \quad (\text{C.34})$$

Reemplazando en ec. (C.30)

$$\chi = \frac{1}{2m} \sigma^i (i\partial_i - qA_i) \phi \quad (\text{C.35})$$

entonces

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi = \hat{H} \phi \quad (\text{C.36})$$

con

$$\begin{aligned}
\hat{H}\phi &= qA_0\phi + \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\frac{1}{2m}\sigma^j(i\partial_j - qA_j)\phi \\
&= \frac{1}{2m}\sigma^i(i\partial_i - qA_i)\sigma^j(i\partial_j - qA_j)\phi + qA_0\phi \\
&= \frac{1}{2m}\sigma^i\sigma^j(-\partial_i\partial_j - iq(\partial_iA_j) - iqA_j\partial_i - iqA_i\partial_j + q^2A_iA_j)\phi + qA_0\phi \\
&= \frac{1}{2m}\left[(-\sigma^i\sigma^j\partial_i\partial_j + q^2\sigma^i\sigma^jA_iA_j)\phi - iq\sigma^i\sigma^j(\partial_iA_j)\phi - iq\sigma^i\sigma^jA_j\partial_i\phi - iq\sigma^i\sigma^jA_i\partial_j\phi\right] + qA_0\phi
\end{aligned}$$

Usando las propiedades de las matrices de Pauli en ecs.(?) y la ec.(C.85), que para $A^i = \sigma^i$ es

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\theta})^2 = \sum_i \theta_i^2 \quad (\text{C.37})$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\hat{H}\phi &= \frac{1}{2m} \left\{ [-(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla})^2 + q^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})^2]\phi - iq\{\sigma^i, \sigma^j\}A_j\partial_i\phi - iq\sigma^i\sigma^j(\partial_iA_j)\phi \right\} + qA_0\phi \\
&= \frac{1}{2m} \left\{ \sum_i [-\partial_i^2 + q^2A_i^2]\phi - 2iq\delta_{ij}A_j\partial_i\phi - iq(i\epsilon_{ijk}\sigma^k + \delta_{ij})(\partial_iA_j)\phi \right\} + qA_0\phi \\
&= \frac{1}{2m} \left\{ \sum_i [-\partial_i^2 + q^2A_i^2]\phi - 2iqA_i\partial_i\phi - iq(\partial_iA_i)\phi - q\sigma^k(\epsilon_{ijk}\partial_iA^j)\phi \right\} + qA_0\phi
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
(i\boldsymbol{\nabla} + q\mathbf{A})^2\phi &= (i\partial_i - qA_i)(i\partial_i - qA_i)\phi \\
&= (-\partial_i\partial_i + q^2A_iA_i)\phi - iq(\partial_iA_i)\phi - iqA_i\partial_i\phi - iqA_i\partial_i\phi \\
&= \sum_i (-\partial_i^2 + q^2A_i^2)\phi - 2iqA_i\partial_i\phi - iq(\partial_iA_i)\phi
\end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\hat{H}\phi &= \frac{1}{2m} \left\{ (i\boldsymbol{\nabla} + q\mathbf{A})^2\phi - q\sigma^k(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})_k\phi \right\} + qA_0\phi \\
&= \left[\frac{1}{2m}(i\boldsymbol{\nabla} + q\mathbf{A})^2 + qA_0 - \left(\frac{q\boldsymbol{\sigma}}{2m} \right) \cdot \mathbf{B} \right] \phi
\end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

En ausencia del campo electromagnético recuperemos la Ecuación de Schrödinger para una partícula libre como era de esperarse. Sin el último término $(q\boldsymbol{\sigma}/2m) \cdot \mathbf{B}$, sería el Hamiltoniano de Schrödinger para una partícula cargada en presencia de un campo electromagnético. El término adicional es interpretado como la energía en un campo magnético, de un momento magnético intrínseco asociado

con un partícula de Dirac. Definimos entonces el momento magnético intrínseco como ($q = -e$)

$$\begin{aligned}
 \mu_e &= -\frac{e\sigma}{2m} \\
 &= -2 \left(\frac{e}{2m} \right) \frac{\sigma}{2} \\
 &= -2 \left(\frac{e\hbar}{2m} \right) \frac{\sigma}{2} \\
 &= -g_e \left(\frac{e\hbar}{2m} \right) \frac{\sigma}{2}
 \end{aligned} \tag{C.40}$$

donde hemos recuperado el factor \hbar y definido el *factor-g* [28], $g_e = 2$. Se define el momento magnético anómalo del electrón como

$$a_e = \frac{g_e - 2}{2} \tag{C.41}$$

de modo que $a_e = 0$. Sin embargo experimentalmente $a_e \sim 10^{-3}$

$$a_e = 0.001\,159\,652\,1859(38) \tag{C.42}$$

Después de la segunda cuantización, se pueden realizar correcciones perturbativas al valor calculado anteriormente de g_e . Dicho cálculo ha sido realizado a cuarto orden en teoría de perturbaciones coincidiendo con el valor experimental hasta la décima cifra significativa. Este tipo de comprobaciones entre teoría y experimento ha llevado a considerar la Electrodinámica Cuántica (QCD) como la mejor teoría que se halla construido para describir la naturaleza.

C.4. Problemas

- 1 Calcule la dimensión del campo ψ
- 2 Demuestre que para una transformación $SU(3)_c$ global, los estados B y M en la ec.(??) son invariantes. Es decir, son singletes de color (ver [2] §16.2)
- 3 Lagrangiano de Weyl.

- a) Demuestre que $\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L = -\psi_L \sigma^\mu \psi_L^\dagger$
- b) Definiendo $\xi = \psi_L$ y $\chi^\dagger = \psi_R$, demuestre que hasta derivadas totales

$$\mathcal{L} = i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi + i\chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi - m(\xi\chi + \xi^\dagger \chi^\dagger) \tag{C.43}$$

De modo que el Lagrangiano para un fermión de Weyl, ψ_W , no masivo puede escribirse como

$$\mathcal{L} = i\psi_W^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_W \tag{C.44}$$

C.5. Apéndices

C.6. Fermiones quirales de cuatro componentes

Los fermiones izquierdos y derechos pueden ser escritos en terminos de espinores de Dirac como

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} = \tilde{\psi}_L + \tilde{\psi}_R \quad (\text{C.45})$$

En la representación de Weyl

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.46})$$

Podemos definir

$$\begin{aligned} P_L &\equiv \frac{1 - \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P_R &\equiv \frac{1 + \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

De modo que

$$\begin{aligned} P_L \psi &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{\psi}_L \\ P_R \psi &= \tilde{\psi}_R. \end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

En adelante omitiremos las tildes sobre los espinores de Dirac $\tilde{\psi}_{L,R}$.

Las matrices $P_{L,R}$ tienen las propiedades

$$\begin{aligned} P_L + P_R &= 1 & P_{L,R}^2 &= P_{L,R} P_{L,R} = P_{L,R} \\ P_L P_R &= 0 & P_{L,R}^\dagger &= P_{L,R}. \end{aligned} \quad (\text{C.49})$$

Usando la ec. (C.102)

$$P_{L,R} \gamma^\mu = \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \gamma^\mu = \gamma^\mu \frac{1 \pm \gamma_5}{2} = \gamma^\mu P_{R,L} \quad (\text{C.50})$$

Para escribir el Lagrangiano en término de los nuevos $\psi_{L,R}$ debemos tener en cuenta que

$$\overline{\psi_{L,R}} = (P_{L,R} \psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger P_{L,R} \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 P_{R,L} = \overline{\psi} P_{R,L} \quad (\text{C.51})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i \overline{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \overline{\psi} \psi \\ &= i \overline{\psi} (P_L + P_R) \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \overline{\psi} (P_L + P_R) \psi \\ &= i \overline{\psi} P_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi + i \overline{\psi} P_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \overline{\psi} P_L \psi - m \overline{\psi} P_R \psi \\ &= i \overline{\psi} P_L P_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi + i \overline{\psi} P_R P_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \overline{\psi} P_L P_L \psi - m \overline{\psi} P_R P_R \psi \\ &= i \overline{\psi} P_L \gamma^\mu \partial_\mu P_R \psi + i \overline{\psi} P_R \gamma^\mu \partial_\mu P_L \psi - m \overline{\psi} P_L P_L \psi - m \overline{\psi} P_R P_R \psi \\ &= i \overline{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + i \overline{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L - m (\overline{\psi}_R \psi_L + \overline{\psi}_L \psi_R). \end{aligned} \quad (\text{C.52})$$

En términos de espinores de izquierdos y derechos de cuatro componentes la transformación de paridad

$$t \rightarrow t \quad \mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x} \quad \psi_L \rightarrow \psi_R, \quad \psi_R \rightarrow \psi_L. \quad (\text{C.53})$$

da lugar a

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = i\bar{\psi}_R \tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu \psi_R + i\bar{\psi}_L \tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu \psi_L - m(\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R), \quad (\text{C.54})$$

donde $\tilde{\gamma}^\mu = U\gamma^\mu U^\dagger$, con $U = \gamma^0$. Como las dos representaciones dan lugar a la misma física, podemos decir que el Lagrangiano en términos de espinores L, R de cuatro componentes es invariante bajo la transformación de paridad.

La existencia de ambos espinores $\psi_{L,R}$ garantizan que el Lagrangiano de Dirac es invariante bajo la transformación de paridad.

La corriente de la electrodinámica cuántica en ec. (??) (o la de la cromodinámica cuántica, ec. (??)) conservan paridad ya que, siguiendo los mismos pasos que en la ec. (C.52)

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R. \quad (\text{C.55})$$

Si para alguna partícula, como es el caso del neutrino, no existe la componente derecha, entonces la correspondiente interacción vectorial viola paridad y no puede tener interacciones electromagnéticas ni fuertes, es decir, no se acopla con el fotón o los gluones. Además dicha partícula no puede tener masa de Dirac. En el caso del neutrino esto se entiende pues al no tener carga eléctrica sólo requiere dos grados de libertad independientes.

De otro lado, si una determinada interacción, como es el caso de la interacción débil, solo participa la componente izquierda de la ec. (C.55), está correspondiente a una interacción del tipo

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L &= \bar{\psi}P_R\gamma^\mu P_L\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu P_L\psi \\ &= \bar{\psi}\gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) \psi \\ &= \frac{1}{2}\bar{\psi}(\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma_5)\psi, \end{aligned} \quad (\text{C.56})$$

que de acuerdo a la asignación en la Tabla corresponde a una corriente V-A.

C.6.1. Corriente conservada y Lagrangiano de Dirac

De la ec. (C.16)

$$\begin{aligned} J^0 &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \right] \delta\psi + \delta\psi^\dagger \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi^\dagger)} \right] \\ &= i\psi^\dagger a^0 \delta\psi \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

El Lagrangiano es invariante bajo transformaciones de fase globales, $U(1)$

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\alpha}\psi \approx \psi - i\alpha\psi, \quad (\text{C.58})$$

de modo que

$$\delta\psi = -i\alpha\psi. \quad (\text{C.59})$$

Por consiguiente

$$J^0 = \alpha \psi^\dagger a^0 \psi \quad (\text{C.60})$$

Para que J^0 pueda interpretarse como una densidad de probabilidad, debemos redefinir el Lagrangiano en ec. (C.13) como

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - m \bar{\psi} b \psi, \quad (\text{C.61})$$

tal que

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger c, \quad (\text{C.62})$$

con

$$c \gamma^0 = I \quad (\text{C.63})$$

Para que este nuevo Lagrangiano sea real se requiere que,

$$\begin{aligned} c^2 &= I \\ c \gamma_\mu^\dagger c &= \gamma_\mu \\ c b^\dagger c &= b \end{aligned} \quad (\text{C.64})$$

ya que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\dagger &= \left(\frac{i}{2} \psi^\dagger \gamma_\mu^\dagger c \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \psi^\dagger \gamma_\mu^\dagger c \psi \right) - m \psi^\dagger b^\dagger c \psi \\ &= \left(\frac{i}{2} \psi^\dagger c^2 \gamma_\mu^\dagger c \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \psi^\dagger c^2 \gamma_\mu^\dagger c \psi \right) - m \psi^\dagger c^2 b^\dagger c \psi \\ &= \left(\frac{i}{2} \bar{\psi} c \gamma_\mu^\dagger c \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} c \gamma_\mu^\dagger c \psi \right) - m \bar{\psi} c b^\dagger c \psi \\ &= \left(\frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \right) - m \bar{\psi} b \psi \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad podemos hacer $b = I$, y

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi, \quad (\text{C.65})$$

La nueva corriente conservada contiene

$$\begin{aligned} J^0 &\propto \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \right] \delta \psi + \delta \bar{\psi} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \bar{\psi})} \right] \\ &= \bar{\psi} \gamma^0 \psi \\ &= \psi^\dagger c \gamma^0 \psi \\ &= \psi^\dagger \psi \end{aligned} \quad (\text{C.66})$$

Que podemos interpretar como una densidad de probabilidad. $\bar{\psi}$ se define como la *adjunta* de ψ .

En general

$$\begin{aligned}
 J^\mu &\propto \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right] \delta \psi + \delta \bar{\psi} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right] \\
 &\propto i \bar{\psi} \gamma^\mu (-i \alpha \psi) \\
 &\propto i \bar{\psi} \gamma^\mu (-i \alpha \psi) \\
 &= \bar{\psi} \gamma^\mu \psi
 \end{aligned} \tag{C.67}$$

y

$$J^\mu = \psi^\dagger c \gamma^\mu \Psi \tag{C.68}$$

C.6.2. Tensor momento-energía

$$\begin{aligned}
 T_0^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \partial_0 \psi + \partial_0 \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \bar{\psi})} - \mathcal{L} \\
 &= i \bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi - \mathcal{L} \\
 &= -i \bar{\psi} \gamma^i \partial_i \psi + m \bar{\psi} \psi, \\
 &= \bar{\psi} (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) \psi, \\
 &= \psi^\dagger c (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) \psi, \\
 &= \psi^\dagger \hat{H} \psi,
 \end{aligned} \tag{C.69}$$

donde

$$\hat{H} = c (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) \tag{C.70}$$

y, como en mecánica clásica usual

$$\langle \hat{H} \rangle = \int \psi^\dagger \hat{H} \psi d^3x. \tag{C.71}$$

Además

$$\begin{aligned}
 T_i^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \partial_i \psi + \partial_i \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \bar{\psi})} \\
 &= i \bar{\psi} \gamma^0 \partial_i \psi \\
 &= -\psi^\dagger (-i \partial_i) \psi
 \end{aligned} \tag{C.72}$$

de modo que

$$\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle = \int \psi^\dagger \hat{\mathbf{p}} \psi d^3x \tag{C.73}$$

C.6.3. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Queremos que el Lagrangiano de lugar a la ecuación de Schrödinger de validez general

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \tag{C.74}$$

con el Hamiltoniano dado en la ec. (C.71), que corresponde a un Lagrangiano de sólo derivadas de primer orden y covariante, en lugar del Hamiltoniano para el caso no relativista.

De hecho, aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo $\bar{\psi}$ al Lagrangiano en ec. (C.65), tenemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} &= 0 \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.75})$$

Expandiendo

$$\begin{aligned} i\gamma^0 \partial_0 \psi + i\gamma^i \partial_i \psi - m\psi &= 0 \\ i\gamma^0 \partial_0 \psi - \boldsymbol{\gamma} \cdot (-i\boldsymbol{\nabla})\psi - m\psi &= 0, \\ i\gamma^0 \partial_0 \psi &= (\boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m)\psi, \end{aligned}$$

de donde

$$i\gamma^{02} \frac{\partial}{\partial t} \psi = \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m)\psi. \quad (\text{C.76})$$

Comparando con ecs. (C.74) y (C.70), tenemos que

$$\begin{aligned} c &= \gamma^0 \\ \gamma^{02} &= 1. \end{aligned} \quad (\text{C.77})$$

De la ec. (C.70)

$$\hat{H} = \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m), \quad (\text{C.78})$$

y de la ec. (C.64)

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu. \quad (\text{C.79})$$

A este punto, sólo nos queda por determinar los parámetros γ^μ .

La ec. (C.74) puede escribirse como

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) \psi = 0. \quad (\text{C.80})$$

El campo ψ también debe satisfacer la ecuación de Klein-Gordon. Podemos derivar dicha ecuación aplicando el operador

$$\left(-i \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right)$$

De modo que, teniendo en cuenta que $\partial\hat{H}/\partial t = 0$,

$$\begin{aligned}
 \left(-i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right) \left(i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right) \psi &= 0 \\
 \left(-i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right) \left(i\frac{\partial\psi}{\partial t} - \hat{H}\psi\right) &= 0 \\
 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + i\left(\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}\right)\psi + i\hat{H}\frac{\partial\psi}{\partial t} - i\hat{H}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \hat{H}^2\psi &= 0 \\
 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hat{H}^2\right)\psi &= 0.
 \end{aligned} \tag{C.81}$$

De la ec. (C.78), y usando la condición en ec. (C.77), tenemos

$$\begin{aligned}
 \hat{H}^2 &= (\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + \gamma_0 m)(\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + \gamma_0 m) \\
 &= (\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p})(\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}) + m\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}\gamma_0 + m\gamma_0^2\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m^2
 \end{aligned} \tag{C.82}$$

Sea

$$\begin{aligned}
 \beta &= \gamma^0 \\
 \alpha^i &= \beta\gamma^i \\
 \gamma^i &= \beta\alpha^i
 \end{aligned} \tag{C.83}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{H}^2 &= (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) + m\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}\beta + m\beta\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m^2 \\
 &= (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) + m(\boldsymbol{\alpha}\beta + \beta\boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{p} + m^2
 \end{aligned} \tag{C.84}$$

Sea A una matriz y θ en un escalar. Entonces tenemos la identidad

$$(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta})^2 = \sum_i A^{i2}\theta^{i2} + \sum_{i<j} \{A^i, A^j\} \theta^i\theta^j \tag{C.85}$$

Entonces

$$\hat{H}^2 = \alpha_i^2 p_i^2 + \sum_{i<j} \{\alpha_i, \alpha_j\} p_i p_j + m(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)p_i + m^2 \tag{C.86}$$

(suma sobre índices repetidos). Si

$$\begin{aligned}
 \alpha_i^2 &= 1 \\
 \{\alpha_i, \alpha_j\} &= 0 \quad i \neq j \\
 \alpha_i\beta + \beta\alpha_i &= 0
 \end{aligned} \tag{C.87}$$

$$\hat{H}^2 = -\nabla^2 + m^2 \tag{C.88}$$

y reemplazando en la ec. (C.81) llegamos a la ecuación de Klein-Gordon para ψ

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\psi &= 0 \\
 (\square + m^2)\psi &= 0
 \end{aligned} \tag{C.89}$$

En términos de las matrices γ^μ las condiciones en ec. (C.87) son

$$\begin{aligned}\gamma^{02} &= 1 \\ \alpha^{i2} = 1 &\rightarrow \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 \gamma^i = -\gamma^{i2} = 1 \rightarrow \gamma^{i2} = -1 \\ \gamma^i \gamma^0 + \gamma^0 \gamma^i &= \{\gamma^i, \gamma^0\} = 0\end{aligned}\tag{C.90}$$

De modo que

$$\begin{aligned}\{\alpha^i, \alpha^j\} &= \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 \gamma^j + \gamma^0 \gamma^j \gamma^0 \gamma^i = 0 & i \neq j \\ -\gamma^0 \gamma^0 \gamma^i \gamma^j - \gamma^0 \gamma^0 \gamma^j \gamma^i &= 0 & i \neq j \\ \gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i &= 0 & i \neq j \\ \{\gamma^i, \gamma^j\} &= 0 & i \neq j\end{aligned}\tag{C.91}$$

Las ecuaciones (C.90)(C.91) pueden escribirse como

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}.\tag{C.92}$$

donde

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^i)\tag{C.93}$$

Además, de la ec. (C.79),

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu.\tag{C.94}$$

Cualquier conjunto de matrices que satisfagan el álgebra en ec. (C.92) y la condición en ec. (C.94), se conocen como matrices de Dirac. A ψ se le llama espinor de Dirac.

En términos de la matrices γ^μ , el Lagrangiano de Dirac y la ecuación de Dirac, son respectivamente de las ecs. (C.65) y (C.75)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi,\tag{C.95}$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0,\tag{C.96}$$

donde

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0.\tag{C.97}$$

C.6.4. Propiedades de las matrices de Dirac

De la ec. (C.94)

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma^{0\dagger} = \gamma^0 & \mu = 0 \\ \gamma^{i\dagger} = -\gamma^{02} \gamma^i = -\gamma^i & \mu = i \end{cases}.\tag{C.98}$$

Definiendo

$$\gamma_5 = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3,\tag{C.99}$$

entonces,

$$\gamma_5^2 = \mathbf{1},\tag{C.100}$$

Teniendo en cuenta que $\gamma_\mu^2 \propto \mathbf{1}$ y conmuta con las demás matrices, tenemos por ejemplo

$$\begin{aligned}\gamma_5\gamma_3 &= i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3^2 = \gamma_3^2 i\gamma_0\gamma_1\gamma_2 = -\gamma_3 i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_3\gamma_5 \\ \gamma_5\gamma_2 &= -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2^2\gamma_3 = -\gamma_2^2 i\gamma_0\gamma_1\gamma_3 = -\gamma_2 i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_2\gamma_5 \\ \gamma_5\gamma_1 &= i\gamma_0\gamma_1^2\gamma_2\gamma_3 = \gamma_1^2 i\gamma_0\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_1 i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_1\gamma_5 \\ \gamma_5\gamma_0 &= i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0 = -\gamma_0^2 i\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_0\gamma_5.\end{aligned}\tag{C.101}$$

De modo que

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0.\tag{C.102}$$

Expandiendo el anticonmutador tenemos

$$\begin{aligned}\gamma_\mu\gamma_5 &= -\gamma_5\gamma_\mu \\ \gamma_5\gamma_\mu\gamma_5 &= -\gamma_\mu \\ \text{Tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_5) &= -\text{Tr}\gamma_\mu \\ \text{Tr}(\gamma_5\gamma_5\gamma_\mu) &= -\text{Tr}\gamma_\mu \\ \text{Tr}\gamma_\mu &= -\text{Tr}\gamma_\mu,\end{aligned}\tag{C.103}$$

y por consiguiente

$$\text{Tr}\gamma_\mu = 0.\tag{C.104}$$

Si

$$\tilde{\gamma}_\mu \equiv U\gamma_\mu U^\dagger,\tag{C.105}$$

para alguna matriz unitaria U , entonces $\tilde{\gamma}_\mu$ corresponde a otra representación de álgebra de Dirac en ec. (C.92), ya que

$$\begin{aligned}\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} &= \{U\gamma^\mu U^\dagger, U\gamma^\nu U^\dagger\} \\ &= U\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}U^\dagger \\ &= 2g^{\mu\nu}UU^\dagger \\ &= 2g^{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{C.106}$$

Claramente, la condición en ec. (C.94) se mantiene para la nueva representación. Como γ_0 es hermítica, siempre es posible escoger una representación tal que $\tilde{\gamma}_0 \equiv U\gamma_0 U^\dagger$ sea diagonal. Como $\gamma_0^2 = 1$, sus entradas en la diagonal deben ser ± 1 , y como $\text{Tr}\tilde{\gamma}_0 = 0$, debe existir igual número de $+1$ que de -1 . Por lo tanto la dimensión de γ_0 (y de γ_μ) debe ser par: $2, 4, \dots$

Si $U = \gamma^0$, entonces $\tilde{\gamma}^0 = \gamma^0$ y $\tilde{\gamma}^i = -\gamma^i$.

Para una matriz de n dimensiones existen n^2 matrices hermíticas (o anti-hermíticas) independientes. Si se sustrae la identidad quedan $n^2 - 1$ matrices hermíticas (o anti-hermíticas) independientes de traza nula. En el caso $n = 2$ corresponden a las 3 matrices de Pauli. En el caso de la ecuación de Dirac se requieren 4 matrices independientes, por lo tanto deben ser matrices 4×4 . En efecto para $n = 4$ existen 15 matrices independientes de traza nula dentro de las cuales podemos acomodar sin problemas las 4 γ^μ . En la Tabla C.1 se muestran las matrices de traza nula con sus propiedades de transformación bajo el Grupo de Lorentz. En la última se muestra el correspondiente escalar en el espacio de Dirac $\bar{\psi}\Gamma\psi$.

Matriz Γ	Transformación	Número	Escalar en Dirac
$\mathbf{1}$	Escalar (S)	1	$\bar{\psi}\psi$
γ_5	Pseudoescalar (P)	1	$\bar{\psi}\gamma_5\psi$
γ_μ	Vector (V)	4	$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$
$\gamma_\mu\gamma_5$	Vector axial (A)	4	$\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$
$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$	Tensor antisimétrico (T)	6	$\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$
		16	

Tabla C.1: Matrices Γ_i .

Apéndice D

Soluciones a los problemas

Capítulo 2

2.1. De

$$a'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu} \quad (\text{D.1})$$

tenemos que

$$a'_{\rho} = g_{\mu\rho} a'^{\mu} = g_{\mu\rho} \Lambda^{\mu}_{\nu} g^{\nu\eta} a_{\eta} = \Lambda_{\rho}^{\eta} a_{\eta} \quad (\text{D.2})$$

De la definición de transformación de Lorentz

$$a'^{\mu} b'_{\mu} = a^{\mu} b_{\mu} \quad (\text{D.3})$$

tenemos

$$a'^{\mu} b'_{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda_{\mu}^{\rho} a^{\nu} b_{\rho} = a^{\nu} b_{\nu} = \delta_{\nu}^{\rho} a^{\nu} b_{\rho} \quad (\text{D.4})$$

de donde

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda_{\mu}^{\rho} = \delta_{\nu}^{\rho} \quad (\text{D.5})$$

2.3.

$$r \sim \frac{1}{m} \approx \frac{1}{80 \text{ GeV}} \times \frac{1 \text{ GeV}}{1/(1.97 \times 10^{-16} \text{ m}^{-1})} \approx 2.5 \times 10^{-18} \text{ m} \quad (\text{D.6})$$

Capítulo 3

3.?? Tenemos

$$\tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^- \\ \phi^{0*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} \quad (\text{D.7})$$

Haremos la parte correspondiente al término de masa. Para el término cinético es igual.

$$\begin{aligned} -m^2 \tilde{\Phi}^{\dagger} \tilde{\Phi} &= -m^2 \begin{pmatrix} \phi^0 & -\phi^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} \\ &= -m^2 (\phi^0 \phi^{0*} + \phi^+ \phi^-) \\ &= -m^2 \Phi^{\dagger} \Phi \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

de modo que Φ y $\tilde{\Phi}$ son representaciones equivalentes de $SU(2)$.

Además

$$\begin{aligned} -m^2 \epsilon_{ab} \tilde{\Phi}^a \Phi^b &= -m^2 (\epsilon_{12} \tilde{\Phi}^1 \Phi^2 + \epsilon_{21} \tilde{\Phi}^2 \Phi^1) = -m^2 (\phi^{0*} \phi^0 + \phi^+ \phi^-) \\ &= -m^2 \Phi^\dagger \Phi \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

3.?? De las ecs. (??) y (??)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial^\mu \phi^* \cdot \partial_\mu \phi - g [\phi^* \cdot \mathbf{W}_\mu \times \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*) \cdot \mathbf{W}_\mu \times \phi] \\ &\quad + g^2 \phi^{*i} (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}) W_k^\mu W_\mu^l \phi_m - m^2 \phi^* \cdot \phi - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i \\ &= \partial^\mu \phi^* \cdot \partial_\mu \phi - g [\phi^* \cdot \mathbf{W}_\mu \times \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*) \cdot \mathbf{W}_\mu \times \phi] \\ &\quad + g^2 \phi^{*i} W_k^\mu W_\mu^k \phi_i - g^2 \phi^{*i} W_k^\mu W_\mu^i \phi_k - m^2 \phi^* \cdot \phi - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i \\ &= \partial^\mu \phi^* \cdot \partial_\mu \phi - g [\phi^* \cdot \mathbf{W}_\mu \times \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*) \cdot \mathbf{W}_\mu \times \phi] \\ &\quad + g^2 \phi^* \cdot \phi \mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{W}_\mu - g^2 \phi^* \cdot \mathbf{W}^\mu \mathbf{W}_\mu \cdot \phi - m^2 \phi^* \cdot \phi - \frac{1}{4} \mathbf{W}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}_{\mu\nu} &= (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \cdot (\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu) + 2g (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \cdot \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu \\ &\quad + g^2 (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) W_j^\mu W_k^\nu W_\mu^l W_\nu^m \\ &= (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \cdot (\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu) + 2g (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \cdot \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu \\ &\quad + g^2 (W_j^\mu W_k^\nu W_\mu^j W_\nu^k - W_j^\mu W_k^\nu W_\mu^k W_\nu^j) \\ &= (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \cdot (\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu) + 2g (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \cdot \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu \\ &\quad + g^2 (\mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{W}_\mu \mathbf{W}^\nu \cdot \mathbf{W}_\nu - \mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{W}_\nu \mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{W}_\nu) \\ &= (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \cdot (\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu) + 2g (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \cdot \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu \\ &\quad + g^2 (\mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{W}_\mu \mathbf{W}^\nu \cdot \mathbf{W}_\nu - \mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{W}_\nu \mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{W}_\nu) \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

3.??

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} &= -\frac{1}{4} (\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) \\ &= -\frac{1}{4} [\partial^\mu (-sZ^\nu + cA^\nu) - \partial^\nu (-sZ + cA)^\mu] [\partial_\mu (-sZ + cA)_\nu - \partial_\nu (-sZ + cA)_\mu] \\ &= -\frac{1}{4} [-s\partial^\mu Z^\nu + c\partial^\mu A^\nu + s\partial^\nu Z^\mu - c\partial^\nu A^\mu] [-s\partial_\mu Z_\nu + c\partial_\mu A_\nu + s\partial_\nu Z_\mu - c\partial_\nu A_\mu] \\ &= -\frac{1}{4} [-s(\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) + c(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)] [-s(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) + c(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)] \\ &= -\frac{1}{4} [-s(\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) + c(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)] [-s(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) + c(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)] \\ &= -\frac{1}{4} [s^2 (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) + c^2 (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &\quad - 2sc (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)] \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Similarmente, reemplazando $s^2 \leftrightarrow c^2$ y $s \rightarrow -s$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} W_3^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^3 &\supseteq -\frac{1}{4} [c^2 (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) + s^2 (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &\quad + 2sc (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)] \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

$$-\frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_3^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^3 \supset = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z^{\mu\nu}Z_{\mu\nu} \quad (\text{D.14})$$

De otro lado, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} W_\mu^+ &= \frac{W_\mu^1 - iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \\ W_\mu^- &= \frac{W_\mu^1 + iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \\ W_\mu^+ + W_\mu^- &= \frac{2}{\sqrt{2}}W_\mu^1 = \sqrt{2}W_\mu^1 \\ W_\mu^- - W_\mu^+ &= \frac{2}{\sqrt{2}}W_\mu^2 = \sqrt{2}iW_\mu^2 \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

$$\begin{aligned} W_\mu^1 &= \frac{W_\mu^- + W_\mu^+}{\sqrt{2}} \\ W_\mu^2 &= \frac{W_\mu^- - W_\mu^+}{\sqrt{2}i} \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}W_1^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^1 - \frac{1}{4}W_2^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^2 &\supset -\frac{1}{4}[(\partial^\mu W_1^\nu - \partial^\nu W_1^\mu)(\partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1) \\ &\quad + (\partial^\mu W_2^\nu - \partial^\nu W_2^\mu)(\partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2)] \\ &= -\frac{1}{4}\{(\partial^\mu W_1^\nu \partial_\mu W_\nu^1 - \partial^\mu W_1^\nu \partial_\nu W_\mu^1 - \partial^\nu W_1^\mu \partial_\mu W_\nu^1 + \partial^\nu W_1^\mu \partial_\nu W_\mu^1) \\ &\quad + (1 \rightarrow 2)\} \\ &= -\frac{1}{4}\{(\partial^\mu W_1^\nu \partial_\mu W_\nu^1 - \partial^\mu W_1^\nu \partial_\nu W_\mu^1 - \partial^\mu W_1^\nu \partial_\nu W_\mu^1 + \partial^\mu W_1^\nu \partial_\mu W_\nu^1) \\ &\quad + (1 \rightarrow 2)\} \\ &= -\frac{1}{2}\{(\partial^\mu W_1^\nu \partial_\mu W_\nu^1 - \partial^\mu W_1^\nu \partial_\nu W_\mu^1) + (\partial^\mu W_2^\nu \partial_\mu W_\nu^2 - \partial^\mu W_2^\nu \partial_\nu W_\mu^2)\} \\ &= -\frac{1}{4}\{[(\partial^\mu W_-^\nu + \partial^\mu W_+^\nu)(\partial_\mu W_\nu^- + \partial_\mu W_\nu^+) \\ &\quad - (\partial^\mu W_-^\nu + \partial^\mu W_+^\nu)(\partial_\nu W_\mu^- + \partial_\nu W_\mu^+)] \\ &\quad + i^2[(\partial^\mu W_-^\nu - \partial^\mu W_+^\nu)(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\mu W_\nu^+) \\ &\quad - (\partial^\mu W_-^\nu - \partial^\mu W_+^\nu)(\partial_\nu W_\mu^- - \partial_\nu W_\mu^+)]\} \\ &= -\frac{1}{4}\{[(\partial^\mu W_-^\nu + \partial^\mu W_+^\nu)(\partial_\mu W_\nu^- + \partial_\mu W_\nu^+) \\ &\quad - (\partial^\mu W_-^\nu + \partial^\mu W_+^\nu)(\partial_\nu W_\mu^- + \partial_\nu W_\mu^+)] \\ &\quad - [(\partial^\mu W_-^\nu - \partial^\mu W_+^\nu)(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\mu W_\nu^+) \\ &\quad - (\partial^\mu W_-^\nu - \partial^\mu W_+^\nu)(\partial_\nu W_\mu^- - \partial_\nu W_\mu^+)]\} \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

Teniendo en cuenta que los terminos cruzados son los únicos que no se cancelarán, tenemos

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}W_1^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^1 - \frac{1}{4}W_2^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^2 &\supset -\frac{1}{2}[\partial^\mu W_-^\nu \partial_\mu W_\nu^+ + \partial^\mu W_+^\nu \partial_\mu W_\nu^- - \partial^\mu W_-^\nu \partial_\nu W_\mu^+ - \partial^\mu W_+^\nu \partial_\nu W_\mu^-] \\
&= -\frac{1}{2}[\partial^\mu W_-^\nu (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) + \partial_\mu W_\nu^+ \partial^\mu W_-^\nu - \partial_\mu W_\nu^+ \partial^\nu W_-^\mu] \\
&= -\frac{1}{2}[\partial^\mu W_-^\nu (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) + \partial_\nu W_\mu^+ \partial^\nu W_-^\mu - \partial_\mu W_\nu^+ \partial^\nu W_-^\mu] \\
&= -\frac{1}{2}[\partial^\mu W_-^\nu (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) - \partial^\nu W_-^\mu (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+)] \\
&= -\frac{1}{2}[(\partial^\mu W_-^\nu - \partial^\nu W_-^\mu)(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+)] \\
&= -\frac{1}{2}(F_W^\dagger)^{\mu\nu}(F_W)_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{D.18}$$

Capítulo 6

6. ???. Haciendo un análisis similar al de la sección ??, tenemos de la ec. (??) que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{fWB} &= i\bar{L}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L + i\bar{e}_R\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R \\
&= (i\bar{\nu}_L\gamma^\mu \quad i\bar{e}_L\gamma^\mu) \begin{pmatrix} \partial_\mu - igT_3^\dagger W_\mu^3 - ig'Y_L B_\mu & -\frac{i}{\sqrt{2}}gW_\mu^+ \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}gW_\mu^- & \partial_\mu - igT_3^\dagger W_\mu^3 - ig'Y_L B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \\
&\quad + i\bar{e}_R\gamma^\mu (\partial_\mu - ig'Y_R B_\mu) e_R \\
&= (i\bar{\nu}_L\gamma^\mu \quad i\bar{e}_L\gamma^\mu) \begin{pmatrix} (\partial_\mu - igT_3^\dagger W_\mu^3 - ig'Y_L B_\mu)\nu_L - \frac{i}{\sqrt{2}}ge_L W_\mu^+ \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}g\nu_L W_\mu^- + (\partial_\mu - igT_3^\dagger W_\mu^3 - ig'Y_L B_\mu)e_L \end{pmatrix} + i\bar{e}_R\gamma^\mu (\partial_\mu - ig'Y_R B_\mu) e_R \\
&= i\bar{\nu}_L\gamma^\mu (\partial_\mu - igT_3^\nu W_\mu^3 - ig'Y_L B_\mu)\nu_L + \frac{1}{\sqrt{2}}g\bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L W_\mu^+ \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}g\bar{e}_L\gamma^\mu \nu_L W_\mu^- + i\bar{e}_L\gamma^\mu (\partial_\mu - igT_3^e W_\mu^3 - ig'Y_L B_\mu)e_L + i\bar{e}_R\gamma^\mu (\partial_\mu - ig'Y_R B_\mu)e_R \\
&= i\bar{e}_L\gamma^\mu \partial_\mu e_L + i\bar{e}_R\gamma^\mu \partial_\mu e_R + i\bar{\nu}_L\gamma^\mu \partial_\mu \nu_L + \frac{1}{\sqrt{2}}g(\bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L W_\mu^+ + \bar{e}_L\gamma^\mu \nu_L W_\mu^-) \\
&\quad + i\bar{\nu}_L\gamma^\mu (-igT_3^\nu W_\mu^3 - ig'Y_L B_\mu)\nu_L + i\bar{e}_L\gamma^\mu (-igT_3^e W_\mu^3 - ig'Y_L B_\mu)e_L + i\bar{e}_R\gamma^\mu (-ig'Y_R B_\mu)e_R \\
&= i\bar{\psi}_e\gamma^\mu \partial_\mu \psi_e + i\bar{\nu}_L\gamma^\mu \partial_\mu \nu_L + \frac{1}{\sqrt{2}}g(\bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L W_\mu^+ + \text{h.c.}) + \mathcal{L}_{fAZ}
\end{aligned} \tag{D.19}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{fAZ} &= \bar{\nu}_L\gamma^\mu \nu_L (gT_3^\nu W_\mu^3 + g'Y_L B_\mu) + \bar{e}_L\gamma^\mu e_L (gT_3^e W_\mu^3 + g'Y_L B_\mu) + g'\bar{e}_R\gamma^\mu e_R (Y_R B_\mu) \\
&= g[\bar{\nu}_L\gamma^\mu \nu_L (T_3^\nu W_\mu^3 + \tan\theta_W Y_L B_\mu) + \bar{e}_L\gamma^\mu e_L (T_3^e W_\mu^3 + \tan\theta_W Y_L B_\mu) + Y_R \tan\theta_W \bar{e}_R\gamma^\mu e_R B_\mu] \\
&= g\{\bar{\nu}_L\gamma^\mu \nu_L [T_3^\nu (\cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu) + \tan\theta_W Y_L (-\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu)] \\
&\quad + \bar{e}_L\gamma^\mu e_L [T_3^e (\cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu) + \tan\theta_W Y_L (-\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu)] \\
&\quad + Y_R \tan\theta_W \bar{e}_R\gamma^\mu e_R (-\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu)\} \\
&= \frac{g}{\cos\theta_W} [(T_3^\nu \cos^2\theta_W - Y_L \sin^2\theta_W)\bar{\nu}_L\gamma^\mu \nu_L \\
&\quad + (T_3^e \cos^2\theta_W - Y_L \sin^2\theta_W)\bar{e}_L\gamma^\mu e_L + (0 \times \cos\theta_W - Y_R \sin^2\theta_W \bar{e}_R\gamma^\mu e_R)Z_\mu \\
&\quad + g \sin\theta_W [(T_3^\nu + Y_L)\bar{\nu}_L\gamma^\mu \nu_L + (T_3^e + Y_L)\bar{e}_L\gamma^\mu e_L + (0 + Y_R)\bar{e}_R\gamma^\mu e_R]A_\mu.
\end{aligned} \tag{D.20}$$

Como $T_3^f \cos^2 \theta_W - Y_f \sin^2 \theta_W = T_3 - (T_3^f + Y_f) \sin^2 \theta_W$, entonces usando $Q_f = T_3^f + Y_f$, y $e = g \sin \theta_W$ tenemos

$$\mathcal{L}_{fAZ} = \sum_{f=e_L, \nu_L, e_R} \left[\frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W} (T_3^f - Q_f \sin^2 \theta_W) Z_\mu + e Q_f A_\mu \right] \bar{f} \gamma^\mu f \quad (\text{D.21})$$

Como $Q_\nu = 0$, claramente los neutrinos no se acoplan a los fotones como se esperaba y además se obtiene la corriente electromagnética apropiada, ya que

$$\sum_{f=e_L, \nu_L, e_R} e Q_f A_\mu \bar{f} \gamma^\mu f = e Q_e \bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_e A_\mu. \quad (\text{D.22})$$

D.1. Lagrangiano para una generación en Dirac

Para escribir los campos de Weyl en términos de espinores de Dirac, debemos definir

$$\begin{aligned} \gamma_5 &= i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\ &= i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_2\sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_2\sigma_3 \end{pmatrix} \\ &= -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \\ -\sigma_1\sigma_2\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -i \begin{pmatrix} -\sigma_1\sigma_2\sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_4 & 0 \\ 0 & -\sigma_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

donde

$$\sigma_4 = i\sigma_1\sigma_2\sigma_3, \quad (\text{D.24})$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \sigma_4 = i\sigma_1\sigma_2\sigma_3 &= i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= i \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= i \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\ &= -\mathbf{1}. \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

Entonces

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (\text{D.26})$$

Con esto podemos definir los proyectores

$$P_L = \frac{\mathbf{1}_{4 \times 4} - \gamma_5}{2} \quad P_R = \frac{\mathbf{1}_{4 \times 4} + \gamma_5}{2}. \quad (\text{D.27})$$

En adelante se dejará implícito el carácter 4×4 de la identidad.

Sea Ψ un espinor de Dirac construido a partir de dos espinores de Weyl

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (\text{D.28})$$

Tenemos las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} P_L \Psi &= \frac{1 - \gamma_5}{2} \Psi & P_R \Psi &= \frac{1 + \gamma_5}{2} \Psi \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} & &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} & &= \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

Además de las siguientes propiedades: Las matrices $P_{L,R}$ tienen las propiedades

$$\begin{aligned} P_L + P_R &= 1 & P_{L,R}^2 &= P_{L,R} P_{L,R} = P_{L,R} \\ P_L P_R &= 0 & P_{L,R}^\dagger &= P_{L,R}. \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

Usando la ec. (B.63)

$$P_{L,R} \gamma^\mu = \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \gamma^\mu = \gamma^\mu \frac{1 \pm \gamma_5}{2} = \gamma^\mu P_{R,L} \quad (\text{D.31})$$

De modo que

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} \gamma^\mu P_L \Psi &= \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu P_L \Psi \\ &= (\psi_L^\dagger \quad \psi_R^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (\psi_L^\dagger \quad \psi_R^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\sigma}^\mu \psi_L \end{pmatrix} \\ &= (\psi_L^\dagger \quad \psi_R^\dagger) \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L. \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

Similarmente

$$\bar{\Psi} \gamma^\mu P_R \Psi = \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R. \quad (\text{D.33})$$

Extendiendo la ec. (3.138), en términos de los campos de Weyl una corriente escalar, vectorial y V-A de espinores Dirac se escriben como

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} \Psi &= (\psi_R)^\dagger \psi_L + (\psi_L)^\dagger \psi_R \\ \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi &= \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L + \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R \\ \frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \Psi &= \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L \\ \frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \Psi &= \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R \end{aligned} \quad (\text{D.34})$$

	u	d	ν_e	e
$2v_f$	$1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W$	$-1 + \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W$	1	$-1 + 4 \sin^2 \theta_W$
$2a_f$	1	-1	1	-1

Tabla D.1: Acoplamientos de corrientes neutras

Para escribir este Lagrangiano en terminos de espinores de 4 componentes, tomemos algunos casos específicos:

■

$$\begin{aligned}
\bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L W_\mu^+ &= \bar{\nu} P_R \gamma^\mu P_L e W_\mu^+ \\
&= \bar{\nu} \gamma^\mu P_L^2 e W_\mu^+ \\
&= \bar{\nu} \gamma^\mu P_L e W_\mu^+ \\
&= \frac{1}{2} \bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e W_\mu^+,
\end{aligned} \tag{D.35}$$

■

$$\begin{aligned}
&\left[Q^\dagger \bar{\sigma}^\mu \left(\tau_3 - 2s_W^2 \hat{Q}_Q \right) Q - 2s_W^2 u_R^\dagger \sigma^\mu \hat{Q}_u u_R - 2s_W^2 d_R^\dagger \sigma^\mu \hat{Q}_d d_R \right] Z_\mu \\
&= \left[\begin{pmatrix} u_L^\dagger & d_L^\dagger \end{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu \begin{pmatrix} 1 - 2s_W^2 \hat{Q}_u & 0 \\ 0 & -1 - 2s_W^2 \hat{Q}_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. - 2s_W^2 u_R^\dagger \sigma^\mu \hat{Q}_u u_R - 2s_W^2 d_R^\dagger \sigma^\mu \hat{Q}_d d_R \right] Z_\mu \\
&= \left\{ u_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu u_L - d_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu d_L - 2s_W^2 \left[u_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu Q_u u_L + u_R^\dagger \sigma^\mu Q_u u_R + d_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu Q_d d_L + d_R^\dagger \sigma^\mu Q_d d_R \right] \right\} Z_\mu \\
&= \left[\frac{1}{2} \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u - \frac{1}{2} \bar{d} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d - 2s_W^2 (\bar{u} \gamma^\mu Q_u u + \bar{d} \gamma^\mu Q_d d) \right] Z_\mu \\
&= \left\{ \bar{u} \gamma^\mu \left[\left(\frac{1}{2} - 2s_W^2 Q_u \right) - \frac{1}{2} \gamma_5 \right] u + \bar{d} \gamma^\mu \left[\left(-\frac{1}{2} - 2s_W^2 Q_d \right) + \frac{1}{2} \gamma_5 \right] d \right\} Z_\mu \\
&= \left[\bar{u} \gamma^\mu (v_u - a_u \gamma_5) u + \bar{d} \gamma^\mu (v_d - a_d \gamma_5) d \right] Z_\mu,
\end{aligned} \tag{D.36}$$

donde

$$v_f = T_3^f - 2 \sin^2 \theta_W Q_f \qquad a_f = T_3^f \gamma_5 \tag{D.37}$$

Los valores explícitos para v_f y a_f en el modelo estándar, están dados en la Tabla [D.1](#).

Usando las expresiones para pasar de fermiones L, R a los fermiones de Dirac de cuatro compo-

mentes, y las ecuaciones (D.35), (D.36) tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{fermion}} &= i\bar{u}\gamma^\mu\partial_\mu u + i\bar{d}\gamma^\mu\partial_\mu d + i\bar{e}\gamma^\mu\partial_\mu e + i\bar{\nu}_L\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L \\
&\quad + g_s \left(\bar{u}\gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} u + \bar{d}\gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} d \right) G_a^\mu \\
&\quad + \frac{g}{2\sqrt{2}} [\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)eW_\mu^+ + \bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)dW_\mu^+ + \text{h.c.}] + \sum_{f=u,d,\nu,e} \frac{e}{2c_W s_W} \bar{f}\gamma^\mu(v_f - a_f\gamma_5)f \\
&\quad + e \left(\bar{e}\gamma^\mu\hat{Q}_e e + \bar{u}\gamma^\mu Q_u u + \bar{d}\gamma^\mu Q_d d \right) A_\mu \\
&= \sum_{f=u,d,\nu,e} i\bar{f}\gamma^\mu\partial_\mu f + \sum_{q=u,d} g_s \bar{q}\gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q G_a^\mu \\
&\quad + \frac{g}{2\sqrt{2}} [\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)eW_\mu^+ + \bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)dW_\mu^+ + \text{h.c.}] \\
&\quad + \sum_{f=u,d,\nu,e} \frac{e}{2c_W s_W} \bar{f}\gamma^\mu(v_f - a_f\gamma_5)f \\
&\quad + e \sum_{f=u,d,\nu,e} \bar{f}\gamma^\mu\hat{Q}_f f A_\mu, \tag{D.38}
\end{aligned}$$

donde Q_f están dadas en la Tabla 6.1 y v_f , a_f en la Tabla D.1.

Recopilando los resultados para \mathcal{L}_{WBH} (6.53), $\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$ (6.63), $\mathcal{L}_{\text{fermion}}$ (D.38), y $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ (6.83), tenemos para $f = \nu_e, e, u, d$; $q = u, d$ [con $f' = e$ (d) para $f = \nu_e$ (u)]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{1 \text{ gen}} &= \sum_f i\bar{f}(\gamma^\mu\partial_\mu - m_f)f \\
&\quad - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z^{\mu\nu}Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(F_W^\dagger)^{\mu\nu}(F_W)_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\tilde{G}_a^{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu}^a \\
&\quad + \frac{1}{2}\partial^\mu H\partial_\mu H - \frac{1}{2}m_H^2 H^2 \left(1 + \frac{H}{v} + \frac{H^2}{4v^2} \right) \\
&\quad + \left(m_W^2 W^{\mu-}W_\mu^+ + \frac{1}{2}m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \right) \left(1 + 2\frac{H}{v} + \frac{H^2}{v^2} \right) \\
&\quad + g_s \sum_q \bar{q}\gamma^\mu \left(\frac{\lambda_a}{2} \right) q G_a^\mu + e \sum_f \bar{f}\gamma^\mu Q_f f A_\mu \\
&\quad + \frac{e}{2\cos\theta_W \sin\theta_W} \sum_f \bar{f}\gamma^\mu(v_f - a_f\gamma_5)f Z_\mu \\
&\quad + \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\sum_f \bar{f}\gamma^\mu(1-\gamma_5)f'W_\mu^+ + \text{h.c.} \right] + \sum_f \frac{m_f}{v} \bar{f}fH
\end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] Modern Elementary Particle Physics, Gordon Kane, Perseus Publishing, 1993.
- [2] An Introduction to Standard Model of Particle Physics. W.N Cottingham and D.A. Greenwood, Cambridge University Press, 1988
- [3] Quantum Field Theory, L.H Reyder, Cambridge University Press
- [4] Quantum Field Theory, F. Mandl, G. Shaw, John Wiley & Sons, INC. 1993
- [5] A. Pich, The Standard Model of Electroweak Interactions, hep-ph/0502010
- [6] The Standard Model: Alchemy and Astrology, hep-ph/0609274
- [7] Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory, Franz Gross, John Wiley & Sons, INC. 1993
- [8] http://es.wikipedia.org/wiki/Principio_de_m%C3%ADnima_acci%C3%B3n, http://en.wikipedia.org/wiki/Action_%28physics%29
- [9] <http://www.eftaylor.com/software/ActionApplets/LeastAction.html>
- [10] “Lagrangian Densities and Principle of Least Action in Nonrelativistic Quantum Mechanics”, Donald H. Kobe, arXiv:0712.1608
- [11] http://es.wikipedia.org/wiki/Leyes_de_Newton#Segunda_Ley_de_Newton_o_Ley_de_la_Fuerza, http://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_laws_of_motion
- [12] Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory, Franz Gross, Wiley Interscience, 1993, Chapter 1.
- [13] http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_la_divergencia
- [14] <http://en.wikipedia.org/wiki/D%27Alembertian>
- [15] A. S. Goldhaber and M. M. Nieto, “Terrestrial and extra-terrestrial limits on the photon mass,” Rev. Mod. Phys. **43** (1971) 277.
- [16] W. M. Yao *et al.* [Particle Data Group], “Review of particle physics,” J. Phys. G **33**, 1 (2006).
- [17] http://en.wikipedia.org/wiki/Pauli_matrices
- [18] F. Englert and R. Brout, “Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons,” Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 321.

- [19] P. W. Higgs, “Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons,” *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 508. doi:10.1103/PhysRevLett.13.508. P. W. Higgs, “Broken symmetries, massless particles and gauge fields,” *Phys. Lett.* **12** (1964) 132. doi:10.1016/0031-9163(64)91136-9. P. W. Higgs, “Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons,” *Phys. Rev.* **145** (1966) 1156. doi:10.1103/PhysRev.145.1156
- [20] A. Pich, “The standard model of electroweak interactions,” arXiv:hep-ph/0502010, Published in *Sant Feliu de Guixols 2004, European School of High-Energy Physics* 1-48.
- [21] http://en.wikipedia.org/wiki/Natural_units
- [22] http://en.wikipedia.org/wiki/Plank_units
- [23] I. J. R. Aitchison and A. J. G. Hey, “Gauge theories in particle physics: A practical introduction. Vol. 1: From relativistic quantum mechanics to QED,” *Bristol, UK: IOP (2003) 406 p*
- [24] <http://groups.google.com/group/sci.physics.research/msg/e6cc1b288df8bbb2>
- [25] W. M. Yao *et al.* [Particle Data Group], “Review of particle physics,” *J. Phys. G* **33** (2006) 1.
- [26] L. H. Ryder, “Quantum Field Theory,” *Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1985) 443p*
- [27] http://en.wikipedia.org/wiki/Gell-Mann\OT1\textendashNishijima_formula
- [28] [http://en.wikipedia.org/wiki/Spin_\(physics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Spin_(physics))
- [29] <http://en.wikipedia.org/wiki/LEP>
- [30] <http://en.wikipedia.org/wiki/Muon>
- [31] <http://blogs.uslhlc.us/?p=481>
- [32] Lie Groups in Physics, M.J.G Veltman (English version by G. 't Hooft)
- [33] K. Brading and H. R. Brown, “Noether’s theorems and gauge symmetries,” hep-th/0009058.
- [34] K. Brading and E. Castellani, “Symmetries in physics: Philosophical reflections,” Cambridge, UK: Univ. Pr. (2003) 445 p
- [35] K. Sundermeyer, “Symmetries in fundamental physics,” *Fundam. Theor. Phys.* **176** (2014). doi:10.1007/978-94-007-7642-5
- [36] Emmy Noether, Invariant variation problems, arXiv:physics/0503066.
- [37] C. N. Yang and R. L. Mills, *Phys. Rev.* **96** (1954) 191. doi:10.1103/PhysRev.96.191
- [38] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264. doi:10.1103/PhysRevLett.19.1264