

Exercici 1 (4 punts)

- (a) **(0.75 punt)** A l'algorisme de programació dinàmica per a trobar les distàncies més curtes entre dos vèrtexs qualssevol d'un graf amb pesos, però sense cicles negatius, la recurrència ve donada per

$$d_{ij}^{(k)} = \min\{d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\}.$$

És cert que en aquesta recurrència $d_{ij}^{(k)}$ representa la longitud del camí més curt del vèrtex i al vèrtex j , que conté com a màxim k arestes?

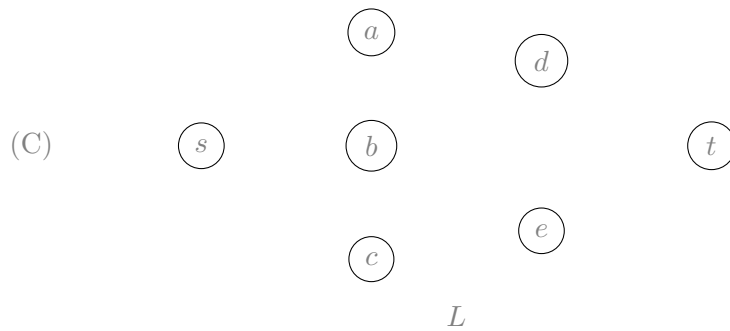
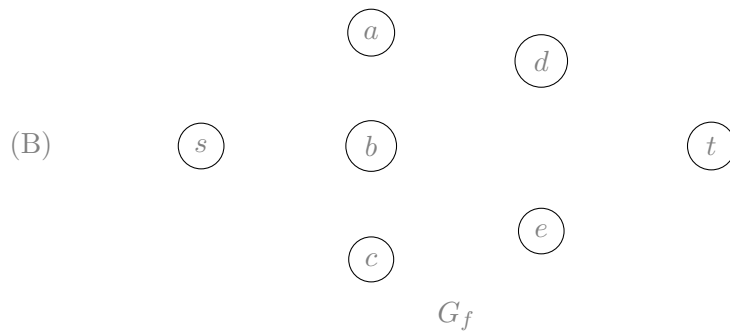
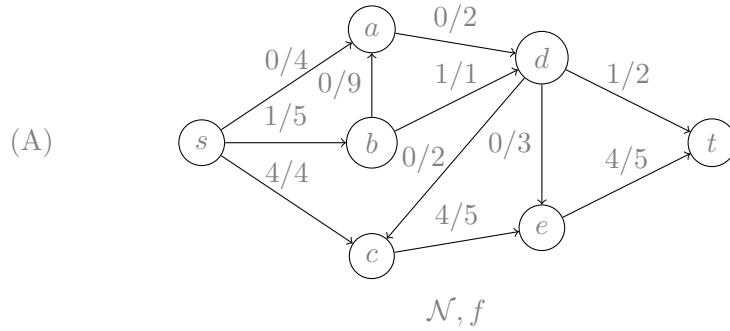
- (b) **(1 punt)** Tenim un graf dirigit $G = (V, E)$ amb pesos sobre les arestes i els vèrtexs $w : (V \cup E) \rightarrow \mathbb{Z}$. Definim el pes d'un camí com la suma dels pesos dels vèrtexs i de les arestes al camí. Volem trobar el pes del camí amb pes mínim entre qualsevol parell de vèrtexs a V . Digueu i justifiqueu si el següent algorisme resol el problema:

```

Donat  $G = (V, E)$  i  $w : (V \cup E) \rightarrow \mathbb{Z}$ 
for  $(u, v) \in E$  do
     $w'(u, v) = (w(u) + w(v))/2 + w(u, v)$ 
end for
Utilitzar BFW amb entrada  $G, w'$  per calcular, per a cada  $(u, v) \in E$ ,  $\delta'(u, v)$ .
for  $(u, v) \in E$  do
     $\delta(u, v) = \delta'(u, v) - (w(u) + w(v))/2$ 
end for
```

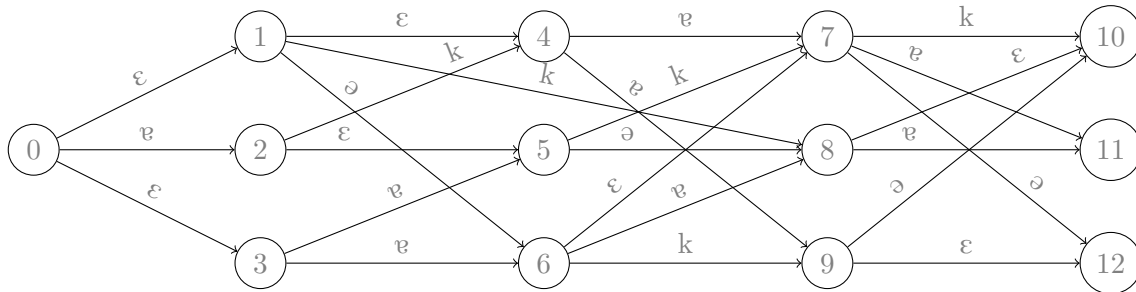
- (c) **(0.75 punts)** Teniu una xarxa de flux. És possible seleccionar un conjunt de k arestes diferents i incrementar en una unitat la capacitat de cadascuna d'elles, de manera que el flux màxim s'incrementi també en k unitats?

- (d) **(1.5 punts)** Considereu la xarxa de flux \mathcal{N} de la figura de sota (A), que té un flux inicial f . El propòsit d'aquest exercici es que implementeu una iteració de l'algorisme d'Edmonds-Karp. En particular,
- Dibuixeu a la figura (B) el graf residual,
 - Dibuixeu a la figura (C) el graf de nivells.
 - Expliqueu per què es necessita utilitzar el graf de nivells.
 - Doneu la llista dels possibles camins augmentadors.
 - Digueu quin seria l'increment del flux, resultant d'aquesta iteració d'Edmonds-Karp.



Exercici 2 (3 punts) En aquest problema heu de dissenyar un algorisme pel reconeixement de la parla.

Tenim un llenguatge que consisteix en un conjunt finit de sons (fonemes) Σ on $|\Sigma| = m$, per tant des de el punt de vista lingüístic, el llenguatge parlat és força restringit. Considerem el següent model per definir la parla d'una persona en aquest llenguatge. El model està format per un digraf $G = (V, E)$, $|V| = n$, amb un vèrtex distingit $v_0 \in V$. Cada aresta $(u, v) \in E$ està etiquetada amb un so $\sigma(u, v) \in \Sigma$. En aquest model cada camí a G que comença a v_0 , correspon a una possible seqüència de sons a Σ . L'etiqueta associada a un camí és la concatenació (seguint el camí) de les etiquetes de les arestes del camí. Un exemple de model de parla el teniu a la següent figura per l'alfabet $\Sigma = \{\epsilon, \text{v}, \text{k}, \text{ə}\}$ i $v_0 = 0$.



Una seqüència de fonemes de Σ , $s = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$, és vàlida al model (G, σ, v_0) si existeix un camí a G que comença a v_0 amb etiqueta $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_k$. Per exemple, $s = (\epsilon, \text{v}, \text{k}, \text{ə})$ és vàlida al nostre model ja que es correspon amb l'etiqueta del camí $0 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 12$. La seqüència $s' = (\text{ə}, \epsilon, \text{v})$ no és vàlida.

- (a) Dissenyeu un algorisme eficient, basat en PD, tal que donats un model (G, σ, v_0) i una seqüència de fonemes s , determini si s és una seqüència vàlida al model. Quina és la complexitat del vostre algorisme?

Suposem ara, que modifiquem el model de manera que a cada aresta $(u, v) \in E$ li assignem un pes $p(u, v)$, $0 \leq p(u, v) \leq 1$. Aquest pes representa la probabilitat que en agafar l'aresta (u, v) es produeixi el so $\sigma(u, v)$. Definim la probabilitat d'un camí com el producte de les probabilitats de les arestes del camí. D'aquesta forma, tota seqüència vàlida, que correspon a camins etiquetats al graf que comencen a v_0 , tindrà associades probabilitats per a cadascun d'aquests camins.

Per exemple, la seqüència $s = (\epsilon, \text{v}, \text{k}, \text{ə})$ és l'etiqueta del camí $0 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 12$ i del camí $0 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 10$. Si, $p(0, 3) = 0.1$, $p(3, 5) = 0.3$, $p(3, 6) = 0.2$, $p(5, 7) = 0.02$, $p(6, 9) = 0.1$, $p(7, 12) = 0.4$ i $p(9, 10) = 0.2$, aleshores el primer camí té probabilitat $0.00024 (= 0.1 \cdot 0.3 \cdot 0.02 \cdot 0.4)$ de pronunciar s i el segon probabilitat $0.0004 (= 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.1 \cdot 0.2)$.

- (b) Modifiqueu l'algorisme de l'apartat (a) de manera que, donat un model (G, σ, p, v_0) i una seqüència de fonemes s , determini si s és vàlida i, en cas de que ho sigui, retorni un camí etiquetat amb s que tingui la probabilitat més gran de produir s .

Exercici 3 (3 punts) (Discurs). Davant el gran nombre de intervencions sobre la utilitat de l'ensenyament universitari, el rector de la UPC ha decidit encarregar a UPCnet un mecanisme per redactar aquests discursos.

UPCnet ha desenvolupat un model consistent en un graf dirigit $G = (V, E, \omega)$, on cada aresta és etiquetada amb una paraula, i un vèrtex distingit $t \in V$. Segons aquest model, un camí al graf que finalitza a t representa una frase amb sentit que es pot incloure al discurs. La frase es correspon amb la seqüència ordenada de mots que apareixien al camí, seguint l'ordre establert pel propi camí. Abans de preparar un discurs el rector decidirà els punts d'inici del seu discurs, tot indicant una seqüència de nodes del graf on han de començar les frases que el formaran.

Per tal d'eliminar redundàncies al discurs, l'equip rectoral aconsella que el discurs mai faci servir més d'una vegada una aresta del graf.

- (a) Dissenyeu un algorisme per escriure un discurs que acompleixi les especificacions del rector i segueixi els consells de l'equip rectoral. En cas que no fos possible, s'ha de presentar una versió reduïda del discurs on també s'especifiquin els nodes d'inici de frase que no s'han pogut completar.
- (b) Indiqueu com modificaríeu l'algorisme proposat a l'apartat previ si l'equip rectoral relaxa la condició prèvia de redundància i permet un nombre màxim c d'aparicions de cada aresta al discurs.

Algorísmia QT 2019–2020

Segon examen parcial

13 de Gener de 2020

Durada: 2h

Instruccions generals:

- L'exercici 1 s'ha de resoldre fent servir l'espai reservat per a cada resposta.
- Heu d'argumentar la correctesa i l'eficiència dels algorismes que proposeu. Per això podeu donar una descripció d'alt nivell de l'algorisme amb les explicacions i aclariments oportuns que permetin concloure que l'algorisme és correcte i té el cost indicat.
- Heu de justificar totes les vostres afirmacions, en cas contrari la nota de la pregunta serà 0.
- Podeu fer crides a algorismes que s'han vist a classe, però si la solució és una variació n'haureu de donar els detalls.
- Es valorarà especialment la claredat i concisió de la presentació.
- Entregueu per separat les vostres solucions de cada bloc d'exercicis (Ex 1, Ex 2 i Ex 3).
- La puntuació total d'aquest examen és de **10 punts**.