

## Algorísmia Q2 2020–2021

**Examen Parcial**

**20 d'abril de 2021**

Durada: 1h 30mn

---

Instruccions generals:

- Entregueu per separat les solucions de cada exercici (Ex 1, Ex 2, Ex 3 i Ex 4).
- Heu d'argumentar la correctesa i l'eficiència dels algorismes que proposeu. Per fer-ho podeu donar una descripció d'alt nivell de l'algorisme suficient per tal que, amb les explicacions i aclariments oportuns, justifiqueu que l'algorisme és correcte i té el cost indicat.
- Podeu fer crides a algorismes que s'han vist a classe, però si la solució és una variació, n'haureu de donar els detalls.
- Es valorarà especialment la claredat i concisió de la presentació.
- La puntuació total d'aquest examen és de **10 punts**.

**Exercici 1 (2.5 punts).** Tenim un conjunt de  $2n$  valors tots diferents. Una meitat dels valors estan emmagatzemats a una taula  $A$  i l'altra meitat a una taula  $B$ . Cadascuna de les dues taules està ordenada en ordre creixent i es troba a un ordinador diferent. No hi ha cap relació d'ordre entre els valors a  $A$  i els valors a  $B$ . Volem trobar la mediana del total dels  $2n$  valors. Doneu un algorisme amb cost  $O(\lg n)$  que permeti obtenir la mediana sota la hipòtesis que només podeu fer crides de la forma  $\text{Element}(i, A)$  o  $\text{Element}(i, B)$ , per  $0 \leq i < n$ , que retornen l'element  $(i + 1)$ -èsim a  $A$  o a  $B$ , respectivament (amb cost  $O(1)$ ).

**Exercici 2 (2 punts).** Tenim un graf no dirigit i connex  $G = (V, E)$  i una coloració de les arestes amb dos colors, roig i blau ( $c : E \rightarrow \{R, B\}$ ). Doneu un algorisme per a obtenir un arbre d'expansió amb el mínim nombre d'arestes blaves.

**Exercici 3 (3 punts)** L'empresa HappyPrint disposa d'una única impressora 3D on ha de processar  $n$  comandes dels seus clients. Imprimir la comanda del client  $i$  requereix un temps d'impressió  $t_i$ . HappyPrint vol imprimir totes les comandes en un ordre que maximitzi la satisfacció total dels seus clients. Per dur-ho a terme té assignat un coeficient de satisfacció  $s_i$  a cada client  $i$ . Una planificació  $\Pi$  ens dona l'ordre en el qual s'han de processar les comandes. Si  $\Pi_j = i$  això vol dir que la comanda del client  $i$  s'ha de processar la  $j$ -èsima.  $C_i$  denota el temps de finalització de la comanda del client  $i$  a  $\Pi$ , és a dir, la suma dels temps d'impressió de les comandes dels clients fins a la  $j$ -èsima, si la comanda del client  $i$  és la  $j$ -èsima ( $\Pi_j = i$ ). En símbols:

$$C_i = t_{\Pi_1} + t_{\Pi_2} + \cdots + t_{\Pi_j} = \sum_{k=1}^j t_{\Pi_k}, \quad \text{si } \Pi_j = i.$$

La satisfacció total dels clients la mesuren mitjançant la funció  $\sum_{i=1}^n s_i C_i$ .

Doneu un algorisme tan eficient com pugeu per a resoldre aquest problema.

**Exercici 4 (2.5 punts).** Tenim un text xifrat en binari, és a dir, una cadena de  $n$  bits. Volem veure si és possible desxifrar-lo fent servir un codi  $D : \{0, 1\}^* \rightarrow \{a, \dots, z\}^*$  que transforma cadenes de bits a paraules. Disposem d'un procediment  $\text{Decode}(s, D)$  que, donada una cadena de bits  $s$ , determina en temps  $O(1)$  si  $s$  correspon a la codificació d'una paraula en  $D$ .

Doneu un algorisme de PD per decidir si, fent servir el codi  $D$ , el text xifrat es pot o no convertir en una seqüència de paraules. Analitzeu el cost del vostre algorisme suposant que cada crida a  $\text{Decode}(s, D)$  té cost  $O(1)$ .