Algorísmia QT 2018–2019

Segon examen parcial **8 de Gener de 2019**

Durada: 1h 50m

Instruccions generals:

- L'exercici 3 s'ha de resoldre fent servir l'espai reservat per a cada resposta.
- Heu d'argumentar la correctesa i l'eficiència dels algorismes que proposeu. Per això podeu donar una descripció d'alt nivell de l'algorisme amb les explicacions i aclariments oportuns que permetin concloure que l'algorisme és correcte i té el cost indicat.
- Heu de justificar totes les vostres afirmacions, en cas contrari la nota de la pregunta serà 0.
- Podeu fer crides a algorismes que s'han vist a classe, però si la solució és una variació n'haureu de donar els detalls.
- Es valorarà especialment la claredat i concisió de la presentació.
- Entregueu per separat les vostres solucions de cada bloc d'exercicis (Ex1, Ex2 i Ex3).
- La puntuació total d'aquest examen és de **10 punts**.

Exercici 1 (3 punts) (Matrioshka)

En Dilworth és el col·leccionista més destacat del món de matrioshkas, les nines russes nidificades, com les de la figura de sota.

En té milers de nines buides de fusta de diferents mides. Per construir un matrioshka la nina més petita es fica dintre de la segona més petita, i aquesta nina, al seu torn, es fica dintre de la la següent i així successivament.

En Dilworth es pregunta si hi ha una altra manera de nidificar-les perquè acabi amb el màxim possible de nines nidificades. Després de tot, això faria que pogués emmagatzemar millor la seva col·lecció i ampliar-la per tal que fos encara més magnífic!

Per a cada nina tenim mesures de la seva amplada i la seva altura. Una nina amb amplada w_i i altura h_i encaixa en una altra nina d'amplada w_j i alçada h_j si i només si $w_i < w_j$ i $h_i < h_j$. Donades les mides de les nines proporcioneu un algorisme, tan eficient com pugueu, per construir la matrioshka amb el màxim nombre possible de nines nidificades.

Exercici 2 (3 punts) (MenjaBe).

MenjaBe produeix una gran varietat de menús de menjars diferents. Malauradament, només poden produir els seus menús en quantitats limitades, de manera que solen quedar-se sense els més populars, deixant clients insatisfets. Per minimitzar aquest problema, MenjaBe vol implementar un sofisticat sistema de distribució de dinars. Els clients haurien d'enviar un missatge de text amb les seves opcions de menús acceptables abans de l'hora de dinar. A continuació, fan una assignació de dinars als clients. MenjaBe té decidit compensar amb un val de 5 euros als clients als qui no pot assignar cap de les seves opcions. MenjaBe vol minimitzar la quantitat de vals que dóna.

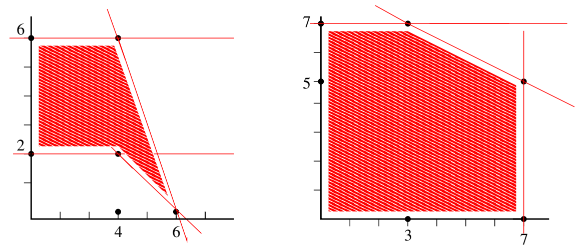
(a) Doneu un algorisme eficient per a assignar menús als clients en un dia. En general, en un dia determinat, MenjaBe sap que ha produït m tipus de menús i la quantitat de cadascun d'ells $q_1, \ldots, q_m$. A més els n clients envien un text amb les seves preferències, el client i indica un conjunt A_i de menús acceptables. L'algorisme ha d'assignar a cada client una de les seves opcions o un val de 5 euros, de manera que es minimitzi el nombre de vals.

(b) Un dels directius de MenjaBe proposa minimitzar el diners gastats en vals oferint un descompte en el preu del menú als clients que optin per una opció de menú sorpresa. En aquest cas els clients poden rebre qualsevol dels menús disponibles amb un descompte de 3 euros en el menú servit. De nou, si no els poden servir un menú dintre de les seves preferències rebran el val de 5 euros. Doneu un algorisme eficient per a determinar l'assignació menys costosa per a MenjaBe.

Cognoms, Nom Data

Exercici 3 (4 punts)

(a) (0.75 punts) Digueu i justifiqueu si per a cada regió de les figures (a) i (b) existeix un LP per al qual la regió és factible, o no pot existir tal LP. En cas que les regions puguin ser factibles per a un LP, doneu les restriccions determinades per la regió (Ajut: L'equació de la recta que passa per $(3,7),(7,5)$ és $x+2y=17$.)



(a) (b)

(b) (0.75 punts) Donat un graf no dirigit $G=(V,E)$, definim el seu *diàmetre* d com la màxima distància entre qualsevol parell de vèrtexs de G. Doneu un algorisme, el més eficient possible, que amb entrada un graf no dirigit qualsevol G amb n vèrtexs i m arestes, calculi el diàmetre de G.

(c) (0.75 punts) És cert que si a una xarxa de flux tots els arcs tenen capacitats amb valors diferents, el flux amb valor màxim és únic?

(d) (0.75 punts) Sigui $G = (V, E, w)$ un graf dirigit amb $w : E \to \mathbb{Z}$ i tal que G no té cicles negatius. Donat dos vèrtexs s, t, volem calcular el camí $s \to t$ amb mínim pes i volem fer-ho **utilitzant Programació Lineal**. Per a cada $v \in V$ definim una variable d_v que representa la distància més curta de s fins a v. Com a l'algorisme de Bellman-Ford-Moore, $d_s = 0$. Doneu la formalització del problema com a equació lineal amb les restriccions corresponents.

(e) (1 punt) Donat com a entrada un graf dirigit $G = (V, E, w)$ on $w : E \to \mathbb{Z}^+$, i un vèrtex inicial $s \in V$, volem trobar el camí **simple** de màxima distància entre s i la resta dels vèrtexs a G. Per a grafs generals, no es coneix una solució polinòmica per a aquest problema. Doneu un algorisme polinòmic per al cas particular que G sigui un DAG (graf dirigit sense cicles). Podeu obtenir un algorisme amb cost $O(n + m)$? (Recordeu que un camí simple és aquell que no repeteix cap vèrtex.)