

Algorísmia QP 2021–2022

Examen Parcial

5 d'abril de 2022

Durada: 1h 25mn

Instruccions generals:

- Entregueu per separat les solucions de cada exercici (Ex 1, Ex 2, Ex 3 i Ex 4).
 - Heu de donar i argumentar la correctesa i l'eficiència dels algorismes que proposeu. Per fer-ho podeu donar una descripció d'alt nivell de l'algorisme suficient per tal que, amb les explicacions i aclariments oportuns, justifiqueu que l'algorisme és correcte i té el cost indicat.
 - Podeu fer crides a algorismes que s'han vist a classe, però si la solució és una variació, n'haureu de donar els detalls.
 - Es valorarà especialment la claredat i concisió de la presentació.
 - La puntuació total d'aquest examen és de **10 punts**.
-

Ordenació (2 punts):

Sigui A una taula que conté n claus, entre les quals com a màxim hi ha k claus diferents (no necessàriament enters), on $k \leq \lg n$. Volem ordenar la taula mantenint la posició inicial dels elements replicats. Doneu un algorisme que resolgui el problema en temps $o(n \lg n)$.

Taules oscil·lants (2.5 punts):

Diem que un vector A amb dimensió $2n + 2$ és oscil·lant si $A[2i - 1] \leq A[2i]$, per $1 \leq i \leq n$, i $A[2i] \geq A[2i + 1]$, per $0 \leq i \leq n$.

Donat un vector B d'enters, amb dimensió $|B| = 2n + 2$, descriviu un algorisme $O(n)$ que transformi B en una taula oscil·lant A . Analitzeu amb cura la complexitat del vostre algorisme.

Connexions limitades (2.5 punts):

Donat un graf no dirigit ponderat $G = (V, E, w)$, i un enter k , definim G_k com el graf resultant d'esborrar tota aresta de G amb pes igual o superior a k ; és a dir, $G_k = (V, E')$ on $E' = E \setminus \{e \in E \mid w(e) \geq k\}$.

Considereu un graf connex no dirigit ponderat $G = (V, E, w)$ on cada resta té un pes enter únic (i, per tant, totes les arestes tenen pesos diferents). Proposeu un algorisme de cost temporal $O(|E| \log |E|)$ per a determinar el valor més gran de k pel qual G_k no és connex.

Mercat (3 punts):

A un mercat d'abastaments hi ha un producte amb infinites existències en el qual estem interessats. Ens passen una llista $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ amb la informació sobre els preus (en euros) pels propers n dies, on $p_i > 0$ és el preu que tindrà el producte l' i -èssim dia. Per garantir un abastament equitatiu, hi ha una regla que s'ha de complir cada dia: l' i -èssim dia ningú no pot comprar més de i unitats del producte.

Per exemple, suposeu que durant els propers tres dies el preu del producte serà 7, 10 i 4 euros, respectivament. Aleshores, com a màxim podríem comprar 1 unitat el primer dia, 2 unitats el segon i 3 unitats el tercer. Amb això hauríem comprat un total de 6 unitats i hauríem gastat $7 + (2 \cdot 10) + (3 \cdot 4) = 39$ euros.

Només disposem de k euros per gastar en la compra d'aquest producte. Tenint la llista de preus P per als propers n dies, doneu un algorisme eficient per planificar-ne la compra durant aquests dies de manera que comprem el màxim nombre de productes.