

# TP NUMERIQUE – Résolution des équations de Maxwell 1D par la méthode FDTD

## A. Introduction

Lors de ce TP, vous allez mettre en oeuvre dans un espace discret monodimensionnel, la propagation d'une onde plane.

## B. Numérisation par différences finies

Les équations de Maxwell en 1D (sans pertes et en l'absence de sources) sont définies par :

$$\frac{\partial E(t, x)}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H(t, x)}{\partial x} \quad (1.)$$

$$\frac{\partial H(t, x)}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E(t, x)}{\partial x} \quad (2.)$$

E et H sont respectivement les champs électrique et magnétique. La direction de propagation est l'axe (Ox).

Le passage dans l'espace discret est réalisé avec les relations suivantes :

$$t = n\Delta t, \quad x = i\Delta x, \quad n \text{ et } i \text{ entiers positifs ou nuls}$$

$$E(t, x) = E_{i\Delta x}^{n\Delta t} = E_i^n \quad (\text{notations simplifiées})$$

$$\frac{\partial E(t, x)}{\partial t} \cong \frac{\Delta E_i^n}{\Delta t} = \frac{E_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - E_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}, \quad \text{précision d'ordre 2} \quad (3.)$$

$$\frac{\partial H(t, x)}{\partial x} \cong \frac{\Delta H_i^n}{\Delta x} = \frac{H_{i+\frac{1}{2}}^n - H_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x}, \quad \text{précision d'ordre 2} \quad (4.)$$

En insérant les relations (3) et (4) dans (1) et (2), on obtient :

$$\left( \frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{\Delta t} \right) = -\frac{1}{\epsilon} \left( \frac{H_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right) \quad (5.)$$

$$\left( \frac{H_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right) = -\frac{1}{\mu} \left( \frac{E_{i+1}^n - E_i^n}{\Delta x} \right) \quad (6.)$$

Pour faire avancer le champ électrique dans le temps en tout point de l'espace ( $i\Delta x$  avec  $i = [0...N_z]$ ). Il faut trouver une relation où le champ de l'instant  $(n+1)\Delta t$  est fonction uniquement des champs d'instants précédents qui sont supposés connus. De la relation (5), on déduit facilement la relation de récurrence :

$$E_i^{n+1} = E_i^n - \frac{\Delta t}{\epsilon} \left( \frac{H_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right) \quad (7.)$$

De même pour H :

$$H_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = H_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\mu} \left( \frac{E_{i+1}^n - E_i^n}{\Delta x} \right) \quad (8.)$$

Ces relations devront être appliquées en chaque point de l'espace discret. En outre, le calcul sera répété pour les instants temporels de 0 à  $(Nt-1)\Delta t$ . L'algorithme est itératif en temps et en espace. **En conclusion, les équations (7) et (8) seront contenues dans une boucle spatiale qui elle même sera imbriquée dans une boucle sur le temps.**

Deux paramètres essentiels doivent être fixés : le pas temporel et le pas spatial. Un critère d'échantillonnage spatial impose qu'il faut un minimum de 10 cellules (10 échantillons spatiaux) par longueur d'onde pour assurer la précision des résultats et minimiser un phénomène de dispersion numérique (variation légère de la vitesse de l'onde en fonction de la fréquence).

Le critère est le suivant :

$$\Delta x \leq \frac{\lambda_{min}}{10} = \frac{c}{10f_{max}}$$

$$c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \text{ la vitesse de propagation dans le vide}$$

D'autre part, l'algorithme est stable sous une certaine condition :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}$$

On choisira pour la suite :

$$\Delta x = \frac{c}{20f_{max}} \text{ et } \Delta t = \frac{\Delta x}{c}$$

L'excitation sera insérée en position  $x = 0$  et dans le terme  $E_{i-1}^n$  de l'équation (8)

### C. Algorithme de mise en œuvre

L'algorithme de calcul peut s'écrire sous la forme suivante :

- Calcul des paramètres FDTD : le pas spatial  $\Delta x$  et le pas temporel  $\Delta t$  en fonction de  $c$  (vitesse),  $f_{max}$ . Détermination de la longueur de propagation ( $Nx\Delta x$ ) et de la durée de simulation ( $Nt\Delta t$ ).
- Calcul de la fonction source en fonction du temps ( $et(n \Delta t)$ , l'impulsion gaussienne).
- Initialisation : Allocation mémoire pour le champ électrique et le stockage des résultats. **Attention, les valeurs des champs calculés à un instant  $t$  doivent écraser les valeurs des champs calculés à l'instant  $t-\Delta t$ .** En d'autres termes, les tableaux pour les champs sont alloués que sur le nombre de cellules constituant l'espace et il contiennent les valeurs des champs que pour un instant temporel donné. Des tableaux supplémentaires sont prévus pour le stockage des champs en certains points d'observation. Initialisation des tableaux. Calcul des coefficients nécessaires au calcul des champs

- Calcul itératif sur le temps :
  - Condition initiale à  $t = 0$
  - Boucle sur le temps (1,  $N_t-1$ )
    - $E(0) = \text{gauss}(n-1)$  ! excitation en  $x = 0$
    - Boucle sur l'espace ( $i=1$  à  $N_z-1$ )
      - Mise à jour de  $E(i) = E(i) - f(H)$
      - Mise à jour de  $H(i) = H(i) - f(E)$
    - Fin boucle sur l'espace
    - Les résultats aux positions spatiales désirées sont stockés dans un tableau.
  - Fin boucle sur le temps
- Ecriture des résultats dans un fichier
- Libération de la mémoire allouée

## **D. Application**

### **1. Réflexion à l'extrémité finale**

On fixera  $N_t \gg N_x$ , par exemple  $N_t = 2000$ .  $\epsilon_r = 1$ . Faire la simulation, visualiser les résultats à différents points d'observation et conclure sur la nature de la réflexion à l'extrémité  $N_z$ .

### **2. Ajout de conditions aux frontières**

Pour avoir des frontières transparentes aux ondes sortantes, une condition dite de 'Mur' (nom de l'auteur) peut être appliquée :

$$E_{N_x}^n = E_{N_x-1}^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} (E_{N_x-1}^n - E_{N_x}^{n-1})$$

Cette condition a une précision d'ordre 2 pour les problèmes monodimensionnels. Mettre en oeuvre cette condition à l'extrémité  $N_z$ . Vérifier qu'aucune réflexion n'apparaît.

### **3. Interface air - milieu, réflexion et transmission**

On considérera que l'espace est constitué :

- d'air de 0 à  $300\Delta x$
- d'un milieu avec  $\epsilon_r = 4$  de 300 à  $N\Delta x$

On placera notamment des points d'observation en ( 50, 200, 300, 400 et  $(N_z-1)\Delta x$  ).

Observer les résultats sous matlab et déduire la valeur du module du coefficient de réflexion et de transmission.

Comparer avec les formules ci-dessous :

$$R = \frac{1 - \sqrt{\epsilon_r}}{1 + \sqrt{\epsilon_r}} \text{ et } T = 1 + R$$