

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE INFORMÁTICA - CIn

DISCIPLINA DE MÉTODOS NUMÉRICOS

---

# Relatório do Projeto de Métodos Numéricos

---

*Autor:*

Ermanno A. ARRUDA

*Professor:*

Dr. Ricardo MARTINS

21 de novembro de 2014

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Equação e Parâmetros</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Métodos de Passo Único</b>	<b>3</b>
3.1	Euler . . . . .	3
3.2	Euler Inverso . . . . .	4
3.3	Euler Aprimorado . . . . .	5
3.4	Runge-Kutta . . . . .	6
3.5	Série de Taylor de Três Termos . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Métodos de Passo Múltiplo</b>	<b>9</b>
4.1	Adams-Bashforth . . . . .	9
4.2	Adams-Multon . . . . .	11
4.3	Predição e Correção . . . . .	13
4.4	Diferenciação Inversa . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>Apêndice de Gráficos</b>	<b>15</b>

# Relatório do Projeto de Métodos Numéricos

Ermano A. Arruda

21 de novembro de 2014

## 1 Introdução

Neste projeto um conjunto de métodos numéricos para resolução do problema de valor inicial para equações diferenciais lineares de primeira ordem foram implementados. Esses métodos podem ser divididos em dois grupos, métodos de passo único e múltiplo. Os métodos de passo único implementados foram os métodos de Euler, Euler Inverso, Euler Aprimorado (Modificado), Runge-Kutta e, adicionalmente, o método da Série de Taylor de Três Termos. Os métodos de passo múltiplo implementados foram os métodos de Adams-Bashforth (para polinômios de grau 1, 2, 3 e 4), Adams-Multon (graus 1, 2, 3 e 4), Predição e Correção (graus 1, 2, 3 e 4) e por último os métodos de Diferenciação Inversa (para graus 1, 2, 3 e 4). O projeto foi implementado em python utilizando as bibliotecas numpy para computação científica, sympy para matemática simbólica e matplotlib para geração de gráficos. O presente relatório irá apresentar na próxima seção a equação diferencial e parâmetros utilizados para os métodos implementados. Em seguida, os resultados para os diversos métodos numéricos de passo único serão apresentados na seção 3. Os métodos de passo múltiplo terão seus resultados discutidos na seção 4. Ao final, o relatório conclui com uma breve discussão sobre os métodos implementados.

## 2 Equação e Parâmetros

A equação utilizada para testes de todos os métodos foi a seguinte:

$$y'_{n+1} = 1 - x + 4y, y(0) = 1 \quad (1)$$

O tamanho do passo,  $h$ , assumiu os valores  $h = 0.1$ ,  $h = 0.05$ ,  $h = 0.025$ . O número de avaliações foi configurado de tal forma que  $n = 1/h$ . Esses valores foram utilizados por todo o projeto.

### 3 Métodos de Passo Único

Métodos de passo único se caracterizam por utilizarem apenas o ponto estimado imediatamente anterior  $y_n$  na estimativa do próximo valor  $y_{n+1}$ .

#### 3.1 Euler

O método de Euler é definido pela seguinte equação:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (2)$$

Na figura 1 são mostrados diferentes aproximações geradas por diferentes valores de  $h$  para a solução exata da Eq (1),  $\phi(x)$ . Logo abaixo também é mostrado a evolução do erro absoluto para cada avaliação do método, dado o correspondente tamanho do passo  $h$ . Na tabela 1 apresenta o desempenho do método de Euler para diferentes tamanhos de passo  $h$ .

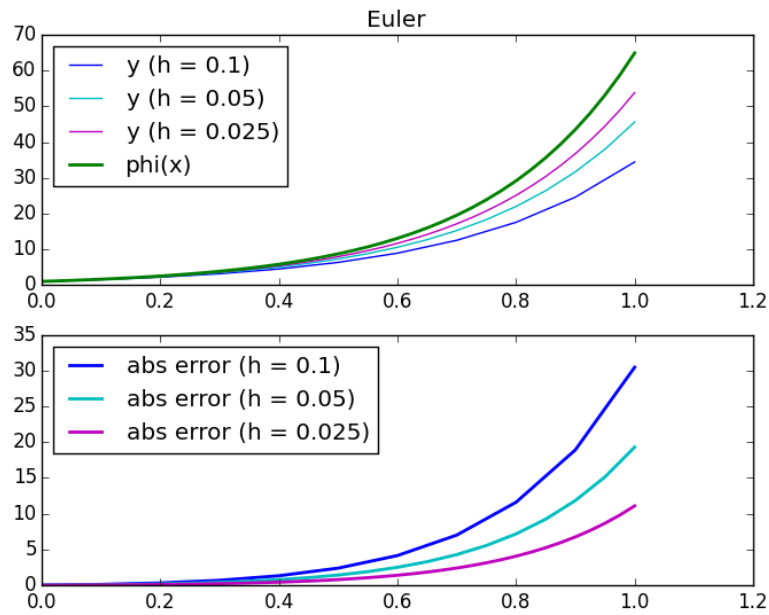


Figura 1: Gráfico mostrando o desempenho do método de Euler para cada valor de tamanho de passo  $h$ , bem como o erro absoluto associado para cada avaliação do método.

x	$h = 0.1$	$\phi(x)$
0	1.0	1.0
0.1	1.5	1.60904183
0.2	2.19	2.50532985
0.3	3.146	3.83013885
0.4	4.4744	5.794226
0.5	6.32416	8.71200412
0.6	8.903824	13.05252195
0.7	12.5053536	19.51551804
0.8	17.53749504	29.14487961
0.9	24.57249306	43.4979034
1.0	34.41149028	64.89780316

Tabela 1: Tabela comparativa para diferentes valores de  $h$ .

### 3.2 Euler Inverso

O método de Euler Inverso é definido pela seguinte equação:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad (3)$$

Este método é classificado como método implícito por utilizar do lado direito de sua expressão o mesmo termo que se procura estimar, i.e.  $y_{n+1}$ .

Na figura 2 são mostrados diferentes aproximações geradas por diferentes valores de  $h$  para a solução exata da Eq (1),  $\phi(x)$ . Logo abaixo também é mostrado a evolução do erro absoluto para cada avaliação do método, dado o correspondente tamanho do passo  $h$ . Na tabela 2 apresenta o desempenho do método de Euler Inverso para diferentes tamanhos de passo  $h$ .

x	$h = 0.1$	$\phi(x)$
0	1.0	1.0
0.1	1.81666667	1.60904183
0.2	3.16111111	2.50532985
0.3	5.38518519	3.83013885
0.4	9.07530864	5.794226
0.5	15.20884774	8.71200412
0.6	25.41474623	13.05252195
0.7	42.40791038	19.51551804
0.8	70.71318397	29.14487961
0.9	117.87197328	43.4979034
1.0	196.45328879	64.89780316

Tabela 2: Tabela comparativa para diferentes valores de  $h$ .

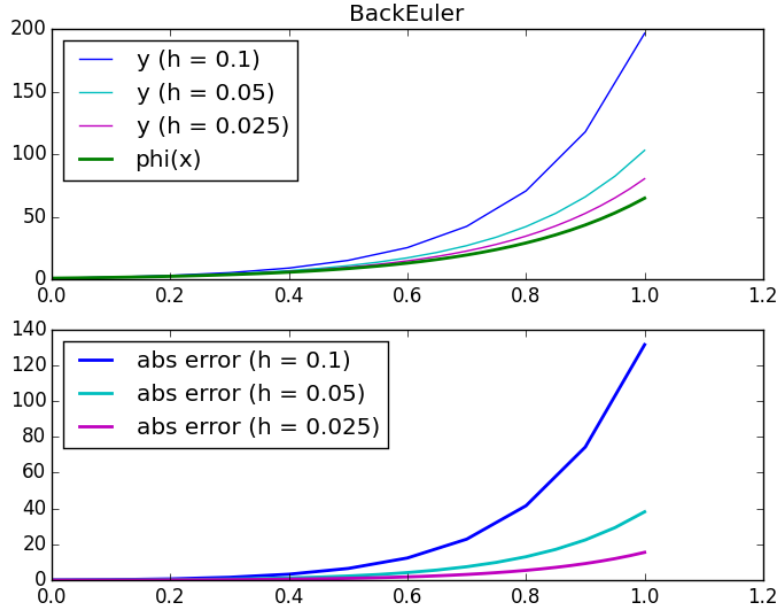


Figura 2: Gráfico mostrando o desempenho do método de Euler Inverso para cada valor de tamanho de passo  $h$ , bem como o erro absoluto associado para cada avaliação do método.

### 3.3 Euler Aprimorado

O método de Euler Aprimorado é definido pela seguinte equação:

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))}{2} \quad (4)$$

O Euler Aprimorado apresenta uma aproximação trapezoidal para o termo integral em 4.

Na figura 3 são mostrados diferentes aproximações geradas por diferentes valores de  $h$  para a solução exata da Eq (1),  $\phi(x)$ . Logo abaixo também é mostrado a evolução do erro absoluto para cada avaliação do método, dado o correspondente tamanho do passo  $h$ . Na tabela 3 apresenta do desempenho do método de Euler para diferentes tamanhos de passo  $h$ .

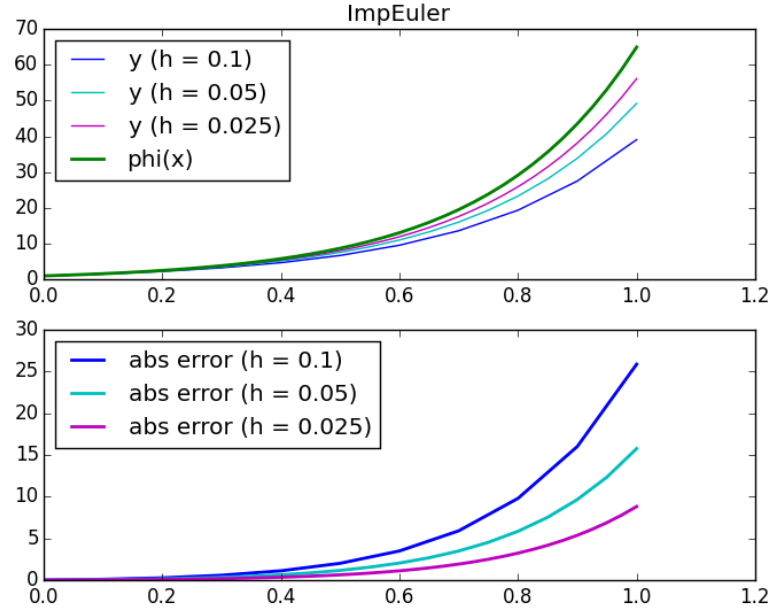


Figura 3: Gráfico mostrando o desempenho do método de Euler Aprimorado para cada valor de tamanho de passo  $h$ , bem como o erro absoluto associado para cada avaliação do método.

x	$h = 0.1$	$\phi(x)$
0	1.0	1.0
0.1	1.515	1.60904183
0.2	2.2363	2.50532985
0.3	3.250546	3.83013885
0.4	4.68077532	5.794226
0.5	6.70170095	8.71200412
0.6	9.56141536	13.05252195
0.7	13.6122098	19.51551804
0.8	19.35433792	29.14487961
0.9	27.49815985	43.4979034
1.0	39.05238699	64.89780316

Tabela 3: Tabela comparativa para diferentes valores de  $h$ .

### 3.4 Runge-Kutta

O método de Runge-Kutta é definido pela seguinte equação:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (5)$$

Onde,

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad (6a)$$

$$k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1h), \quad (6b)$$

$$k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2h), \quad (6c)$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + k_3h). \quad (6d)$$

Runge-Kutta apresenta uma aproximação bastante robusta, pois aproxima o termo integral utilizando uma média ponderada de várias aproximações intermediárias.

Na figura 4 são mostrados diferentes aproximações geradas por diferentes valores de  $h$  para a solução exata da Eq (1),  $\phi(x)$ . Logo abaixo também é mostrado a evolução do erro absoluto para cada avaliação do método, dado o correspondente tamanho do passo  $h$ . Na tabela 4 apresenta o desempenho do método de Euler para diferentes tamanhos de passo  $h$ .

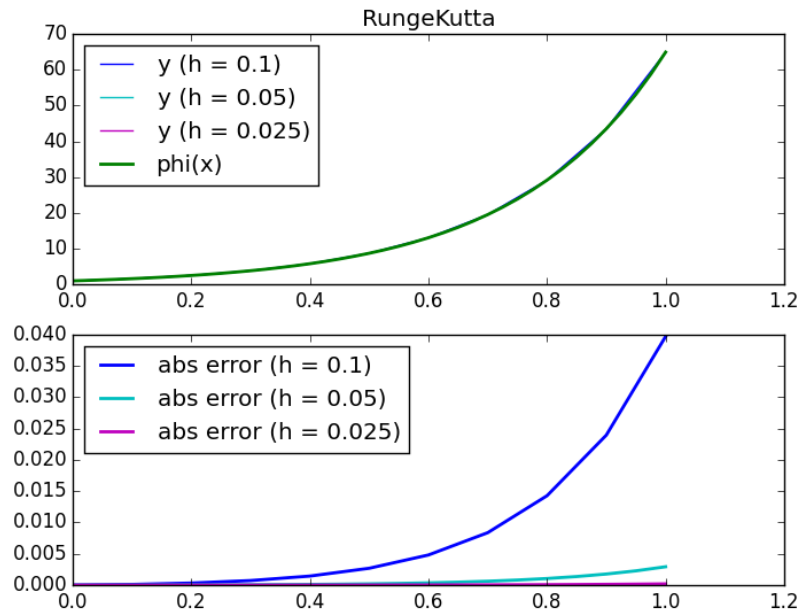


Figura 4: Gráfico mostrando o desempenho do método de Runge-Kutta para cada valor de tamanho de passo  $h$ , bem como o erro absoluto associado para cada avaliação do método.



x	$h = 0.1$	$\phi(x)$
0	1.0	1.0
0.1	1.60893333	1.60904183
0.2	2.50500615	2.50532985
0.3	3.82941451	3.83013885
0.4	5.79278527	5.794226
0.5	8.70931755	8.71200412
0.6	13.04771263	13.05252195
0.7	19.50714785	19.51551804
0.8	29.13060936	29.14487961
0.9	43.47395433	43.4979034
1.0	64.85810681	64.89780316

Tabela 4: Tabela comparativa para diferentes valores de  $h$ .

### 3.5 Série de Taylor de Três Termos

O método da Série de Taylor de Três Termos é definido pela seguinte equação:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n \quad (7)$$

Onde,

$$y'_n = f(t_n, y_n), \quad (8a)$$

$$y''_n = \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial x} + \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y}y'_n. \quad (8b)$$

Na figura 5 são mostrados diferentes aproximações geradas por diferentes valores de  $h$  para a solução exata da Eq (1),  $\phi(x)$ . Logo abaixo também é mostrado a evolução do erro absoluto para cada avaliação do método, dado o correspondente tamanho do passo  $h$ . Na tabela 5 apresenta do desempenho do método de Euler para diferentes tamanhos de passo  $h$ .

x	$h = 0.1$	$\phi(x)$
0	1.0	1.0
0.1	1.595	1.60904183
0.2	2.4636	2.50532985
0.3	3.737128	3.83013885
0.4	5.60994944	5.794226
0.5	8.36972517	8.71200412
0.6	12.44219325	13.05252195
0.7	18.45744601	19.51551804
0.8	27.3480201	29.14487961
0.9	40.49406975	43.4979034
1.0	59.93822323	64.89780316

Tabela 5: Tabela comparativa para diferentes valores de  $h$ .

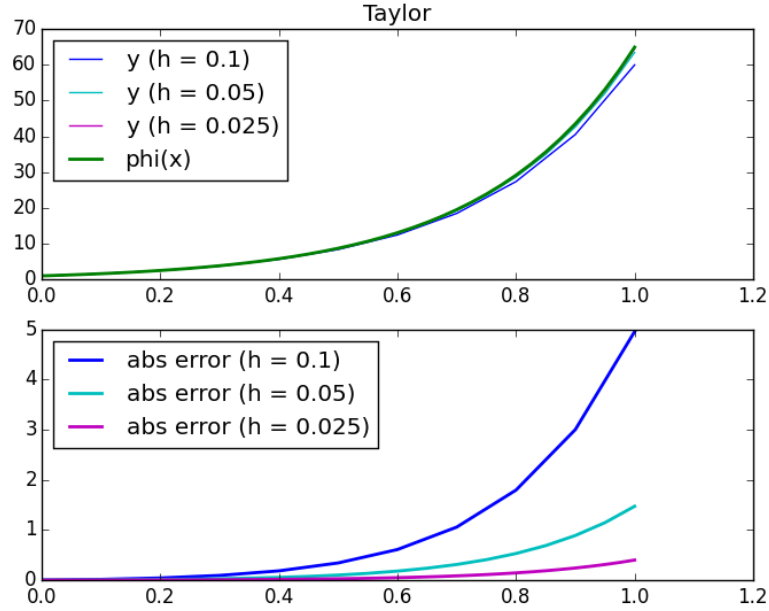


Figura 5: Gráfico mostrando o desempenho do método da Série de Taylor de Três Termos para cada valor de tamanho de passo  $h$ , bem como o erro absoluto associado para cada avaliação do método.

## 4 Métodos de Passo Múltiplo

Métodos de Passo Múltiplo se diferem dos métodos anteriores no sentido de utilizarem informação associada a vários pontos do passado ( $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k}$ ) na estimativa do próximo  $y_{n+1}$ . Essa abordagem, portanto, contrasta diretamente com os métodos numéricos vistos na seção anterior, o quais se utilizam apenas do valor computado imediatamente anterior para estimar  $y_{n+1}$ .

### 4.1 Adams-Bashforth

Os métodos de Adams-Bashforth representam uma família de métodos numéricos explícitos para solução do problema de valor inicial pra equações diferenciais lineares de primeira ordem. O princípio fundamental dessa família de métodos se baseia na aproximação da função  $y'_n = f(x_n, y_n)$  por meio de um polinômio arbitrário  $P_k(x)$  de grau  $k$ . O grau desse polinômio escolhido representa a ordem do método de Adams-Bashforth. As equações para cada ordem do método deste método são obtidas ao se fazer interpolação exata por  $k + 1$  pontos,  $(x_n, y_n), (x_{n-1}, y_{n-1}), \dots, (x_{n-k}, y_{n-k})$ , dessa forma são determinados os coeficientes do polinômio de grau  $k$  que interpola esses pontos  $P_k(x)$ . Como esse polinômio representa  $f(x_n, y_n) = P_k(x)$ , a expressão final dos métodos de Adams-Bashforth de ordem  $k$  é dada pela equação abaixo.

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_k(x) dx \quad (9)$$

Neste projeto foram implementados os métodos de ordem 1, 2, 3 e 4 representados pelas respectivas equações abaixo.

1ª Ordem:

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h \left( \frac{3}{2} f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{2} f(t_n, y_n) \right) \quad (10)$$

2ª Ordem:

$$y_{n+3} = y_{n+2} + h \left( \frac{23}{12} f(t_{n+2}, y_{n+2}) - \frac{4}{3} f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{5}{12} f(t_n, y_n) \right) \quad (11)$$

3ª Ordem:

$$y_{n+4} = y_{n+3} + h \left( \frac{55}{24} f(t_{n+3}, y_{n+3}) - \frac{59}{24} f(t_{n+2}, y_{n+2}) + \frac{37}{24} f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{3}{8} f(t_n, y_n) \right) \quad (12)$$

4ª Ordem:

$$y_{n+5} = y_{n+4} + h \left( \frac{1901}{720} f(t_{n+4}, y_{n+4}) - \frac{1387}{360} f(t_{n+3}, y_{n+3}) + \frac{109}{30} f(t_{n+2}, y_{n+2}) - \frac{637}{360} f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{251}{720} f(t_n, y_n) \right) \quad (13)$$

x	$h = 0.1$	$phi(x)$
0	1.0	1.0
0.1	1.60893333	1.60904183
0.2	2.45929333	2.50532985
0.3	3.68808267	3.83013885
0.4	5.4740736	5.794226
0.5	8.07590123	8.71200412
0.6	11.87162724	13.05252195
0.7	17.41442334	19.51551804
0.8	25.5137519	29.14487961
0.9	37.35411837	43.4979034
1.0	54.66883901	64.89780316

Tabela 6: Tabela comparativa Adams-Bashforth (1ª Ordem) e solução exata ( $h = 0.1$ ).

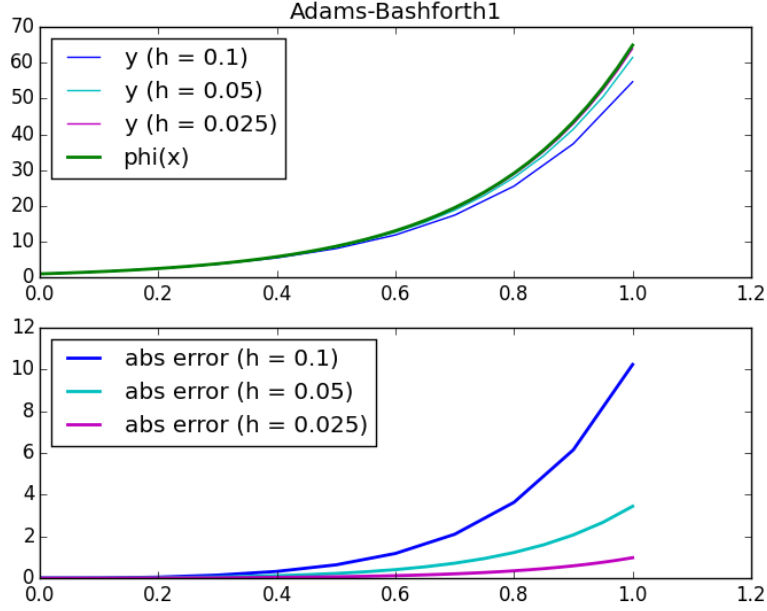


Figura 6: Gráfico Adams-Bashforth (1ª Ordem) para valores de h iguais a 0.1, 0.05, 0.025.

## 4.2 Adams-Multon

O método de Adams-Multon segue um princípio bastante similar ao do Adams-Bashforth. A diferença é que sua expressão é encontrada ao se definir uma interpolação polinomial de grau  $k$  passando pelos pontos  $(x_n, y_n), (x_{n-1}, y_{n-1}), \dots, (x_{n-(k-1)}, y_{n-(k-1)})$  e  $(x_{n+1}, y_{n+1})$ , isso implica que este é também um método implícito.

Nesse projeto foram implementados os métodos de ordem 1, 2, 3 e 4 representados pelas respectivas equações abaixo.

1ª Ordem:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)) \quad (14)$$

2ª Ordem:

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h \left( \frac{5}{12}f(t_{n+2}, y_{n+2}) + \frac{2}{3}f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{12}f(t_n, y_n) \right) \quad (15)$$

3ª Ordem:

$$y_{n+3} = y_{n+2} + h \left( \frac{3}{8}f(t_{n+3}, y_{n+3}) + \frac{19}{24}f(t_{n+2}, y_{n+2}) - \frac{5}{24}f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{1}{24}f(t_n, y_n) \right) \quad (16)$$

4<sup>a</sup> Ordem:

$$y_{n+4} = y_{n+3} + h \left( \frac{251}{720} f(t_{n+4}, y_{n+4}) + \frac{646}{720} f(t_{n+3}, y_{n+3}) - \frac{264}{720} f(t_{n+2}, y_{n+2}) + \frac{106}{720} f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{19}{720} f(t_n, y_n) \right) \quad (17)$$

x	$h = 0.1$	$phi(x)$
0	1.0	1.0
0.1	1.61875	1.60904183
0.2	2.534375	2.50532985
0.3	3.8953125	3.83013885
0.4	5.92421875	5.794226
0.5	8.95507812	8.71200412
0.6	13.48886719	13.05252195
0.7	20.27705078	19.51551804
0.8	30.44682617	29.14487961
0.9	45.68898926	43.4979034
1.0	68.53973389	64.89780316

Tabela 7: Tabela comparativa Adams-Multon (1<sup>a</sup> Ordem) e solução exata ( $h = 0.1$ ).

### 4.3 Predição e Correção

Métodos que utilizam predição e correção removem a implicidade de métodos como o Adams-Multon ao utilizar métodos explícitos como o Adams-Bashforth como preditores. Usando esta predição, gera-se uma estimativa corrigida a partir desse resultado, ao invés de se estimar o ponto  $y_{n+1}$  implicitamente. Esse ciclo pode ser repetido iterativamente até que correção feita pelo Adams-Multon não seja mais significativa (menor que um limiar). Esse tipo de método fornece a possibilidade de definição de vários variantes adaptativos, i.e. métodos que ajustam o tamanho do passo  $h = 1$  em tempo de execução de acordo com o comportamento do erro de ajuste.

Neste projeto foram implementados os métodos de predição e correção de ordem 1, 2, 3 e 4 utilizando-se o Adams-Bashforth como preditor, e Adams-Multon de correspondente ordem como corretor. As equações para tais métodos são:

1ª Ordem:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(f(t_{n+1}, \gamma_{n+1}) + f(t_n, y_n)) \quad (18)$$

Onde  $\gamma_{n+1}$  é dado pela Eq (10), ou seja esta é a estimativa a ser corrigida pelo adams-multon.

2ª Ordem:

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h \left( \frac{5}{12}f(t_{n+2}, \gamma_{n+2}) + \frac{2}{3}f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{12}f(t_n, y_n) \right) \quad (19)$$

Onde  $\gamma_{n+2}$  é dado pela Eq (11), ou seja esta é a estimativa a ser corrigida pelo adams-multon.

3ª Ordem:

$$y_{n+3} = y_{n+2} + h \left( \frac{3}{8}f(t_{n+3}, \gamma_{n+3}) + \frac{19}{24}f(t_{n+2}, y_{n+2}) - \frac{5}{24}f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{1}{24}f(t_n, y_n) \right) \quad (20)$$

Onde  $\gamma_{n+3}$  é dado pela Eq (12), ou seja esta é a estimativa a ser corrigida pelo adams-multon.

4ª Ordem:

$$y_{n+4} = y_{n+3} + h \left( \frac{251}{720}f(t_{n+4}, \gamma_{n+4}) + \frac{646}{720}f(t_{n+3}, y_{n+3}) - \frac{264}{720}f(t_{n+2}, y_{n+2}) + \frac{106}{720}f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{19}{720}f(t_n, y_n) \right) \quad (21)$$

Onde  $\gamma_{n+4}$  é dado pela Eq (13), ou seja esta é a estimativa a ser corrigida pelo adams-multon.

x	$h = 0.1$	$\phi(x)$
0	1.0	1.0
0.1	1.61678667	1.60904183
0.2	2.51951573	2.50532985
0.3	3.85499245	3.83013885
0.4	5.83680789	5.794226
0.5	8.7837483	8.71200412
0.6	13.1718251	13.05252195
0.7	19.71182421	19.51551804
0.8	29.4650998	29.14487961
0.9	44.01647873	43.4979034
1.0	65.73244368	64.89780316

Tabela 8: Tabela comparativa Predição e Correção (1ª Ordem) e solução exata ( $h = 0.1$ ).

#### 4.4 Diferenciação Inversa

Foram implementados os métodos de diferenciação inversa de ordem 1, 2, 3 e 4. Para cada ordem, os métodos de diferenciação inversa são dados pelas equações abaixo.

1ª Ordem:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad (22)$$

2ª Ordem:

$$y_{n+2} = \frac{4}{3}y_{n+1} - \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}hf(t_{n+2}, y_{n+2}); \quad (23)$$

3ª Ordem:

$$y_{n+3} = \frac{18}{11}y_{n+2} - \frac{9}{11}y_{n+1} + \frac{2}{11}y_n + \frac{6}{11}hf(t_{n+3}, y_{n+3}) \quad (24)$$

4ª Ordem:

$$y_{n+4} = \frac{48}{25}y_{n+3} - \frac{36}{25}y_{n+2} + \frac{16}{25}y_{n+1} - \frac{3}{25}y_n + \frac{12}{25}hf(t_{n+4}, y_{n+4}) \quad (25)$$

x	$h = 0.1$	$\phi(x)$
0	1.0	1.0
0.1	1.81666667	1.60904183
0.2	3.16111111	2.50532985
0.3	5.38518519	3.83013885
0.4	9.07530864	5.794226
0.5	15.20884774	8.71200412
0.6	25.41474623	13.05252195
0.7	42.40791038	19.51551804
0.8	70.71318397	29.14487961
0.9	117.87197328	43.4979034
1.0	196.45328879	64.89780316

Tabela 9: Tabela comparativa Diferenciação Inversa (1ª Ordem) e solução exata ( $h = 0.1$ ).

## 5 Conclusão

Neste projeto foram implementados ao todo 21 métodos, sendo 5 métodos de Passo Único e 16 métodos de Passo Múltiplo. Os resultados dos métodos para o mesmo problema de valor inicial foram coletados brevemente comparados. Os resultados dizem respeito ao comportamento esperado para os métodos, com respectivos erros teóricos previstos. Neste projeto a análise dos métodos foi feita com base em uma solução analítica dada, no entanto a importância desses métodos se dá ao ponto que para vários problemas do mundo real não possuem solução analítica, ou é simplesmente inviável obtê-la. Foi visto também que alguns métodos apresentaram um desempenho melhor que outros, como foi o caso do Runge-Kutta, Série de Taylor de Três Termos, Adams, Previsão e Correção. A escolha do tamanho do passo  $h$  também se mostra bastante importante como um meio de ajustar a qualidade da aproximação obtida, mesmo que com métodos inicialmente de pobre desempenho como o de Euler.

## 6 Apêndice de Gráficos



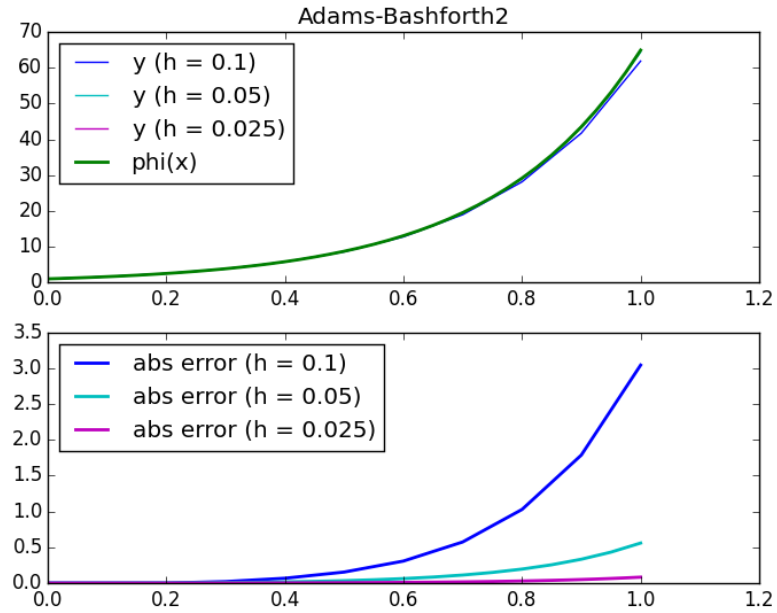


Figura 7: Gráfico Adams-Bashforth (2ª Ordem) para valores de  $h$  iguais a 0.1, 0.05, 0.025.

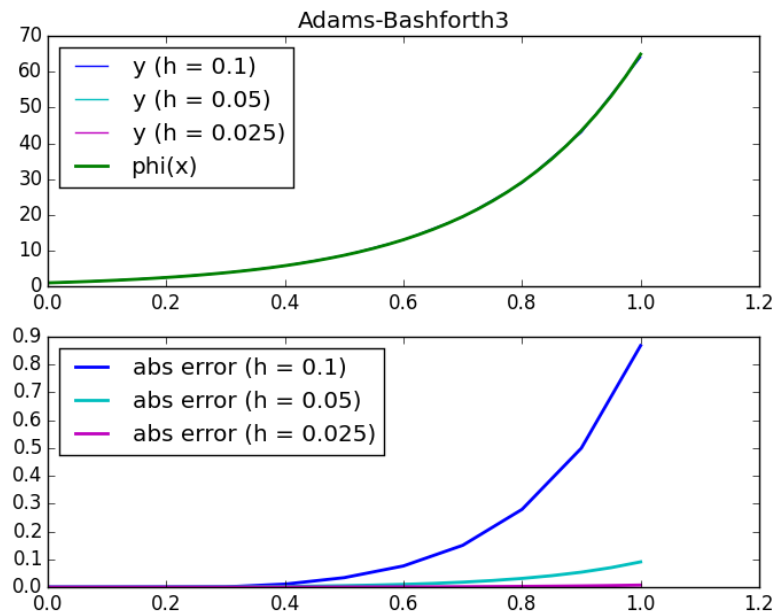


Figura 8: Gráfico Adams-Bashforth (3ª Ordem) para valores de  $h$  iguais a 0.1, 0.05, 0.025.

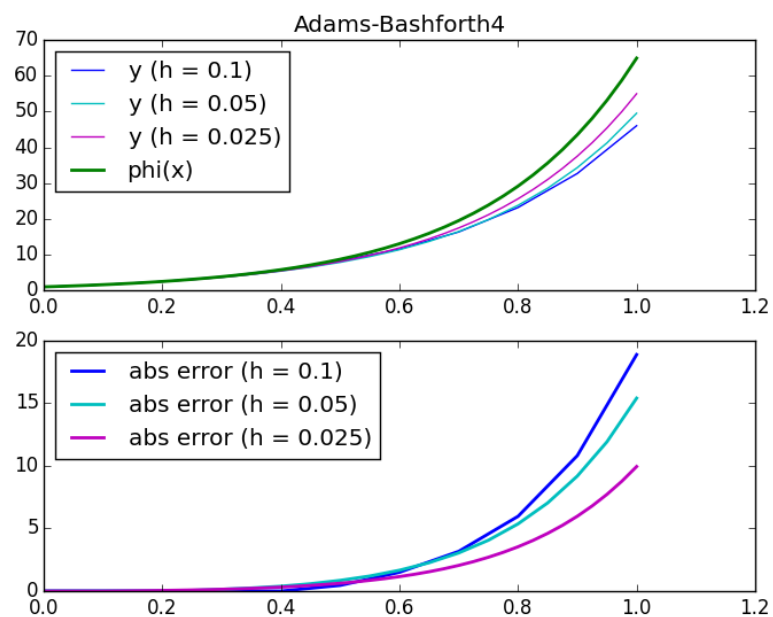


Figura 9: Gráfico Adams-Bashforth (4ª Ordem) para valores de  $h$  iguais a 0.1, 0.05, 0.025.

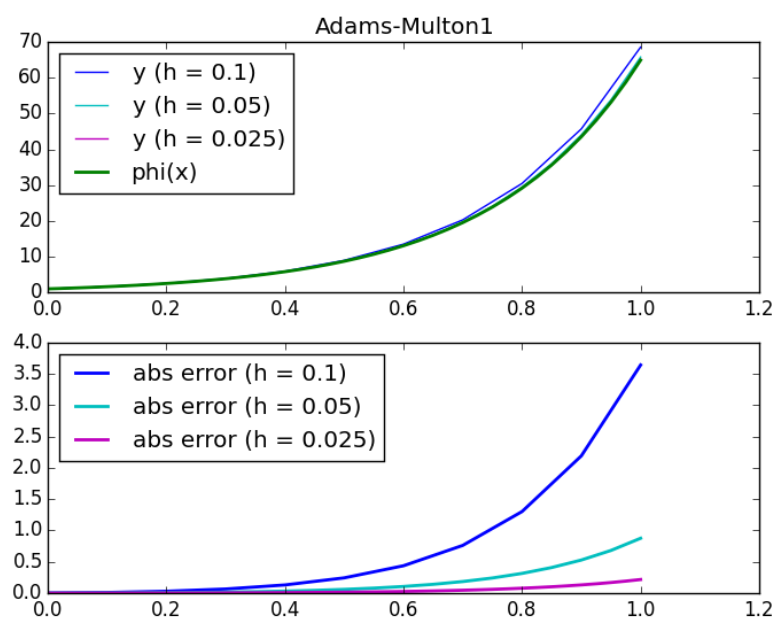


Figura 10: Gráfico Adams-Bashforth (1ª Ordem) para valores de  $h$  iguais a 0.1, 0.05, 0.025.

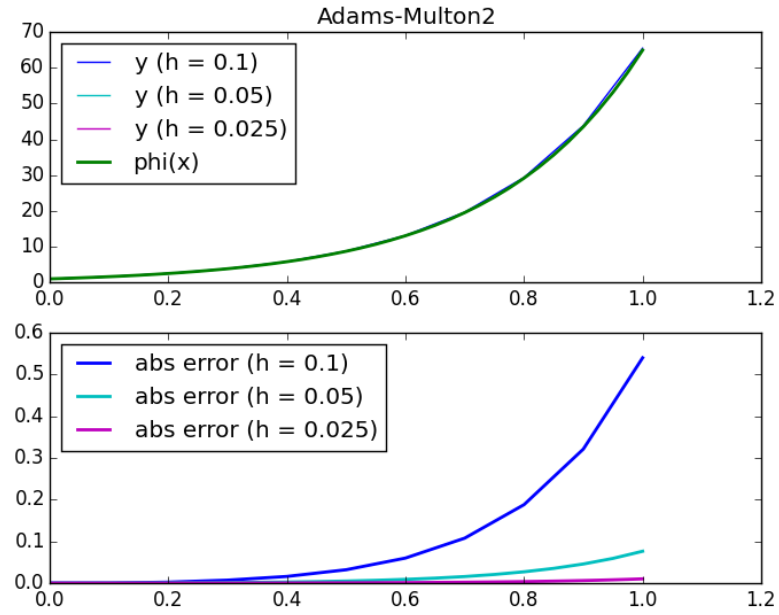


Figura 11: Gráfico Adams-Multon ( $2^a$  Ordem) para valores de  $h$  iguais a 0.1, 0.05, 0.025.

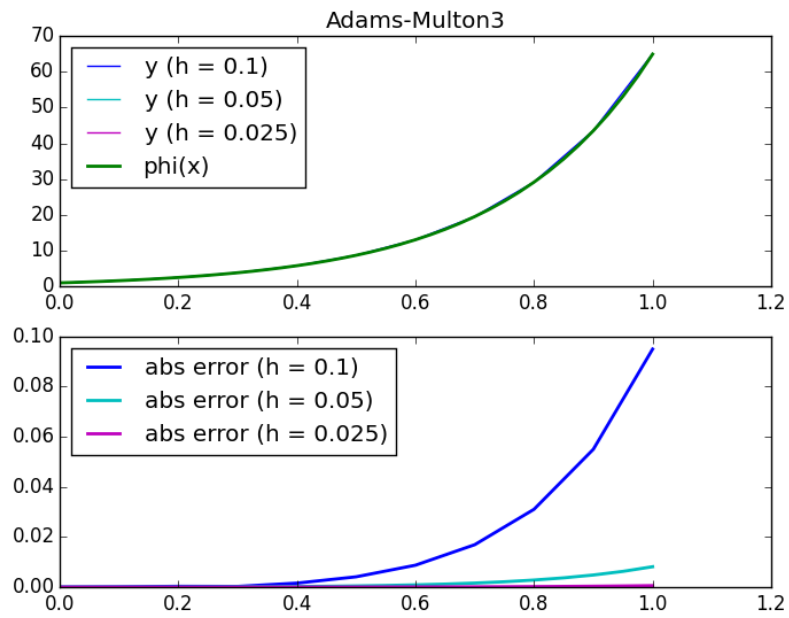


Figura 12: Gráfico Adams-Multon ( $3^a$  Ordem) para valores de  $h$  iguais a 0.1, 0.05, 0.025.

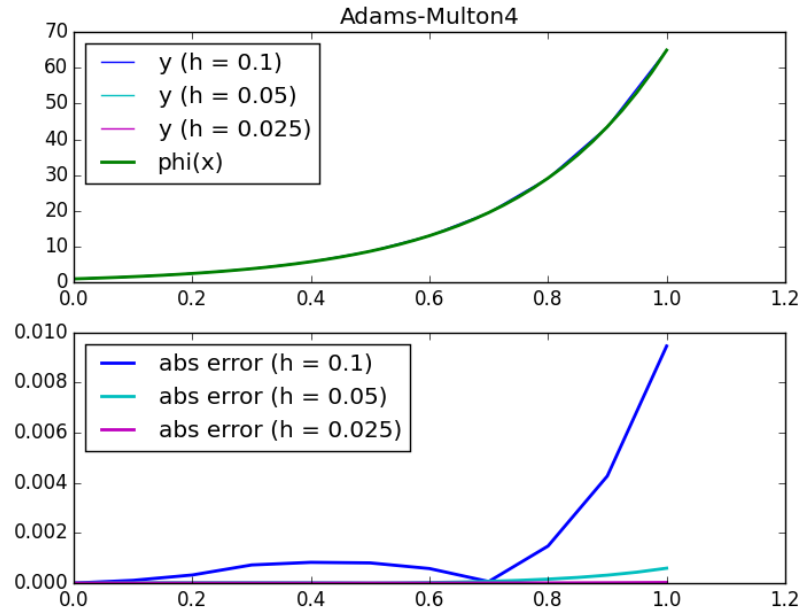


Figura 13: Gráfico Adams-Multon ( $4^a$  Ordem) para valores de  $h$  iguais a 0.1, 0.05, 0.025.

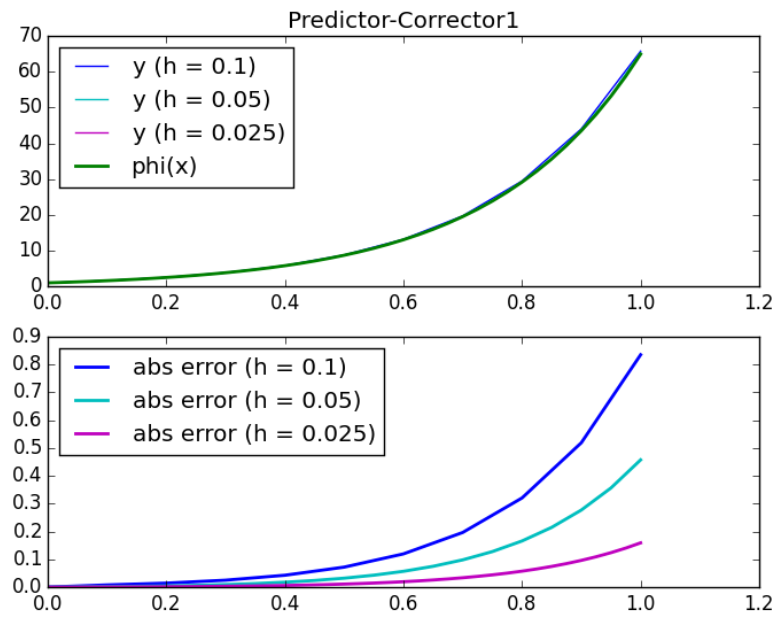


Figura 14: Gráfico Predição e Correção ( $1^a$  Ordem) para valores de  $h$  iguais a 0.1, 0.05, 0.025.

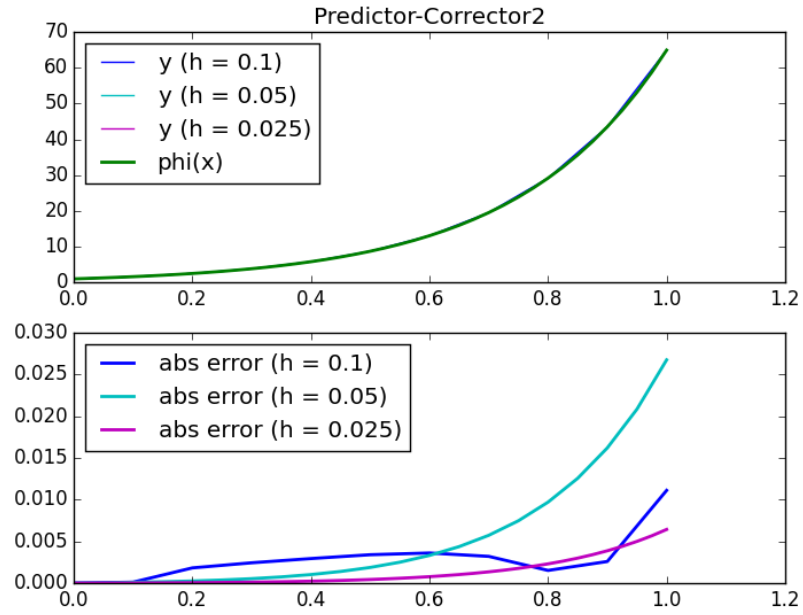


Figura 15: Gráfico Predição e Correção (2ª Ordem) para valores de  $h$  iguais a 0.1, 0.05, 0.025.

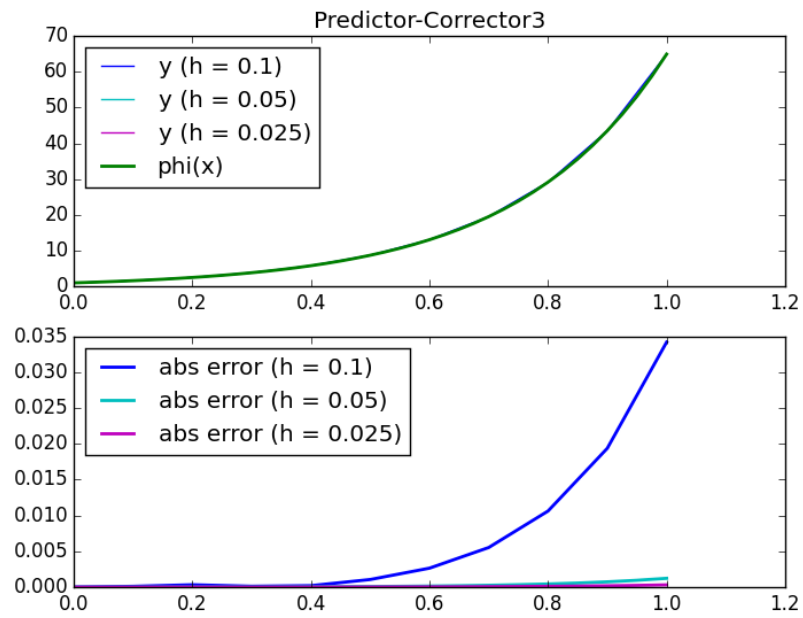


Figura 16: Gráfico Predição e Correção (3ª Ordem) para valores de  $h$  iguais a 0.1, 0.05, 0.025.

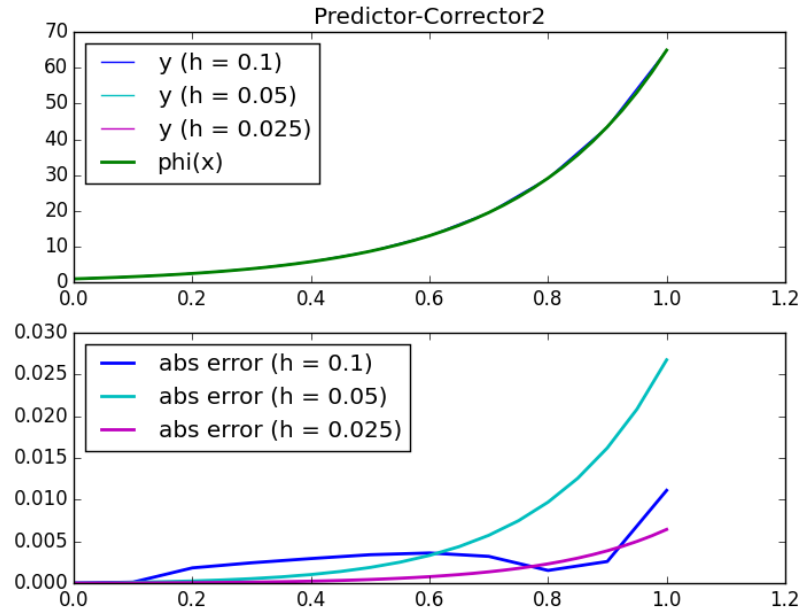


Figura 17: Gráfico Predição e Correção (4ª Ordem) para valores de  $h$  iguais a 0.1, 0.05, 0.025.

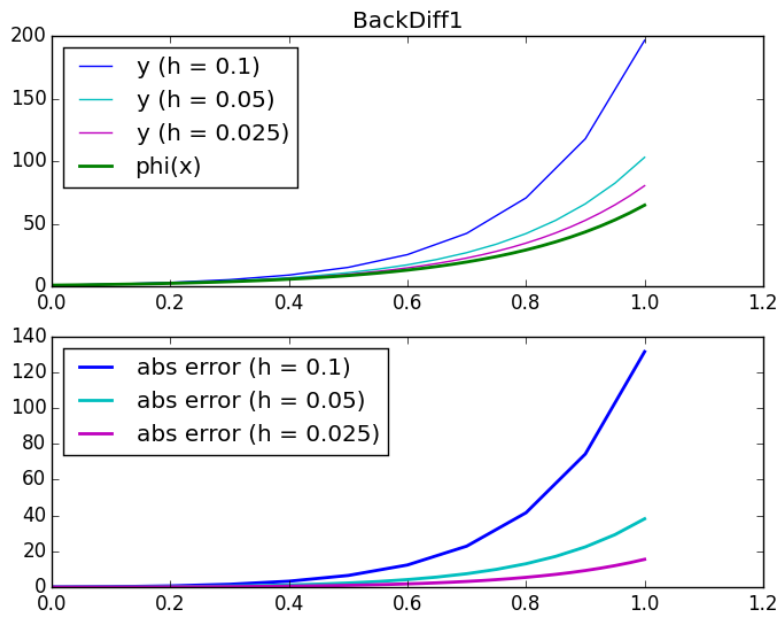


Figura 18: Gráfico Diferenciação Inversa (1ª Ordem) para valores de  $h$  iguais a 0.1, 0.05, 0.025.

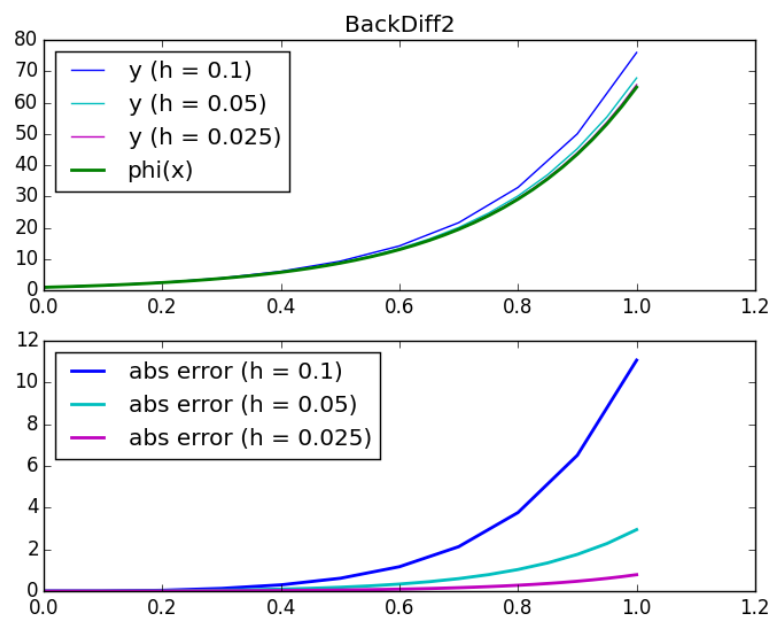


Figura 19: Gráfico Diferenciação Inversa (2ª Ordem) para valores de  $h$  iguais a 0.1, 0.05, 0.025.

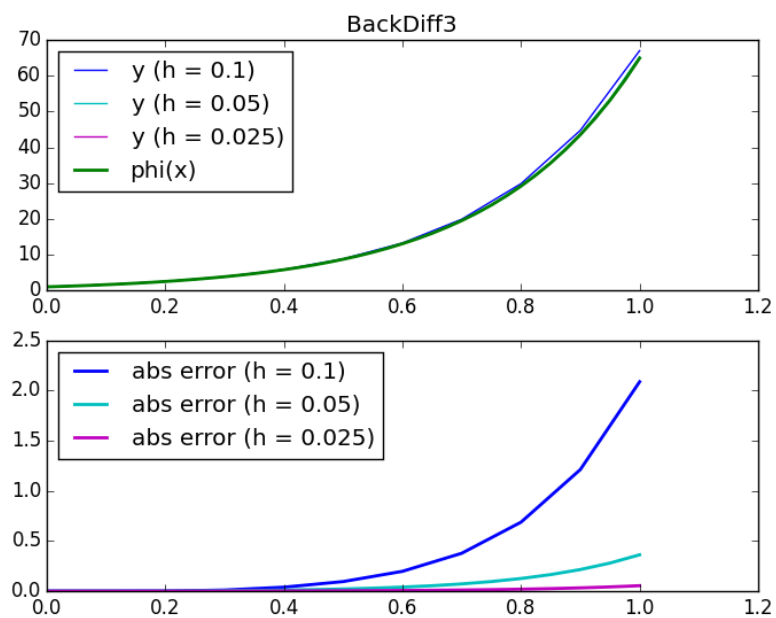


Figura 20: Gráfico Diferenciação Inversa (3ª Ordem) para valores de  $h$  iguais a 0.1, 0.05, 0.025.

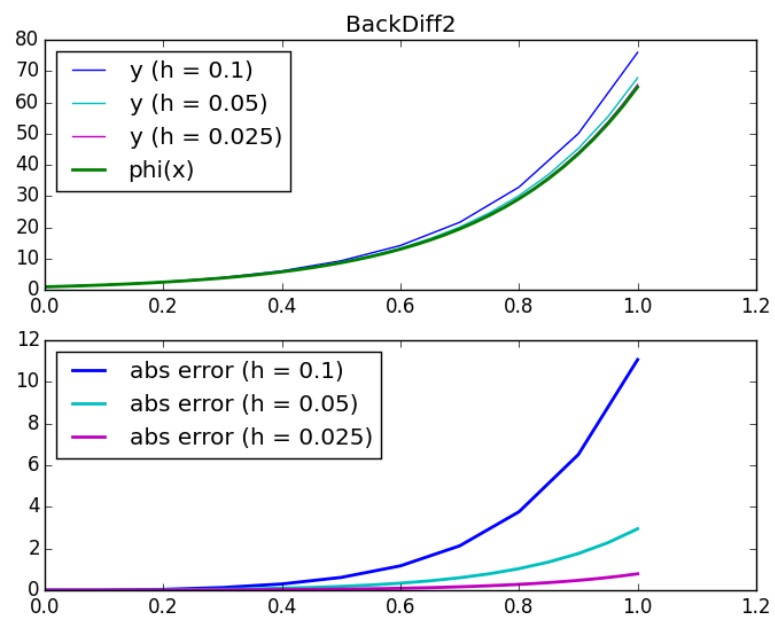


Figura 21: Gráfico Diferenciação Inversa (4ª Ordem) para valores de  $h$  iguais a 0.1, 0.05, 0.025.