COMPUTER GRAPHICS

ЗАСОБИ ПРОГРАМУВАННЯ КОМП’ЮТЕРНОЇ ГРАФІКИ

БАЗОВЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

- Точка. Вектор.
- Сдвиг. Масштабирование. Поворот.
- Матрица преобразований.

ВЕКТОРА в 2D / 3d

Должны Знать:

- Сложение векторов
- Вычитание векторов
- Умножение вектор на скаляр
- Норма вектора (Эвклидова). Длина вектора.
- Скалярное произведение векторов. Свойства.
- Векторное произведение 3-D векторов. Свойства.

2-D ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Вершина (точка, vertex). Обозначаем $\boldsymbol{V}/v$.
Упорядоченная пара (2D) чисел

Отрезок прямой. *Задается парой* ***точек*** $\boldsymbol{V1}, \boldsymbol{V2}$

Ребро (вектор, edge). Обозначаем $\boldsymbol{E}$ / $\boldsymbol{e}$.
Направленный отрезок. *Задается парой точек* $\boldsymbol{V1}$ – *начало вектора и* $\boldsymbol{V2}$ *конец вектора – направление от* $\boldsymbol{V1}$ *до* $V2$.

3-D ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Вершина (точка, vertex). Обозначаем $\boldsymbol{V}/v$.
Упорядоченная тройка (3D) чисел

Отрезок прямой. *Задается парой точек* $\boldsymbol{V1}, \boldsymbol{V2}$

Ребро (вектор, edge). Обозначаем $\boldsymbol{E}$ / $\boldsymbol{e}$.
Направленный отрезок. Задается парой точек $\boldsymbol{V1}$ *– начало вектора и* $\boldsymbol{V2}$ *конец вектора – направление от* $\boldsymbol{V1}$ *до* $\boldsymbol{V}2$ *.*

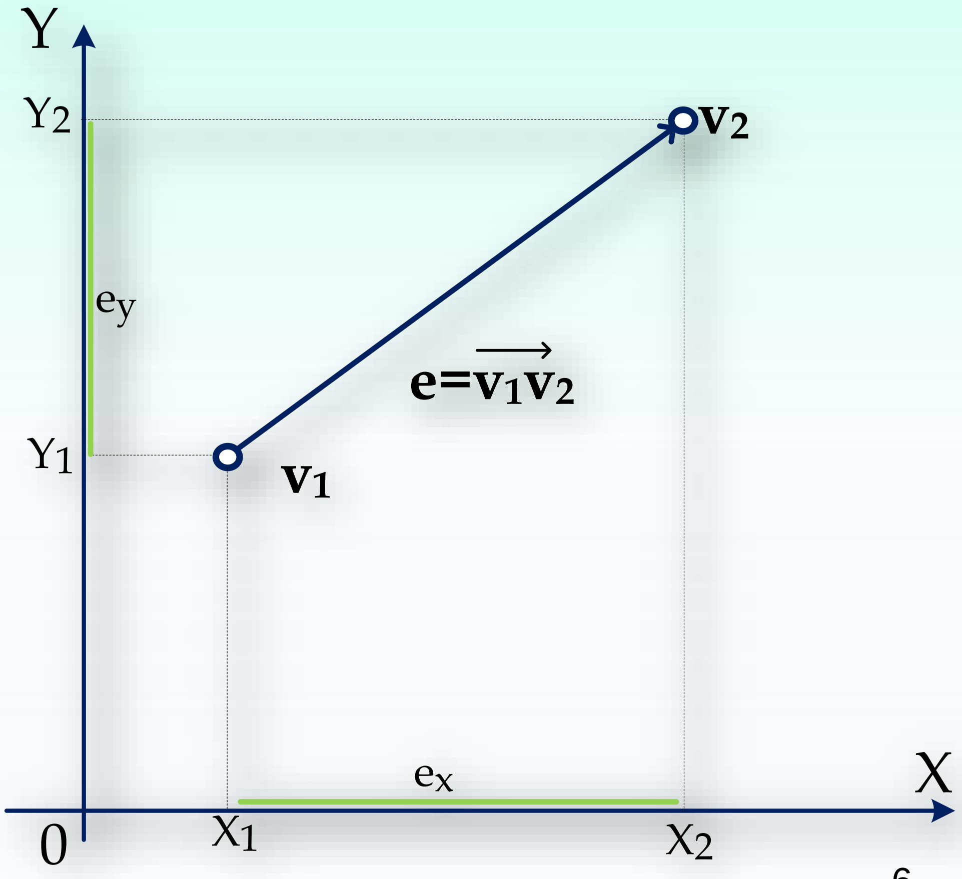
2-D системы координат

Точка (вершина, vertix) 2D

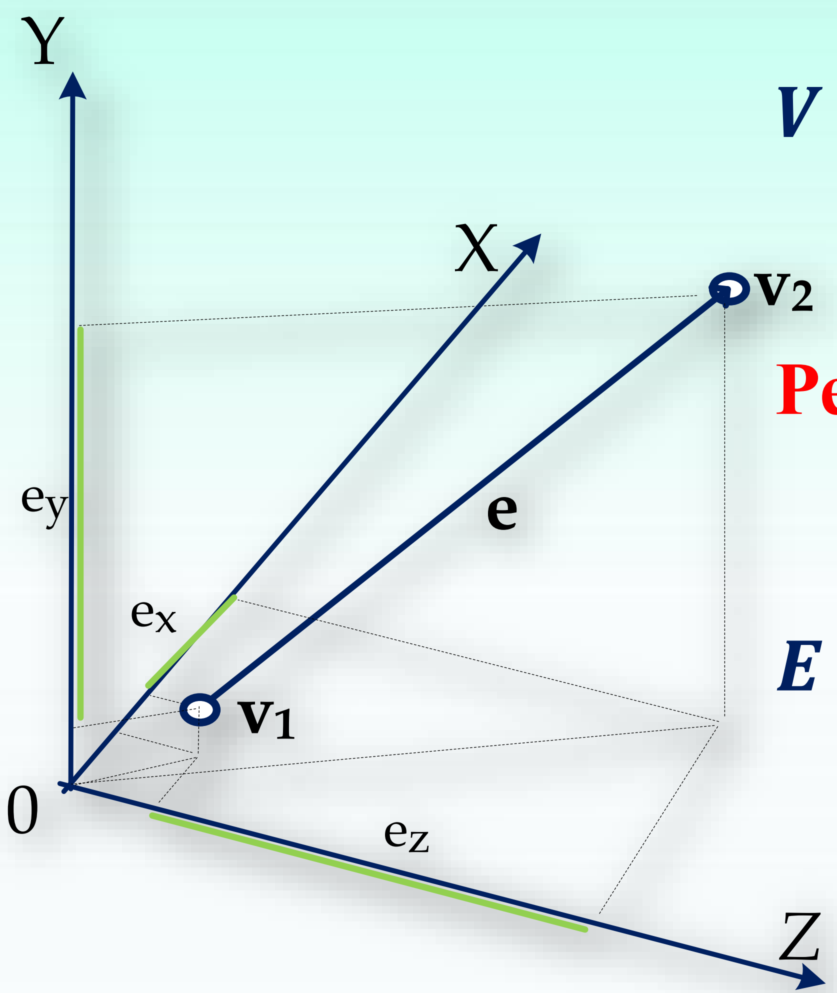
$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}; \boldsymbol{V}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}; \boldsymbol{V}_2 = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

Ребро (вектор, edge) 2D

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \end{bmatrix}$$



3-D система координат



Точка (вершина, vertix) 3D

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}; \boldsymbol{V}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}; \boldsymbol{V}_2 = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

Ребро (вектор, edge) 3D

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{bmatrix}$$

ДЛИНА и НОРМИРОВАНИЕ 2D ВЕКТОРА

Длина / модуль вектора (Эвклидова норма вектора)

$$|\boldsymbol{E}| = \sqrt{{E_x}^2 + {E_y}^2},$$

Единичный (нормированный) вектор – *вектор длина которого равна 1 и коллинеарный заданному*

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_x}{|\boldsymbol{E}|} \\ \dfrac{E_y}{|\boldsymbol{E}|} \end{bmatrix};$$

ДЛИНА и НОРМИРОВАНИЕ 3D ВЕКТОРА

Длина / модуль вектора (Эвклидова норма вектора)

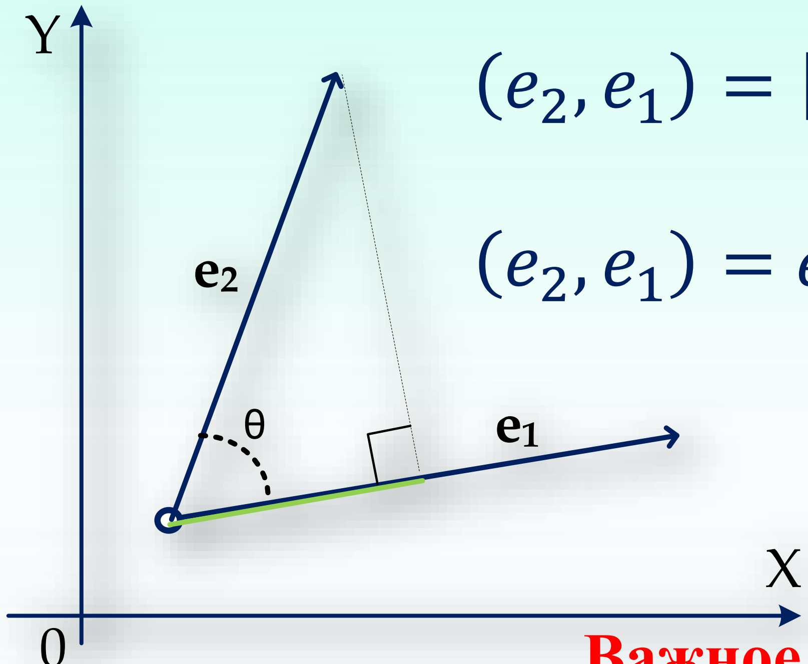
$$|\boldsymbol{E}| = \sqrt{E_x{}^2 + E_y{}^2 + E_z{}^2}$$

Единичный (нормированный) вектор – *вектор длина которого равна 1 и коллинеарный заданному*

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_x}{|\boldsymbol{E}|} \\ \dfrac{E_y}{|\boldsymbol{E}|} \\ \dfrac{E_z}{|\boldsymbol{E}|} \end{bmatrix};$$

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Скалярное (внутреннее) произведение – ЧИСЛО, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними



$$(e_2, e_1) = |e_2| * |e_1| * \cos(\theta)$$

$$(e_2, e_1) = e_{2x} * e_{1x} + e_{2y} * e_{1y}$$

Важное свойство –

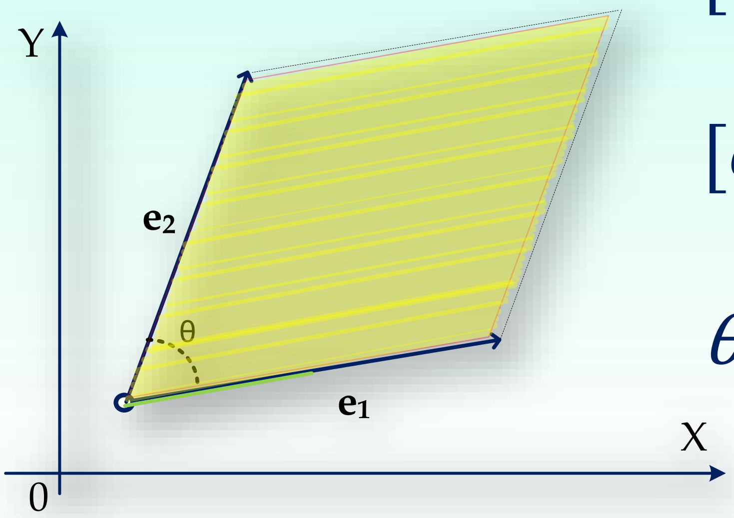
Если $(e_2, e_1) > 0$ - угол θ<90° - острый

Если $(e_2, e_1) = 0$ - угол θ=90° - ⊥

Если $(e_2, e_1) < 0$- угол θ>90° - тупой

«КОСОЕ» ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Псевдоскалярное (косое) произведение – ЧИСЛО, равное площади параллелограмма, образованного векторами



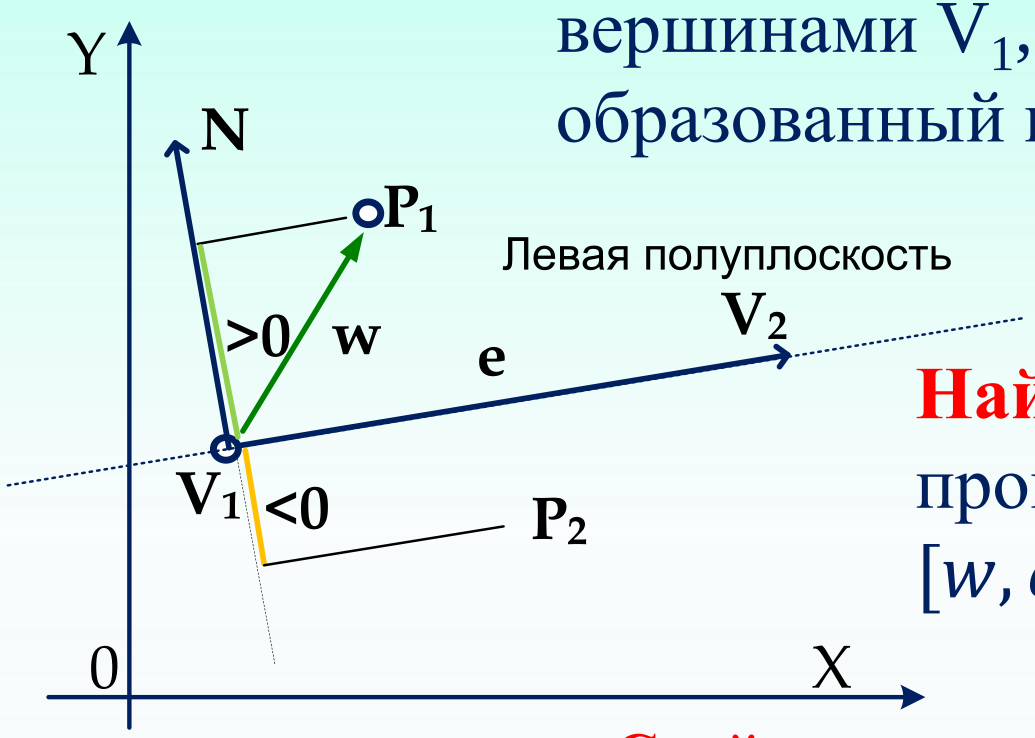
$$[e_2, e_1] = |e_2| * |e_1| * \sin(\theta)$$

$$[e_2, e_1] = e_{2x} * e_{1y} - e_{1x} * e_{2y}$$

θ – *угол вращения от* e_2 *к* e_1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ВЕРШИНЫ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Рассмотрим: вектор e, образованный вершинами V_1, V_2 и вектор w, образованный вершиной V_1 и точкой P.



Найдем: **«косое»** произведение

$$[w, e] = w_x * e_y - e_x * w_y$$

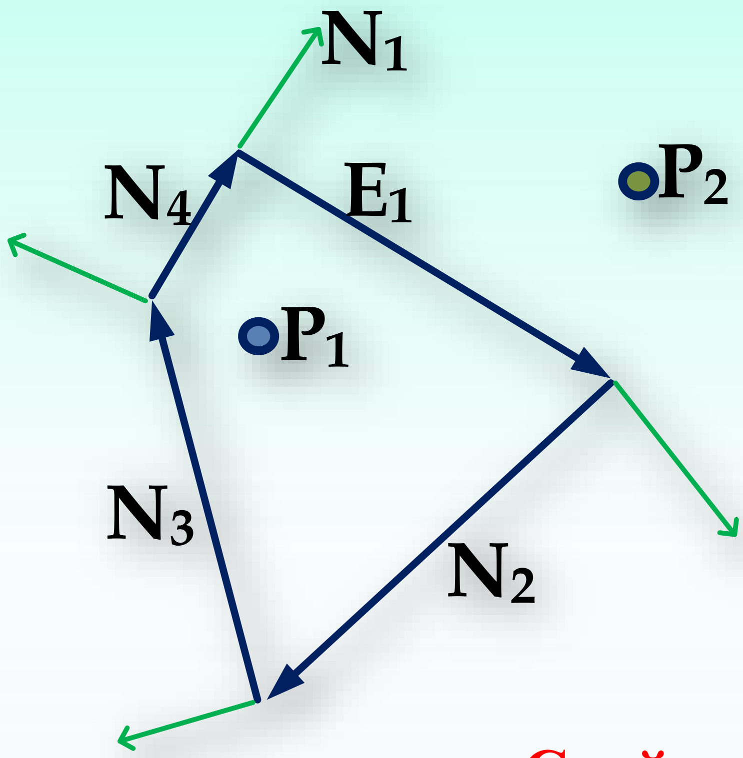
Свойство –

Если $[w, e] > 0$ – левая полуплоскость

Если $[w, e] = 0$ – точка на ребре

Если $[w, e] < 0$ – правая полуплоскость

ГДЕ ЛЕЖИТ ТОЧКА ОТНОСИТЕЛЬНО МНОГОУГОЛЬНИКА ?

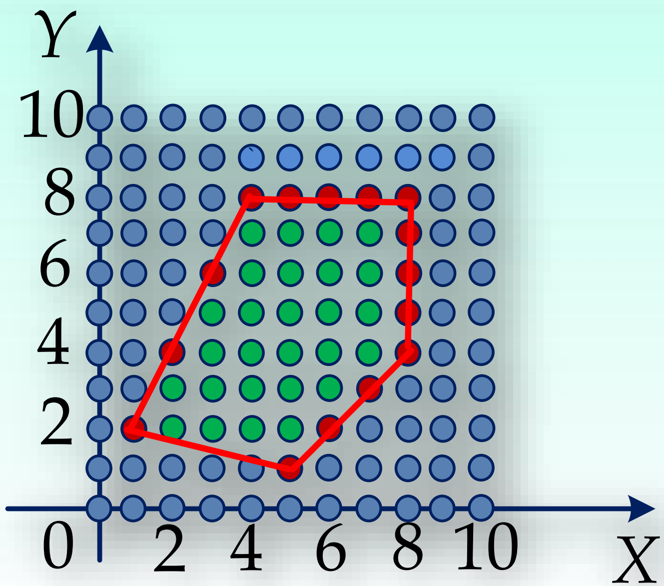


Последовательная проверка всех комбинаций точка – ребро: $[w_i, ei]$

Свойство –

Если ВСЕ $[wi, ei] < 0$ точка внутри выпуклого многоугольника

СКОЛЬКО ТОЧЕК РАСТРА в МНОГУГОЛЬНИКЕ «ФОРМУЛА ПИКА»



Многоугольник с целочисленными координатами вершин Сколько точек с целочисленными координатами лежит внутри?

Формула ПИКА **S=n+m/2-1**

S - площадь многоугольника,

n - количество точек, лежащих строго внутри многоугольника,

m - количество точек лежащих на границе.

МАТРИЦЫ

Преобразования в 2-D и 3-D с помощью МАТРИЦ

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{\mathbf{1},1} & a_{\mathbf{1},\mathbf{2}} \\ a_{\mathbf{2},1} & a_{\mathbf{2},\mathbf{2}} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{\mathbf{1},1} & a_{\mathbf{1},\mathbf{2}} & a_{\mathbf{1},\mathbf{3}} \\ a_{\mathbf{2},1} & a_{\mathbf{2},\mathbf{2}} & a_{\mathbf{2},\mathbf{3}} \\ a_{\mathbf{3},1} & a_{\mathbf{3},\mathbf{2}} & a_{3,\mathbf{3}} \end{bmatrix};$$

Должны Знать:

Умножение матрицы на вектор-столбец

Умножение матрицы на матрицу

Инверсия матриц

Решение СЛАУ

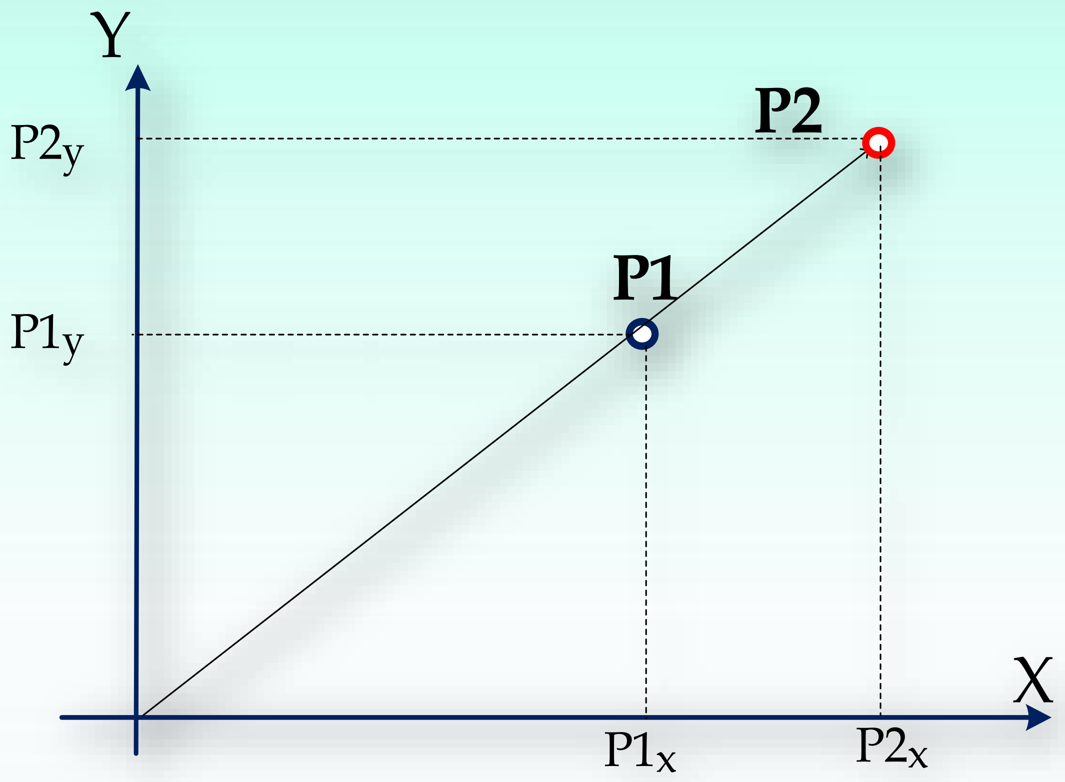
БАЗОВЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

- 2-D, 3-D система координат.
  - Сдвиг. Масштабирование. Поворот.
  - Проецирование
  - Матрица преобразований
- Обобщенные координаты. Преобразования в обобщенных координатах

МАСШТАБИРОВАНИЕ 2-D Scaling

$$\boldsymbol{P_2} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} * \boldsymbol{P_1}$$

$$\boldsymbol{P_2} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} * \boldsymbol{P_1}$$



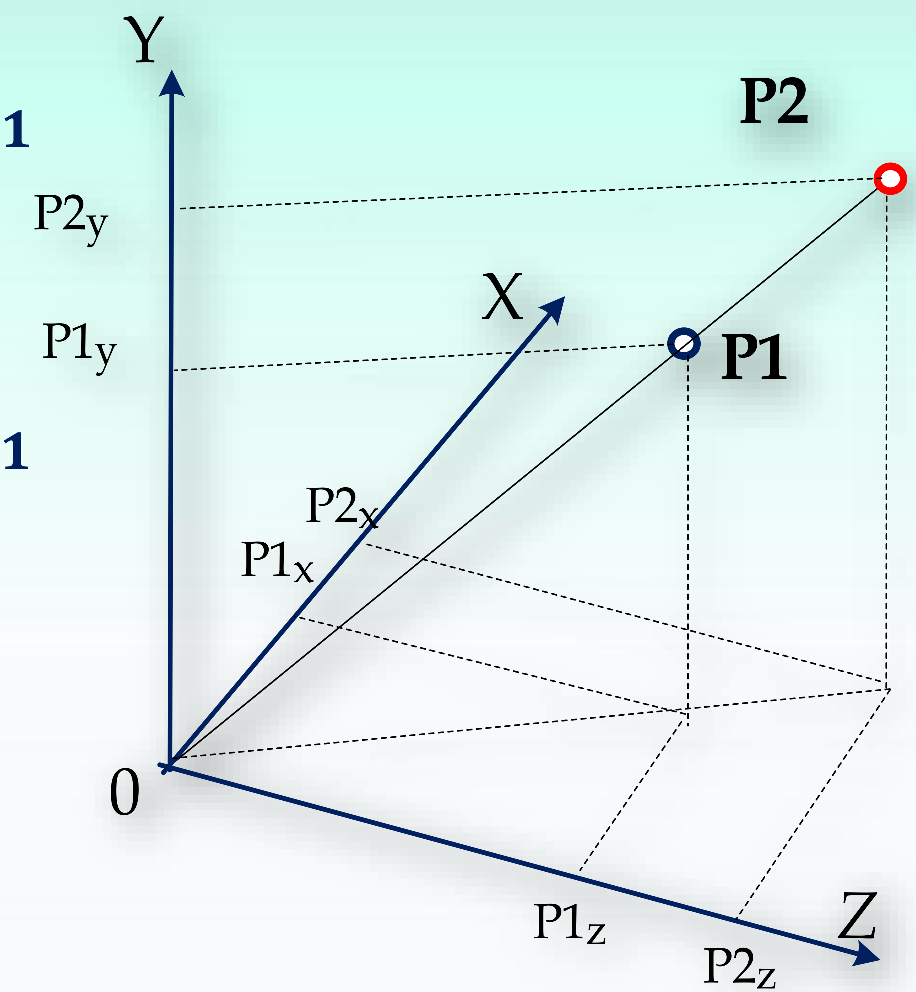
МАСШТАБИРОВАНИЕ 3-D Scaling

$$\boldsymbol{P_2} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} * \boldsymbol{P_1}$$

$$\boldsymbol{P_2} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} * \boldsymbol{P_1}$$

Матрица преобразования

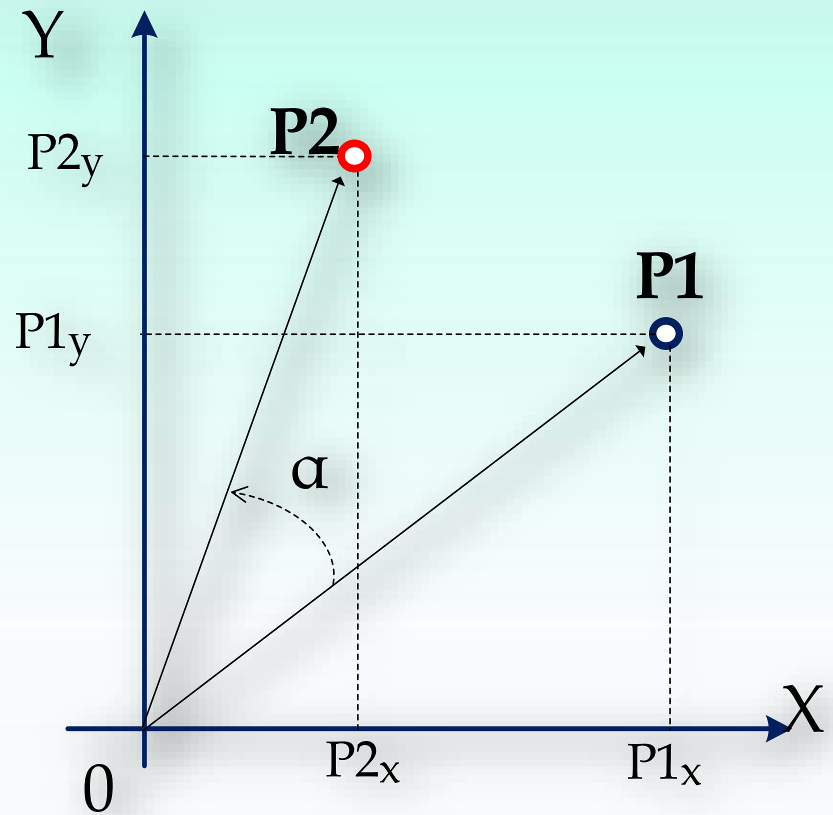
$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$



ПОВОРОТ 2-D Rotation

$$\boldsymbol{P_2} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} * \boldsymbol{P_1}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$



ПОВОРОТ 3-D Rotation

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Последовательный поворот вокруг трех осей.

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\delta) & -\sin(\delta) \\ 0 & \sin(\delta) & \cos(\delta) \end{bmatrix}$$

Порядок ВАЖЕН!

Повороты против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси, вокруг которой поворачиваем

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & 0 & -\sin(\gamma) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_y \mathbf{R}_x \mathbf{R}_z$$

ПОВОРОТ 3-D Rotation

В авиации используется первая система углов Эйлера

- **поворот вокруг оси Y на угол ψ (пси-рыскание);**
- **поворот вокруг оси Z на угол θ (тета-тангаж);**
- **поворот вокруг оси X на угол γ (гамма-крен).**

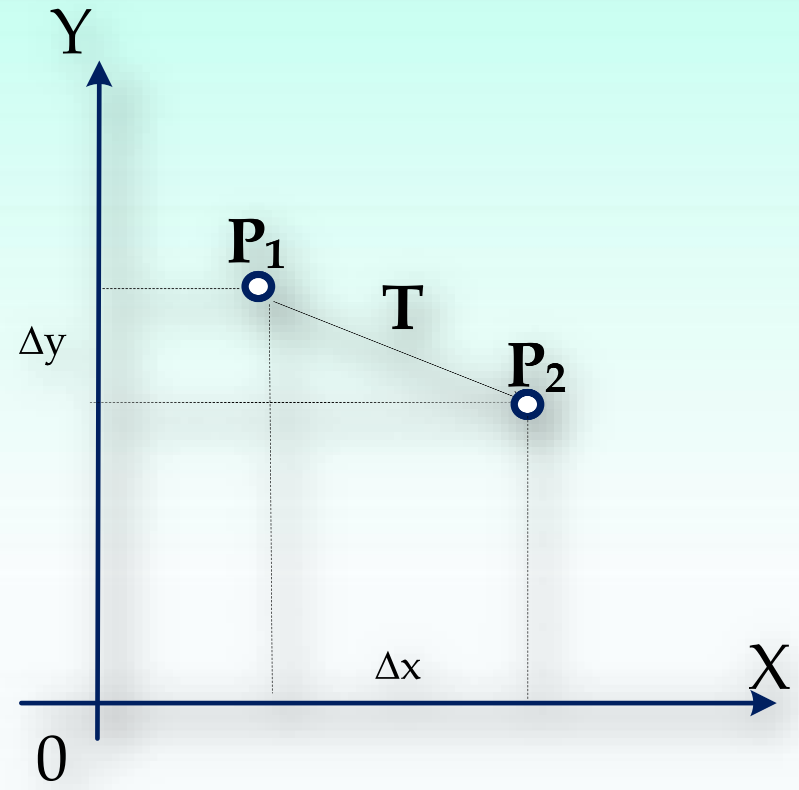
3-D Rotation

СДВИГ 2-D Translation

$$\begin{bmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix}$$

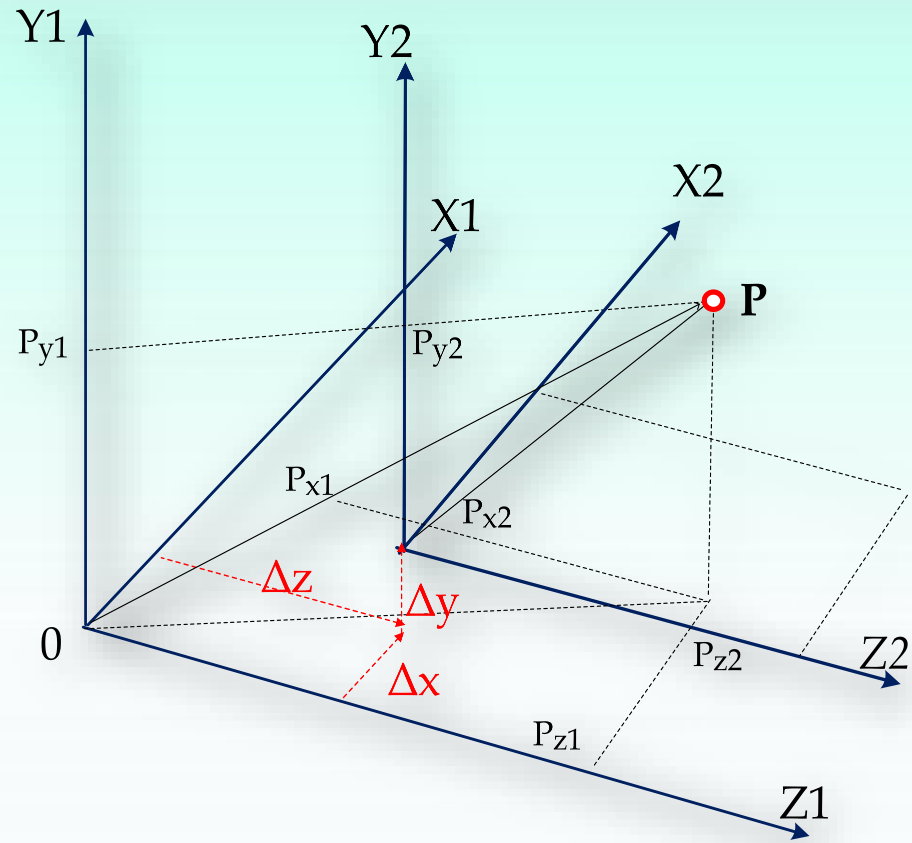
$$\boldsymbol{P_2} = \boldsymbol{P_1} + \mathbf{T}$$



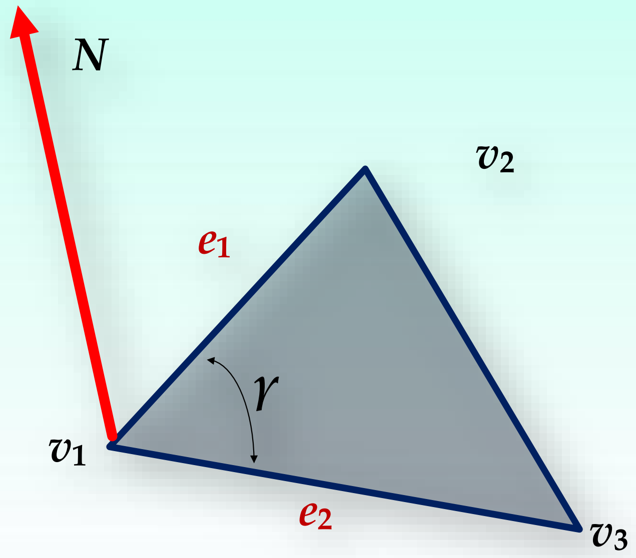
СДВИГ 3-D Translation

$$\begin{bmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \\ P_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{z1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \end{bmatrix}$$



ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ (НОРМАЛЬ к ГРАНИ в 3D)



Нормаль – векторное произведение векторов. Вектора (в данном случае) направленные ребра $e_1=(v_2-v_1)$, $e_2=(v_3-v_1)$

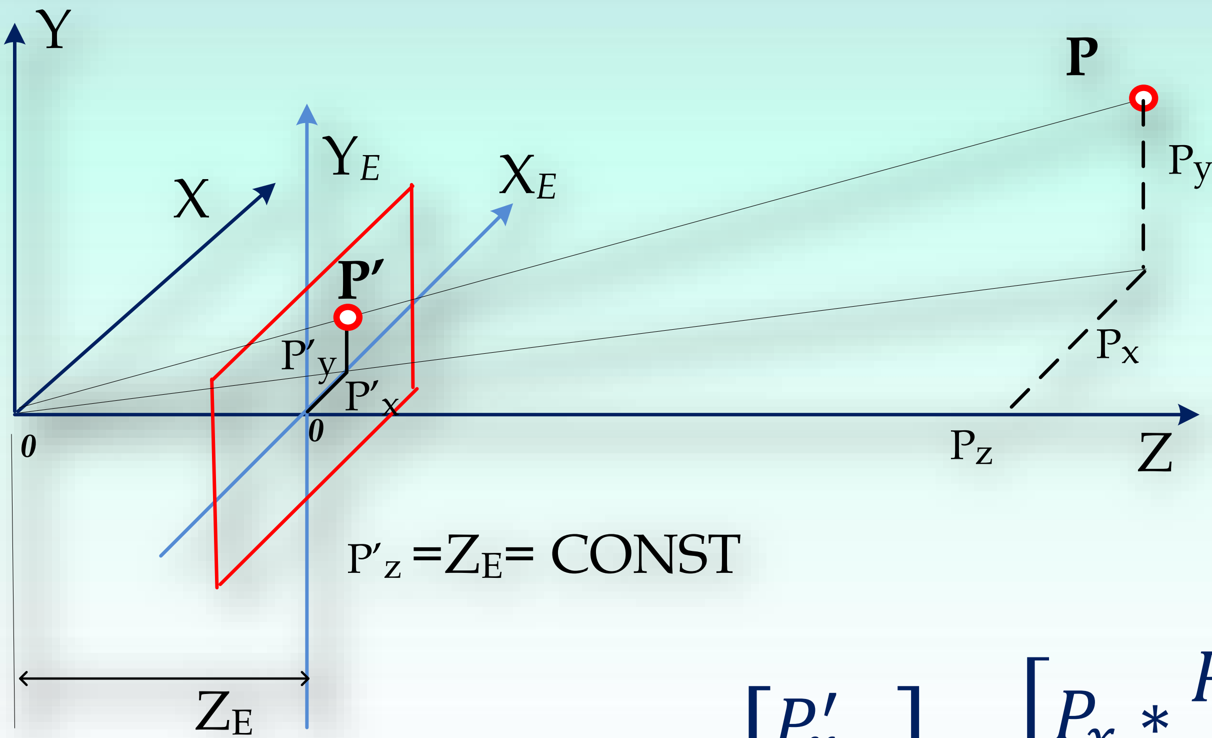
$$N = e_1 \times e_2 = |e_1| * |e_2| * \sin(\gamma)$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМАЛИ

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ V1_x & V1_y & V1_z \\ V2_x & V2_y & V2_z \end{bmatrix}$$

$$N_x = V1_y * V2_z - V2_y * V1_z$$
$$N_y = V2_x * V1_z - V1_x * V2_z$$
$$N_z = V1_x * V2_y - V2_x * V1_y$$

ПРОЕЦИРОВАНИЕ (3-D → 2-D)



$$\begin{bmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x * {P'_z}/{P_z} \\ P_y * {P'_z}/{P_z} \\ P'_z \end{bmatrix}$$

ОБОБЩЕННОЕ 2D ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

$$\mathbf{P_2 = [R * S] * P_1 + T}$$

$$\mathbf{P_2 = M * P_1 + T}$$

ОБОБЩЕННОЕ 3D ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

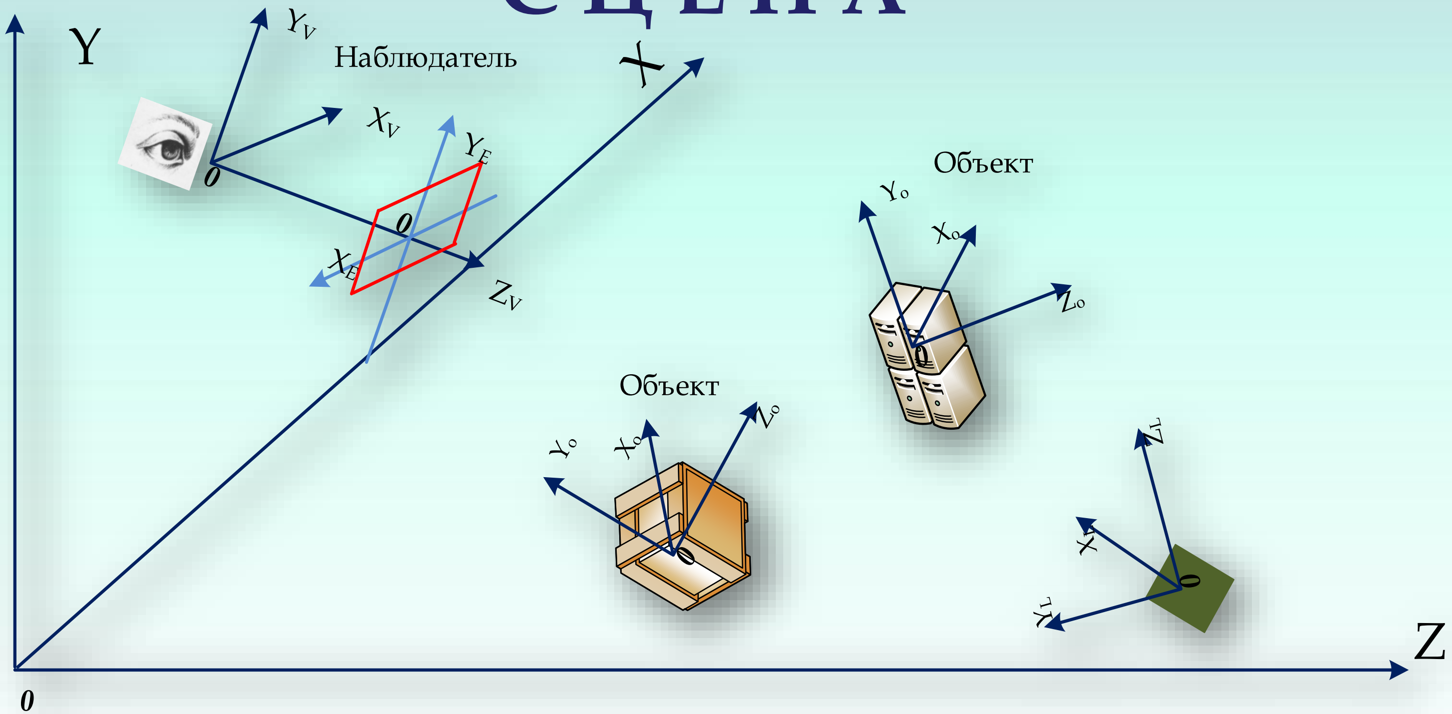
$$\mathbf{P_2 = [R_y R_{\mathit{x}} R_z S] * P_1 + T}$$

$$\mathbf{P_2 = M * P_1 + T}$$

Обобщенные (гомогенные) координаты

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathrm{P}_{\boldsymbol{x}} \\ \mathrm{P}_{\boldsymbol{y}} \\ \mathrm{P}_{\boldsymbol{z}} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} m_{\mathbf{1,1}} & m_{\mathbf{1,2}} & m_{\mathbf{1,3}} & \Delta_{\boldsymbol{x}} \\ m_{\mathbf{2,1}} & m_{\mathbf{2,2}} & m_{\mathbf{2,3}} & \Delta_{\boldsymbol{y}} \\ m_{\mathbf{3,1}} & m_{\mathbf{3,2}} & m_{\mathbf{3,3}} & \Delta_{\boldsymbol{z}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

С Ц Е Н А



МАТРИЦА СКО->МСК $M_{СКО\text{->}МСК}$

МАТРИЦА МСК->СКН $M_{МСК\text{->}СКН}$

МАТРИЦА СКО->СКН

$$M_{СКО\text{->}СКН} = M_{МСК\text{->}СКН} * M_{СКО\text{->}МСК}$$

ПРИМЕР

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЕ (ОПРОС, 2D):

1. Задана точка $\mathbf{P_1}$ в 2D.
2. Задана операция сдвига двумерным вектором **T**.
3. Задана операция поворота вектора на угол $\boldsymbol{\alpha}$.
4. Найти матрицу обобщенного преобразования **M**.
5. Найти координаты преобразованной точки $\mathbf{P_2}$

Вопросы для экзамена

Тема: Геометрические преобразования

1. 2-D преобразование масштабирования
2. 2-D преобразование поворота
3. 2-D преобразование сдвига
4. 3-D преобразование масштабирования
5. 3-D преобразование поворота.
6. 3-D преобразование сдвига
7. Обобщенные координаты. Матрица преобразования в обобщенных координатах

Литература:

Компьютерная графика. Курс лекций, р. 29-45

Маценко В.Г. Компьютерная графика, р. 247-257

END #2