

КОМП'ЮТЕРНИЙ СИНТЕЗ та ОБРОБКА ЗОБРАЖЕНЬ

2020 / 2021 навчальний рік

СИГНАЛИ

1. Інтеграл Фур'є
2. Дискретизація сигналів
3. Відновлення сигналів. Теорема відліків
4. 2D сигнали. Дискретизація та теорема відліків для 2D зображень

https://github.com/eabshkvprof/2021_Image_Processing_IPZm_20

Перетворення Фур'є

!!! Неперіодичний сигнал

= сигнал з безкінечним періодом.

Ряд Фур'є перетворюється в інтеграл Фур'є

Пряме перетворення $I \Rightarrow F$

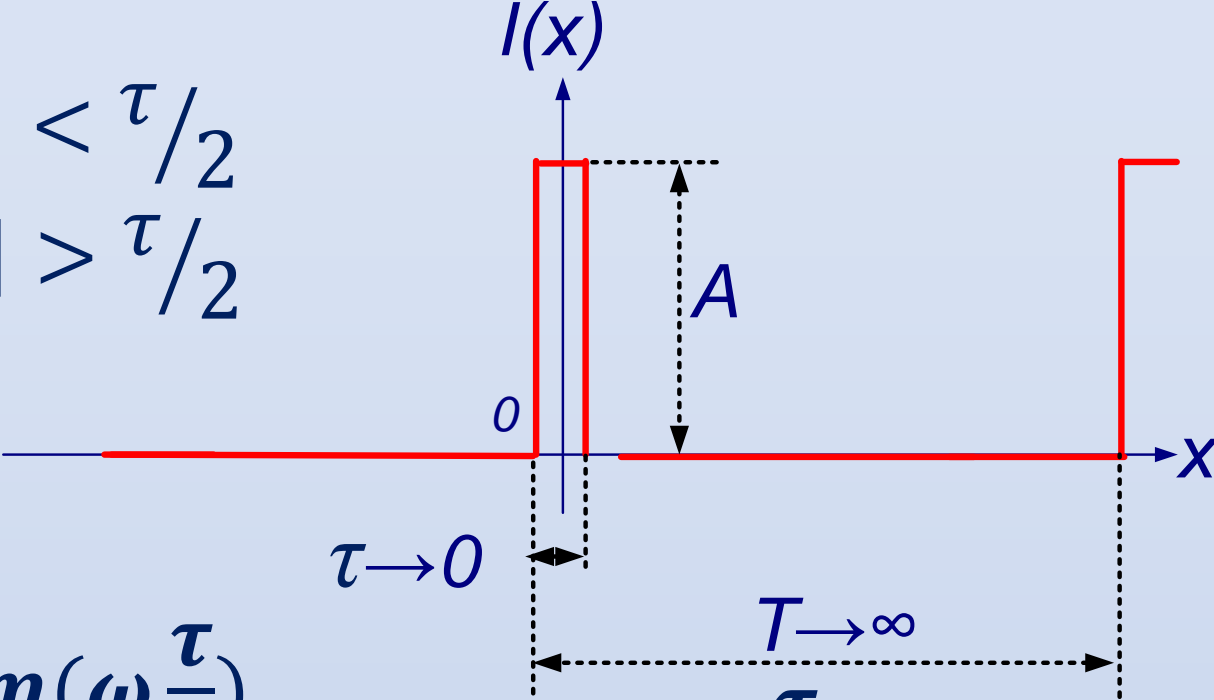
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} I(x) e^{-j\omega x} dx$$

Зворотне перетворення $F \Rightarrow I$

$$I(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega x} d\omega$$

$F(\omega)$ - комплексна функція – спектр сигналу **$I(x)$**

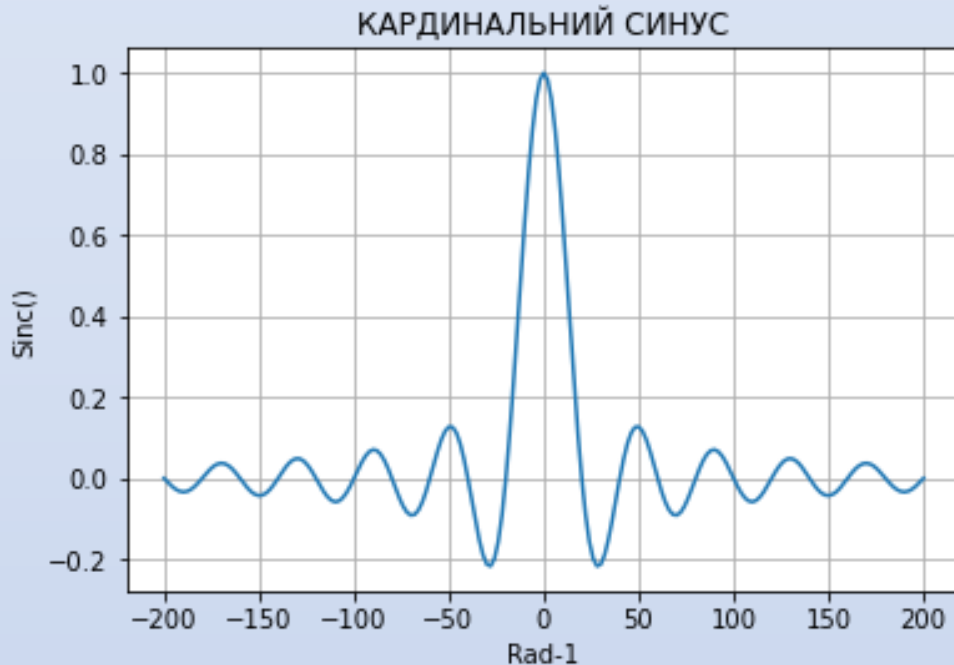
Інтеграл Фур'є. Один прямокутний імпульс

$$I(x) = \begin{cases} 0: |x| < \tau/2 \\ A: |x| > \tau/2 \end{cases}$$

$$F(\omega) = A\tau \frac{\sin(\omega \frac{\tau}{2})}{\omega \frac{\tau}{2}} = A\tau \text{ **sinc** }(\omega \frac{\tau}{2})$$

$\text{sinc}(x) = \sin(x) / x$ - кардинальний синус

if $(x=0) \rightarrow \text{sinc}(x) = 1$

Один прямокутний імпульс. Спектральна щільність



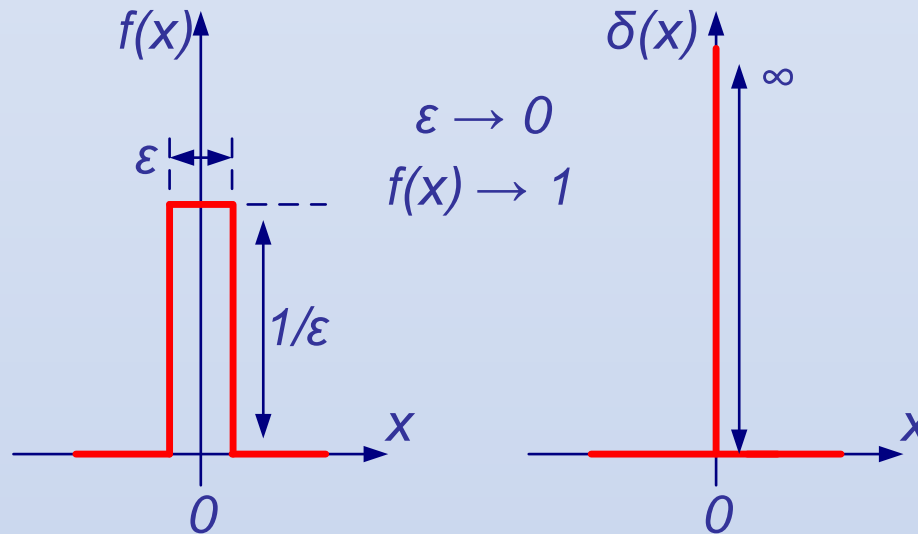
Має затухаючий
коливальний характер.
Нулі $F(\omega)$, тобто
частоти, відповідні
 $F(\omega)=0$, рівні
 $\omega = k \cdot 2\pi/\tau$,
де $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Швидкість убутання бічних пелюсток $F(\omega)$
пропорційна $1/\omega$.

Дельта - функція

Дельта- функція Дірака

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty: x = 0 \\ 0: x \neq 0 \end{cases}$$



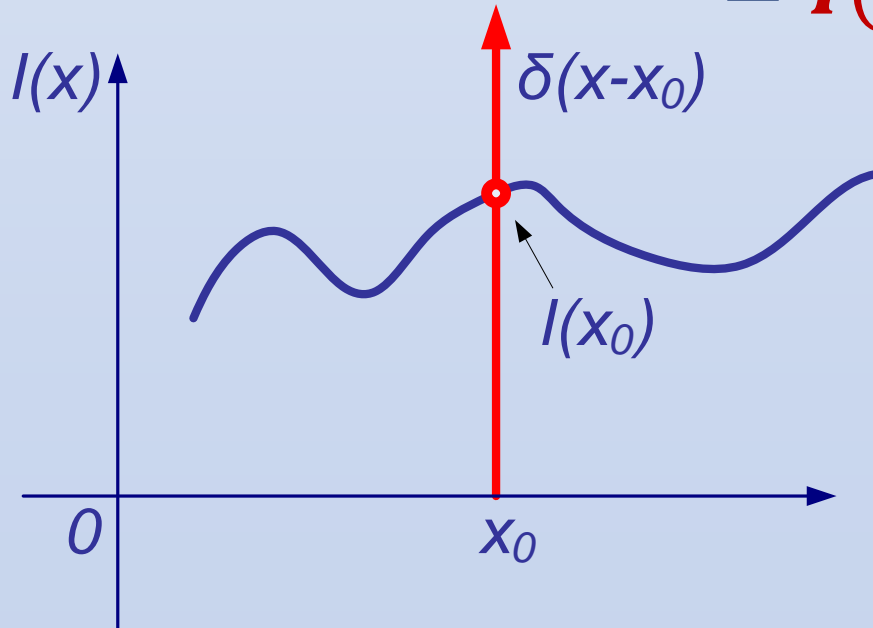
!! Площа дельта-функції = 1

Дельта - функція

Інтеграл від довільної функції $I(x)$ помноженої на дельта-функцію в точці $x_0 \in$

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(x) \delta(x - x_0) dx = \int_{-\infty}^{\infty} I(x_0) \delta(x - x_0) dx$$

$$= I(x_0)$$

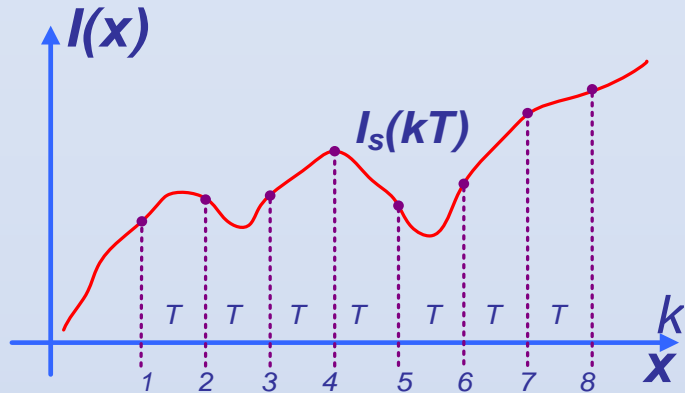


Фільтруюча властивість
Дельта-функції

Дискретизація –
множення сигналу на
дельта-функцію

Спектр дискретизованого сигналу

Сигнал $I(x) \Rightarrow I_s(x)$!!! дискретизація



$$I_s(kT) = I(x) \delta(x - kT)$$

T - період дискретизації,

$f_s = 1/T$ - частота дискретизації (Гц)

$\omega_s = 2\pi/T$ - кругова частота дискретизації (рад/с)

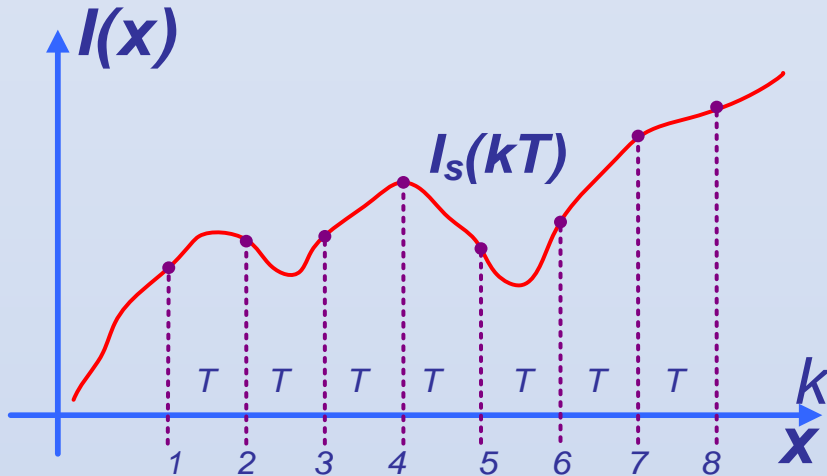
$\hat{f} : (-1 \dots 1)$ - нормована частота дискретизації
(абсолютна частота віднесена до частоти дискретизації, π рад/відлік)

$\hat{\omega} : (-\pi \dots \pi)$ - нормована кругова частота дискретизації – (рад/відлік)

Спектр дискретизованого сигналу

Сигнал $I_s(x) \Rightarrow$ його спектр $F(\omega)$

Дискретизований сигнал $I_s(x) \Rightarrow ??$ спектр



$$S(\hat{\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(F\left(\frac{\hat{\omega}}{T} - n\omega_s\right) \right)$$

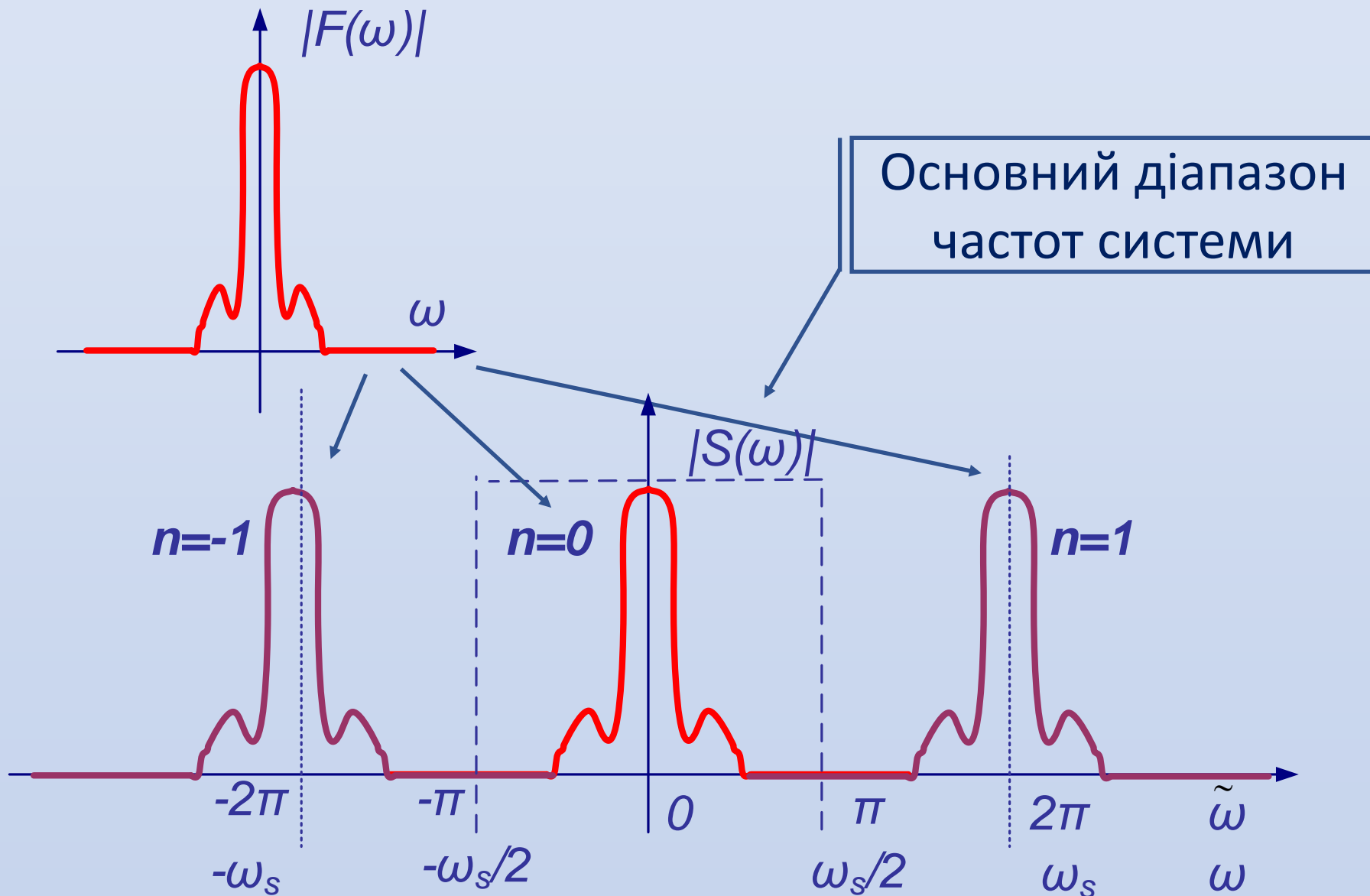
Сума спектрів!

Спектр дискретизованого сигналу

$$S(\hat{\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(F\left(\frac{\hat{\omega}}{T} - n\omega_s\right) \right)$$

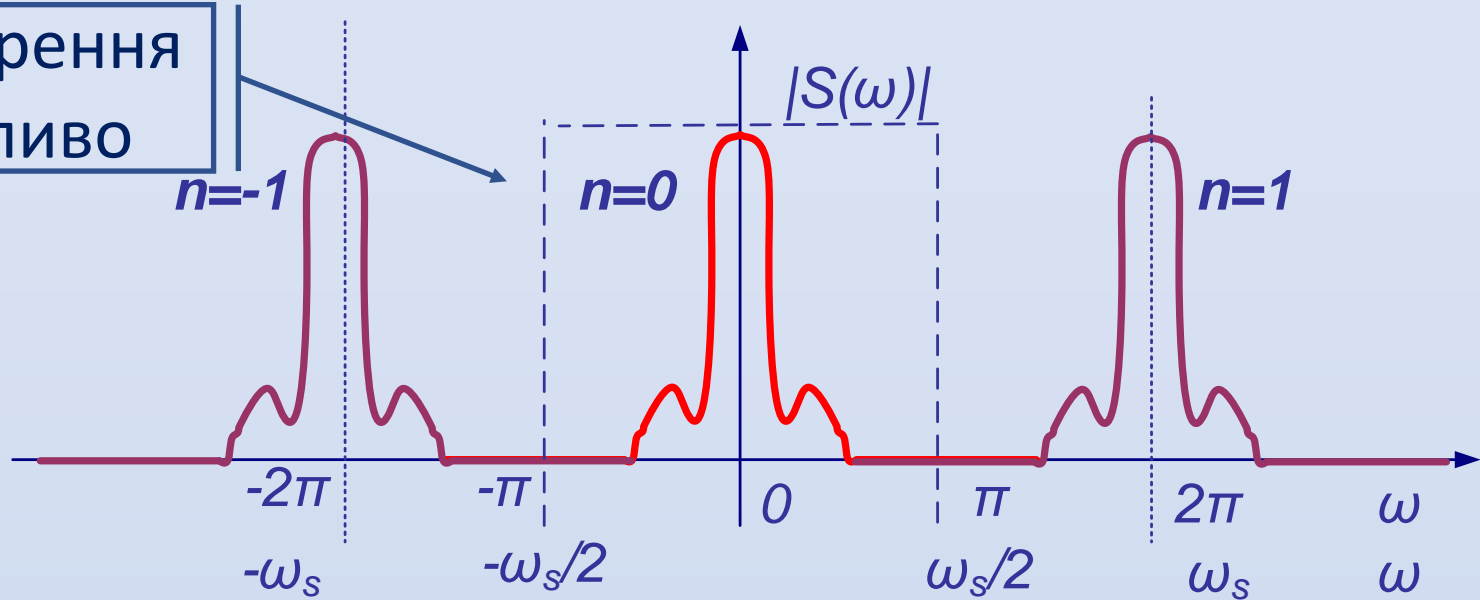
Спектр дискретизованого сигналу $I_s(x)$, отриманого шляхом дискретизації безперервного сигналу $I_s(x)$, дорівнює **нескінченної сумі** по n **зсунутих** копій спектрів вхідного безперервного сигналу $F(\omega)$. Зсув = номер n копії помножений на кругову частоту дискретизації $\omega_s = 2\pi/T$. Тобто $S(\hat{\omega})$ - періодична функція, що повторюється з періодом 2π радіан на відлік або в абсолютних одиницях рівній частоті дискретизації f_s .

Спектр дискретизованого сигналу

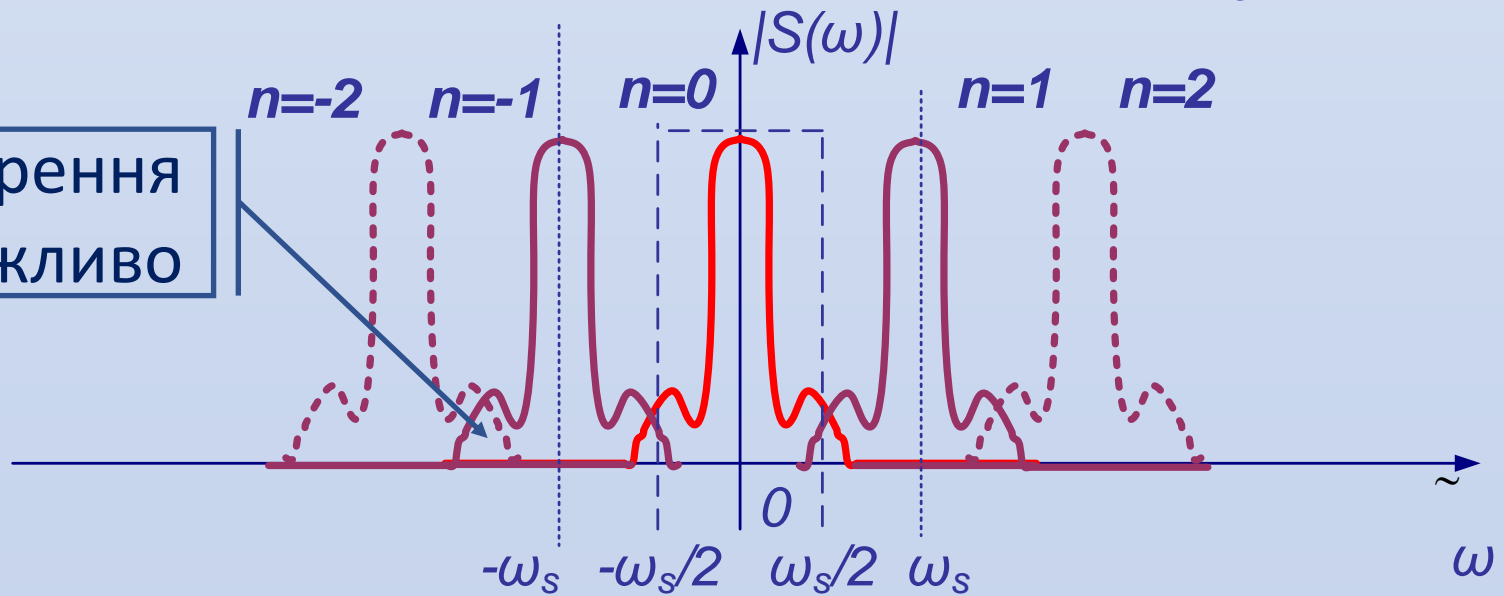


До вибору шагу дискретизації

Відтворення
МОЖЛИВО



Відтворення
НЕ можливо



Теорема відліків Віттакера — Найквіста — Котельникова — Шеннона

Якщо безперервний сигнал $x(t)$ має спектр, обмежений частотою f_{max} , то він може бути однозначно і без витрат відтворений за своїми дискретними відліками, узятими з частотою $f_{samp} > 2 * f_{max}$ ($\omega_s > 2 \omega_{max}$), або за відліками, узятими з періодом $T_{sampl} < 1 / (2 * f_{max})$.

f_{max} - частота Найквіста

Тобто, для того, щоб відтворити сигнал за його відліками без втрат, необхідно, щоб частота дискретизації була хоча б у два рази більша за f_{max} первинного безперервного сигналу.

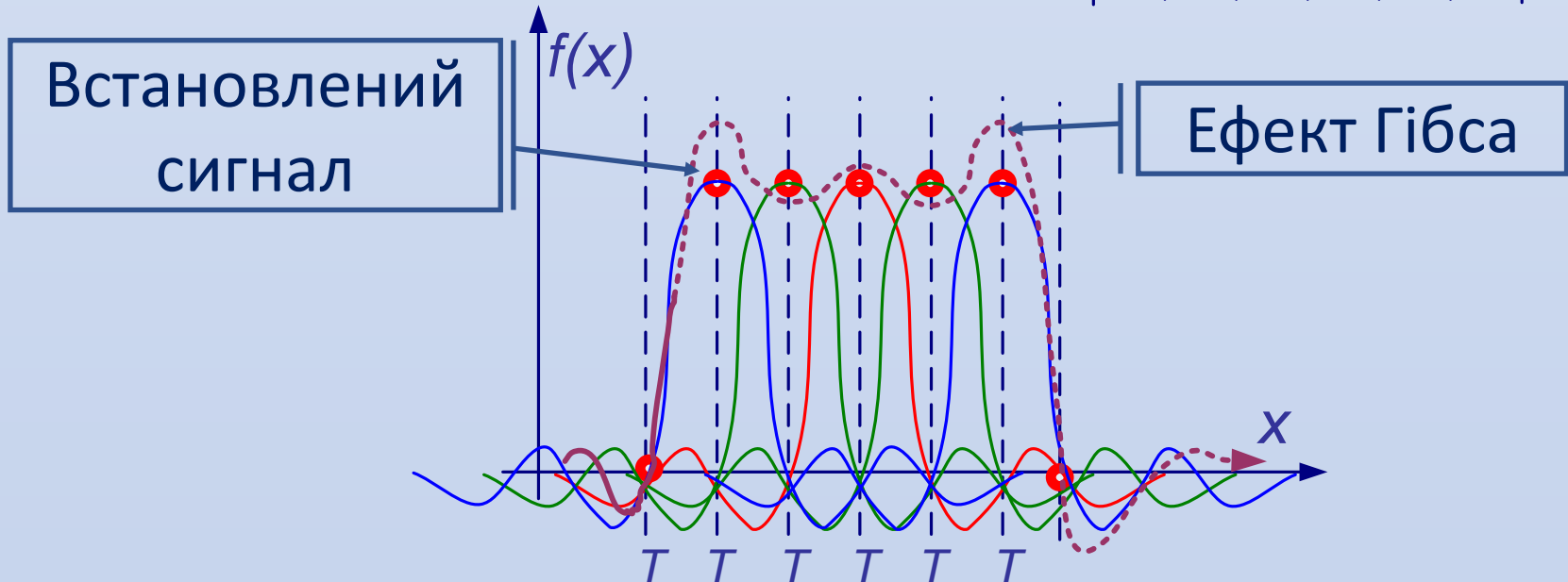
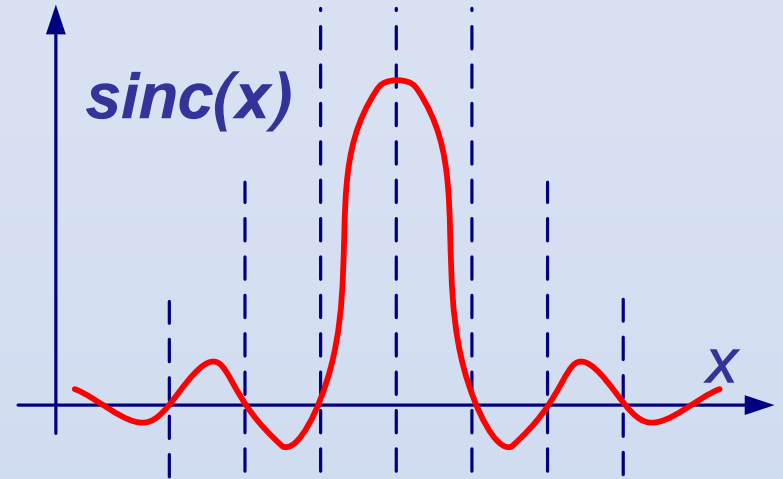
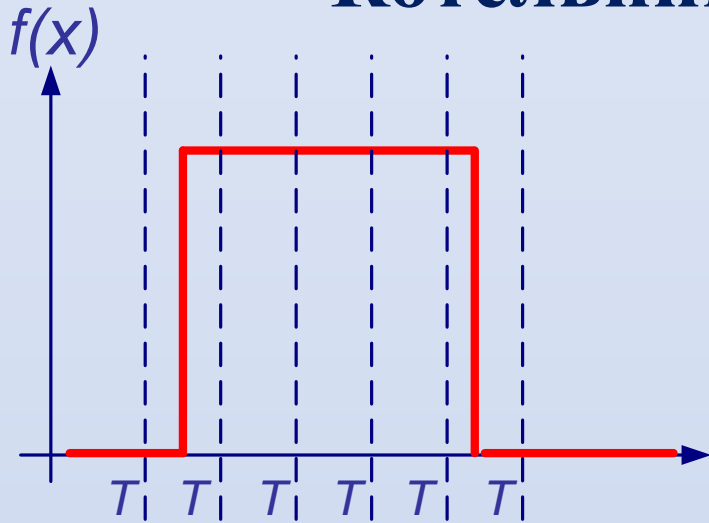
Теорема відліків Віттакера — Найквіста — Котельникова — Шеннона

Відтворення (встановлення) сигналу

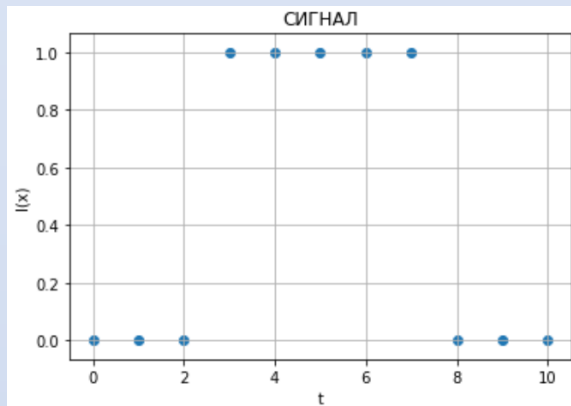
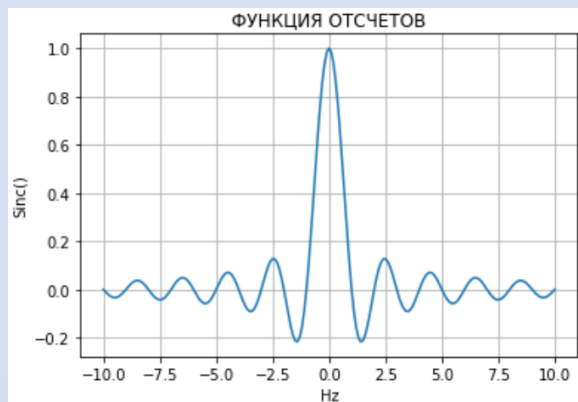
$$I(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I(t_k) \frac{\sin(\frac{\pi}{T_s}(t - kT_s))}{\frac{\pi}{T_s}(t - kT_s)}$$

$$I(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I(t_k) \operatorname{sinc}(\frac{\pi}{T_s}(t - kT_s))$$

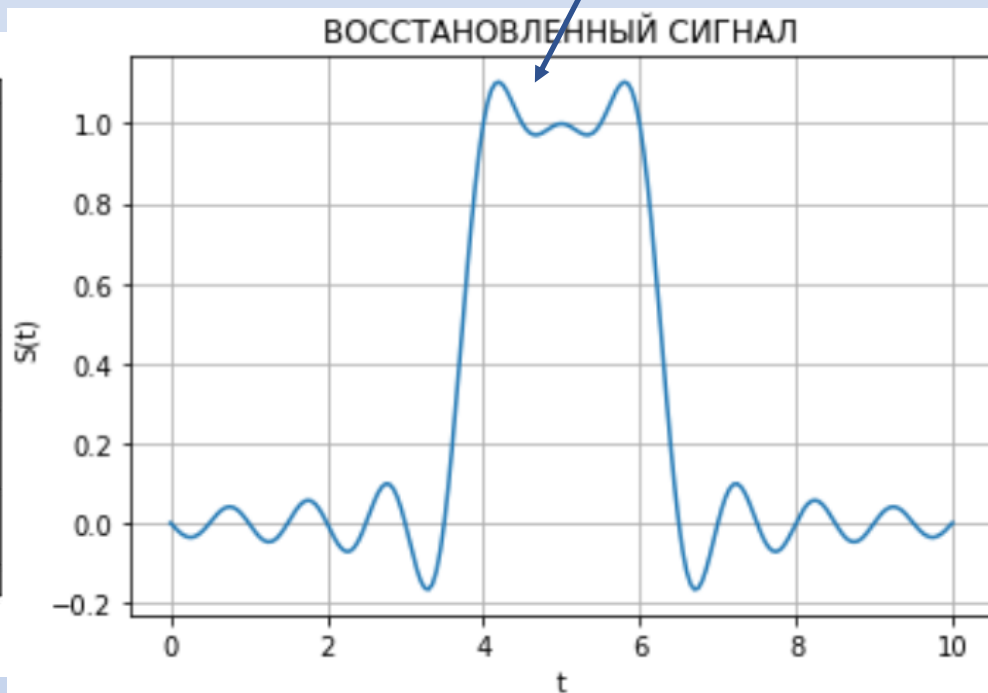
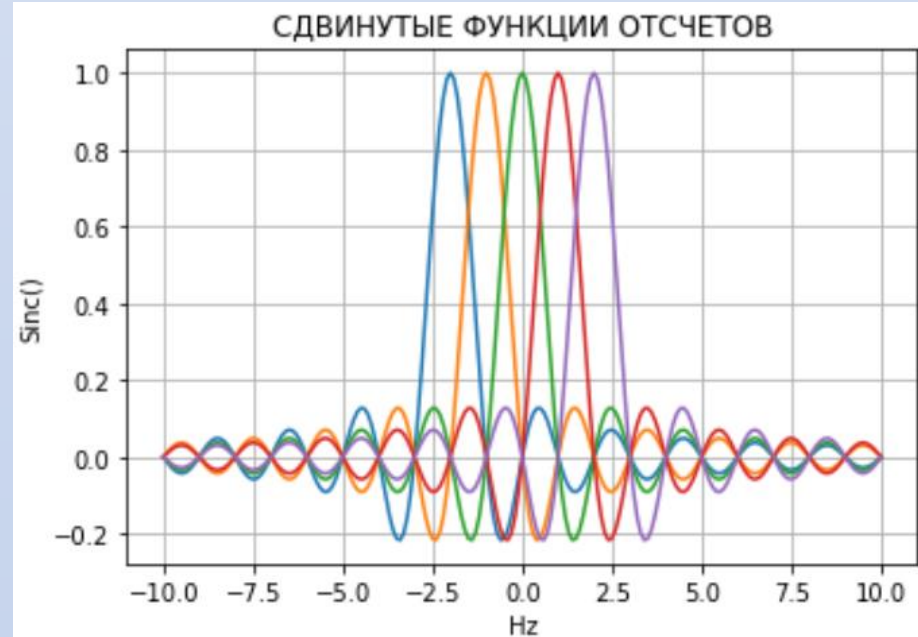
Теорема відліків Віттакера — Найквіста — Котельникова — Шеннона



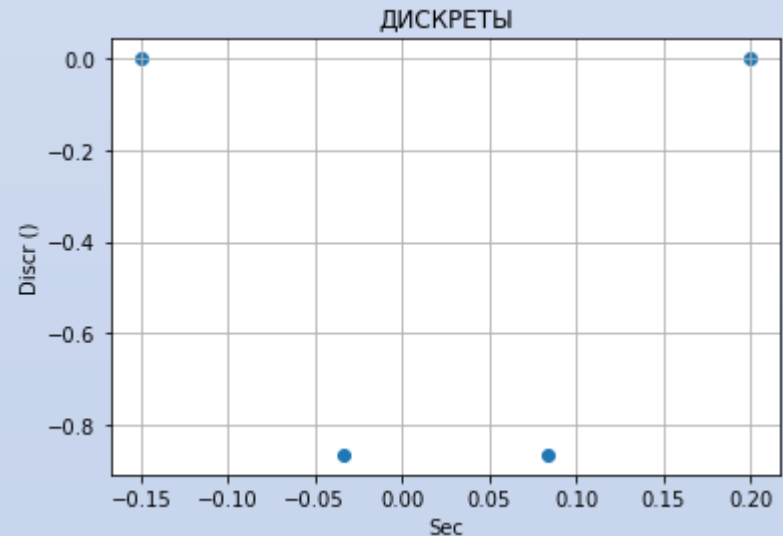
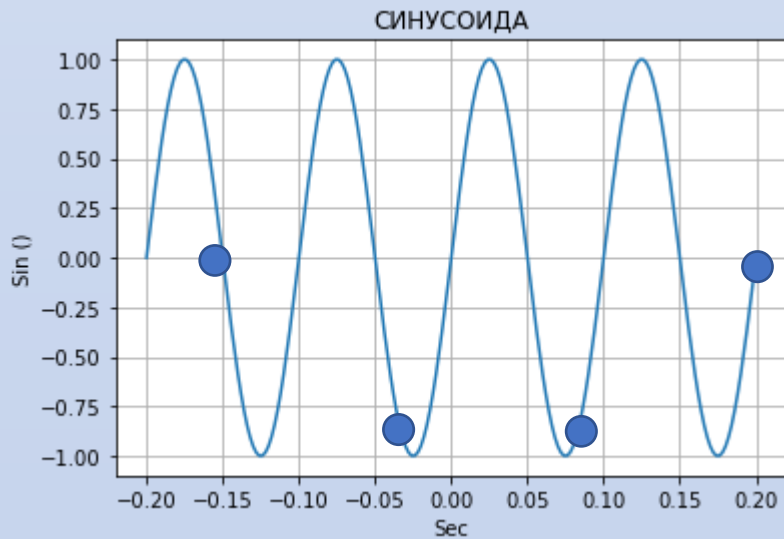
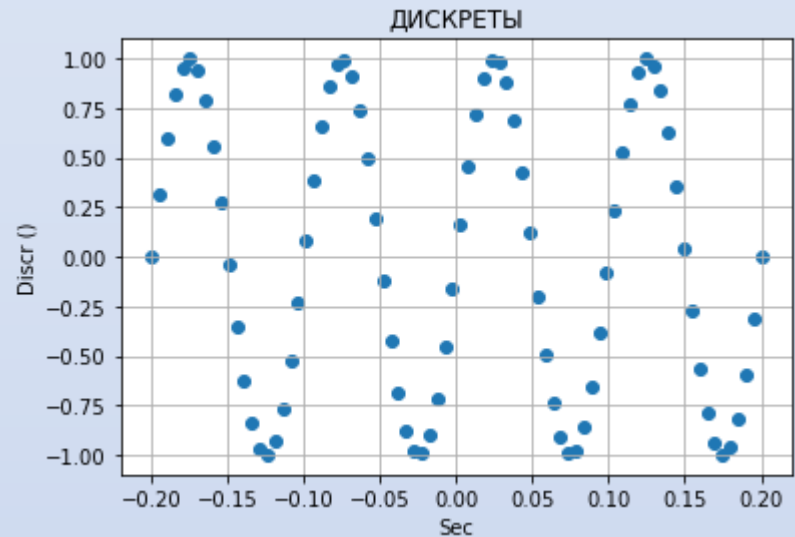
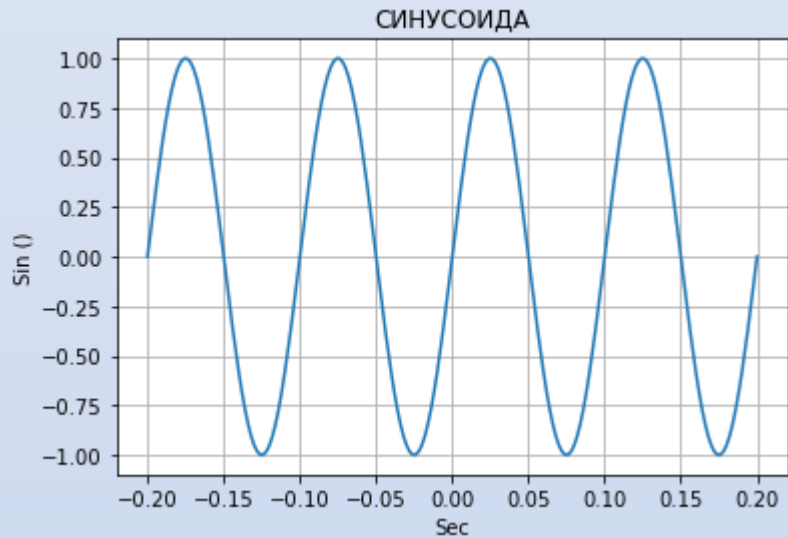
Теорема відліків Віттакера — Найквіста — Котельникова — Шеннона



Эффект
Гибса



Теорема відліків Віттакера — Найквіста — Котельникова — Шеннона



Рекомендована ЛІТЕРАТУРА

- **Вовк С.М., Гнатушенко В.В., Бондаренко М.В.** Методи обробки зображень та комп'ютерний зір: навчальний посібник. - Д.: Ліра, 2016 — 148 с.
- **Красильников Н.Н.** Цифровая обработка 2D- и 3D-изображений: учеб.пособие.- СПб.: БХВ-Петербург, 2011.- 608 с.: ил.
- **Гонсалес Р.С., Вудс Р.Э.** Цифровая обработка изображений. - М. : Техносфера, 2005. -1070 с.
- **Визильтер Ю.В., Желтов С.Ю. и др.** Обработка и анализ изображений в задачах машинного зрения.-М.: Физматкнига, 2010.-672 с.

Рекомендована ЛІТЕРАТУРА

- **Ватолин Д., Ратушняк А., Смирнов М., Юкин В.** Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео. - М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2002. - 384 с.
- **Творошенко І.С.** Конспект лекцій з дисципліни «Цифрова обробка зображень» / І.С.Творошенко : І. С. Творошенко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 75 с.
- Методы компьютерной обработки изображений: Учебное пособие для ВУЗов/ Под ред.: **Сойфер В.А..** - 2-е изд., испр. - М.: Физматлит, 2003. - 780 с.
- **Фисенко В.Т., Фисенко Т.Ю.** Компьютерная обработка и распознавание изображений: учеб. пособие. - СПб: СПбГУ ИТМО, 2008. – 192 с.

Додаткова ЛІТЕРАТУРА

- **Грузман И.С., Киричук В.С.** Цифровая обработка изображений в информационных системах. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 2002. — 352 с.: ил.
- **Solomon C., Breckon T.** Fundamentals of Digital Image Processing. — Willey-Blackwell, 2011 - 344 p.
- **Павлидис Т.** Алгоритмы машинной графики и обработки изображений: Пер. с англ. - М.: Радио и связь, 1986. — 400 с.
- **Яншин В. В., Калинин Г. А.** Обработка изображений на языке Си для IBM PC: Алгоритмы и программы. — М.: Мир, 1994. — 240 с.

Інформаційні ресурси

- Компьютерная обработка изображений. Конспект лекций. http://aco.ifmo.ru/el_books/image_processing/
- Цифрова обробка зображень [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт / НТУУ «КПІ» ; уклад.: В. С. Лазебний, П. В. Попович. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,41 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2016. – 73 с. – <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/21035>
- <https://www.youtube.com/watch?v=CZ99Q0DQq3Y>
- <https://www.youtube.com/watch?v=FKTLW8GAdu4>

The END

Modulo 1. Lec 2