

# **КОМП'ЮТЕРНИЙ СИНТЕЗ та ОБРОБКА ЗОБРАЖЕНЬ**

**Digital Image Processing - DIP**

**2021 / 2022 навчальний рік**

# СИГНАЛИ

1. Інтеграл Фур'є
2. Дискретизація сигналів
3. Теорема відліків. Відновлення сигналів.

[https://github.com/eabshkvprof/2022\\_Image\\_Processing\\_IPZm\\_21](https://github.com/eabshkvprof/2022_Image_Processing_IPZm_21)

# Перетворення Фур'є

!!! Неперіодичний сигнал

= сигнал з безкінечним періодом.

Ряд Фур'є перетворюється в інтеграл Фур'є

*Пряме перетворення*  $I \Rightarrow F$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} I(x) e^{-j\omega x} dx$$

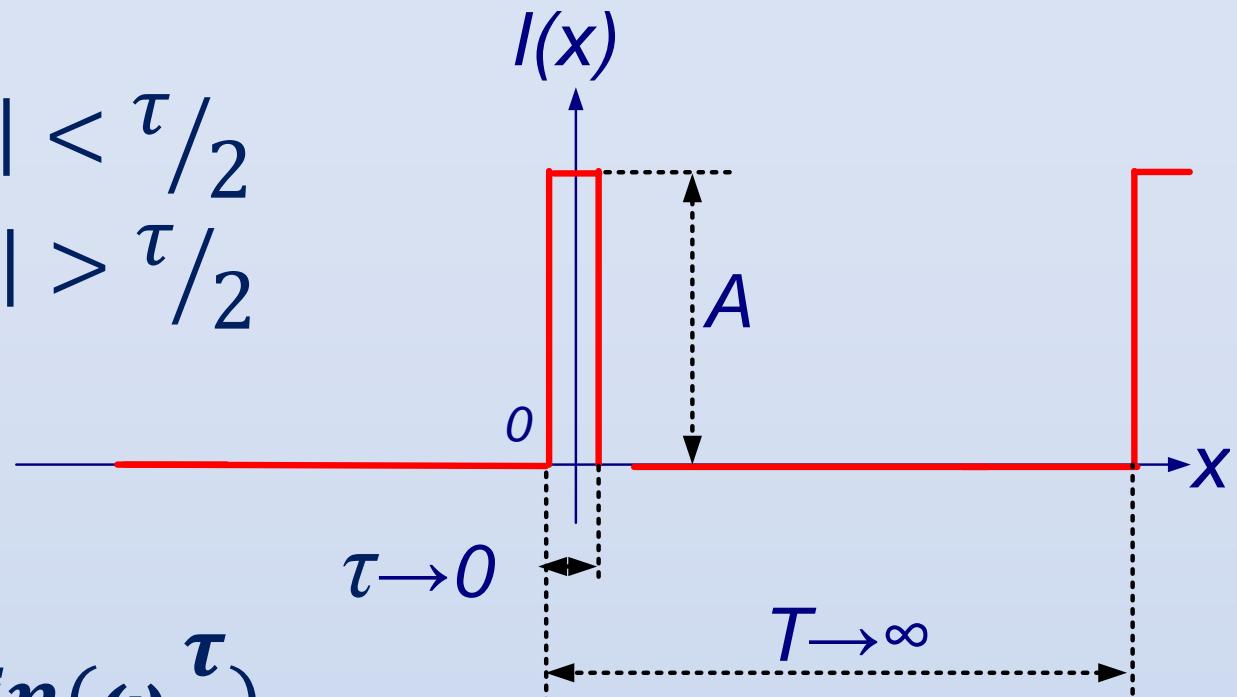
*Зворотне перетворення*  $F \Rightarrow I$

$$I(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega x} d\omega$$

$F(\omega)$  - комплексна функція – спектр сигналу  $I(x)$

# Інтеграл Фур'є. Один прямокутний імпульс

$$I(x) = \begin{cases} 0: |x| < \tau/2 \\ A: |x| > \tau/2 \end{cases}$$

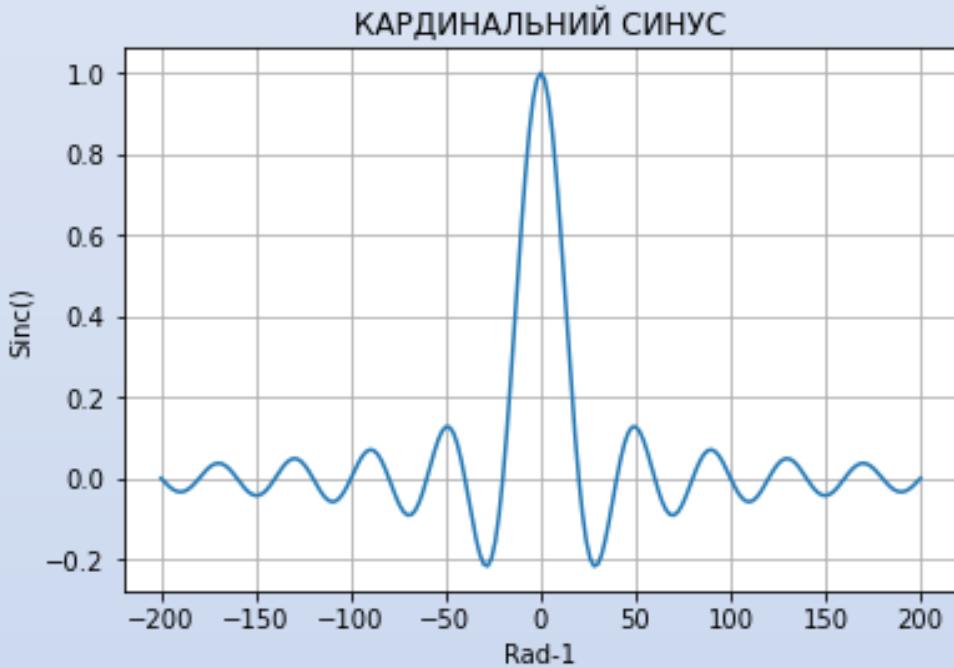


$$F(\omega) = A\tau \frac{\sin(\omega \frac{\tau}{2})}{\omega \frac{\tau}{2}} = A\tau \text{sinc}(\omega \frac{\tau}{2})$$

$\text{sinc}(x) = \sin(x) / x$  - кардинальний синус

if ( $x=0$ )  $\rightarrow \text{sinc } (x) = 1$

# Один прямокутний імпульс. Спектральна щільність



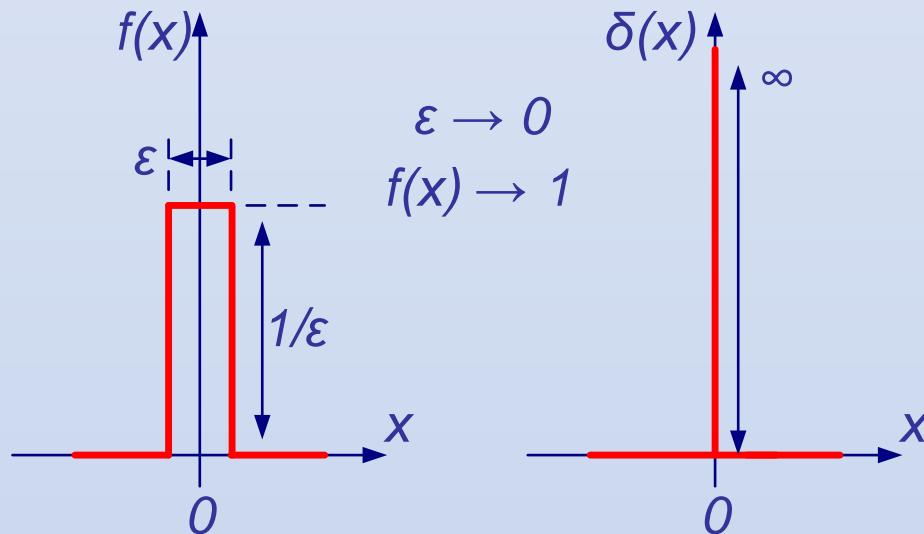
Має затухаючий коливальний характер. Нулі  $F(\omega)$ , тобто частоти, відповідні  $F(\omega)=0$ , рівні  $\omega = k^{2\pi/\tau}$ , де  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Швидкість убування бічних пелюсток  $F(\omega)$  пропорційна  $1/\omega$ .

# Дельта - функція

Дельта- функція Дірака

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty: x = 0 \\ 0: x \neq 0 \end{cases}$$

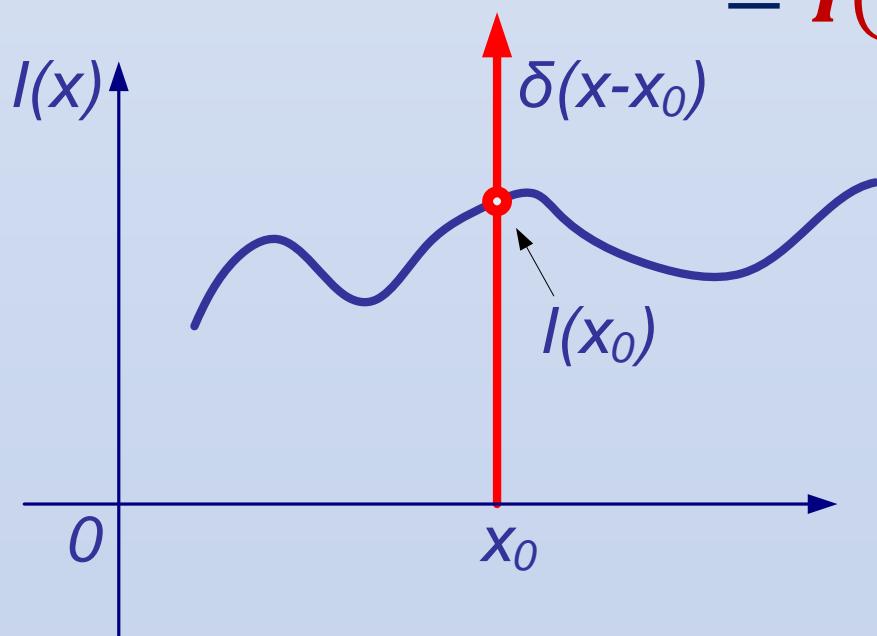


!! Площа дельта-функції = 1

# Дельта - функція

Інтеграл від довільної функції  $I(x)$  помноженої на дельта- функцію в точці  $x_0 \in$

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(x) \delta(x - x_0) dx = \int_{-\infty}^{\infty} I(x_0) \delta(x - x_0) dx = I(x_0)$$

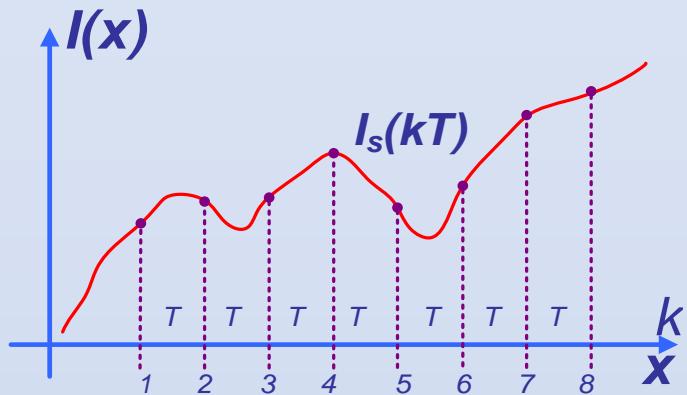


Фільтруюча властивість  
Дельта-функції

Дискретизація –  
множення сигналу на  
дельта-функцію

# Спектр дискретизованого сигналу

Сигнал  $I(x) \Rightarrow I_s(x)$  !!! дисcretизація



$$I_s(kT) = I(x) \delta(x - kT)$$

$T$  - період дискретизації,

$f_s = 1/T$  - частота дискретизації (Гц)

$\omega_s = 2\pi/T$  - кругова частота дискретизації (рад/с)

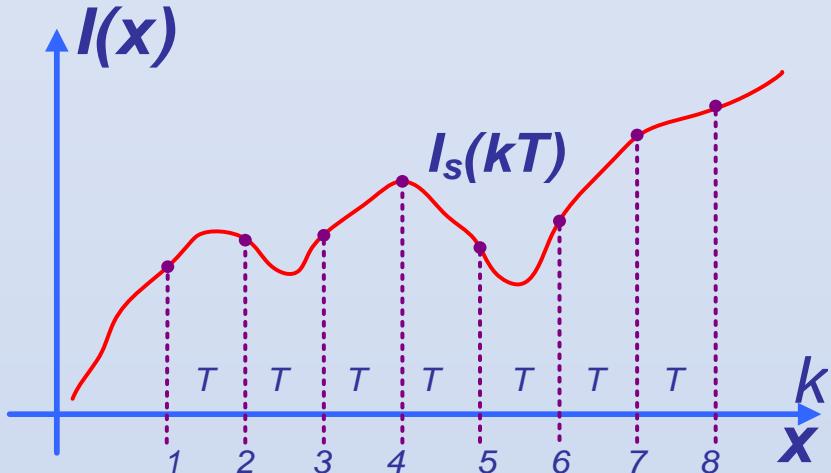
$\hat{f} : (-1 \dots 1)$  - нормована частота дискретизації  
(абсолютна частота віднесена до частоти  
дискретизації,  $\pi$  рад/відлік)

$\hat{\omega} : (-\pi \dots \pi)$  - нормована кругова частота  
дискретизації – (рад/відлік)

# Спектр дискретизованого сигналу

Сигнал  $I_s(x) \Rightarrow$  його спектр  $F(\omega)$

Дискретизований сигнал  $I_s(x) \Rightarrow ??$  спектр



$$S(\hat{\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( F\left(\frac{\hat{\omega}}{T} - n\omega_s\right) \right)$$

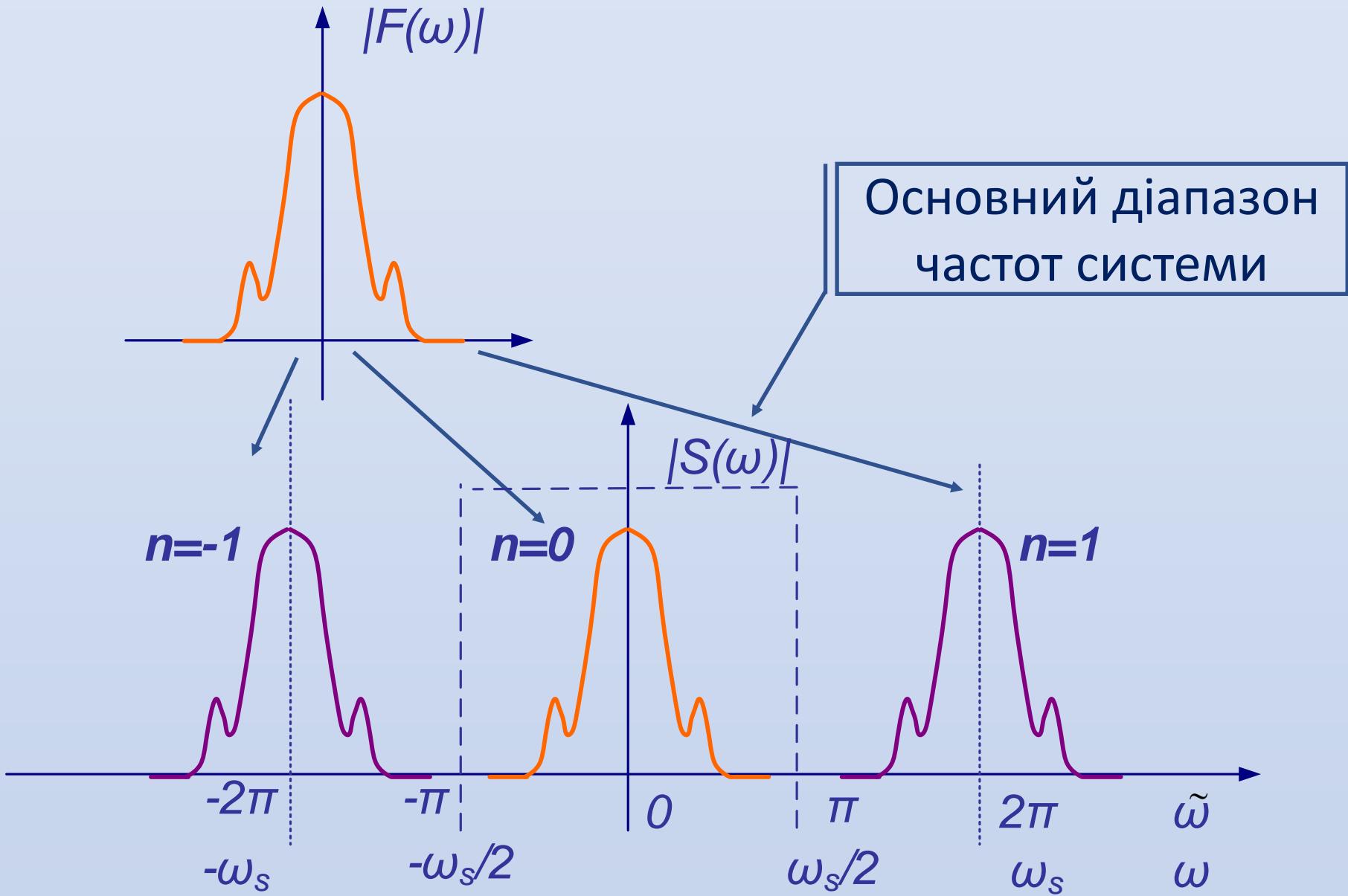
Сума спектрів!

## Спектр дискретизованого сигналу

$$S(\hat{\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( F\left(\frac{\hat{\omega}}{T} - n\omega_s\right) \right)$$

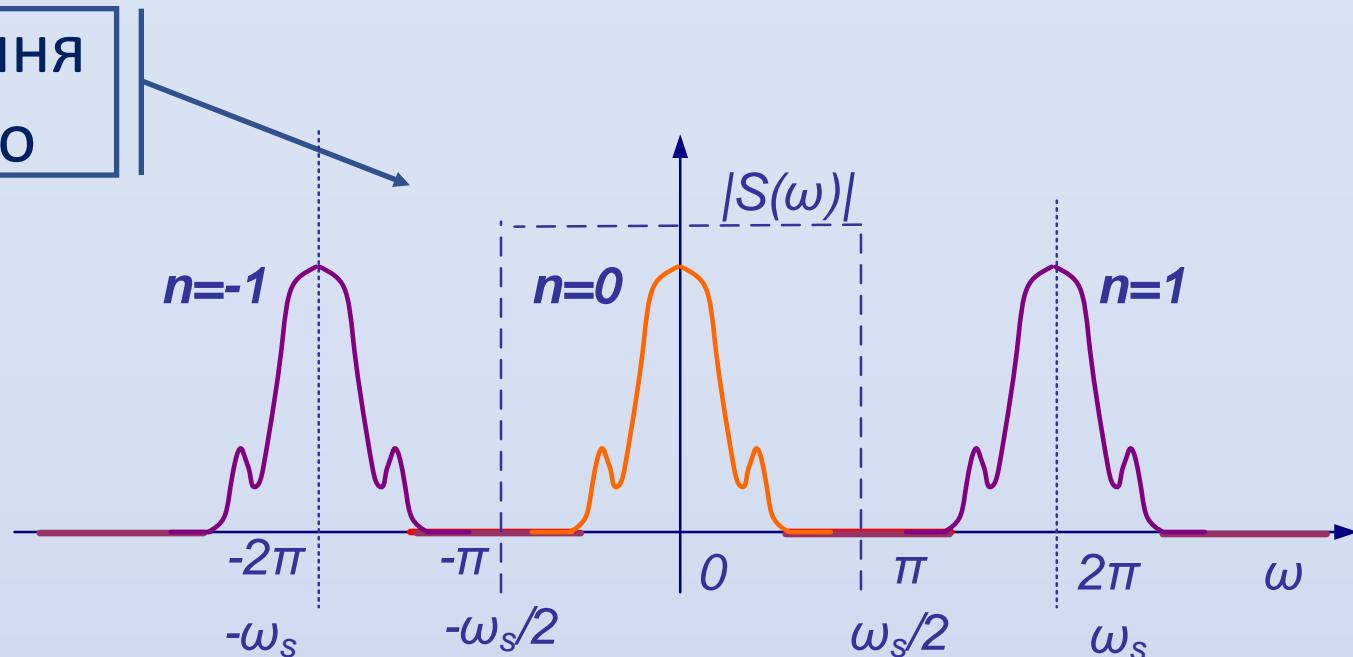
Спектр дискретизованого сигналу  $I_s(x)$ , отриманого шляхом дискретизації безперервного сигналу  $I_s(x)$ , дорівнює **некінченної сумі** по  $n$  зсуни **зсунутих** копій спектрів вхідного безперервного сигналу  $F(\omega)$ . Зсув = номер  $n$  копії помножений на кругову частоту дискретизації  $\omega_s = 2\pi/T$ . Тобто  $S(\hat{\omega})$  - періодична функція, що повторюється з періодом  $2\pi$  радіан на відрізку відлік або в абсолютних одиницях рівній частоті дискретизації  $f_s$ .

# Спектр дискретизованого сигналу

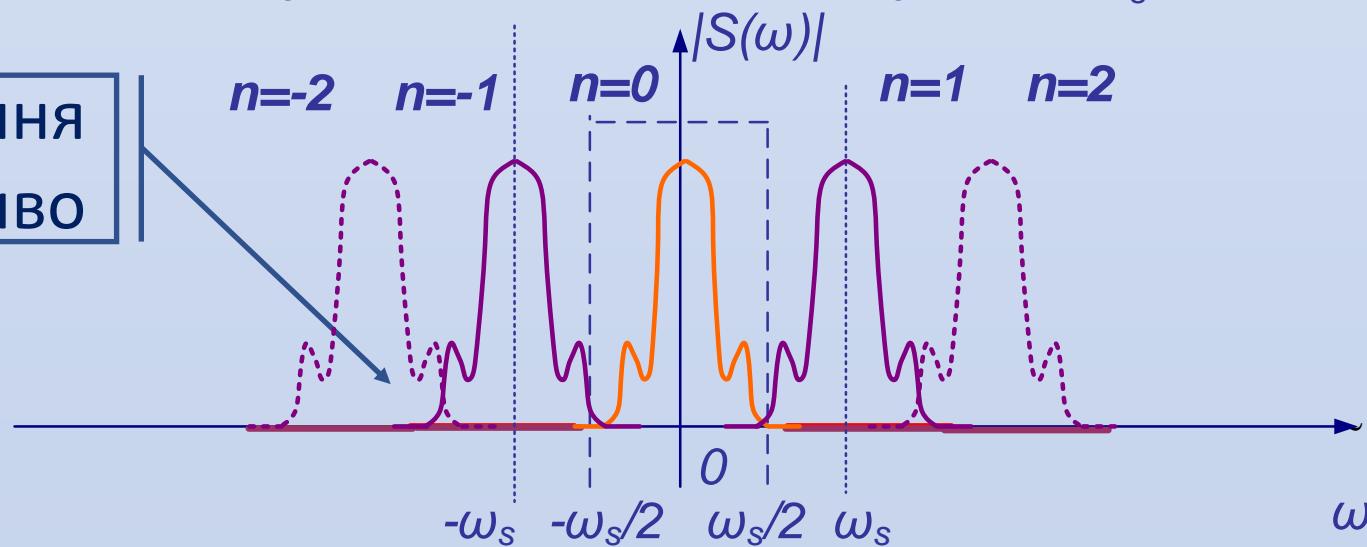


# До вибору шагу дискретизації

Відтворення  
можливо



Відтворення  
НЕ можливо



# Теорема відліків Віттакера — Найквіста — Котельникова — Шеннона

Якщо безперервний сигнал  $x(t)$  має спектр, обмежений частотою  $f_{max}$ , то він може бути однозначно і без втрат відтворений за своїми дискретними відліками, узятыми з частотою  $f_{samp} > 2*f_{max}$  ( $\omega_s > 2 \omega_{max}$ ), або за відліками, узятыми з періодом  $T_{sampl} < 1 / (2 * f_{max})$ .

**$f_{max}$  - частота Найквіста**

Тобто, для того, щоб відтворити сигнал за його відліками без втрат, необхідно, щоб частота дискретизації була хоча б у два рази більша за  $f_{max}$  первинного безперервного сигналу.

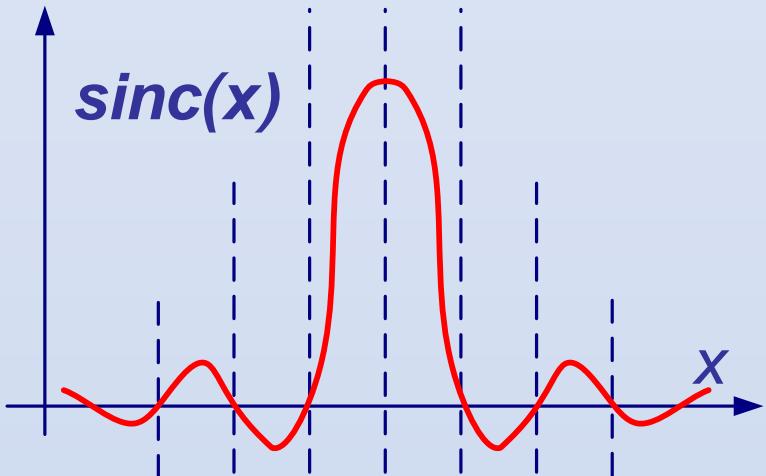
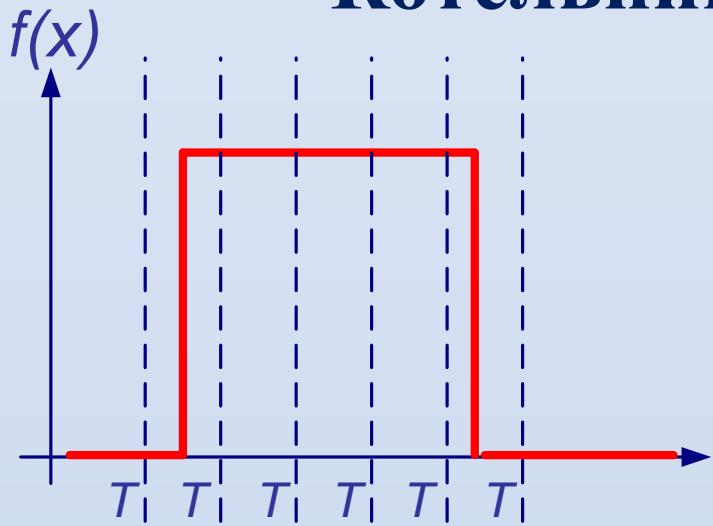
# Теорема відліків Віттакера — Найквіста — Котельникова — Шеннона

Відтворення (встановлення) сигналу

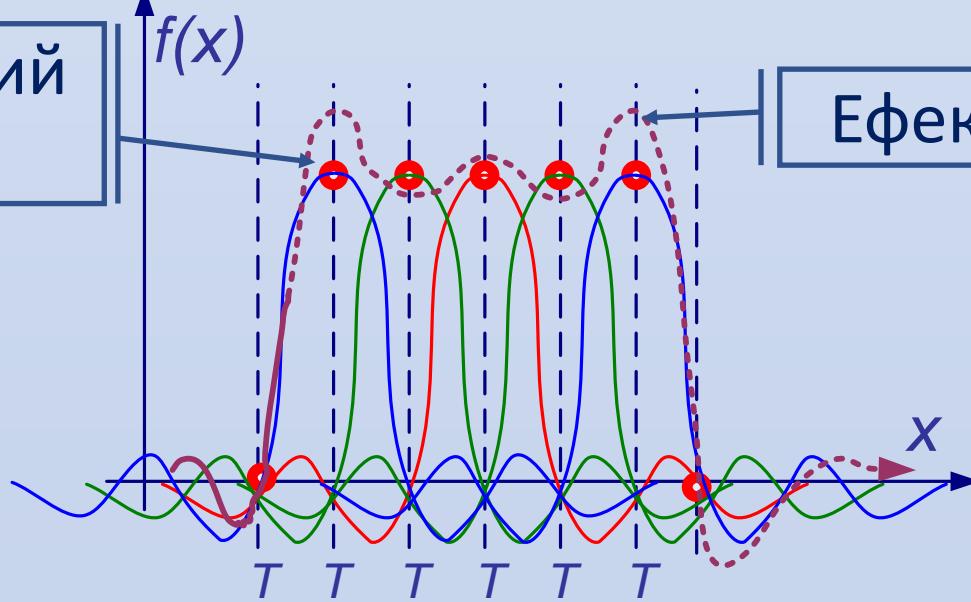
$$I(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I(t_k) \frac{\sin(\frac{\pi}{T_s}(t - kT_s))}{\frac{\pi}{T_s}(t - kT_s)}$$

$$I(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I(t_k) \text{sinc}(\frac{\pi}{T_s}(t - kT_s))$$

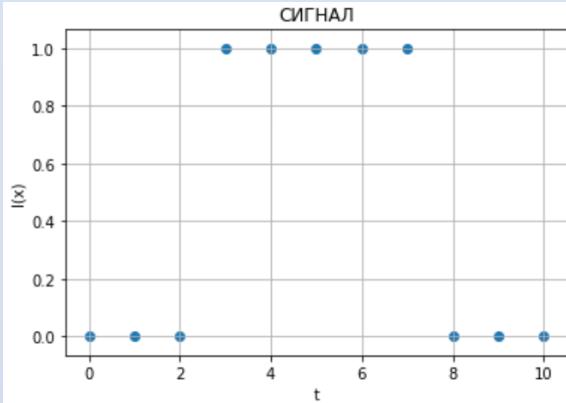
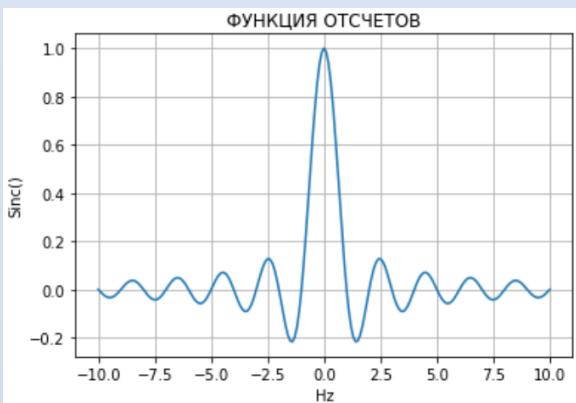
# Теорема відліків Віттакера — Найквіста — Котельникова — Шеннона



Встановлений  
сигнал

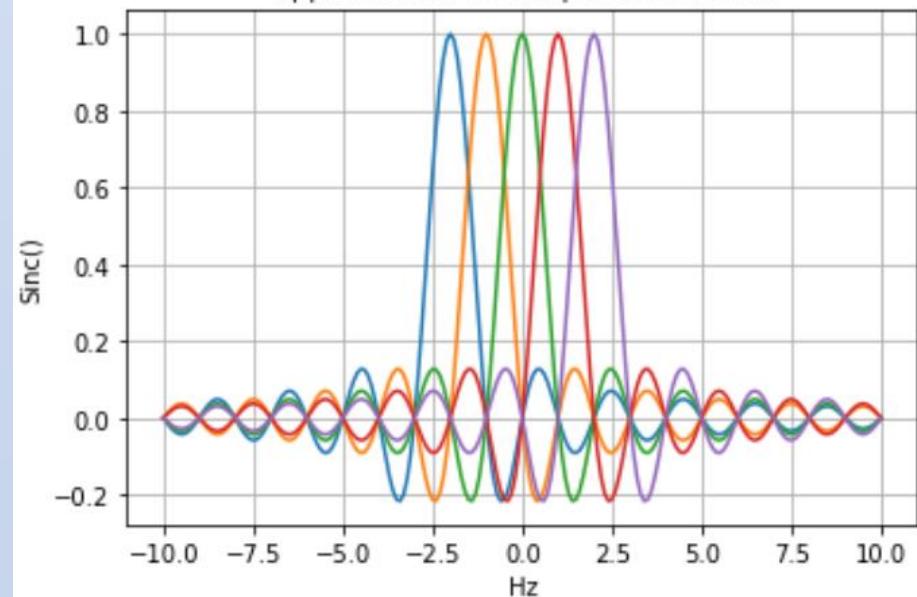


# Теорема відліків Віттакера — Найквіста — Котельникова — Шеннона

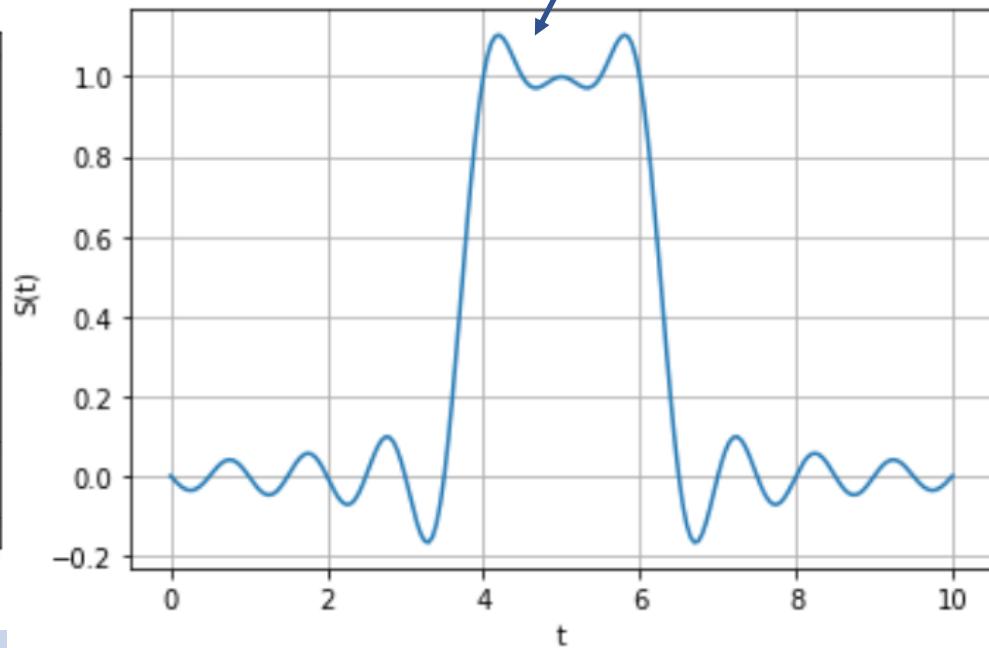


Ефект  
Гібса

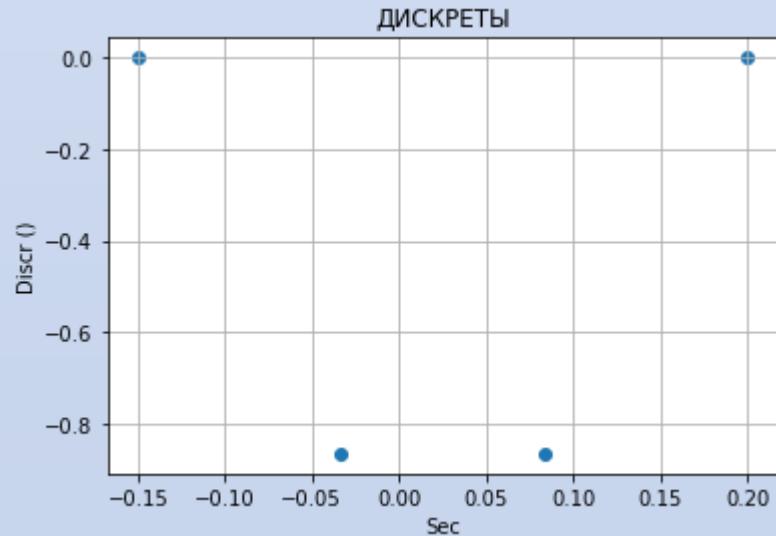
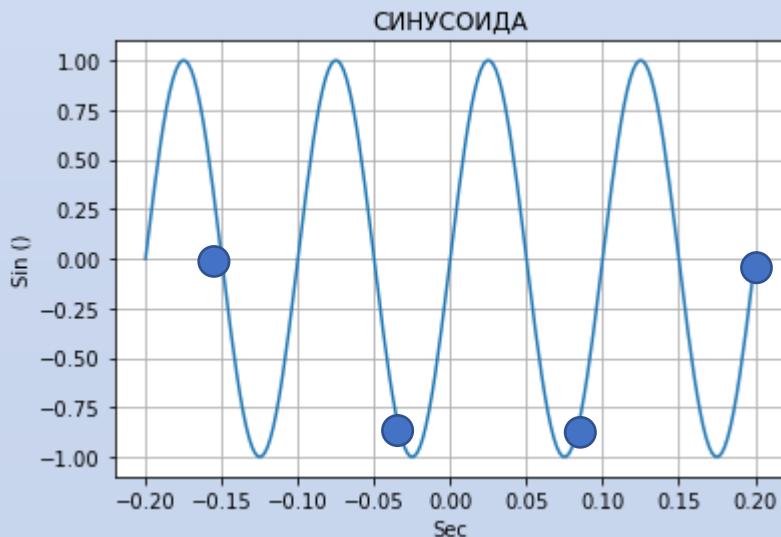
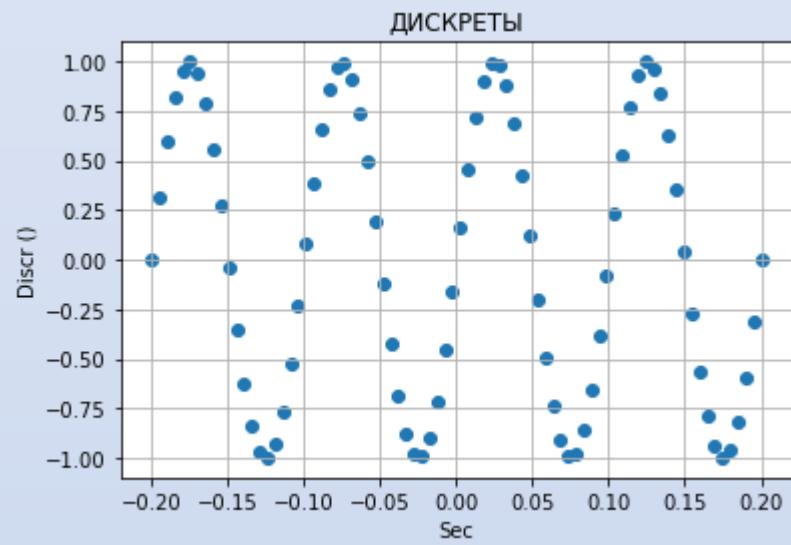
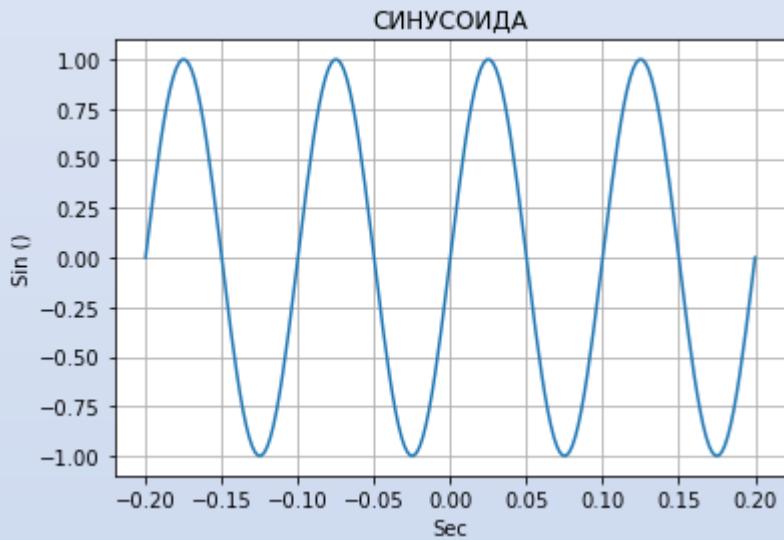
СДВИНУТЫЕ ФУНКЦИИ ОТСЧЕТОВ



ВОССТАНОВЛЕННЫЙ СИГНАЛ



# Теорема відліків Віттакера — Найквіста — Котельникова — Шеннона



## **Рекомендована література**

- **Вовк С.М., Гнатушенко В.В., Бондаренко М.В.** Методи обробки зображень та комп'ютерний зір: навчальний посібник. - Д.: Ліра, 2016 — 148 с.
- **Красильников Н.Н.** Цифровая обработка 2D- и 3D-изображений: учеб.пособие.- СПб.: БХВ-Петербург, 2011.- 608 с.: ил.
- **Гонсалес Р.С., Вудс Р.Э.** Цифровая обработка изображений. - М. : Техносфера, 2005. -1070 с.
- **Визильтер Ю.В., Желтов С.Ю. и др.** Обработка и анализ зображений в задачах машинного зрения.-М.: Физматкнига, 2010.-672 с.

## **Рекомендована література**

- **Ватолин Д., Ратушняк А., Смирнов М., Юкин В.** Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео. - М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2002. - 384 с.
- **Творошенко І.С.** Конспект лекцій з дисципліни «Цифрова обробка зображень» / І.С. Творошенко : І. С. Творошенко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 75 с.
- Методи комп'ютерної обробки зображень: Учебное пособие для ВУЗов/ Под ред.: **Сойфер В.А..** - 2-е изд., испр. - М.: Физматлит, 2003. - 780 с.
- **Фисенко В.Т., Фисенко Т.Ю.** Компьютерная обработка и распознавание изображений: учеб. пособие. - СПб: СПБГУ ИТМО, 2008. – 192 с.

## Додаткова література

- Грузман И.С., Киричук В.С. Цифровая обработка изображений в информационных системах. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 2002. — 352 с.: ил.
- Solomon C., Breckon T. Fundamentals of Digital Image Processing. — Willey-Blackwell, 2011 - 344 р.
- Павлидис Т. Алгоритмы машинной графики и обработки изображений: Пер. с англ. - М.: Радио и связь, 1986. — 400 с.
- Яншин В. В., Калинин Г. А. Обработка изображений на языке Си для IBM PC: Алгоритмы и программы. — М.: Мир, 1994. — 240 с.

# Інформаційні ресурси

- Комп'ютерна обробка зображень. Конспект лекцій. [http://aco.ifmo.ru/el\\_books/image\\_processing/](http://aco.ifmo.ru/el_books/image_processing/)
- Цифрова обробка зображень [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт / НТУУ «КПІ» ; уклад.: В. С. Лазебний, П. В. Попович. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,41 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2016. – 73 с. – <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/21035>
- <https://www.youtube.com/watch?v=CZ99Q0DQq3Y>
- <https://www.youtube.com/watch?v=FKTLW8GAdu4>

The END  
Lec 1.2