

MATHÉMATIQUES DISCRÈTES 1**Fiche 1 : Introduction à la théorie des ensembles.****Exercice 1. (Ensembles de base)**

1. Rappelez la définition et la notation des ensembles fondamentaux suivants : entiers naturels, entiers relatifs, nombres rationnels, décimaux, réels et complexes.
2. Réalisez un diagramme de Venn des ensembles de la question précédente.

Exercice 2. (La différence symétrique) Pour deux ensembles A et B , on appelle différence symétrique, note $A\Delta B$, l'ensemble défini par

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Ainsi, $A\Delta B$ est constitué des éléments qui appartiennent soit à A , soit à B , mais pas aux deux.

1. Matérialiser sur un dessin $A\Delta B$.
2. Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et $D = \{2, 3, 5, 7, 8\}$. Trouver $A\Delta B$, $C\Delta B$, $B\Delta C$, $A\Delta D$.
3. Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.
 - a) Montrez que $A\Delta B = [A \cap (E \setminus B)] \cup [(E \setminus A) \cap B]$.
 - b) Calculer $A\Delta A$, $A\Delta(E \setminus A)$, $A\Delta E$ et $E \setminus (A\Delta B)$.
 - c) Montrer que, si $A\Delta B = C$, alors $A\Delta C = B$ et $B\Delta C = A$.

Exercice 3. On se place dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble non vide E ; A , B et C sont des parties de E .

Montrer que $(A \cup C) \subset (A \cup B)$ et $(A \cap C) \subset (A \cap B)$ implique que $C \subset B$.

Exercice 4. Montrer que $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

Exercice 5. (Archives) Le jour où il ne faut pas, vous découvrez que :

- vous avez besoin d'un fichier client C et du fichier prospects P qui contenait la liste des clients. prospects, c.à.d. des clients actuels ou potentiels visités par les représentants au dernier semestre ;
- Le stagiaire les a effacé par mégarde, en répondant au hasard à une question du système qu'il ne comprenait pas.

Au cours d'une réunion de crise, vous apprenez cependant qu'il reste :

- le fichier F des clients non prospects de ce dernier trimestre ;
- le fichier G des prospects du dernier trimestre non encore client ;
- le fichier H des clients et/ou prospects mélangés sans distinction.

En déduire comment reconstruire P et C .

Exercice 6. (Fonction caractéristique des parties d'un ensemble.) On appelle fonction caractéristique de la partie A de l'ensemble E ($E \neq \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $A \subset E$) l'application f_A définie par :

$$f_A: \begin{cases} E \longrightarrow \{0, 1\} \\ x \in A \mapsto 1 \\ x \in E \setminus A \mapsto 0 \end{cases}$$

On pose de plus, $\forall x \in E$, $f_{\emptyset}(x) = 0$ et $f_E(x) = 1$.

Étudier les fonctions caractéristiques d'une réunion, d'une intersection de deux parties, ainsi que celle du complémentaire d'une partie.