

Feuille de TD 2 : Mariages stables - Algorithme de Gale-Shapley

Dans cet exercice on cherche à former n couples entre n femmes et n hommes. Chaque femme et chaque homme a donné son ordre de préférence sur les n personnes du sexe opposé. Un mariage est un couplage parfait entre les hommes et les femmes. On dit qu'il est stable s'il n'existe pas un homme et une femme qui chacun préférerait être ensemble plutôt qu'avec la personne qu'on leur a attribué.

Exemple : On considère le cas $n = 3$ avec les préférences des femmes et des hommes données ci-dessous.

$$\begin{array}{ll} f_1 : & h_2 > h_3 > h_1 \\ f_2 : & h_2 > h_1 > h_3 \\ f_3 : & h_3 > h_1 > h_2 \end{array} \quad \begin{array}{ll} h_1 : & f_1 > f_2 > f_3 \\ h_2 : & f_3 > f_2 > f_1 \\ h_3 : & f_2 > f_1 > f_3 \end{array}$$

Le couplage $(f_1, h_1), (f_2, h_2), (f_3, h_3)$ est un couplage non stable car le couple (f_1, h_3) est un couple instable (ils préféreraient tout deux être ensemble plutôt qu'avec leur partenaire attribué). Cependant, le couplage $(f_1, h_3), (f_2, h_2), (f_3, h_1)$ est stable. L'algorithme de Gale-Shapley permet de trouver un mariage stable. Son principe est le suivant :

Au départ aucun couple n'est formé

— Tant qu'il existe un homme h qui n'a pas été couplé avec une femme

- soit f la femme la mieux placée dans l'ordre de h qu'il n'a pas encore demandé en mariage.
- h demande f en mariage :
 - si f n'est pas couplé, f accepte.
 - si f est couplé avec une autre homme h' et que f préfère h , coupler f avec h et libérer h'
 - sinon ne rien faire

Question 1 – Appliquer cet algorithme sur les données de l'exemple.

Question 2 – Expliquer pourquoi cet algorithme termine avec un couplage parfait et donner sa complexité.

NB : Un **couplage parfait** ou **couplage complet** est un couplage M du graphe tel que tout sommet du graphe est incident à exactement une arête de M .

Question 3 – Expliquer pourquoi cet algorithme renvoie une solution stable.

Question 4 – Quel mariage obtient-t-on si inverse le rôle des hommes et des femmes dans les données précédentes ? Lequel est le plus favorable aux femmes ?

La plupart du temps, il existe plusieurs solutions stables. Parmi elles, certaines sont favorables aux hommes tandis que d'autres sont favorables aux femmes. Nous allons montrer que l'algorithme ci-dessus donne en fait la meilleure solution pour les hommes parmi toutes les solutions stables, dans le sens où si un homme h chaque homme est couplé avec la femme qu'il préfère parmi celles avec lesquels il peut être couplé dans un mariage stable possible.

On dit que h est un homme valide pour f s'il existe un mariage stable avec le couple (f, h) . On note $\text{best}(f)$ l'homme préféré de f parmi tous les hommes valides.

Question 5 – Montrer que pour deux femmes différentes f et f' , $\text{best}(f) \neq \text{best}(f')$. Les couples $(f, \text{best}(f))$ forment donc un couplage parfait.

Question 6 – Montrer que l'algorithme de Gale Shalpey retourne ce couplage là.