Fonction réelle d'une variable reélle.

1 Introduction

1.1 Notations

Nous introduisons ici quelques notations qui seront utilisées par la suite pour l'écriture d'assertions mathématiques :

- le symbole «$\forall$» veut dire «pour tout» ou bien«quel que soit»;
- le symbole «$\exists$» veut dire «il existe»;
- le symbole «$\exists!$» veut dire «il existe un unique»;
- le symbole «:» veut dire «tel que»;
- le symbole «$\Rightarrow$» veut dire «implique» ou encore «si....alors»;
- le symbole «$\Leftrightarrow$» veut dire «est équivalent à» ou encore «si et seulement si».

Exemple.

1. «$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 3$» se lit «Pour tout réel x, $f(x)$ est strictement supérieur à 3.»
2. «$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)$» se lit «Pour tout réel y, il existe un réel x tel que y est égal à $f(x)$.»

1.2 Ensembles usuels

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ possède les sous-ensembles remarquables suivants :

- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ l'ensemble des entiers naturels;
- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$ l'ensemble des entiers naturels privé de 0 ;
- $\mathbb{Z} = \{.., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ l'ensemble des entiers relatifs;
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$ l'ensemble des rationnels;
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'ensemble des irrationnels ;
- $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ et $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$;
- $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} =]0, +\infty[$ et $\mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}_- \setminus \{0\} =]-\infty, 0[$.

Remarque. Rappelons que l'on a les inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ et que grande majorité des nombres réels sont des nombres irrationnels donc des éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Définition. (Intervalle de $\mathbb{R}$) *Un sous ensemble non vide I de $\mathbb{R}$ est un intervalle s'il satisfait la condition suivante : A chaque fois que I contient deux réels x et y, il contient tous les réels se trouvant entre x et y.*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Un intervalle de $\mathbb{R}$ est de l'une des 9 formes suivantes :

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$; (les segments de $\mathbb{R}$)
2. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$; (les intervalles ouverts et bornés de $\mathbb{R}$)
3. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$; (les intervalles semi-ouverts et bornés de $\mathbb{R}$)
4. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$; (les intervalles semi-ouverts et bornés de $\mathbb{R}$)
5. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}$; (les demi-droites fermées et minorées de $\mathbb{R}$)

6. $]a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}:x>a\}$; (les demi-droites ouvertes et minorées de $\mathbb{R}$)

7. $]-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}:x\leqslant b\}$; (les demi-droites fermées et majorées de $\mathbb{R}$)

8. $]-\infty,b[=\{x\in\mathbb{R}:x<b\}$; (les demi-droites ouvertes et majorées de $\mathbb{R}$)

9. $\mathbb{R}$, la droite réelle.

1.3 Règles de calcul dans $\mathbb{R}$

Pour tout $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ on utilisera fréquemment les règles de calcul suivantes :

$$\begin{array}{rcl}
a\times b=0 & \Longleftrightarrow & (a=0)\vee(b=0)\ (\text{ propriété d'intégrité de } \mathbb{R})\\
a<b & \Longleftrightarrow & (a\leqslant b)\wedge(a\neq b);\\
(a\leqslant b)\wedge(b\leqslant a) & \Longleftrightarrow & a=b\ (\text{antisymétrie de la relation } \leqslant)\\
(a\leqslant b)\wedge(b\leqslant c) & \Longrightarrow & a\leqslant c\ \ (\text{transitivité de la relation } \leqslant)\\
(a\leqslant b)\wedge(c\leqslant d) & \Longrightarrow & a+c\leqslant b+d\ \ (\text{compatibilité de la relation } \leqslant \text{ et de } +)\\
(a\leqslant b)\wedge(c\geqslant 0) & \Longrightarrow & a\times c\leqslant b\times c\\
(a\leqslant b)\wedge(c\leqslant 0) & \Longrightarrow & a\times c\geqslant b\times c
\end{array}$$

Proposition 1. *Soient $a,b\in\mathbb{R}$.*

$$a^2=b^2 \iff (a=b)\vee(a=-b)$$

Démonstration. **Exercice 1.** □

Proposition 2. *Soient $a,b\in\mathbb{R}$. On a :*

1. *si $a,b\in\mathbb{R}_+$, alors $(a\leqslant b)\Longleftrightarrow a^2\leqslant b^2$;*
2. *si $a,b\in\mathbb{R}_-$, alors $(a\leqslant b)\Longleftrightarrow a^2\geqslant b^2$;*
3. *si $a\in\mathbb{R}_-$ et $b\in\mathbb{R}_+$ alors on a toujours $a\leqslant\sqrt{b}$;*
4. *si $a\in\mathbb{R}_+$ et $b\in\mathbb{R}_+$ alors $a\leqslant\sqrt{b}\Longleftrightarrow a^2\leqslant b$.*

Exemple. Résoudre $\mathbb{R}$ l'inéquation $x+1\leqslant\sqrt{x^2+1}$ $(\star)$
Si $x+1<0$, alors $(\star)$ est toujours vérifiée et on trouve comme premier ensemble de solutions

$$S_1=\{x\in\mathbb{R}:x+1<0\}=]-\infty,-1[.$$

Si $x+1\geqslant 0$, alors $(\star)\Longleftrightarrow(x+1)^2\leqslant\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2\Longleftrightarrow x^2+2x+1\leqslant x^2+1\Longleftrightarrow 2x\leqslant 0\Longleftrightarrow x\leqslant 0$. On trouve comme deuxième ensemble de solutions

$$S_2=]-\infty,0]\cap[-1,+\infty[=[-1,0].$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de $(\star)$ est $S=S_1\cup S_2=]-\infty,-1[\cup[-1,0]=]-\infty,0]$.

2 Fonction réelle d'une variable réelle

Dans toute la suite, on considère E et F deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

2.1 Définitions

Définition. *Une fonction réelle d'une variable réelle est la donnée d' :*

1. *un esnmble de départ $E\subset\mathbb{R}$;*
2. *un ensemble d'arrivée $F\subset\mathbb{R}$;*
3. *un procédé qui transforme un élément de E en un élément de F appelé expression de laz fonction.*

Remarque. Dans toute la suite on écrira « fonction » plutôt que « fonction réelle d'une variable réelle » par soucis de concision.

Notation. *Une fonction f sera notée :*

$$f:\begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

où pour $x \in E$, $f(x)$ désigne l'image de x par la fonction f.

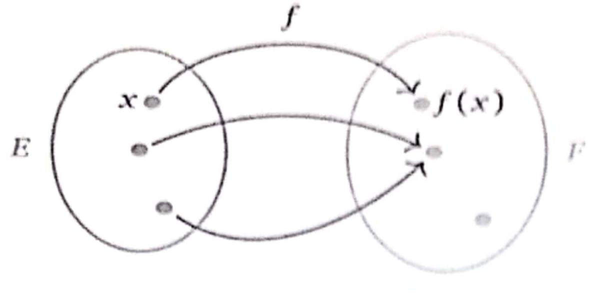

Figure 1.

Définition. (Domaine de définition) *Soit $f: E \longrightarrow F$, $x \longmapsto f(x)$ une fonction. On appelle domaine de définition de f et on note $\mathcal{D}_f$, la collection des éléments x de E pour lesquels $f(x)$ est défini (c'est à dire existe).*

$$\mathcal{D}_f := \{x \in E : f(x) \text{ existe}\}.$$

Exemple. Soient f_1, f_2 et f_3 trois fonctions définies par :

$$f_1:\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{cases};\quad f_2:\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x+1} \end{cases};\quad f_3:\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x-2}} \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. $f_1(x)$ existe si et seulement si $x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}^*$. $f_2(x)$ existe si et seulement si $x+1 \geqslant 0$. Ainsi $\mathcal{D}_{f_2} = [-1, +\infty[$. $f_2(x)$ existe si et seulement si $(x-2 \geqslant 0) \wedge (\sqrt{x-2} \neq 0)$. Ainsi $\mathcal{D}_{f_3} =]2, +\infty[$.

Définition. (Égalité fonctionnelle) *Deux fonctions $f_1: E_1 \longrightarrow F_1$, $x \longmapsto f_1(x)$ et $f_2: E_2 \longrightarrow F_2$, $x \longmapsto f_2(x)$ sont égales si $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$ et $\forall x \in E_1 = E_2$, $f_1(x) = f_2(x)$.*

Exemple. Les fonctions

$$f:\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x+1 \end{cases} \quad \text{et} \quad g:\begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x+1 \end{cases}$$

ne sont pas égale car les ensembles de départ ne sont pas les mêmes.

2.2 Monotonie, parité et périodicité.

Définition. (Monotonie) *Soit $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$. On dit que :*

- *f est croissante (resp. strictement croissante) sur E si $\forall x, y \in E, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$ (resp. $f(x) < f(y)$).*
- *f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur E si $\forall x, y \in E, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$).*
- *f est monotone (resp. strictement monotone) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).*

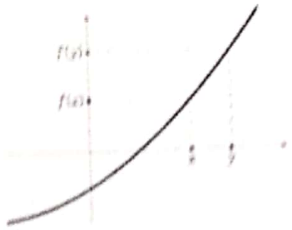

Figure 2. Une fonction strictement croissante

Définition. (Parité) *Soit E un sous ensemble symétrique par rapport à 0 de $\mathbb{R}$(c'est à dire $\forall x \in E$, $-x \in E$) et $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur E. On dit que :*

- *f est paire si $\forall x \in E$, $f(-x) = f(x)$. Son graphe est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;*

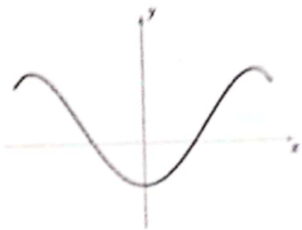

Figure 3. Une fonction paire

- *f est impaire si $\forall x \in E$, $f(-x) = -f(x)$. Son graphe est alors symétrique par rapport à l'origine* $(0,0)$.

Figure 4. Une fonction impaire

Remarque. L'étude d'une fonction paire (resp. impaire) peut être réduite à l'étude sur la partie positive ou négative de son domaine de définition puis complétée par symétrie axiale d'axe l'axe des ordonnées (resp. centrale de centre le point $(0,0)$).

Définition. *Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et un réel $T > 0$. La fonction f est dite périodique de période T ou T-périodique si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.*

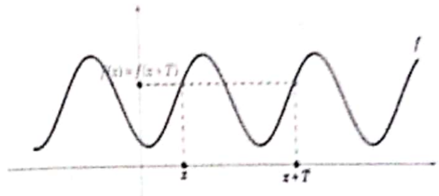

Figure 5. Une fonction T-périodique.

2.3 Opérations sur les fonctions

Définition. (Addition, multiplication et rapport) *Soient* $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x)$, $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto g(x)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On définit :*

- *a fonction* $\lambda.f$ *par :*

$$\lambda.f\colon \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda.f(x) \end{cases}$$

- *la fonction* $f+g$ *par :*

$$f+g\colon \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)+g(x) \end{cases}$$

- *la fonction* $f \times g$ *par*

$$f \times g\colon \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \times g(x) \end{cases}$$

- *la fonction* $\frac{f}{g}$ *par :*

$$\frac{f}{g}\colon \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{cases}$$

Définition. (Composition) *Soient E,F,G,H des sous-ensembles de* $\mathbb{R}$ *et* $f : E \to F$ *et* $g : G \to H$ *deux fonctions. Si l'espace d'arrivée F de f est inclus dans l'espace de départ G de g alors on définit la fonction composée* $g \circ f$ *par :*

$$g \circ f\colon \begin{cases} E \longrightarrow H \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{cases}$$

Remarque.

1. La condition $F \subset G$ est essentielle pour que l'image par la fonction g de $f(x)$ ait toujours un sens. De même, la condition $H \subset E$ est essentielle pour que l'image par la fonction f de $g(x)$ ait toujours un sens.
2. Il faut faire attention à l'ordre dans lequel on écrit les fonctions car en général les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ ne sont pas égales. La composition de fonctions est unne opération non commutative.

Exemple. On considère les fonctions :

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \\ x \longmapsto \sin(x) \end{cases}, \quad g\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}, \quad f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}.$$

Peut-on définir les fonctions $f \circ g, g \circ f, g \circ h$?

1. La fonction $g \circ f$: $[-1,1]$ n'est pas inclus dans $\mathbb{R}_+$ donc $g \circ f$ n'a pas de sens.
2. La fonction $f \circ g$: on a $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ donc $f \circ g$ a un sens et est définie par :

$$f \circ g\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow [-1,1] \\ x \longmapsto \sin(\sqrt{x}) \end{cases}$$

3. La fonction $g \circ h$: $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}_+$ donc $g \circ h$ a un sens et est définie par :

$$g \circ h\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \sqrt{x^2} \end{cases}$$

2.4 Antécédent, image, image directe et image réciproque

Définition. (Antécédent et image) *Soit* $f\colon E \longrightarrow F$ *une fonction définie sur E.*

- *Soit* $y \in F$. *On appelle antécédent de y par la fonction f tout élément* $x \in E$ *tel que* $f(x) = y$.

- *Soit $x \in E$. On appelle image de x par la fonction f l'unique élément $y \in F$ tel que $y = f(x)$.*

Remarque. Pour une fonction f, l'ensemble des antécédents d'un élément $y \in F$ peut être vide, peut contenir un élément, ou un nombre quelconque d'éléments. Par exemple considérons la fonction définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \in [0,1] \longmapsto x^2 \\ x \in \mathbb{R}\backslash[0,1] \longmapsto 5 \end{cases}$$

Considérons respectivement les éléments $y_1 = -1$, $y_2 = 1$ et $y_3 = 5$. L'ensemble des antécédents de y_1 est vide, celui des antécédents de y_2 est égal au singelton $\{1\}$, alors que celui de y_3 est égal à $\mathbb{R}\backslash[0,1]$ donc infini.

Définition. (Image réciproque, image directe) *Soit $f: E \longrightarrow F$ une fonction A un sous ensemble de E et B un sous-ensemble de F.*

- *On appelle image réciproque de B par f le sous-ensemble de l'espace de départ E, noté $f^{-1}(B)$ défini par*

$$f^{-1}(B) := \{x \in E : f(x) \in B\}.$$

- *On appelle image directe de A par f le sous-ensemble de l'espace de d'arrivée F, noté $f(A)$ défini par*

$$f(A) := \{y \in F : \exists x \in A : y = f(x)\} = \{f(x), x \in A\}.$$

- *On appelle image de la fonction f et on note $\mathrm{Im}(f)$, l'image directe de son ensemble de départ :*

$$\mathrm{Im}(f) := f(E).$$

Remarque. L'image réciproque $f^{-1}(B)$, d'une partie B de l'espace d'arrivée, n'est rien d'autre que l'ensemble des antécédents des éléments de B. C'est une partie de l'ensemble de départ de la fonction.

L'image directe $f(A)$, d'une partie A de l'espace de départ, n'est rien d'autre que l'ensemble des images des éléments de A. C'est une partie de l'ensemble d'arrivée de la fonction.

Il ne faut pas confondre l'image de f notée $\mathrm{Im}(f)$ et l'image de x par f notée $f(x)$ car ce ne sont pas le même type d'objet. En effet, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-ensemble de l'espace d'arrivée F alors que $f(x)$ est un élément de F. $\mathrm{Im}(f)$ est le sous-ensemble des éléments de l'espace d'arrivée F qui ont au moins un antécédent par f.

2.5 Injectivité, surjectivité, bijectivité et fonction réciproque

Définition. (Injectivité) *Une fonction $f: E \longrightarrow F$ est dite injective si tout point y de l'espace d'arrivée F possède* **au plus un** *antécédent x dans l'espace de départ E par la fonction f.*

Autrement dit :

$$\forall y \in F, \# f^{-1}(\{y\}) \leqslant 1$$

Définition. (Surjectivité) *Une fonction $f: E \longrightarrow F$ est dite surjective si tout point y de l'espace d'arrivée F possède* **au moins un** *antécédent x dans l'espace de départ E par la fonction f.*

Définition. (Bijectivité) *Une fonction $f: E \longrightarrow F$ est dite bijective si tout point y de l'espace d'arrivée F possède* **exactement un** *antécédent x dans l'espace de départ E par la fonction f. Autrement dit :*

$$\forall y \in F, \exists! x \in E : f(x) = y.$$

Proposition. *Une fonction est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.*

Exemple.

1. La fonction $f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ n'est pas injective car $1 \in \mathbb{R}_+$ admet deux antécédents -1 et 1 dans l'espace de départ $\mathbb{R}$. En effet $f(1) = f(-1) = 1$. Elle est surjective car tout $y \in \mathbb{R}_+$ admet au moins $x = \sqrt{y}$ comme antécédent. Ainsi elle n'est pas bijective
2. La fonction $g: \begin{cases} [0,2] \longrightarrow [0,4] \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ est bijective car tout $y \in [0,4]$ admet un unique antécédent $x = \sqrt{y}$ dans l'espace de départ $[0,2]$.
3. La fonction $h: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$ n'est pas injective car $0 \in [-1,1]$ admet au moins deux antécédents dans son espace de départ : $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$. Donc elle n'est pas bijective.

En pratique on utilise souvent le résultat suivant pour montrer qu'une fonction est bijective, bien souvent en dressant le tableau de variations de la fonction :

Théorème 3. *Si une fonction $f : E \to F$ est strictement monotone et est telle que $F = \mathrm{im}(f)$ alors elle est bijective.*

Exemple. La fonction $g: \begin{cases} [0,2] \longrightarrow [0,4] \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ est bijective car elle est strictement croissante et $\mathrm{Im}(g) = g([0,2]) = [0,4]$.

L'intérêt principal que nous apporte le caractère bijectif d'une fonction f est qu'il nous permet de définir une nouvelle fonction appelée fonction réciproque de f.

Définition. *Si une fonction $f: E \longrightarrow F$ est bijective alors il existe une fonction appelée « fonction réciproque » de f, notée f^{-1} et définie par*

$$f^{-1} \begin{cases} F \longrightarrow E \\ y \longmapsto \text{l'unique } x \in E \text{ tel que } y = f(x). \end{cases}$$

Remarque. On remarquera que la condition « f bijective » est essentielle si l'on veut que le x tel que $y = f(x)$ soit défini de manière unique.

Exercice 2. On considère la fonction $f: \begin{cases}]-\infty, 2] \longrightarrow \mathrm{Im}(f) \\ x \longmapsto x^2 - 4x + 3 \end{cases}$.

Déterminer $\mathrm{Im}(f)$, montrer que f est une bijection et calculer f^{-1}.

Proposition 4. *Soient $f: E \longrightarrow F$ une fonction bijective et $f^{-1}: F \longrightarrow E$ sa réciproque. Alors*

$$\forall x \in E, f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in F, f(f^{-1}(y)) = y$$

2.6 Continuité et dérivabilité d'une fonction

On note dans la suite I et J des intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition. (Continuité) *Soient $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.*

- *On dit que f est continnue au point a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.*
- *On dit que f est continue sur I si f est continnue en tout point de I.*

Proposition. *Soient $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :*

1. *la fonction $\lambda.f$ est continue sur I*
2. *la fonction $f + g$ est continue sur I,*
3. *la fonction $f \times g$ est continue sur I,*
4. *si g ne s'annule pas sur I, la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur I.*

Cours assuré par : Dr D. N. Diatta(dndiatta@univ-zig.sn)

Définition. (Dérivabilité) *Soient $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.*

- *On dit que f est dérivable au point a si la fonction $p_f: I\backslash\{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :*

$$p_f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie lorsque x tends vers a. Si elle existe, cette limite est notée $f'(a)$ et appelée dérivée de f en a.

- *On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.*
- *On appelle domaine de dérivabilité de f l'ensemble $\tilde{I} := \{x \in I: \ f \text{ est dérivable en } x\}$. On note la fonction dérivée de f par :*

$$f': \begin{cases} \tilde{I} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f'(x) \end{cases}.$$

Exemple. La fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$p_f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x - a} = x + a.$$

Ainsi :

$$\lim_{x \to a} p_f(a) = \lim_{x \to a} (x + a) = 2a < \infty.$$

Par conséquent f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.

Définition. (Dérivée d'ordre supérieur) *Soient $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et f' sa dérivée. Si la fonction $f': I \longrightarrow \mathbb{R}$ est aussi dérivable, on note $f^{(2)} = (f')'$ sa dérivée et on l'appelle la dérivée seconde de f. Plus généralement, on note :*

$$f^{(0)} = f, \ f^{(1)} = f', \ f^{(2)} = (f')' ..., \ f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

si la dérivée n-ième $f^{(n)}$ existe, on dit que f est n fois dérivable.

Proposition. (Règles de dérivation) *Soient $f, g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors, pour tout $x \in I$, on a :*

1. *la fonction $f + g$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;*
2. *la fonction λf est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$;*
3. *la fonction $f \times g$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$;*
4. *la fonction $\frac{1}{f}$ est dérivable en tout point x où $f(x) \neq 0$ et :*

$$\forall x \in I: f(x) \neq 0, \ \text{on a} : \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}.$$

5. *la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en tout point x où $g(x) \neq 0$ et :*

$$\forall x \in I: g(x) \neq 0, \ \text{on a} : \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

Proposition. (Dérivation de composée de fonctions) *Soient $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g: J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur des intervalleqs I et J et telles que $\mathrm{Im}(f) \subset J$. Alors pour tout $x \in I$, g est dérivable en $f(x)$ et $g \circ f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$*

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)).$$

Exemple. La fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2x+1)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f = f_1 \circ f_2$ où $f_1(x) = \sin(x)$ et $f_2(x) = 2x + 1$ sont définies et dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = (f_2)'(x) \times f_1'(f_2(x)) = 2\cos(2x+1).$$

Cours assuré par : DR D. N. DIATTA(dndiatta@univ-zig.sn)

Corollaire. (Dérivation de la fonction réciproque) *Soient $f : I \longrightarrow J$ une fonction dérivable et bijective et $f^{-1} : J \longrightarrow I$ sa réciproque. Si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable et on a pour tout $y \in J$*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Définition. (Tangente en un point) *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point $a \in I$. Une équation de la tangente à la courbe C_f au point $(a, f(a))$ est donné par :*

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

2.7 Étude des variations d'une fonction

Proposition. (Sens de variation d'une fonction dérivable) *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.*

1. *Si $\forall x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ alors f est croissante.*
2. *Si $\forall x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$ alors f est décroissante.*
3. *Si $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$ alors f est constante.*
4. *Si $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante.*
5. *Si $\forall x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante.*

Remarque. Les réciproques des points 1. 2. et 3. sont vraies et celles des points 4. et 5. sont fausse. Par exemple, la fonction $x \longmapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

3 Fonctions usuelles

3.1 La valeur absolue

Définition. *La fonction valeur absolue, notée $|.|$ est définie par :*

$$|.| \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \end{cases}$$

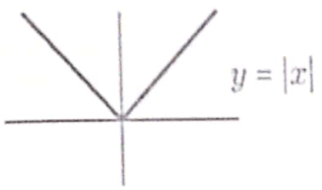

Figure 6. Graphe de la fonction valeur absolue

Remarque. Sur la droite numérique $\mathbb{R}$, $|x - y|$ représente la distance entre les réels x et y.

Proposition. *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, la valeur absolue vérifie les propriétés suivantes :*

1. $|x| \geqslant 0$ *et* $|x| > 0 \Longleftrightarrow x \neq 0$;
2. *la fonction valeur absolue est paire :* $|-x| = |x|$;
3. $\sqrt{x^2} = |x|$;
4. $|x.y| = |x|.|y|$;

5. $\forall r \in \mathbb{R}_+,\ |x| \leqslant r \Longleftrightarrow -r \leqslant x \leqslant r;$

6. $\forall b \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant b \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant b \text{ ou } x \leqslant -b & si \quad b \geqslant 0 \\ x \in \mathbb{R} & si \quad b < 0 \end{cases};$

7. *L'inégalité triangulaire :* $|x+y| \leqslant |x|+|y|;$

8. *Seconde inégalité triangulaire :* $||x|-|y|| \leqslant |x-y|$

Démonstration. Exercice 3. □

3.2 Fonctions trigonometriques

Définition. *Considérons la figure suivante :*

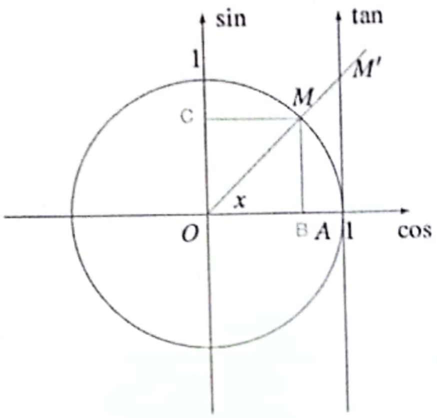

Figure 7. Cercle trigonométrique.

On définit :

1. *la fonction cosinus comme la fonction de* $\mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$ *qui à l'angle* $x \in \mathbb{R}$ *(exprimé en radian) associe la mesure algébrique du segment OB :*

$$\cos: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \\ x \longmapsto \overline{\mathrm{OB}} \end{cases}.$$

2. *la fonction sinus comme la fonction de* $\mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$ *qui à l'angle* $x \in \mathbb{R}$ *(exprimé en radian) associe la mesure algébrique du segment OC :*

$$\cos: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \\ x \longmapsto \overline{\mathrm{OC}} \end{cases}.$$

Proposition. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a :* $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Démonstration. Exercice 4. □

Proposition. *Les fonctions cosinus et sinus sont continues et* 2π*-périodique. De plus cosinus est paire et sinus impaire.*

Démonstration. Exercice 5. □

Remarque. (Importante) nous rappelons que la longueur L d'un arc de cercle de rayon R et d'angle α exprimé en radian est :

$$L = \alpha R.$$

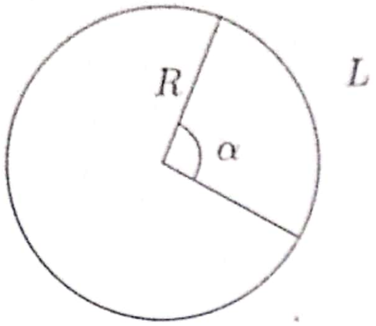

Figure 8.

Proposition. *Les fonctions cosinus et sinus vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$;
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$

□

Démonstration. Exercice 6.

Proposition. *On a :*

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$

Proposition. *Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables et :*

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin'(x) = \cos(x)$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin(x)$.

Proposition. *La fonction sinus restreinte à* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *à valeurs dans* $[-1,1]$ *est bijective.*

□

Démonstration. Exercice 7.

Définition. (arcsinus) *On appelle arcsininus, notée arcsin :* $[-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *la fonction réciproque de la fonction sin :*$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$.

Remarque. Par définition, pour tout $y \in [-1,1]$, $\arcsin(y)$ est l'unique angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus est égal à y. Ceci nous donne la relation suivante :

$$\text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) = y \Longleftrightarrow x = \arcsin(y).$$

Exemple. Que vaut $\arcsin(\frac{1}{2})$?

Par définition,

$$\theta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \Longleftrightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \sin(\theta) = \frac{1}{2}.$$

Par identification, $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Cours assuré par : Dr D. N. Diatta(dndiatta@univ-zig.sn)