Correction des exercices du cours de probabilité

PAR

Daouda Niang Diatta (dndiatta@univ-zig.sn)

Exercice 1. On tire au hasard quatre cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité pour que, parmi ces quatre cartes, il y ait exactement deux rois ?

Solution 1. L'hypothèse au hasard amène à modéliser cette expérience comme un tirage uniforme dans un certain ensemble Ω qu'il faut préciser. Ici, on prend pour Ω la classe des parties à 4 éléments de l'ensemble de 52 cartes. Le cardinal de Ω est $\binom{52}{4}$et $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur Ω. Les résultats favorables sont les tirages qui contiennent exactement 2 rois, à savoir 2 rois et 2 cartes parmi les 48 cartes autres que des rois.

22 Ainsi, la probabilité cherchée vaut :

$$\frac{\binom{4}{2}\binom{48}{2}}{\binom{52}{4}}$$

Exercice 2. On lance trois dés parfaitement équilibrés. Montrer que la probabilité que la somme des points amenés dépasse dix est égale à la probabilité que cette somme ne dépasse pas dix. (Cela permettra de construire un jeu parfaitement équitable...)

Solution 2. L'ensemble Ω est ici l'ensemble des suites (a_1, a_2, a_3) de 3 nombres compris entre 1 et 6, muni de la probabilité $\mathbb{P}$ uniforme. Remarquons que :

$$a_1+a_2+a_3>10 \Longleftrightarrow (7-a_1)+(7-a_2)+(7-a_3) \leq 10.$$

Ainsi, si A désigne l'événement « la somme des points obtenus est strictement supeérieure à 10 », nous remarquons que l'application $(a_1, a_2, a_3) \mapsto (7-a_1, 7-a_2, 7-a_3)$ est une bijection de A sur A^c. Les événements A et A^c ont donc même cardinal, et donc même probabilité de réalisation.

Exercice 3. Rappelons le problème du chevalier de Méré. Ce personnage marquant de la cour de Louis XIV qui "avait très bon esprit, mais n'était pas très bon géomètre" était un joueur impénitent, toujours à la recherche de règles cachées lui permettant d'avoir un avantage sur ses adversaires. Voici deux de ses règles.

1. Il est avantageux de parier sur l'apparition d'au moins un 6 en lançant un dé 4 fois de suite.
2. Il est avantageux de parier sur l'apparition d'au moins un double six en lançant deux dés 24 fois de suite.

Que pouvez vous dire de ces règles du Chevalier de Méré ?

Solution 3.

1. Pour la première règle : la probabilité de l'événement qui nous intéresse vaut :

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0,5177 > \frac{1}{2}.$$

La différence avec $\frac{1}{2}$ est faible, mais apte à fournir à long terme des gains assurés. Cette règle est bonne puisque la probabilité de l'événement qui nous intéresse est supérieure à $\frac{1}{2}$.

2. Pour la deuxième règle : Cette règle est mauvaise, puisque la probabilité de l'événement cherché vaut :

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \simeq 0,4914 < \frac{1}{2}.$$

Remarque. Le Chevalier était donc moins heureux avec cette règle qu'avec la précédente. En fait, il s'était laissé abuser par un soi-disant argument d'homothétie : en lançant un dé, il y a 6 résultats possibles, en lançant deux dés, il y en a $6^2=36$, soit 6 fois plus.

Comme il est avantageux de parier sur l'apparition d'au moins un 6 en lançant un dé 4 fois de suite, il doit être avantageux de parier sur l'apparition d'un double-six en lançant deux dés $4 \times 6 = 24$ fois de suite. Paradoxe !

Exercice 4. Parmi n personnes en présence ($n \leq 365$), quelle est la probabilité pour qu'au moins deux personnes soient nées le même jour ? (On conviendra de ne pas prendre en compte les personnes nées le 29 février). Que vaut cette probabilité pour $n=4, n=16, n=22, n=40, n=64$?

Solution 4.

Modélisation :

→ Espace d'états : $\Omega = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i \in [\![1, 365]\!]\}$.

→ Ensemble des événements aléatoires : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, ensembles des parties de Ω.

→ Mesure de probabilité : probabilité uniforme sur Ω :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{card}(A)}{365^n}.$$

Soit A l'événement « au moins deux personnes sont nées le même jour »

$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$, où A^c est l'événement « les jours de naissance des n personnes sont deux à deux distinctes ».

Or $\mathbb{P}(A^c) = \frac{\text{card}(A^c)}{365^n} = \frac{A_{365}^n}{365^n}$, où A_{365}^n désigne l'arrangement de n éléments distincts parmi 365 éléments distincts.

Ainsi, $\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n} = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \times 365^n}$

n	4	16	22	40	64
$\mathbb{P}(A)$	0,01	0,28	0,47	0,89	0,99

Exercice 5. Un facteur possède n lettres adressées à n destinataires distincts. Il est totalement ivre et poste au hasard une lettre par boîte.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir la bonne répartition ?
2. Quelle est la probabilié qu'une lettre au moins arrive à la bonne adresse ?
3. Quelle est la probabilité qu'aucune lettre n'arrive à la bonne destination ?
4. Quel est le nombre de manières différentes de poster les lettres de telle sorte qu'aucune n'arrive à destination ?

Solution 5.

Modélisation :

→ Espace d'états : $\Omega = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i \in [\![1, n]\!], \forall (i,j), \text{si } i \neq j \text{ alors } x_i \neq x_j\}$.

Ainsi un élément de Ω est une permutation de n de $\{1, \ldots, n\}$, d'où :

$$\text{card}(\Omega) = n!$$

→ Ensemble des événements aléatoires : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, ensembles des parties de Ω.

→ Mesure de probabilité : probabilité uniforme sur Ω :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{card}(A)}{n!}.$$

1. Soit A_1 l'événement « la bonne répartition est obtenue ». Comme il n'y a qu'une et une seule bonne répartion des lettres, $\text{card}(A_1) = 1$, d'où :

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{n!}.$$

2. Soit A_2 l'événement « Une lettre au moins arrive à la bonne adresse ».

   Numérotons de 1 à n les lettres et utilisons les mêmes numéros pour identifier les boîtes qui sont censés leur correspondre.

   Soit B_i l'événement « la lettre numéro i arrive à la boîte numéro i ».

   On a : $\text{card}(B_i) = (n-1)!$, d'où $\mathbb{P}(B_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.

   Il est important de remarquer que, par définition des événements A_2 et B_i :

$$A_2 = \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

   Ainsi

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right).$$

   Il existe une formule dite de Poincaré qui généralise (à une union de longueur n) la formule du cours $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$. L'usage de la formule de Poincaré permet d'établir que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i}$$

   et de conclure que :

$$\mathbb{P}(A_2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i}$$

3. Soit A_3 l'événement « Aucune lettre n'arrive à la bonne destination ». L'événement A_3 est l'événement contraire de l'événement A_2. Ainsi $A_3 = A_2^c$. D'où :

$$\mathbb{P}(A_3) = 1 - \mathbb{P}(A_2) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i}.$$

4. Déterminons d_n le nombre de manières différentes de poster les lettres de telle sorte qu'aucune n'arrive à destination.

   Par définition $d_n = \text{card}(A_3)$. Comme $\mathbb{P}(A_3) = \frac{\text{card}(A_3)}{n!}$, alors on en déduit que :

$$d_n = n! \times \mathbb{P}(A_3).$$

   Or par la question précédente :

$$\mathbb{P}(A_3) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i}.$$

   D'où :

$$d_n = n! \times \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i}.$$