Calcul propositionnel.

1 Introduction

Les liens étroits entre logique et informatique ne sont pas récents, avec pour exemple la citation suivante de plus de 40 ans : *« It is reasonable to hope that the relationship between computation and mathematical logic will be as fruitful in the next century as that between analysis and physics in the last. The development of this relationship demands a concern for both applications and mathematical elegance »*.

Le **calcul des propositions** ou **calcul propositionnel** fait partie de la logique mathématique. Il a pour objet l'étude des relations logiques entre « propositions » et définit les lois formelles selon lesquelles les propositions complexes sont formées en assemblant des propositions simples au moyen des connecteurs logiques et celles-ci sont enchaînées pour produire des raisonnements valides.

Un *calcul* ou un *système déductif* est, en logique, un ensemble de règles permettant en un nombre fini d'étapes et selon des règles explicites de pouvoir affirmer si une proposition est vraie. Un tel procédé s'appelle une *démonstration*. On associe aussi aux propositions une structure mathématique qui permet de garantir que ces raisonnements ou démonstrations ont du sens, on dit qu'on lui a donné une sémantique. En calcul des propositions classique, cette sémantique n'utilise que deux valeurs, *vrai* et *faux* (souvent notées 1 et 0). Une proposition entièrement déterminée (c'est-à-dire dont les valeurs des constituants élémentaires sont déterminées) ne prend qu'une seule de ces deux valeurs.

Ce chapitre met l'accent sur le calcul des propositions, qui est un des fondements de la logique classique, initiée par Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848–1925).

2 Les fondements de la logique des propositions

Qu'est-ce donc qu'un raisonnement ? Si l'on sait que tous les écureuils sont des rongeurs, que tous les rongeurs sont des mammifères, que tous les mammifères sont des vertébrés et que tous les vertébrés sont des animaux, on peut en déduire que tous les écureuils sont des animaux....

Ce raisonnement est simple à l'extrême, mais sa structure ne diffère pas fondamentalement de celle d'un raisonnement mathématique. Dans les deux cas, le raisonnement est formé d'une suite de propositions dans laquelle chacune découle logiquement des précédentes, ... Dans ce cas, on applique la même règle trois fois. Cette règle permet, si l'on sait déjà que tous les Y sont des X et que tous les Z sont des Y , de déduire que tous les Z sont des X.

Cette section formalise la notion de proposition (Sec. 2.1), montre comment les propositions peuvent être connectées entre elles (Sec. 2.2) et comment elles sont représentées syntaxiquement (Sec. 3.3).

2.1 Les propositions

L'homme exprime son raisonnement par un discours, et ce discours utilise une langue (Diolas, Wolof, arabe, français, anglais,. . .). D'une manière générale, ce discours est articulé en phrases, d'un niveau de complexité variable, et c'est l'étude de ces « énoncés » que se propose de faire la logique.

Définition. (Proposition) *Parmi tous les énoncés possibles qui peuvent être formulés dans une langue, on distingue ceux auxquels* ***il est possible d'attribuer une « valeur de vérité »*** *: vrai ou faux. Ces énoncés porteront le nom de propositions.*

Exemple. Ainsi « Le Sénégal est un pays africain », « La Licence L2i de l'UASZ a été créée en 2010 » sont des propositions, puisqu'on peut leur attribuer une valeur de vérité (« vrai » pour la première, « faux » pour la seconde). Parcontre Une phrase optative (qui exprime un souhait comme « Que Dieu nous protège ! »), une phrase impérative (« viens ! », « tais-toi ! ») ou une interrogation n'est pas une proposition. « Que Dieu nous protège ! » ne peut être ni vraie ni fausse : elle exprime uniquement un souhait du locuteur.

Le calcul que l'on étudie considère toujours comme acquises les vérités suivantes, élevées au rang d'axiomes.

Axiome 1. (Principe de non-contradiction) *Une proposition ne peut être simultanément vraie et fausse.*

Axiome 2. (Principe du tiers-exclu) *Une proposition est vraie ou fausse (il n'y a pas d'autre possibilité).*

2.2 Les connecteurs logiques

L'analyse logique d'une phrase (reconnue comme proposition) fait apparaître des sous-phrases qui constituent elles-mêmes des propositions. Ces « membres de phrases » sont reliés entre eux par des « connecteurs logiques », comme expliqué dans la partie suivante.

Analyse logique des propositions. Considérons l'énoncé : « *J'ai obtenu une mauvaise note à cet examen parce que je n'ai pas assez travaillé ou parce que le cours est trop difficile* ». On suppose qu'il est possible d'attribuer une valeur de vérité à cet énoncé « global », ce qui le classe parmi les propositions.

On peut alors mener l'analyse logique de cette phrase, de manière à en extraire les propositions (au sens grammatical du terme) : « *J'ai obtenu une mauvaise note à cet examen* », « *je n'ai pas assez travaillé* », « *le cours est trop difficile* », qui sont aussi des propositions au sens logique du terme.

Globalement, cet énoncé exprime que « *ma mauvaise note* » est conséquence de l'une (au moins) des deux causes suivantes :

- « *mon manque de travail* »,
- « *un cours trop difficile* ».

Ainsi, (« *mon manque de travail* » ou « *cours trop difficile* ») entraîne « *ma mauvaise note* ».

D'une manière générale, le calcul propositionnel ne se préoccupe que des **valeurs de vérité**, et pas du tout **des liens sémantiques** qui peuvent exister entre des propositions. Ces dernières sont reliées entre elles syntaxiquement par des connecteurs comme « *ou* » ou « *entraîne* ».

Définition. (Connecteurs logiques) *Les connecteurs logiques sont donc des symboles qui permettent de produire des propositions (« plus complexes ») à partir d'autres propositions (« plus simples »). En calcul propositionnel, ils sont définis axiomatiquement à partir de leurs tables de vérité.*

Tables de vérité des connecteurs logiques

Axiome 3. (Disjonction logique) `Connecteur « ou », symbole` $\vee$.
À partir de deux propositions P et Q, ce connecteur permet la construction de la nouvelle proposition (P ou Q) [notée $P \vee Q$], dont la valeur de vérité est définie par la table de vérité :

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

On remarque que $P \vee Q$ est fausse si et seulement si les deux propositions P et Q sont fausses.

Remarque. Dans le langage courant, le mot « ou » est souvent employé de deux façons distinctes :

1. il est parfois utilisé avec le sens « les deux cas peuvent se produire »,
2. parfois avec le sens «P ou Q, mais pas les deux»(par exemple « il ira à Dakar ou à Saint Louis »).

Sauf indication contraire, le « ou » sera toujours employé avec la première signification.

Axiome 4. **(Conjonction logique)** `Connecteur « et », symbole` $\wedge$.
À partir de deux propositions P et Q, ce connecteur permet la construction de la nouvelle proposition (P et Q) [notée $P \wedge Q$], dont la valeur de vérité est définie par la table de vérité :

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

On remarque que $P \wedge Q$ est vraie si et seulement si les deux propositions P et Q sont vraies.

Axiome 5. **(Négation logique)** `Connecteur « non », symbole` $\neg$.
À partir d'une proposition P, ce connecteur permet la construction de la nouvelle proposition (non P) [notée $\neg P$], dont la valeur de vérité est définie par la table de vérité :

P	$\neg P$
F	V
V	F

Axiome 6. **(Implication logique)** `Connecteur « si ...alors », symbole` $\Rightarrow$.
À partir de deux propositions P et Q, ce connecteur permet la construction de la nouvelle proposition (Si P alors Q) [notée $P \Rightarrow Q$], dont la valeur de vérité est définie par la table de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Remarque. Lorsque la proposition P est fausse, la proposition « Si P, alors Q » est vraie, quelle que soit la valeur de vérité de la proposition Q.

Exercice 1. Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes dans le monde actuel (c.-à-d. celui dans lequel nous vivons) :

1. « si la terre est plate, alors la lune est carrée ; »
2. « si le soleil tourne autour de la terre alors la terre est ronde »
3. « si la terre est ronde alors le soleil tourne autour de la terre »
4. « si vous étudiez la logique alors $E = m.c^2$ »
5. « s'il pleut en ce moment alors il pleut en ce moment »
6. « si tous les hommes sont passionnés par la logique alors Dieu existe »
7. « si le Diable existe alors ceci est un exercice de logique »

La manière de mener un raisonnement qui utilise éventuellement des propositions qui se présentent sous la forme d'implications logiques est l'objet de la théorie de la déduction qui sera étudiée plus loin.

Axiome 7. **(Équivalence logique)** `Connecteur « si et seulement si», symbole` $\Leftrightarrow$.
À partir de deux propositions P et Q, ce connecteur permet la construction de la nouvelle proposition (P si et seulement si Q) [notée $P \Leftrightarrow Q$], dont la valeur de vérité est définie par la table de vérité :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

2. « A est condition nécessaire pour B »
3. «A sauf si B»
4. «A seulement si B»
5. « A est condition suffisante pour B »
6. «A bien que B»
7. « Non seulement A, mais aussi B »
8. «A et pourtant B»
9. «A à moins que B»
10. «Ni A, ni B»

Exercice 6. Les variables propositionnelles N et T serviront, dans cet exercice, à représenter (respectivement) les propositions « *Un étudiant a de bonnes notes* » et « *Un étudiant travaille* ». À l'aide des variables propositionnelles N et T, formaliser les propositions suivantes (si, pour l'une ou l'autre d'entre elles, la traduction vous paraît impossible, dites-le et expliquez pourquoi) :

1. C'est seulement si un étudiant travaille qu'il a de bonnes notes.
2. Un étudiant n'a de bonnes notes que s'il travaille.
3. Pour un étudiant, le travail est une condition nécessaire à l'obtention de bonnes notes.
4. Un étudiant a de mauvaises notes, à moins qu'il ne travaille.
5. Malgré son travail, un étudiant a de mauvaises notes.
6. Un étudiant travaille seulement s'il a de bonnes notes.
7. À quoi bon travailler, si c'est pour avoir de mauvaises notes ?
8. Un étudiant a de bonnes notes sauf s'il ne travaille pas.

Lorsqu'on remplace, dans une formule propositionnelle, les variables propositionnelles par des propositions, l'assemblage obtenu est une proposition. Cependant, une formule propositionnelle n'est pas une proposition : $A \Rightarrow B$ n'est ni vrai ni faux.

Proposition 9. (Règles de priorité des connecteurs logiques) *Les conventions de priorité des connecteurs logiques sont les suivantes (par ordre de priorité décroissante) :*

- *la négation,*
- *la conjonction et la disjonction (au même niveau),*
- *l'implication et l'équivalence (au même niveau).*

Exemple. $\neg A \wedge B \Rightarrow C$ doit être interprétépar$((\neg A) \wedge B) \Rightarrow C$ et $A \vee B \wedge C$ n'a pas de sens, car les deux connecteurs ont même niveau de priorité.

Proposition 10. (Associativité des opérateurs $\vee$ et $\wedge$) *Les opérateurs $\vee$ et $\wedge$ sont associatifs :*

- $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C) = A \vee B \vee C,$
- $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) = A \wedge B \wedge C.$

Mais le parenthésage est obligatoire quand $\vee$ et $\wedge$ se trouvent dans la même proposition, puisqu'il n'y a pas de priorité entre $\vee$ et $\wedge$:$(A \vee B) \wedge C \neq A \vee (B \wedge C)$.

Remarque. L'implication n'est pas associative : $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \neq (A \Rightarrow B) \Rightarrow C$. Donc les parenthèses sont obligatoires. Il en est de même pour $\Leftrightarrow$, et a fortiori quand ces deux opérateurs sont mélangés dans une même proposition.

Exercice 7. Quelles sont les 5 façons de placer des parenthèses dans $\neg P \vee Q \wedge \neg R$ afin d'obtenir l'expression correcte d'une formule propositionnelle ? Déterminer la table de vérité de chacune des formules obtenues.

Exercice 8. Construire les tables de vérité des formules propositionnelles suivantes :

1. $\neg P \wedge Q$
2. $\neg P \Rightarrow P \vee Q$
3. $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$

Cours assuré par : DR D. N. DIATTA(dndiatta@univ-zig.sn)

Remarque. Même remarque que pour l'implication logique : l'équivalence logique de deux propositions fausses est une proposition vraie.

Exercice 2. En notant M et I les affirmations suivantes :

- M = «Ibrahima est fort en Maths»,
- I = «Ibrahima est fort en Informatique»,

représenter les affirmations qui suivent sous forme symbolique, à l'aide des lettres M et I et des connecteurs usuels.

1. « Ibrahima est fort en Maths mais faible en Informatique »
2. « Ibrahima n'est fort ni en Maths ni en Informatique »
3. « Ibrahima est fort en Maths ou il est à la fois fort en Informatique et faible en Maths »
4. « Ibrahima est fort en Maths s'il est fort en Informatique »
5. « Ibrahima est fort en Informatique et en Maths ou il est fort en Informatique et faible en Maths »

Exercice 3. Énoncer la négation des affirmations suivantes en évitant d'employer l'expression : « *il est faux que* »

1. « S'il pleut ou s'il fait froid je ne sors pas »
2. « Le nombre 522 n'est pas divisible par 3 mais il est divisible par 7 »
3. « Ce quadrilatère n'est ni un rectangle ni un losange »
4. « Si Paul ne va pas travailler ce matin il va perdre son emploi »
5. « Tout nombre entier impair peut être divisible par 3 ou par 5 mais jamais par 2 »
6. « Tout triangle équilatéral a ses angles égaux à 60° »

Exercice 4. Quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes ?

1. π vaut 4 et la somme des angles d'un triangle vaut 180°
2. π vaut 3,141592. . . implique que la somme des angles d'un triangle vaut 180°
3. π vaut 4 implique que la somme des angles d'un triangle vaut 182°
4. Il n'est pas vrai qu'un entier impair ne puisse pas être divisible par 6
5. Si 2 est plus grand que 3 alors l'eau bout à 100°C
6. Si 6 est plus petit que 7 alors 7 est plus petit que 6
7. Si 7 est plus petit que 6 alors 6 est plus petit que 7
8. 84 est divisible par 7 implique que 121 est divisible par 11
9. Si 531617 + 1 est divisible par 7 alors 531617 + 1 est plus grand que 7
10. La décimale d de π qui porte le numéro 10^{400} est 3 implique que si d n'est pas 3 alors d est 3.

2.3 Variables et formules propositionnelles

Comme le calcul propositionnel ne s'occupe que des valeurs de vérité, il est possible, dans une expression logique, de remplacer chaque proposition donnée par un symbole (en général, une lettre de l'alphabet majuscule), ou ***variable propositionnelle*** et d'étudier ensuite les valeurs de vérité de l'expression en fonction des valeurs de vérité de ces symboles.

Proposition 8. *Les règles (de syntaxe) qui permettent de former des formules propositionnelles sont les suivantes :*

- *toute variable propositionnelle est une formule propositionnelle ;*
- *si F et G sont des formules propositionnelles, alors $\neg(F)$, $(F)\vee(G)$, $(F)\wedge(G)$, $(F)\Rightarrow(G)$ et $(F)\Leftrightarrow(G)$ sont des formules propositionnelles.*

Remarque. Ce ne sont plus des propositions, en ce sens qu'elles n'ont en général pas de valeur de vérité déterminée. Cette dernière est une fonction des valeurs de vérité des variables propositionnelles qui interviennent dans l'expression de la formule propositionnelle considérée.

Exercice 5. A et B sont des variables propositionnelles, susceptibles de représenter n'importe quelle proposition. Formaliser, à l'aide de connecteurs logiques appropriés, les énoncés suivants :

1. «A si B»