Calcul propositionnel : déductions syntaxiques

1 Présentation de la théorie de la démonstration

Il s'agit ici d'explorer les mécanismes du raisonnement humain, c'est-à-dire les schémas de pensée qui nous permettent de décider d'agir d'une certaine manière, dans le but d'obtenir un certain résultat.

En théorie de la démonstration, une preuve est un objet mathématique. Elle est classiquement représentée comme une structure de donnée (liste, arbre,…). Elle est construite à l'aide d'axiomes logiques et de règles d'inférence. Plus formellement :

Définition 1. (Axiome logique) *Un axiome logique est une tautologie qui sert de « point de départ » aux déductions du système formel.*

Définition 2. (Règle d'inférence) *Une règle d'inférence est une règle qui, à partir de formules prémisses, produit une formule conclusion.*

Définition 3. (Théorème logique) *Un résultat obtenu par une déduction correcte ou une suite de déductions correctes (c'est-à-dire qui utilisent explicitement les règles d'inférence autorisées) à partir des axiomes logiques et, éventuellement, d'autres résultats du même type déjà établis par ailleurs s'appelle un théorème logique.*

Notation 4. *On exprime que la formule F est un théorème par la notation : $\vdash F$, qui se lit « F est un théorème ».*

Définition 5. (Démonstration) *La chaîne de déductions qui conduit à un théorème logique est appelée démonstration de ce résultat.*

Remarque 6. (Démonstration sous hypothèses) Il est possible d'utiliser des formules logiques supplémentaires (autres que des axiomes ou des théorèmes) et de mener un raisonnement correct à partir de ces formules (et des axiomes et des théorèmes déjà connus). On parle alors de démonstration sous hypothèses.

Notation 7. *L'affirmation « la formule logique H est démontrée sous les hypothèses G_1, G_2, ..., G_n » est notée $\{G_1, G_2, ..., G_n\} \vdash H$.*

2 Axiomes logiques et règles d'inférence du système formel « PR »

Il existe plusieurs systèmes d'axiomes qui permettent de définir la logique propositionnelle. Nous nous en tiendrons à l'ensemble des axiomes suivants, qui n'est ni minimal, ni contradictoire.

Axiomes relatifs à l'implication logique :

- Axiome 1 : $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
- Axiome 2 : $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

Axiomes relatifs à la conjonction logique :

- Axiome 3 : $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P \wedge Q)$
- Axiome 4 : $P \wedge Q \Rightarrow P$
- Axiome 5 : $P \wedge Q \Rightarrow Q$

Axiomes relatifs à la disjonction logique :

- Axiome 6 : $P \Rightarrow P \vee Q$
- Axiome 7 : $Q \Rightarrow P \vee Q$
- Axiome 8 : $(P \Rightarrow R) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \vee Q \Rightarrow R))$

Axiomes relatifs à la négation logique :

- Axiome 9 : $\neg\neg P \Rightarrow P$
- Axiome 10 : $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg P)$

Axiomes relatifs à l'équivalence logique :

- Axiome 11 : $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow P) \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q))$
- Axiome 12 : $(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$
- Axiome 13 : $(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

Exercice 1. Établir que les les 13 axiomes précédents sont bien des axiomes au sens de la Définition 1.

Définition 8. (modus ponens) *On définit la règle d'inférence du modus ponens (le mode « en posant, on pose ») :*

$$\{P, P \Rightarrow Q\} \vdash Q$$

Définition 9. (Système formel "PR") *Le système formel composé des 13 axiomes précédents et du modus ponens est nommé « PR ».*

3 Démonstration avec ou sans hypothèses

Un raisonnement logique peut être rédigé sous forme de démonstration, soit d'un théorème, soit d'une conséquence de certaines hypothèses.

3.1 Démonstration d'un théroème

La démonstration d'un théorème est constituée :

1. d'un en-tête, portant l'indication «Démonstration»;
2. puis d'un certain nombre de lignes, numérotées (pour pouvoir être référencées dans la suite); Chacune comporte deux champs :
   a) une formule, qui est le « résultat » de la ligne courante ;
   b) la justification du résultat ;
3. une dernière ligne, non numérotée, qui porte l'en-tête « Conclusion ».

Dans une ligne, on peut avancer :

- un axiome en remplaçant éventuellement une variable par une formule ;
- un théorème considéré comme connu (dont la démonstration a été vue par ailleurs), en remplaçant éventuellement une variable par une formule;
- un résultat de l'application d'une règle d'inférence sur des formules écrites dans les lignes précédentes.

Exemple 10. (Théorème de reflexivité de l'implication) Soit P une formule propositionnelle. On souhaite démontrer le théorème de réflexivité de l'implication :

$$\vdash (P \Rightarrow P).$$

Démonstration.

1.	$(P \Rightarrow (P \Rightarrow P)) \Rightarrow ((P \Rightarrow ((P \Rightarrow P) \Rightarrow P)) \Rightarrow (P \Rightarrow P))$	Axiome 2 $(Q := (P \Rightarrow P), R := P)$
2.	$P \Rightarrow (P \Rightarrow P)$	Axiome 1 $(Q := P)$
3.	$(P \Rightarrow ((P \Rightarrow P) \Rightarrow P)) \Rightarrow (P \Rightarrow P)$	modus ponens sur 2. et 1.
4.	$P \Rightarrow ((P \Rightarrow P) \Rightarrow P)$	Axiome 1 $(Q := P \Rightarrow P)$
5.	$(P \Rightarrow P)$	modus ponens sur 4. et 3.

Conclusion. $\vdash (P \Rightarrow P)$ □

3.2 Démonstration sous hypothèses

Une démonstration sous hypothèses

1. commence par une première ligne qui comporte les mots « **Démonstration sous les hypothèses** » suivie de l'écriture de l'ensemble des hypothèses utilisées ;
2. puis, comme dans une démonstration de théorème, de lignes numérotées... dans lesquelles peuvent figurer les mêmes éléments, auxquels il faut ajouter les hypothèses, dont on a le droit de se servir comme s'il s'agissait de résultats établis ;
3. une ligne de conclusion qui rappelle les hypothèses.

Exemple 11. (modus tollens) L'objectif est d'obtenir $\{P \Rightarrow Q, \neg Q\} \vdash \neg P$ qui est plus connu sous le nom « modus tollens ».

Soit P et Q des formules propositionnelles quelconques, montrons $\neg P$ sous les hypothèses $P \Rightarrow Q$ et $\neg Q$:

Démonstration sous les hypothèses $\{P \Rightarrow Q, \neg Q\}$.

1. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg P)$ Axiome 10
2. $P \Rightarrow Q$ Hypothèse 1
3. $(P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg P$ modus ponens sur 2. et 1.
4. $\neg Q \Rightarrow (P \Rightarrow \neg Q)$ Axiome 1 ($P := \neg Q$, $Q := P$)
5. $\neg Q$ Hypothèse 2
6. $(P \Rightarrow \neg Q)$ modus ponens sur 5. et 4.
7. $\neg P$ modus ponens sur 6. et 3.

Conclusion : $\{P \Rightarrow Q, \neg Q\} \vdash \neg P$.

4 Théorème de la déduction

Les démonstrations sont souvent considérablement simplifiées par l'utilisation du théorème de la déduction donné ci-après.

Théorème 12. (Théorème de la déduction) *Ce théorème s'énonce par :*

$$\{G_1, G_2, ..., G_n\} \vdash H \text{ si et seulement si } \{G_1, G_2, ..., G_{n-1}\} \vdash (G_n \Rightarrow H)$$

Démonstration. La démonstration s'effectue par récurrence sur la longueur de la déduction.

Seulement si : Hypothèse : $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\} \vdash H$. Soit p la longueur de la déduction qui amène à H.

- Si $p = 1$: une « déduction de longueur 1 » n'autorise l'écriture que d'une seule ligne. Cela signifie donc que l'on peut directement écrire H dans celle-ci. Ce n'est possible que si H est un axiome ou une hypothèse.
  - Si H est un axiome :

    Démonstration sous les hypothèses $\{G_1, G_2 ..., G_{n-1}\}$:

    1. $H \Rightarrow (G_n \Rightarrow H)$ Axiome 1
    2. H Axiome j
    3. $G_n \Rightarrow H$ modus ponens 2. et 1.

    Conclusion : $\{G_1, G_2, ..., G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$.

    Dans ce premier cas : $\{G_1, G_2, ..., G_n\} \vdash H$ implique $\{G_1, G_2, ..., G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$ (les hypothèses ne sont en fait pas utilisées, donc elles n'interviennent pas).
  - Si H est l'une des hypothèses $\{G_1, G_2, ..., G_{n-1}\}$, posons $H = G_i\,(1 \leqslant i \leqslant n-1)$:

    Démonstration sous les hypothèses $\{G_1, G_2, ..., G_{n-1}\}$:

    1. $G_i \Rightarrow (G_n \Rightarrow G_i)$ Axiome 1

2. G_i Hypothèse

3. $G_n \Rightarrow G_i$ modus ponens 2. et 1.

Conclusion : $\{G_1, G_2, ..., G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$.

Dans ce deuxième cas : $\{G_1, G_2, ..., G_n\} \vdash H$ implique $\{G_1, G_2, ..., G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$ (Seule l'hypothèse G_i a été utilisée, les autres ne sont en fait pas utilisées, elles n'interviennent pas)

– Si H est l'hypothèse G_n, alors on sait que : $\vdash G_n \Rightarrow G_n$ (voir paragraphe précédent).
Dans ce troisième cas : $\{G_1, G_2, ..., G_n\} \vdash H$ implique $\{G_1, G_2, ..., G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$.

Conclusion : la propriété est vraie pour $p=1$.

- Hypothèse de récurrence : Soit p un entier tel que la propriété soit vraie pour tous les entiers i de 1 à p (récurrence généralisée) ; on suppose que la longueur de la déduction qui mène à H est $(p+1)$.

  – Si H est un axiome ou l'une des hypothèses, le cas se traite comme ci-dessus.

  – Dans le cas contraire, H ne peut avoir été obtenu que par un « modus ponens » sur des formules P et $P \Rightarrow H$. Ces formules ont elles-mêmes été obtenues par des déductions de longueur inférieure ou égale à p, donc on peut dire que
  $\{G_1, G_2, ..., G_n\} \vdash P$ implique $\{G_1, G_2, ..., G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow P$ et que
  $\{G_1, G_2, ..., G_n\} \vdash P \Rightarrow H$ implique $\{G_1, G_2, ..., G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow (P \Rightarrow H)$.
  Démonstration sous les hypothèses $\{G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}\}$:

  1. $G_n \Rightarrow P$ Résultat intermédiaire 1
  2. $G_n \Rightarrow (P \Rightarrow H)$ Résultat intermédiaire 2
  3. $(G_n \Rightarrow P) \Rightarrow ((G_n \Rightarrow (P \Rightarrow H)) \Rightarrow (G \Rightarrow H))$ Axiome 2
  4. $(G_n \Rightarrow (P \Rightarrow H)) \Rightarrow (G_n \Rightarrow H)$ modus ponens sur 1. et 3.
  5. $G_n \Rightarrow H$ modus ponens sur 2. et 4.

  Conclusion : $\{G_1, G_2, ..., G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow (P \Rightarrow H)$, et donc :
  $\{G_1, G_2, ..., G_n\} \vdash P \Rightarrow H$ implique $\{G_1, G_2, ..., G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow (P \Rightarrow H)$, lorsque la déduction est de longueur $p+1$.

Si : Réciproquement, supposons $\{G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}\} \vdash (G_n \Rightarrow H)$. Alors,
Demonstration sous les hypothèses $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$

1. $G_n \Rightarrow H$ Résultat obtenu sous les hypothèses $\{G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}\}$
2. G_n hypothèse n
3. H modus ponens sur 2. et 1.

Conclusion : $\{G_1, G_2, ..., G_n\} \vdash H$.
Donc : $\{G_1, G_2, ..., G_{n-1}\} \vdash G_n \Rightarrow H$ entraîne $\{G_1, G_2, ..., G_n\} \vdash H$. □

Exemple 13. On cherche à montrer le *théorème d'échange des prémisses* :

$$\vdash (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \Rightarrow R))$$

La démonstration de ce théorème équivaut à la démonstration sous hypothèses

$$\{P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\} \vdash (Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)),$$

équivalente à la démonstration sous hypothèses

$$\{P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), Q\} \vdash (P \Rightarrow R),$$

elle-même équivalente à la démonstration sous hypothèses

$$\{P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), Q, P\} \vdash R$$

qui est obtenu comme suit :

Démonstration sous les hypothèses $\{P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), Q, P\}$

1. P Hypothèse
2. $\{P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ Hypothèse
3. $Q \Rightarrow R$ Modus Ponens sur 1. et 2.
4. Q Hypothèse
5. R Modus Ponens sur 4. et 3.

Conclusion : $\{P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), Q, P\} \vdash R$.

Remarque 14. Cette méthode est beaucoup plus rapide que celle qui consisterait à essayer de démontrer ce théorème à partir des axiomes et de la règle d'inférence.

Remarque 15. L'utilisation principale du théorème de la déduction consiste à remplacer la démonstration d'implication par des déductions sous hypothèses.

5 Quelques théorèmes classiques et quelques règles d'inférences annexes

Au théorème de réflexivité de l'implication ($\vdash P \Rightarrow P$) et au théorème d'échange des prémisses ($\vdash (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \Rightarrow R))$)on ajoute ceux qui suivent.

Proposition 16. (Théorème de transitivité de l'implication) *Soit P et Q deux formules propositionnelles quelconques.*

$$\vdash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$$

Exercice 2. Effectuer la démonstration de la Proposition 16.

Définition 17. (Contraposée) *L'implication* $\neg Q \Rightarrow \neg P$ *est appelée contraposée de l'implication* $P \Rightarrow Q$.

Proposition 18. (Théorème de la contraposée) *Soit P et Q deux formules propositionnelles quelconques.*

$$\vdash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

Exercice 3. Effectuer la démonstration de la Proposition 18.

Proposition 19. (Théorème de la contradiction) *Soit P et Q deux formules propositionnelles quelconques.*

$$\vdash \neg P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$$

Intuitivement, cela signifie que si $\neg P$ et P sont établies, alors on peut en déduire n'importe quoi (Q).

Exercice 4. Effectuer la démonstration de la Proposition 19.

On introduit une règle permettant de s'abstraire de l'application de deux modus ponens sur l'Axiome 8. En effet, considérons l'Axiome 8 :

$$\vdash (P \Rightarrow R) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \vee Q \Rightarrow R))$$

En appliquant deux fois de suite le théorème de la déduction, il est équivalent à la déduction :

$$\{P \Rightarrow R, Q \Rightarrow R\} \vdash P \vee Q \Rightarrow R$$

que l'on peut utiliser sous cette forme comme règle d'inférence annexe : elle s'appelle *règle de disjonction des cas.*

Proposition 20. (Règle de disjonction des cas) *On a :*

$$\{P \Rightarrow R, Q \Rightarrow R\} \vdash P \vee Q \Rightarrow R$$

Pour finir, en appliquant deux fois de suite le théorème de la déduction à l'Axiome 10 :

$$\vdash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg P)$$

il est équivalent à la déduction

$$\{P \Rightarrow Q\,, P \Rightarrow \neg Q\} \vdash \neg P$$

que l'on peut utiliser sous cette forme comme règle d'inférence annexe : elle s'appelle *règle de réduction à l'absurde.*

Proposition 21. (Règle de la réduction à l'absurde) *On a :*

$$\{P \Rightarrow Q\,, P \Rightarrow \neg Q\} \vdash \neg P$$

Exercice 5. (Démonstration avec ou sans hypothèses) Démontrer les théorèmes logiques suivants (seuls les axiomes, règles d'inférence, règles d'inférence annexes et théorèmes du cours sont autorisés).

1. $\vdash (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow (P \wedge Q \Rightarrow R)$
2. $\vdash (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
3. $\vdash P \Leftrightarrow \neg\neg P$
4. $\vdash P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
5. $\vdash P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
6. $\{P \vee R, P \Rightarrow Q\,, R \Leftrightarrow S\} \vdash Q \vee S$
7. $\{P \wedge \neg S, Q \vee \neg R, S \Rightarrow R\} \vdash (P \Rightarrow Q) \vee (R \Rightarrow S)$

6 Théorèmes de complétude du calcul propositionnel

On a jusqu'à maintenant deux points de vue :

1. La théorie des valeurs de vérité, avec ses
   - tables de vérités,
   - fonctions de vérités,
   - tautologie, conséquence, hypothèse.
2. La théorie de la démonstration, avec ses
   - axiomes,
   - règles d'inférence,
   - démonstrations (ou démonstrations sous hypothèses).

On peut se demander si les résultats obtenus dans chacune des deux théories sont identiques : une formule propositionnelle est-elle démontrable si et seulement si elle est une tautologie ?

Un sens est immédiat, c'est le « seulement si » : toute proposition démontrée résulte d'un axiome ou de l'application d'une règle sur des propositions déjà démontrées. On peut facilement vérifier que les axiomes fournissent des tautologies et que les règles conservent les tautologies. Toute proposition démontrée est donc une tautologie. On dit que le système déductif « PR » est *correct*. L'autre sens la démonstration qui consiste à vérifier que toute tautologie admet une démonstration dans « PR » est un peu plus complexe et admise. Pour ce sens on dit que « PR » est *complet*.

On retiendra les théorèmes suivants (abusivement nommés théorèmes de complétude).

Proposition 22. (Théorème de complétude) *tout théorème est une tautologie et réciproquement, soit :*

$$\vdash F \text{ si et seulement si } \models F$$

Proposition 23. (Théorème de complétude généralisé) *On a :*

$$\{P_1, P_2, ..., P_n\} \vdash Q \text{ si et seulement si } \{P_1, P_2, ..., P_n\} \vDash Q$$