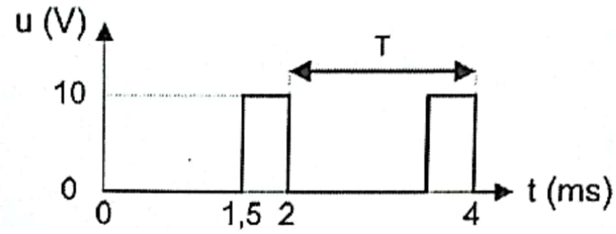
Chapitre 3
Régime sinusoïdal

I- Introduction : les grandeurs périodiques

1. Période

Un signal périodique est caractérisé par sa période :

Pour cette figure,
T=2 ms



2. Fréquence

La fréquence f (en Hertz) correspond au nombre de périodes par unité de temps : $f = \frac{1}{T}$

A.N: T = 2 ms ⇔ f = 500 Hz (500 périodes par seconde)

3. Pulsation

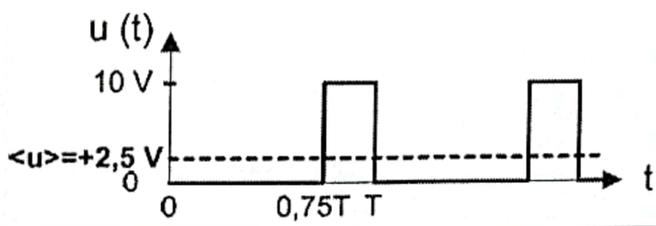
La pulsation est définie par : $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ (en radians par seconde)

4. Valeur moyenne

On note <u> la valeur moyenne dans le temps de la tension u(t) : $\langle u \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$

A.N :

$$\langle u \rangle = \frac{0.25T}{T} \times 10 = 2{,}5 \text{ V}$$

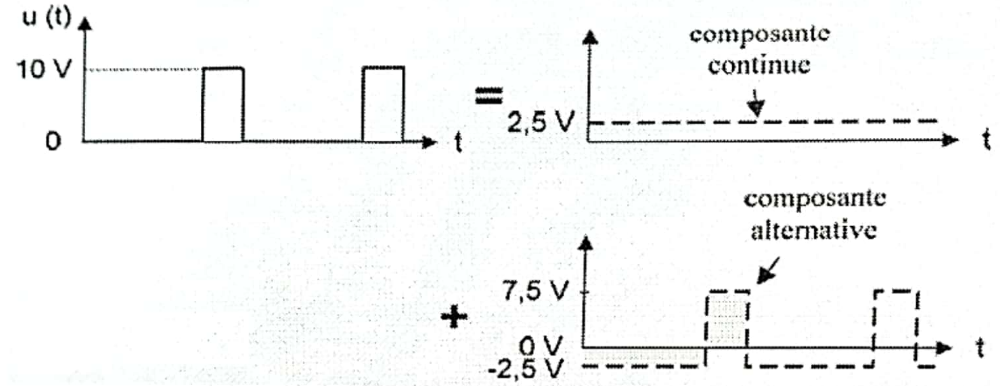


5. Composante continue (DC =) et composante alternative (AC ~)

Une grandeur périodique a deux composantes :

- la composante continue (c'est la valeur moyenne ou « offset »)

- et la composante alternative. => $u(t) = \langle u \rangle + u_{AC}(t)$

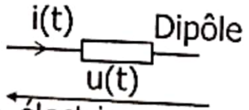


Remarques :

- la composante alternative a une valeur moyenne nulle : $\langle u_{AC} \rangle = 0$

-une grandeur périodique *alternative n'a pas de composante* continue : $\langle u \rangle = 0$

6. Puissance électrique



p(t) = u(t)×i(t) est la puissance électrique consommée à l'instant t (ou puissance instantanée).

En régime périodique, ce n'est pas p(t) qu'il est intéressant de connaître mais la puissance moyenne dans le temps :

$$P = \langle p \rangle = \langle u \bullet i \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u(t) \bullet i(t)dt$$

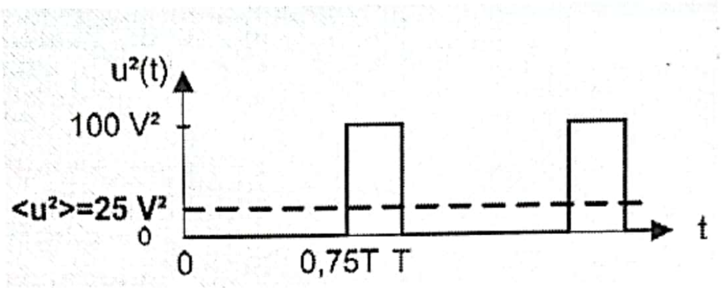
Attention : en général, <u.i> ‡ <u>.<i>

7. Valeur efficace

Par définition, la valeur efficace U_{eff} de la tension u(t) est : $U_{eff} = \sqrt{\langle u^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}$

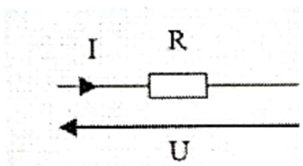
A.N :

$$U_{eff} = \sqrt{100 \times \frac{0.25T}{T}} = 10 \times 0.5V = 5V$$



8. Signification physique de la valeur efficace

Soit une résistance parcourue par un courant *continu :*



La résistance consomme une puissance électrique :

P = RI² = U²/R (loi de Joule)

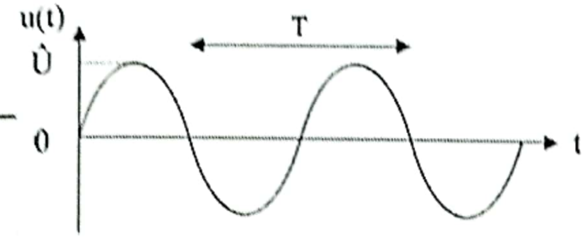
Soit la même résistance parcourue par un courant *périodique i(t)* de valeur efficace I_{eff} :

La puissance moyenne consommée est :

$P = \langle Ri^2 \rangle = R\langle i^2 \rangle$; $P = RI_{eff}^2 = U_{eff}^2 / R$

Pour avoir les mêmes effets thermiques, il faut que I_{eff} soit égal à la valeur du courant en régime continu I (idem pour les tensions) : La notion de valeur efficace est liée à l'énergie.

9. Cas particulier des grandeurs sinusoïdales alternatives



$\hat{U} = U_{max}$

Û désigne la tension maximale (ou tension crête)

On montre que : $U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$

Exemple : SENELEC fournit une tension sinusoïdale alternative de valeur efficace 220 V et de fréquence 50 Hz.

Pour un courant sinusoïdal alternatif : $I_{eff} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$

Pour un signal triangulaire : $U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{3}}$

Pour un signal carré : $U_{eff} = U_{max}$

II- Représentation des grandeurs sinusoïdales

1. Fonction mathématique

avec : $i(t) = I_{max} \sin(\omega t + \varphi_i) = I_{eff}\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_i)$

- I_{eff} : valeur efficace (A)
- ω : pulsation (rad/s)
- t : temps (s)
- $(\omega t + \varphi_i)$: *phase (rad)*
- φ_i : *phase à l'origine (rad)*

Représentation de Fresnel

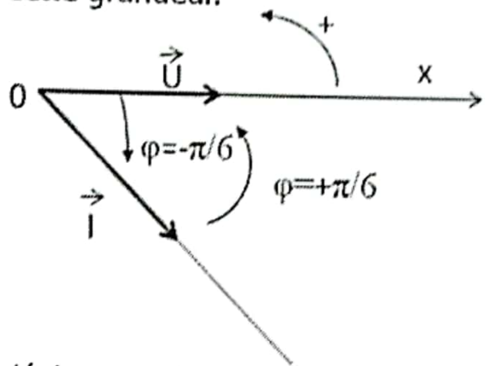
A toute grandeur de pulsation ω, on peut associer un vecteur, tournant à la vitesse angulaire ω, de module égal à la valeur efficace de la grandeur.

On représente ce vecteur à l'origine des temps ; il présente alors avec l'axe de référence des phases Ox un angle orienté égal à la phase à l'origine de la grandeur : c'est le vecteur de Fresnel associé à cette grandeur.

Exemple : $u = 3\sqrt{2}\sin \omega t$

$$i = 2\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\varphi = (\varphi_u - \varphi_i) = \left(0 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$



(φ est la différence de phase entre u et i ou le déphasage de i par rapport à u)

2. Nombre complexe associé

Le nombre complexe I associé au courant i(t) est défini de la façon suivante : $\underline{I} = (I_{eff}, \varphi_i)$

Le module correspond à la valeur efficace et l'argument à la phase à l'origine.

A.N. Déterminer le nombre complexe associé à la tension : $u(t) = 5\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$

$$\underline{U} = (5, +\frac{\pi}{4})$$

$$= 5\cos(+\frac{\pi}{4}) + 5\sin(+\frac{\pi}{4})j$$

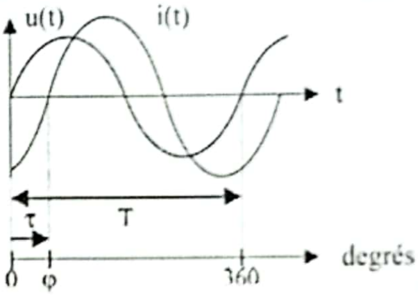
$$= \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}j$$

=> $\underline{U} = 5\,e^{j\pi/4}$

3-Déphasage (ou différence de phase) entre deux grandeurs sinusoïdales

Soit deux grandeurs sinusoïdales (de même fréquence) :

$$i(t) = I_{max} \sin(\omega t + \varphi_i)$$
$$u(t) = U_{max} \sin(\omega t + \varphi_u)$$



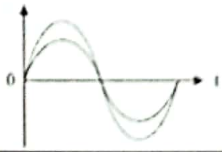
Le *déphasage de u par rapport à i est par convention :* $\varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i$

τ : décalage (en s) entre les deux signaux. $\frac{\tau}{T} = \frac{\varphi(rad)}{2\pi} = \frac{\varphi(°)}{360}$

- **Déphasages particuliers**

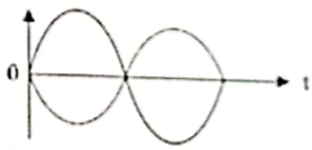
- déphasage nul (τ= 0) :

les grandeurs sont *en phase*



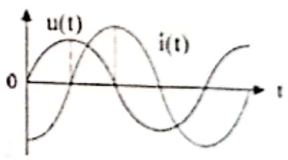
- déphasage de 180° (τ = T/2) :

grandeurs *en opposition de phase*



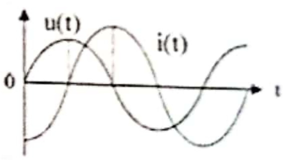
- déphasage de 90° (τ = T/4) :

grandeurs *en quadrature de phase*

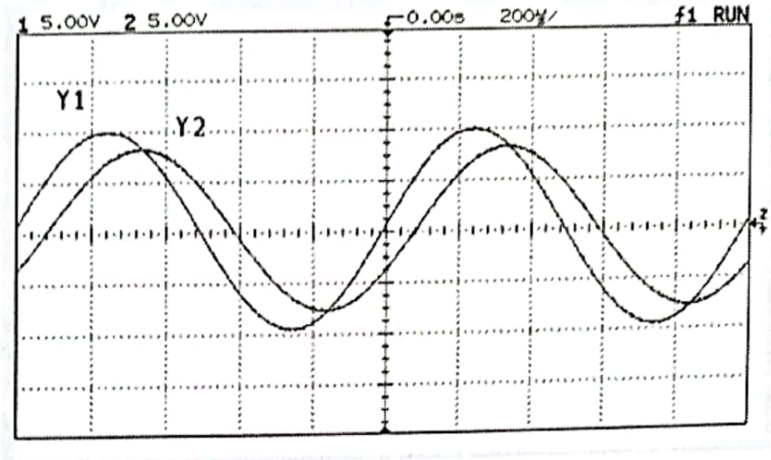


N.B. Le déphasage est une grandeur algébrique : φi/u = - φu/i

Dernière figure : φu/i = +90° : u est en quadrature avance sur i.



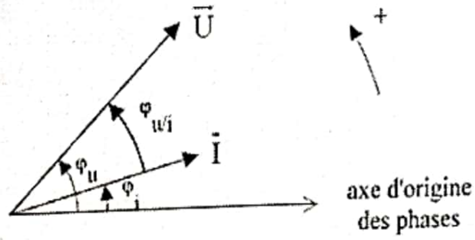
A.N. Calculer le déphasage $\varphi u_1/u_2$: $\varphi_{u1/u2} = 360 \times \dfrac{\tau}{T} = 360 \times \dfrac{100\mu s}{1ms} = +36°$



1 sous-div = 40 µs, τ = 2,5 sous-div et T = 5 div

- **Déphasage et vecteurs de Fresnel**

$$\varphi_{u/i} = (\vec{U}, \vec{I})$$



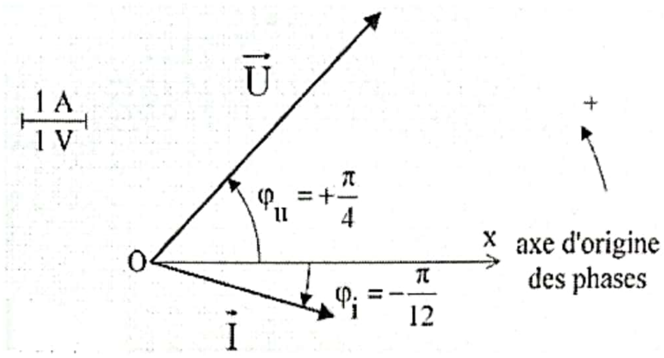
- **Déphasage et nombres complexes**

$$\varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{I})$$

$$\varphi_{u/i} = \arg\left(\frac{\underline{U}}{\underline{I}}\right) = \arg \underline{Z}$$

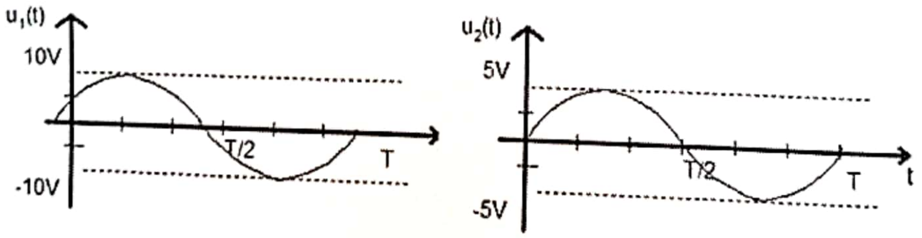
A.N. Calculer le déphasage $\varphi_{u/i}$

$\Phi_{u/i}=60°$



Application 1

Soit les 2 signaux suivants : 1 div = 1 ms



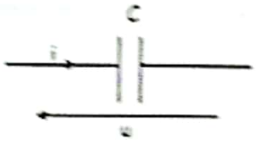
1)Donner l'expression mathématique associé à $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

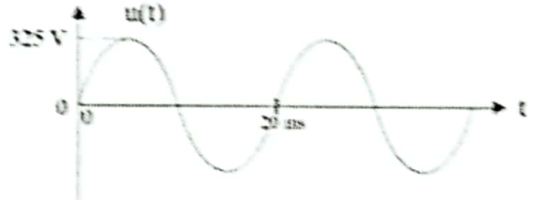
2)Dessiner les vecteurs de Fresnel et associé à $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

3)À l'aide d'un diagramme de Fresnel, dessiner le vecteur associé à la grandeur u(t), tel que : $u(t)= u_1(t)+u_2(t)$.

Application 2

u est une tension sinusoïdale alternative :

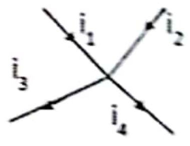




1. Calculer sa valeur efficace U et sa fréquence f.
   On mesure la valeur efficace du courant : I = 0,72 A.
1. En déduire la capacité électrique C du condensateur (en µF).
2. Tracer i(t) en concordance de temps avec u(t).

Application 3

Connaissant les équations horaires : $\begin{cases} i_1 = 3\sqrt{2}\sin(\omega t) \\ i_2 = 6\sqrt{2}\sin(\omega t + \dfrac{\pi}{3}) \\ i_1 = 4\sqrt{2}\sin(\omega t + \dfrac{\pi}{4}) \end{cases}$

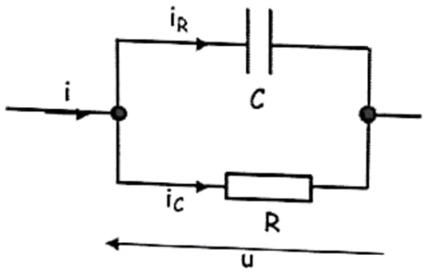


Déterminer i_4 par la méthode complexe et par la méthode de Fresnel.

Scanné avec CamScanner

Application 4

Régime sinusoïdal



On donne U = 10 V, f = 50 Hz, R = 10 kΩ et C = 1 µF.

1) Calculer I_R et I_C.
2) Calculer I et $\varphi u/i$ (au préalable, déterminer l'admittance complexe équivalente : $\underline{Y}_{eq}$).