Relations binaires entre ensembles

1 Relations

Définition. (Relation binaire, graphe) *Soient E et F deux ensembles. Une relation binaire entre E et F est la donnée d'une partie G de l'ensemble produit $E \times F$ ($G \subset E \times F$). Cette partie G est appelée graphe de la relation binaire. On note $\mathcal{R}_G$ la relation binaire de graphe G.*

Soit $\mathcal{R}_G$ une relation de graphe G. Si $x \in E$ et $y \in F$ sont tels que $(x, y) \in G$, ont dit que x est en relation avec y par la relation $\mathcal{R}_G$ et on note $x \mathcal{R}_G y$. Autrement dit, pour $x \in E$, $y \in F$, on a :

$$x \mathcal{R}_G y \Longleftrightarrow (x, y) \in G$$

Remarque. Il est fréquent que l'on omette l'indice G dans la notation $\mathcal{R}_G$ et de noter uniquement $\mathcal{R}$ la relation binaire de graphe G.

Lorsque $E = F$, on par de relation binaire définie dans l'ensemble E. Son graphe est une partie de E^2.

Exercice 1. On se place dans l'ensemble $E = \{1, 2, 3, ..., 20\}$. Représenter, dans le plan muni d'un repère orthonomal, les graphes des relations binaires dans E dont les définitions suivent :

1. $x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow x \leqslant y$.
2. $x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow x | y$: x divise y.
3. $x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow y = x^2$.

1.1 Relations d'ordre

Dans cette sous-section, on se place dans le cas où $E = F$. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie dans E (non vide), de graphe G.

Définition. (Réflexivité) *$\mathcal{R}$ est dite réflexive quand tout élément de E est en relation avec lui-même : $\forall x \in E$, $x \mathcal{R} x$.*

Remarque. (Interprétation géométrique de la réflexivité) En théorie des ensembles, on appelle diagonale d'un ensemble E, le sous-ensemble Δ de E^2 défini par :

$$\Delta := \{(x, x), x \in E\}.$$

Ainsi, si $\mathcal{R}_G$ est une relation binaire de graphe G définie dans E, $\mathcal{R}_G$ est réflexive si et seulement si la diagonale Δ de E est contenue dans G ($\Delta \subset G$).

Définition. (Antisymétrie) *$\mathcal{R}$ est dite antisymétrique si, lorsque x est en relation avec y, alors y ne peut pas être en relation avec x (sauf si $x = y$), autrement dit :*

$$\forall (x, y) \in E^2, \{(x \mathcal{R} y) \wedge (y \mathcal{R} x)\} \Longrightarrow \{x = y\}.$$

Remarque. (Interprétation géométrique de l'antisymétrie) Ainsi, si $\mathcal{R}_G$ une relation binaire de graphe G définie dans E. $\mathcal{R}_G$ est antisymétrique si et seulement outre les éléments de la diagonale Δ aucun élément de G n'a sa symétrique orthogonale par rapport Δ dans G.

Définition. (Transitivité) *$\mathcal{R}$ est dite transitive si, lorsque x est en relation avec y et y l'est avec z,alors x est en relation avec z, autrement dit :*

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \{(x \mathcal{R} y) \wedge (y \mathcal{R} z)\} \Longrightarrow \{x \mathcal{R} z\}.$$

Remarque. L'interprétation géométrique de la transitivité est assez délicate. Elle est laissée en exercice pour les plus téméraires.

Exercice 2. Les relations suivantes sont-elles réflexives, antisymétriques ou transitives ?

1. $E = \mathbb{R}$ et $x \mathcal{R} y$ si $|x| = |y|$.

2. $E = \mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y$ si $\sin^2(x) + \cos^2(y) = 1$.
3. $E = \mathbb{N}$ et $x\mathcal{R}y$ s'il existe p et q entiers tels que $y = px^q$.

Définition. (Relation d'ordre) *Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est dite d'ordre lorsqu'elle est réflexive, antisymétrique et transitive.*

Exemple.

1. $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
2. Si E est un ensemble, $\subset$ est une relation d'ordre sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E.
3. La relation de divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.

Définition. (Ensemble ordonné) *On appelle ensemble ordonné le couple $(E, \mathcal{R})$ constitué d'un ensemble E et d'une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur E.*

Une relation d'ordre définie dans un ensemble E peut posséder une propriété supplémentaire, celle selon laquelle tous les éléments de E sont comparables entre eux.

Définition. (Relation d'ordre totale) *Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné. La relation d'ordre $\mathcal{R}$ est dite totale si pour tout $(x, y) \in E^2$ on a $x\mathcal{R}y$ ou bien $y\mathcal{R}x$, autrement dit :*

$$\forall (x, y) \in E^2, \vDash \{(x\mathcal{R}y) \vee (y\mathcal{R}x)\}.$$

Définition. (Relation d'ordre partielle) *Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné. Si la relation d'ordre $\mathcal{R}$ n'est pas totale on dit qu'elle est partielle.*

Exemple. L'ensemble $(\mathbb{R}, \leqslant)$ est totalement ordonné alors que l'ensemble $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est partiellement ordonné.

Définition. (Majorant) *Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné et A une partie de E. On appelle majorant de A tout élément M de E tel que pour tout $a \in A$, $a\mathcal{R}M$.*

Définition. (Partie majorée) *Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné. Une partie A de E est dite majorée s'il existe un majorant de A dans E.*

Définition. (Minorant) *Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné et A une partie de E. On appelle minorant de A tout élément m de E tel que pour tout $a \in A$, $m\mathcal{R}a$.*

Définition. (Partie minorée) *Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné. Une partie A de E est dite minorée s'il existe un minorant de A dans E.*

Exemple.

1. Considérons l'ensemble partiellement ordonné $(\mathcal{P}(E), \subset)$. Toute partie A de $\mathcal{P}(E)$ est majorée par E et minorée par $\varnothing$.
2. Par contre si nous considérons l'ensemble totalement ordonné $(\mathbb{R}, \leqslant)$ et $r \in \mathbb{R}$, les parties $[r, +\infty[$ ne sont pas majorées et les parties $]-\infty, r]$ ne sont pas minorées.

Définition. (Élément maximum, élément minimum) *Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné et A une partie non vide de E. On appelle élément maximum (resp. élément minimum) de A un élément de A qui est majorant (resp. minorant) de A. On note* $\max A$ *(resp min A) le maximum (resp. minimum) de A lorsqu'il existe.*

Remarque. Si A est une partie non majorée (resp. non minorée), il est exclu qu'elle admette un élément maximum (resp. minimum). Cet élément maximum (resp. minimum) n'existe pas toujours, même pour une partie majorée (resp. minorée). Ainsi, considérant l'ensemble totalement ordonné $(\mathbb{R}, \leqslant)$, l'intervalle réel $]2{,}3[$ est majoré (resp. minoré), mais n'a pas d'élément maximum (resp. minimum). Cependant, s'il existe un maximum (resp. minimum), cet élément est unique.

Exercice 3. **(Relations d'ordre en Algèbre de Boole)** Soit $(\mathcal{A}, +, ., ^{-})$ une algèbre de Boole. On considère la relation binaire, de symbole $<$, définie dans $\mathcal{A}$ par :

$$a < b \Longleftrightarrow a + b = b.$$

1. Montrer que $<$ est une relation d'ordre dans $\mathcal{A}$.
2. Montrer que $(a < b) \Longleftrightarrow a.b = a$.
3. Montrer que, $\forall (a, b, c) \in \mathcal{A}^3$, $b.c < a.b + \bar{a}.c$.
4. On définit la relation binaire $\subset$ par : $a \subset b$ si et seulement si $a.\bar{b} = 0$; montrer que c'est une relation d'ordre dans $\mathcal{A}$.
5. Comparer $<$ et $\subset$.
6. En utilisant l'une ou l'autre des définitions ci-dessus pour la relation d'ordre, trouver $\max \mathcal{A}$ et $\min \mathcal{A}$.

1.2 Relations d'équivalence

Dans cette sous-section, on se place encore dans le cas où $E = F$. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie dans E (non vide), de graphe G.

Définition. **(Relation symétrique)** *$\mathcal{R}$ est dite symétrique si, dès que x est en relation avec y, alors y est en relation avec x, autrement dit :*

$$\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x.$$

Remarque. **(Interprétation géométrique de la symétrie)** Ainsi, si $\mathcal{R}_G$ une relation binaire de graphe G définie dans E. $\mathcal{R}_G$ est symétrique si et seulement tout élément de G a sa symétrique orthogonale par rapport à la diagonale Δ de E dans G, autrement dit :

$$\forall (x, y) \in E^2, (x, y) \in G \Longrightarrow (y, x) \in G.$$

Définition. **(Relation d'équivalence)** *Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est dite d'équivalence lorsqu'elle est réflexive, symétrique et transitive.*

Exemple.

1. La relation d'égalité est une relation d'équivalence sur tout ensemble E non vide.
2. La relation de congruence modulo n dans $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 4.

1. Sur $\mathbb{Z}$, on définit la relation « $x\mathcal{R}y$ quand $x + y$ est pair ». Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2. Sur $\mathbb{R}$, on définit la relation « $x\mathcal{R}y$ quand $\cos(2x) = \cos(2y)$ ». Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

Définition. **(Classe d'équivalence)** *Soient $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E et x un élément de E. On appelle classe d'équivalence de x par la relation $\mathcal{R}$ l'ensemble des éléments de E qui sont en relation avec x (on dit encore : « qui sont équivalents à x par la relation $\mathcal{R}$»).*

Notation. *On note $\mathcal{R}(x)$ (ou $\dot{x}$, ou $\bar{x}$) la classe d'équivalence de l'élément x par la relation $\mathcal{R}$:*

$$\mathcal{R}(x) = \{y \in E | y\mathcal{R}x\}.$$

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}$ on considère la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par : $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.

1. Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout réel, déterminer $\mathcal{R}(x)$.

Proposition 1. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. On a :*

1. *tout élément x appartient à sa classe d'équivalence : $\forall x \in E$, $x \in \mathcal{R}(x)$,*
2. *deux éléments de E sont en relation si et seulement si elle ont la même classe d'équivalence : $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(y)$,*

3. l'intersection de deux classes d'équivalence distinctes est vide, autrement dit : $\forall (x,y) \in E^2$, $\mathcal{R}(x) \neq \mathcal{R}(y) \Longleftrightarrow \mathcal{R}(x) \cap \mathcal{R}(y) = \varnothing$.

Démonstration. □

Définition. (Partition d'un ensemble) *Une partition d'un ensemble E est une famille de sous ensemble de E, 2 à 2 disjoints, et dont la réunion est égale à E.*

Théorème 2. (de partition) *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Les classes d'équivalence réalisent une partition de E.*

Démonstration. □

Exercice 6. On considère l'ensemble des points du plan muni d'un repère orthonormal et deux points P_1 et P_2 de coordonnées respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2); on définit dans cet ensemble la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$P_1 \mathcal{R} P_2 \Longleftrightarrow x_1 y_1 = x_2 y_2.$$

S'agit-il d'une relation d'équivalence ? Si oui, étudier les classes d'équivalence.

Définition. (Ensemble quotient) *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. On appelle ensemble quotient de E par la relation $\mathcal{R}$, l'ensemble noté $E/\mathcal{R}$ des classes d'équivalence de tous les éléments de E :*

$$E/\mathcal{R} := \{\mathcal{R}(x), x \in E\}.$$

2 Compatibilité entre opération et une relation binaire.

Définition. *La relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est dite compatible avec l'opération (définie sur E) de symbole $\circ$ lorsque, quels que soient les éléments x, x', y et y' de E : si $x\mathcal{R}x'$ et si $y\mathcal{R}y'$, alors $(x \circ y)\mathcal{R}(x' \circ y')$.*

Exemple. On considère l'ensemble totalement ordonné $(\mathbb{R}, \leqslant)$, si on a $x \leqslant y$ et $y \leqslant y'$, on peut écrire $x + x' < y + y'$. Ce résultat est bien connu : on a le droit « d'additionner des inégalité membre à membre ». En d'autres termes, l'addition est compatible avec la relation $\leqslant$.

Par contre, de $-2 \leqslant 1$ et de $-3 \leqslant -1$ on ne peut pas déduire que $6 \leqslant -1$... On a pas le droit de « multiplier des inégalités membre à membre ». Autrement dit la multiplication n'est pas compatible avec l'inégalité dans $\mathbb{R}$.