MATHÉMATIQUES POUR INFORMATIQUES 2

Fiche 1 : Fonction réelle d'une variable réelle

Exercice 1. Résoudre sur leur domaine de validité les équations et inéquations suivantes :

- $\sqrt{7x-1}=\sqrt{x+7}$
- $\sqrt{x+21}\leqslant\sqrt{2x+3}$
- $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{1}{x}$
- $|5-4x|=3x-2$

Exercice 2.

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, donner trois formules pour $\cos(2x)$ et une formule pour $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
2. Montrer, pour certaines valeurs de x qui seront précisées, que $1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$.
3. Donner une expression de $\tan(x+y)$ et $\tan(x-y)$ en fonction de $\tan(x)$ et $\tan(y)$ en précisant les valeurs de x et y qui conviennent.
4. Pour tout x qui convient, donner une formule pour $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $\cos\left(2x-\frac{5\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$
- $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$
- $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$
- $\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 4. Calculer

- $\arcsin\left(\sin\left(\frac{14\pi}{3}\right)\right)$;
- $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$
- $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right)$
- $\arccos\left(\sin\left(\frac{18\pi}{5}\right)\right)$

Exercice 5. Étudier la fonction $f(x)=2x\sqrt{1-x^2}$, c'est à dire déterminer :

1. son domaine de définition;
2. sa parité;
3. son tableau de variation;
4. ses tangentes aux points particuliers
5. son graphe.

Exercice 6. Calculer les limites des fonctions suivantes lorsque x tend vers 0 :

- $f(x)=\frac{x}{(1+x)^2-1}$
- $h(x)=\frac{1-\cos(x)}{\tan(x)}$
- $g(x)=\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$
- $k(x)=\frac{x-\sin(x)}{x^3}$

Travaux dirigés proposés par : DR. D.N. DIATTA (dndiatta@univ-zig.sn)

Exercice 7. On considère la fonction $f:[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $[-1,1]$.

Exercice 8. Étudier la continuité de la fonction $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 9. On considère la fonction $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ \alpha \text{ si } x = 2. \end{cases}$$

Pour quelle valeur de α la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 10. Montrer que les équations suivantes ont des solutions dans $\mathbb{R}$:

- $x^2 + \ln(x) = 0$
- $x^{17} = 1 - x^{11}$
- $\sin(x) + 2\cos(x) = \frac{3}{2}$
- $x^3 + x + \frac{1}{x} = 0.$

Travaux dirigés proposés par : Dr. D.N. Diatta (dndiatta@univ-zig.sn)