Chapitre 2 : Operations sur les graphes

Y. DIENG, Département Informatique
UFR ST, Université Assane Seck de Ziguinchor

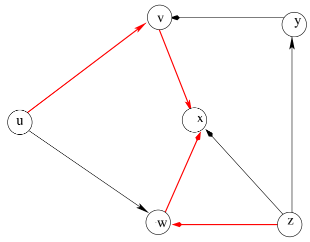
3. desember 2021

1 Parties de graphe

1.1 Chaine

Une **chaine** est une sequence $\rho = (u_1, u_2, u_3 \ldots, u_q)$ d'arcs de G telle que chaque arc de la sequence ait une extremite en commun avec l'arc precedent, et l'autre extremité en commun avec l'arc suivant. Le nombre d'arcs de la sequence est la longueur de la chaine ρ. Une chaine qui ne rencontre pas deux fois le meme sommet est dite **elémentaire**. Une chaine qui n'utilise pas deux fois le meme arc est dite **simple**.

Exemple Un grqphe G et un exemple de chaine $\rho = ((u, v), (v, x), (w, x), (z, w))$



G

1.2 Chemin

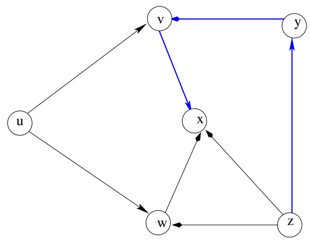
Une chaine $\rho = (u_1, u_2, u_3 \ldots, u_q)$ où pour tout arc u_i (avec $i < q$) l'extremite terminale de u_i, coincide avec l'extremite initiale de u_{i+1} est un **chemin**. Dans le cas d'un 1-graphe ou d'un graphe simple, un chemin est determiné completement par la succession des sommets $x_1, x_2, \ldots$ qu'il rencontre, et l'on note indifferemment :

$\rho = ((x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), \ldots) = [x_1, x_2, \ldots, x_{k-3}, x_{k-1}, x_k] = \rho[x_1, x_k]$.

x_1 est l'extremite initiale, et x_k I'extremite terminale du chemin ρ.

Par exemple, ci-dessous, on a un graphe 1-$G = (V, E)$ tel que : $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ $E = \{\{a, d\}, \{d, b\}, \{d, e\}, \{d, h\}, \{d, g\}, \{g, f\}, \{b, c\}, \{c, e\}, \}$ et un chemin de longueur 5 reliant les sommets f à b.

Exemple: Un graphe G et un chemin $\rho = ((z, y), (y, v), (v, x)) = [z, y, v, x]$



G

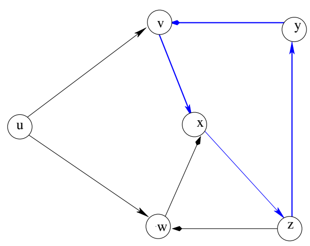
1.3 Cycle

Un **cycle** est une chaine $\rho = (u_1, u_2, u_3 \ldots, u_q)$ telle que :

- le meme arc ne figure pas deux fois dans la sequence,
- les deux sommets aux extremités de la chaine coincident.

Un **cycle élémentaire** est un cycle qui vérifie en outre qu'en parcourant le cycle, on ne rencontre qu'une fois le meme sommet (excepté bien entendu le sommet initial qui coincide avec Ie sommet terminal). Pour un cycle μ donné, on designe par μ^+ I'ensemble des arcs du cycle orientes dans Ie sens de parcours, et par μ^- l'ensemble de tous les autres arcs du cycle. Tout cycle μ est une somme de cycles élémentaires sans arcs communs. C'est evident: si l'on parcourt μ, on définira un cycle élémentaire chaque fois qu' on arrive en un sommet deja rencontré. Un cycle est élémentaire si et seulement si c'est un cycle minimal (c'est-a-dire si on ne peut en déduire un autre cycle par suppression d'arcs). Un **circuit** est un cycle $\rho = (u_1, u_2, u_3 \ldots, u_q)$ tel que pour $i < q$, l'extrémité terminal de u_i coinside avec l'extrémité initial de u_{i+1}(cf. Figure ci-dessous).

Exemple: Un graphe G et en bleu, on a un exemple de circuit dans G.



G

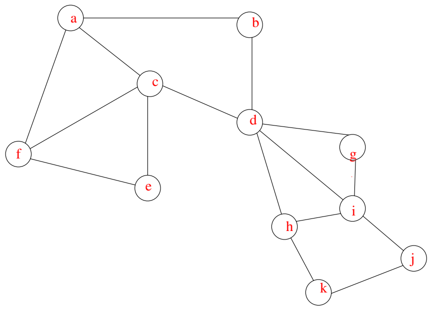
Définition 1. *Un graphe est acyclique si il ne possède aucun cycle simple de longueur non nulle.*

2 Connexité et forte connexité

2.1 Cas non orienté

Un **graphe connexe** est un graphe tel que pour toute paire x, y de deux sommets distincts, iI existe une chaine $\rho[x, y]$ reliant ces deux points. Vous avez ci-dessous un exemple de graphe connexe.

Exemple: Un graphe connexe



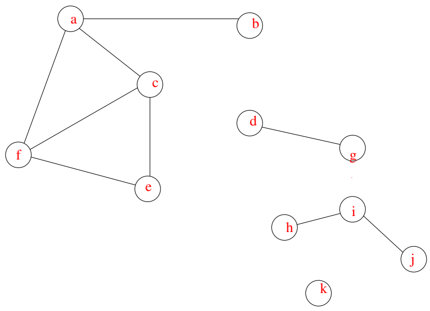
II est facile de remarquer que la relation « $x = y$, ou $x \neq y$ et iI existe dans G une chaine reliant x et y » est une relation d'equivalence (notee $x \equiv y$), car

- $x \equiv x$ (reflexivité)
- $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$ (symétrie)
- $x \equiv y, y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$ (transitivité)

Les classes de cette equivalence constituent une partition de V en sousgraphes connexes de G, appelés les **composantes connexes** de G.

Si un graphe n'est pas connexe, alors on peut identifier plusieurs sous-graphes connexes, maximaux au sens de l'inclusion appélés **composantes connexes**. Ci-dessous, vous avez un exemple de graphe non connexe composé de 4 composantes connexes.

Exemple: Un graphe G non connexe.



2.2 Cas orienté

Les termes connexité, connexe, composante connexe sont remplacés respectivement par forte connexité, fortement connexe, composante fortement connexe.

Ainsi, si G est un graphe orienté. Un ensemble de sommets U de G est fortement connexe si pour tout couple de sommets (s, t) de U il existe un chemin allant de s à t et utilisant que des sommets dans U.

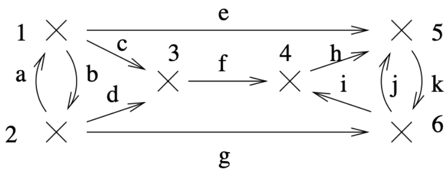
Une composante fortement connexe de G est un ensemble de sommets connexe et maximal selon l'inclusion à vérifier cette propriété.

Le graphe G est fortement connexe si son ensemble de sommets est fortement connexe.

Exemple :

Soit G le graphe orienté de la Figure ci-dessous. On observe que :

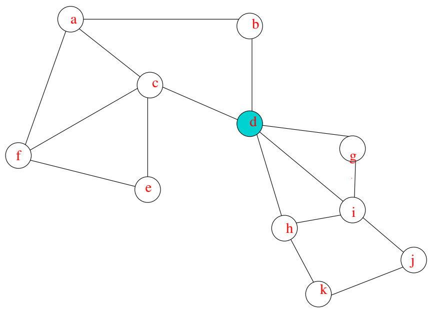
- (1, b, 2, a, 1) est un chemin qui est un cycle simple et élémentaire.
- les ensembles $\{1, 3\}$ et $\{4, 5\}$ ne sont pas fortement connexes.
- les ensembles fortement connexes du graphe sont tous les singletons (trivialement) ainsi que les ensembles $\{1, 2\}, \{5, 6\} et \{4, 5, 6\}$.
- les somposantes fortement connexes sont $\{1, 2\}, \{3\}$ et $\{4, 5, 6\}$.
- G n'est pas fortement connexe.



2.3 Point d'articulation

Un **point d'articulation** est un sommet qui augmente le nombre de composantes connexes si on enlève. Sur le graphe ci-apprès, le sommet d est un point d'articulation.

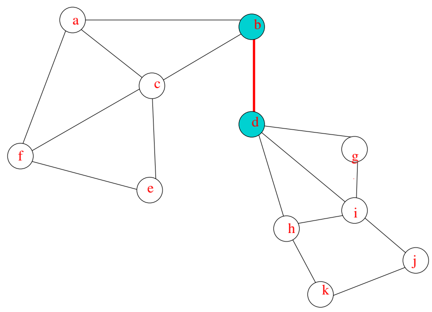
Exemple: Un graphe G et un point d'articulation.



2.4 Isthme

Un **isthme** est un arc qui augmente le nombre de composantes connexes si on enlève.

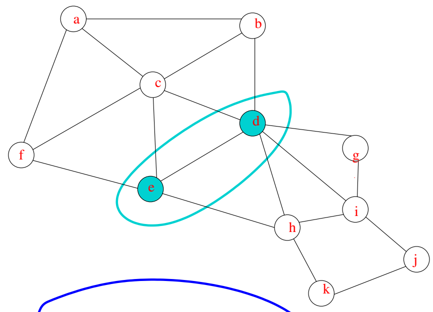
Exemple: Un graphe G et une arête $\{b, d\}$ mise en évidence en rouge formant un isme dans G.

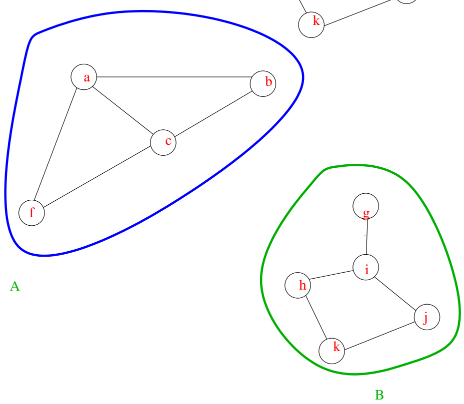


2.5 Séparateur

Un **séparateur** dans un graphe connexe est un ensemble de sommets tels que leur suppression augmente le nombre de composantes connexes.

Exemple: Un graphe G et un ensemble $S = \{e, d\}$ formant un séparateur dans le graphe





La suppression de ces sommets déconnecte le graphe en deux composantes connexes dont l'une A contient les sommets $\{a, b, c, f\}$ et l'autre B contient les sommets $\{g, h, i, j, k\}$.

- Si S est un séparateur de G, alors il existe deux sommets a et b de G qui sont dans deux composantes connexes différentes de $G \setminus S$.
- Un séparateur S de G est dit minimal si tout séparateur S' de G est tel que $|S'| \geq |S|$. Dans l'exemple précédent, il est facile de remarquer que S est un séparateur minimal.

Teorem 2.1. *Si $G = (V, E)$ est un graphe et $a \in V$ et $b \in V$. L'adjonction d'un nouvel arc $u = (a, b)$ à G pour donner un nouveau graphe $G' = (V, E \cup \{u\})$ a pour effet :*

- *soit de diminuer de 1 le nombre de composantes connexes, dans ce cas u n'appartient à aucun cycle de G' ;*
- *soit de laisser inchangé le nombre de composantes connexes, dans ce cas u appartient à un cycle de G'.*

Bevis. Si a et b appartiennent à deux composantes connexes distinctes, le nombre de composantes connexes diminue de 1. L'arc u ne peut appartenir à un cycle de G' car si non, en supprimant u de ce cycle, on aurait une chaîne joignant les deux composantes connexes dans G.

Si a et b appartiennent à la même composante connexe, le nombre de composantes connexes reste inchangé. La concaténation de la chaîne joignant a et b dans G et de u donne un cycle dans G'.

■

Teorem 2.2. *u est un isthme si et seulement si u n'appartient à aucun cycle de G.*

Teorem 2.3. *Soit $G = V, E$ un graphe tel que $|V| = n$ et $|E| = m$; on a : G connexe $\Rightarrow m \geq n - 1$ G est sans cycle $\Rightarrow m \leq n - 1$*

3 Une relation d'équivalence sur les graphes : l'isomorphisme

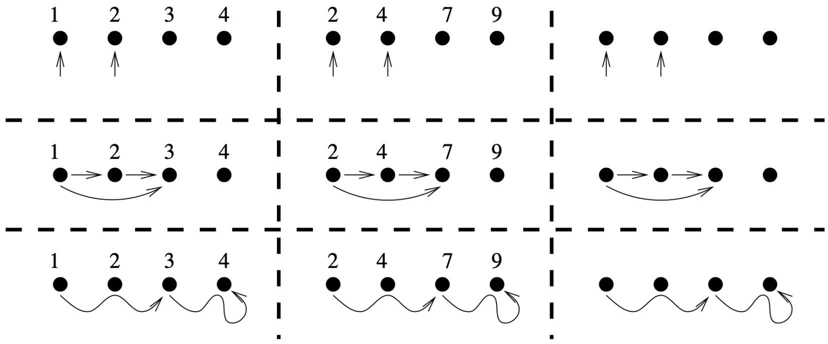
Quand on parle d'un graphe on pense généralement à non pas à un graphe mais à une classe de graphes isomorphes, c'est à dire à des graphes égaux à un renommage près des sommets et des arcs (ou arêtes) si ceux-ci ont un nom.

Définition 2. *Un isomorphisme d'un graphe G vers un graphe H est une bijection f de $V(G)$ vers $V(H)$ qui : pour toute arête (u, v) de G, il existe une arête $(h(u)h(v))$ dans H avec $h(u)$, l'image par h de u et $h(v)$, l'image par h de v.*

3.1 Exemple

Pour les graphes G_i et H_i pour $i = 1, 2, 3$ il existe un isomorphisme de G_i vers un graphe H_i pour tout $i = 1, 2, 3$.

- $G_1 = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1), (2)\}), H_1 = (\{2, 4, 7, 9\}, (2), (4))$,
- $G_2 = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}), H_2 = (\{2, 4, 7, 9\}, \{(2, 4), (4, 7), (2, 7)\})$,
- $G_3 = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2, 3), (3, 4, 4)\}), H_3 = (\{2, 4, 7, 9\}, \{(2, 4, 7), (4, 7, 7)\})$,



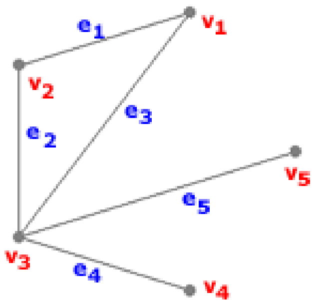
4 Opérations sur les graphes

4.1 Concaténation de deux chemins

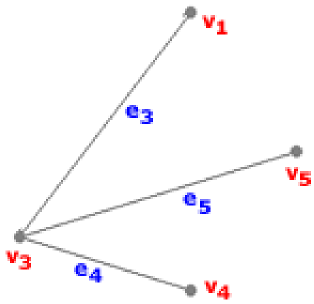
Une opération naturelle sur les chemins est la concaténation : la concaténation de deux chemins P_1 et P_2 allant respectivement d'un sommet x à un sommet y et d'un sommet y à un sommet z est le chemin noté $P_1 \cdot P_2$ obtenu en concaténant à la séquence P_1 la séquence P_2. La longueur du chemin $P_1 \cdot P_2$ de x à y est $|P_1 \cdot P_2| = |P_1| + |P_2|$

4.2 Sous-graphes

Un *sous-graphe* d'un graphe $G = (V, E)$ est un graphe $G' = (V', E')$ tel que $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$. Le graphe G est appelé un *super-graphe* de G'.



(a) : Un graphe G



(b): Un sous-graphe de G

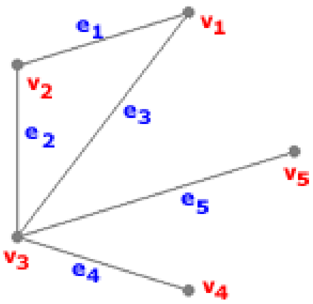
Sous-graphe induit

Un graphe $G' = (V', E')$ est un *sous-graphe induit* d'un graphe $G = (V, E)$ si pour tout couple de sommets $(x, y) \subseteq V'$ tel que $(x, y) \in E$ alors on a $(x, y) \in E'$. En d'autres termes, si deux sommets de V' sont adjacents dans G, alors ils sont adjacent dans G'.

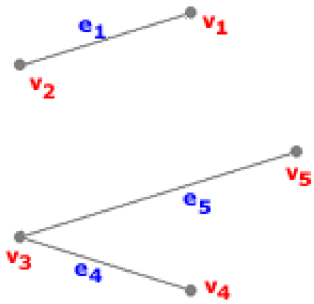
Graphe partiel

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $U \subseteq E$ un ensemble d'arcs de G. Le **graphe partiel** engendré par U a pour sommet V et pour ensemble d'arc U.

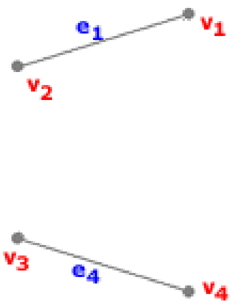
En d'autres termes, on élimine de G les arcs de $E - U$, mais on garde tous les sommets même s'ils deviennent isolés. Si on veut enlever à la fois des arcs et des sommets, on parle de sous-graphe-partiel.



(a) : Un graphe G



(b): Un graphe partiel de G

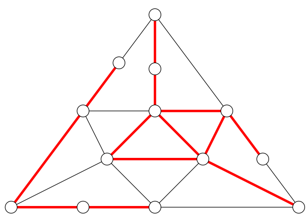


(c): Un sous-graphe partiel de G

Sous-graphe couvrant

Un graphe est aussi appelé *sous-graphe couvrant*.

Exemple Un exemple de sous-graphe couvrant dans lequel les arêtes du sous graphe couvrant sont représentées en rouge.



4.3 Union disjoint

L'union de deux graphes sans sommet en commun (appelé aussi somme) est réalisé en faisant l'union des sommets et des arcs (ou arêtes). Vous avez ci après une définition formelle dans le cas des graphes simples orientés :

Définition 3. *L'union de deux graphes simples orientés G = (U, E) et H = (V, F) vérifiant :* $U \cap V = \emptyset$ *est le graphe simple orienté noté* $G \cup H$ *égal à* $(U \cup V, E \cup F)$*.*

4.4 Graphe quotient

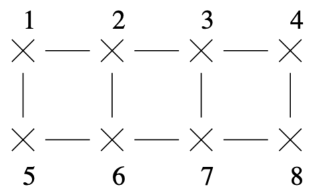
On peut déterminer un graphe quotient H de G à partir d'un partition P de V(G) en fusionnant chaque partie de P en un seul sommet.

Exemple Soit G = (V, E) un graphe tel que :

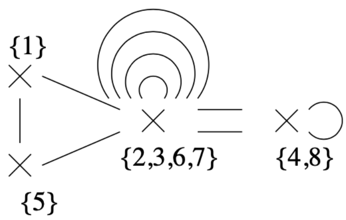
1. $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
2. $E = (\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{3, 2\}, \{6, 2\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{7, 3\}, \{7, 8\}, \{8, 4\}, \{3, 4\})$

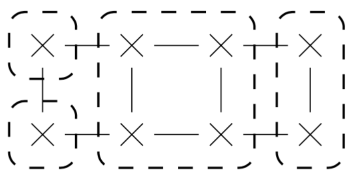
Soit $P = \{\{1\}, \{5\}, \{2, 3, 6, 7\}, \{4, 8\}\}$ une partition des sommets de G. On représente ci-dessous la partition P et le graphe quotient H.

G



H





Le graphe quotiant H = (V', E') est tel que E'=E et $V' = \{x_1 = \{1\}, x_2 = \{5\}, x_3 = \{2, 3, 6, 7\}, x_4 = \{4, 8\}\}$. Les arête de E reliant des sommets d'une même partie deviennent des boucles dans H. Les arêtes entre deux parties de P devient des arêtes multiple.

On peut bien entendu définir des variantes du graphe quotient, en supprimant les arcs multiples ou en supprimant les boucles.

4.5 Graphe produit

Il est très simple de définir l'opération produit en considérant le produit cartésien des ensembles de sommets. Vous avec ci-après une définition pour le cas de graphes simples orientés :

Définition 4. *Le produit de deux graphes simples orientés* $G = (U, E)$ *et* $H = (V, F)$ *est le grqphe si;ple non orienté noté* $G \times H$ *égale à* $(U \times V, \{((u, v), (u', v'))|(u, u') \in E \Lambda (v, v') \in F\})$.

L'utilité d'une telle opération est par exemple le produit de graphes singuliers que sont les automates. Un automate est en effet un graphe à arcs étiquetés où sont distingués (colorés) un sommet initial ainsi que des sommets finaux.

5 Graphes particuliers

5.1 Graphe complet

Un graphe est dit *complet* si pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets, il existe une arête dont les extrémités sont u et v. Un graphe complet est donc un graphe dont le diamètre est égal à 1. Un graphe complet à n sommets noté K_n est aussi appelé une clique.

Si G n'est pas une clique, il existe deux sommets u et v non adjacents, dont $V \setminus \{u, v\}$ est un ensemble dont l'élimination dis-connecte G, et par conséquent:

$k_G \leq |V \setminus \{u, v\}| = n - 2$.

Si G est une clique d'ordre n, on a $k_G = n - 1$.

5.2 Graphe biparti

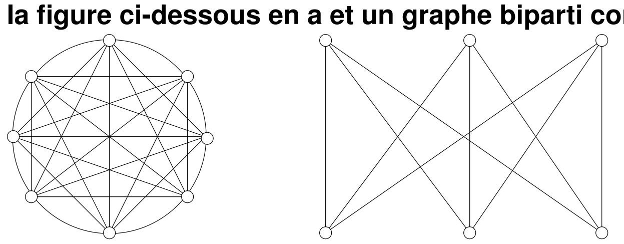
Un graphe est dit *biparti* s'il existe une partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensembles U et V telle que chaque arête ait une extrémité dans U et l'autre dans V.

Un graphe est biparti si et seulement si il ne contient donc pas de cycle de longueur impaire.

Un graphe biparti est dit *biparti complet* si chaque sommet de U et relié à chaque sommet de V (cf. figure 5.2 (b)).

On le note $K_{|U|,|V|}$.

Exemple : Un exemple de graphe complet à 8 sommets est donné sur la figure ci-dessous en a et un graphe biparti complet à 6 sommet en b



(a) (b)

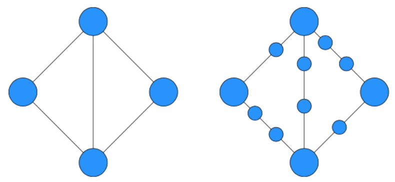
5.3 Graphe planaire

Théorème de Kuratowski

Le théorème suivant dû à Kuratowski a permis de donner une caractérisation des graphes planaires.

Teorem 5.1. *Un graphe G est* planaire *si et seulement si G ne contient pas (comme sous-graphe partiel) une subdivision de K_5 ni une subdivision de $K_{3,3}$.*

Sur la figure ci-après, on a à gauche un graphe G et à droite une subdivision de G.



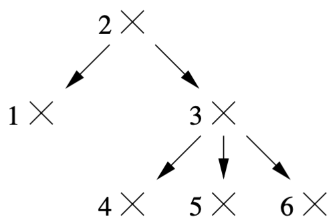
5.4 Arbre et arborescence

Il existe un grand nombre de caractérisations des arbres et des arborescences : ce sont des structures qui possèdent un sommet à partir duquel on peut atteindre tous les autres sommets et minimales selon la propriété (cette propriété se perd par la suppression de tout arc (ou toute arête)).

Arborescence

Une arborescence est un graphe orienté admettant un sommet, appelé racine, tel que pour tout sommet il existe un unique chemin de la racine vers ce sommet. De plus, tout sommet autre que la racine, admet un unique prédécesseur appelé son père.

Exemple : Une arborescence $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{(2, 1), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\})$ de racine 2 est représentée sur la figure ci-dessous.



Une forêt est une union disjointe d'arborescences. Une caractérisation très naturelle est la suivante. La preuve est laissée au lecteur.

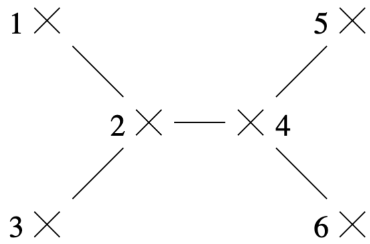
Pour tout graphe orienté G, les assertions suivantes sont équivalentes :

- G est une forêt.
- G est acyclique et le degré entrant de tout sommet est au plus 1.

Arbre

Un arbre est un graphe non orienté connexe et acyclique. Une forêt est une union d'arbres disjoints, c'est à dire un graphe acyclique.

Exemple : L'arbre $(\{1,2,3,4,5,6\},\{1,2,2,3,2,4,\{4,5\},\{4,6\}\})$ est représenté sur la figure ci-dessous.



Une propriété remarquable des arbres est de pouvoir les caractériser de différentes manières :

Lemme 1. *Pour tout graphe G = (V, E) non orienté, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *G est un arbre (c.a.d connexe et acyclique).*
2. *G est connexe et est minimal à vérifier cette propriété (c.a.d la suppression d'une arête quelconque déconnecte G).*
3. *G est connexe et vérifie $|V| \geq |E| + 1$.*
4. *G est acyclique et est maximal à vérifier cette propriété (c.a.d l'ajout de toute nouvelle arête crée un cycle simple).*
5. *G est acyclique et vérifie : $|V| \leq |E| + 1$.*
6. *pour tout couple de sommets (s, t) de G, il existe un unique chemin simple allant de s à t .*

Bevis. A faire en TD. ∎

@book Berge69, AUTHOR = C. Berge, TITLE = Théorie des graphes et ses applications, PUBLISHER = Dunod, YEAR = 1967,

@book SD2003, AUTHOR = R. Strandh and I. Durand, TITLE = Initiation à l'informatique, PUBLISHER = Meta Modulaire SARL, YEAR = 2003,