

Université Assane SECK de Ziguinchor



Unité de Formation et de
Recherche des Sciences et
Technologies

Département d'Informatique

Ordonnancement

Licence Informatique

Novembre 2022

©Youssou DIENG

ydieng@univ-zig.sn

1 - INTRODUCTION

Les techniques d'ordonnancement permettent à une entreprise de mieux gérer ses projets, ses activités et d'améliorer ses performances. Plus précisément les techniques d'ordonnancement ont pour objectif :

- l'organisation de l'ensemble des tâches composant un projet ;
- la détermination de la durée totale de réalisation du projet ;
- un meilleur contrôle du projet ;
- une identification et si possible, une réduction des goulots éventuels qui risquent de retarder ou de perturber la réalisation du projet ;
- une étude des différentes possibilités de réduction des délais de réalisation et donc des coûts du projet ;
- une meilleure allocation des ressources nécessaires au projet.

Ces techniques ne concernent pas uniquement la production ; elles permettent d'améliorer la gestion de tout projet, comme par exemple, l'organisation d'une campagne de publicité, une mission d'audit, le lancement d'un nouveau produit, ou encore, la mise en place d'une comptabilité en normes internationales.

Parmi les différentes méthodes, nous traiterons en particulier la Méthode des Potentiels Metra ou MPM.

Les méthodes d'ordonnancement permettent d'élaborer un graphe qui représente l'ensemble des tâches composant le projet ainsi que les liens qui existent entre elles. Sur le graphe, apparaissent également la durée de chaque tâche, la date à laquelle elle peut débiter au plus tôt et au plus tard. Il s'agit d'une application directe des méthodes de recherche de chemin optimaux dans un graphe.

On dit qu'on a affaire à un problème d'ordonnancement lorsque, en vue de la réalisation d'un objectif quelconque, il faut accomplir de multiples tâches, elles-mêmes soumises à des contraintes. Les contraintes sont de diverses types. On y distingue :

- a) Les contraintes de types potentielles : c'est des contraintes de localisation temporelle (tache i ne doit pas commencer avant telle date, ou au contraire, doit terminer à telle date.), les contraintes de succession (tâche j ne peut commencer avant que la tâche i ne soit terminée, ou simplement parvenu à un certain degré d'achèvement).
- b) Les contraintes de type disjonctif, imposant la disjonction de deux intervalles de temps relatifs (les tâches i et j ne peuvent pas être réalisées au même moment).
- c) Les contraintes de type cumulatif, concernant l'évolution dans le temps du volume total des moyens humains et matériels consacré à l'exécution des tâches.

Quand le processus de réalisation d'un objectif est décomposable en tâches, ces tâches sont soumises à des contraintes divers. Il importe de déterminer un ordre d'exécution des tâches, compatible avec les contraintes. Trouver un tel ordre c'est obtenir une solution au problème d'ordonnancement. Toutefois parmi les solutions il en est de meilleurs et de moins bonnes relativement à un critère donné.

Ainsi, il existera probablement une solution moins couteuse, une autre plus rapide, une troisième plus équilibrée que les autres. Au sens mathématique, résoudre un problème d'ordonnancement, c'est déterminer une solution quelconque. Au sens de recherche opérationnelle, c'est choisir parmi toutes les solutions, la solution optimale par rapport à un critère fixé à l'avance.

Jusqu'en 1958 les praticiens de l'ordonnancement ne disposaient que de planning à barres dit de graphique de Gantt pour aborder ce genre de problème. C'est donc avec un très grand plaisir qu'ils ont vu apparaître simultanément deux nouvelles méthodes basées sur la théorie des graphes. Ce sont la méthode américaine CMP (Critical Path Methode), avec sa variante incluant d'éventuelles données aléatoires, PERT (Program Evaluation and Review Technique ou program Evaluation Research Task), d'une part, et la méthode française des potentielles (MPM), d'autres parts. Ces deux dernières méthodes permettent de/d' :

- a) établir un ordonnancement, dès l'instant qu'aucune contrainte n'est contradictoire avec une autre ;
- b) déterminer le meilleur temps total nécessaire à la réalisation de l'objectif ;
- c) déterminer les tâches critiques, c'est-à-dire celles dont l'exécution ne peut ni être retardé, ni ralenti sans que la fin de l'ensemble du projet soit décalé du temps correspondant.

Des méthodes algorithmes annexes permettent en outre certains paramétrages :

- a) observation du cout le plus bas par aménagement des tâches non critiques ;
- b) accélération du programme initial au moindre coût par raccourcissement du temps d'exécution des tâches critiques dont la compression temporelle revient relativement le moins cher ;
- c) etc.

Pour utiliser la méthode américaine, on construit un graphe orienté sans boucle dont les sommets constituent les évènements (étapes de la réalisation) et les arcs représentent les opérations (tâches élémentaires en lesquelles on a décomposé le processus de réalisation de l'objectif final). Les arcs sont valués par les délais d'exécution. Il sera alors aisé au moyen d'un algorithme approprié de rechercher le chemin de valeur maximale dans le graphe et obtenir ainsi le chemin critique.

La méthode des potentiels, on a un graphe dont les sommets représentent les opérations et les arcs, les contraintes. Les arcs sont valués par un entier représentant la durée minimale devant s'écouler entre le début de la tâche formant l'extrémité initiale et celui de la tâche formant l'extrémité terminale.

Nous examinerons sur un exemple, l'une et l'autre méthode.



2 - LA MÉTHODE DE GANTT

On représente au sein d'un tableau, en ligne les différentes tâches et en colonne les unités de temps qui sont exprimées en mois, semaines, jours, heures... La durée d'exécution d'une tâche est alors matérialisée par un trait au sein du diagramme.

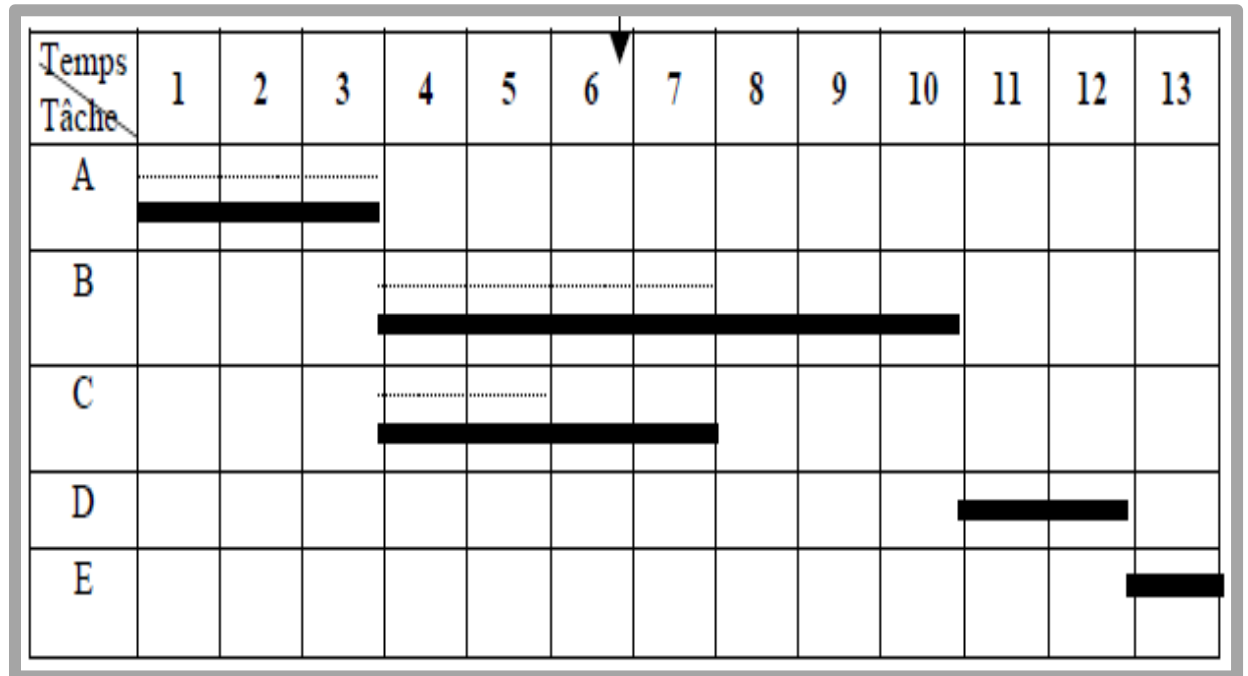
Pour réaliser un tel diagramme, on commence par déterminer les différentes tâches (ou opérations) à réaliser et leur durée. Ensuite, comme sur le tableau ci-dessous, on représente les tâches n'ayant aucune antériorité, puis les tâches dont les tâches antérieures ont déjà été représentées, et ainsi de suite... Représenter, alors, la progression réelle du travail par un trait en pointillé parallèle à la tâche planifiée.

Exemple :

Tache	Durée (en jours)	Taches antérieures
A	3	-----
B	7	A
C	4	A
D	2	A, B, C

E	1	D
---	---	---

Diagramme de Gantt correspondant



Chaque colonne représente une unité de temps. Les durées d'exécution prévues des tâches sont représentées par un trait épais. Sur l'exemple, on a 4 unités de temps pour la tâche C. Les contraintes de succession se lisent immédiatement : les tâches B et C succèdent à la tâche A sur l'exemple et, D succède à B.

Le déroulement d'exécution des tâches figure en pointillé, au fur et à mesure des contrôles. Sur l'exemple, on est à la fin de la 6^{ème} unité de temps, la tâche B est en avance d'une unité et, la tâche C est en retard d'une unité.

On peut alors déterminer **le chemin critique : qui est formé d'une succession de tâches, sur le chemin le plus long en termes de durées**. Il est appelé chemin critique car tout retard pris sur l'une des tâches de ce chemin, entraîne du retard dans l'achèvement du projet. Sur l'exemple le chemin critique est (A, B, D, E).

Une des avantages de cette méthode est qu'elle permet de déterminer la date de réalisation d'un projet. Elle permet aussi d'identifier les marges existantes sur certaines tâches avec :

- une date de début au plus tôt et
- une date au plus tard.

- La date au plus tard de début d'une tâche est la date à ne pas dépasser sans retarder l'ensemble du projet.

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne résout pas tous les problèmes. En particulier si l'on doit planifier des fabrications qui viennent en concurrence pour l'utilisation de certaines ressources.

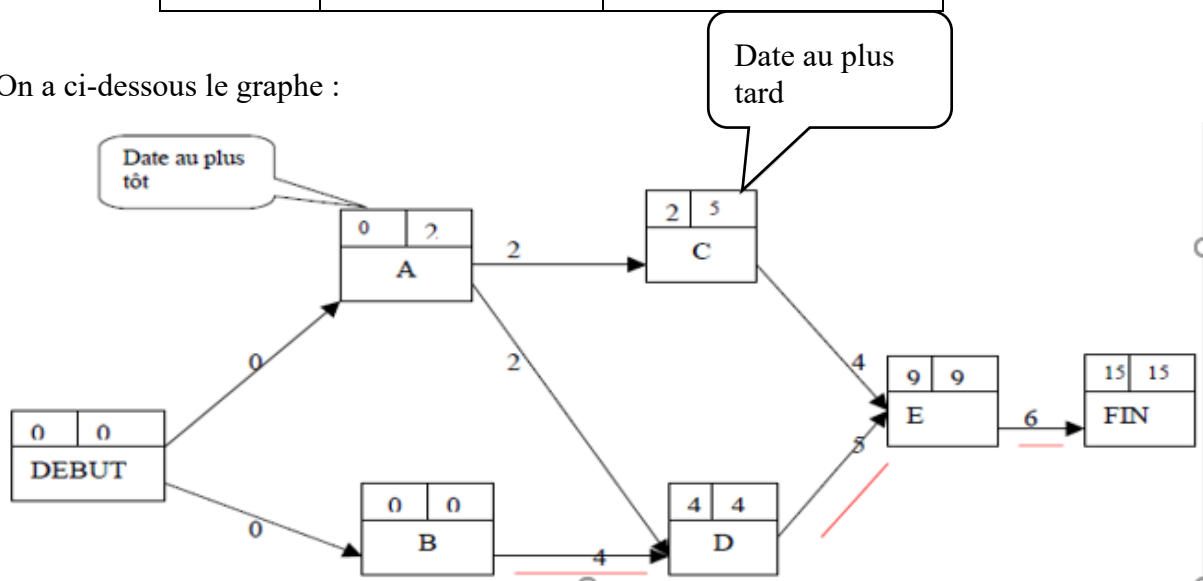
3 - LA MÉTHODE DES POTENTIELS MÉTRA

Pour rappel, le principe de cette méthode est que les tâches sont représentées par des sommets et les contraintes de succession par des arcs. Sur le graphe résultant, on renseigne chaque tâche par la date à laquelle elle peut commencer (date au plus tôt) et celle à laquelle, elle doit se terminer (date au plus tard). De même, à chaque arc on associe une valeur numérique, qui représente soit une durée d'opération, soit un délai.

Exemple : Dans le cadre de la réalisation d'un projet, les tâches A, B, C, D, E sont identifiées et, le tableau ci-dessous donne la durée de chaque tâche ainsi que les contraintes d'antériorité.

Tache	Durée (en jours)	Taches antérieures
A	2	-----
B	4	-----
C	4	A
D	5	A, B
E	6	C, D

On a ci-dessous le graphe :



3.1 - Règles de calcul des différentes dates

1.3.1.1 - La date de début au plus tôt

La date de début au plus tôt d'une tâche est obtenue en cumulant la durée des tâches qui précèdent sur la séquence la plus longue. On initialise le sommet DEBUT avec une date au plus Tôt = 0. Pour chaque tâche j , on a :

$$\text{Date au plus tôt de la tâche } j = \text{Max} (\text{date au plus tôt de } i + \text{Durée } Ti,j)$$

pour tous les prédécesseurs i de j .

1.3.1.2 - Les dates au plus tard

Pour chaque tâche, la date au plus tard est la date attendue de l'achèvement de la tâche. En d'autres termes, la tâche doit entièrement être réalisée au plus tard à cette date si on ne souhaite pas remettre en cause la durée optimale de fin du projet. Pour la calculer, on initialise à l'étape terminale, le dernier sommet par la date au plus tard = date au plus tôt. Ensuite, pour chaque sommet i , on a :

$$\text{Date au plus tard } i = \text{Min} (\text{Date au plus tard de } j - \text{durée } Ti,j)$$

pour tous les successeurs j de i .

1.3.1.3 - Le chemin critique

Le chemin critique est une succession de tâches sur le chemin le plus long au sens des durées. Pour toutes les tâches du chemin critique, les dates au plus tôt et au plus tard coïncident. Le chemin critique sur l'exemple est : (B, D, E).

1.3.1.4 - Les marges

a) La marge totale

La marge totale sur une tâche est le retard que l'on peut prendre dans la réalisation de cette tâche sans retarder l'ensemble du projet. Elle est obtenue, en faisant pour chaque tâche, la différence entre la date au plus tard de début d'une tâche et la date au plus tôt. Sur l'exemple, la Marge totale sur le sommet A est de : $(2-0)=2$

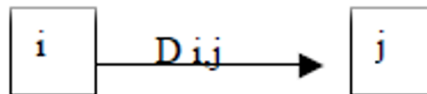
b) La marge libre

La marge libre sur une tâche est le retard que l'on peut prendre dans la réalisation de cette tâche sans retarder la date de début au plus tôt de tout autre tâche qui suit. Pour une tâche i , si on appelle :

- T_j la date au plus tôt de la tâche qui suit la tâche i considérée.
- T_i La date de début au plus tôt de la tâche i .
- D_i La durée de la tâche i .

Alors, la marge libre de i est égale à : $\min (T_j - T_i - D_{ij})$ pour tous les successeurs j de i .

Exemple :



$$\text{Marge libre sur A} = 2 - 0 - 2 = 0$$

$$\text{Marge libre sur C} = 9 - 2 - 4 = 3$$

4 - LA

MÉTHODE

P.E.R.T (PROGRAM EVALUATION AND RESEARCH TASK)

4.1 - Le principe

Dans un graphe PERT, chaque tâche est représentée par un arc, auquel on associe un chiffre entre parenthèses qui représente la durée de la tâche. Entre les arcs figurent des cercles appelées « sommets » ou « événement » qui marquent l'aboutissement d'une ou plusieurs tâches. Ces cercles sont numérotés afin de suivre l'ordre de succession des divers événements.

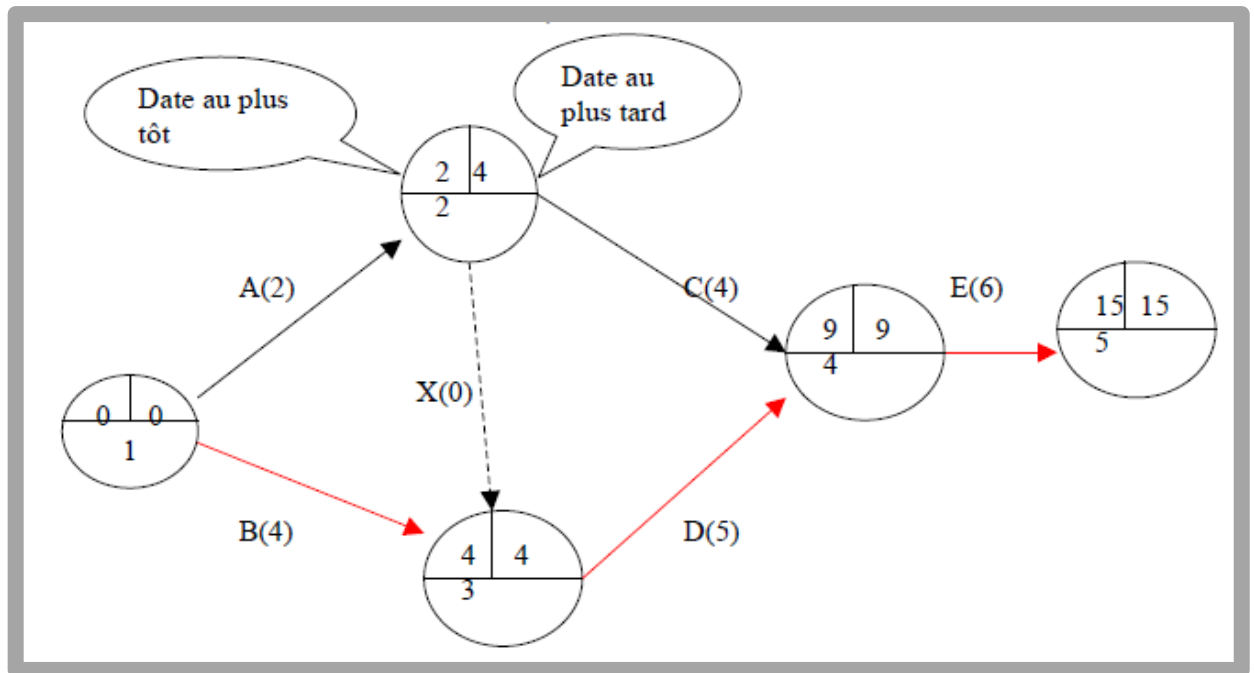
Pour construire un graphe PERT, on utilise la méthode des niveaux. On détermine les tâches sans antécédents, qui constituent le niveau 1. On identifie ensuite les tâches dont les antécédents sont exclusivement du niveau 1. Ces tâches constituent le niveau 2, et ainsi de suite...

Exemple :

Tache	Durée (en jours)	Taches antérieures
A	2	-----
B	4	-----

C	4	A
D	5	A, B
E	6	C, D

du graphe de PERT pour le tableau ci-dessus



On remarque qu'il a été nécessaire d'introduire une tâche fictive X de durée égale à 0, pour représenter la relation d'antériorité entre A et D. Le cumul des tâches composant la séquence la plus longue (B, D, E) permet de déterminer la date au plus tôt de réalisation du projet. Cette succession de tâches constituent le chemin critique.

4.2 - Règles de calcul des différentes dates

1.4.2.1 - Date au plus tôt

Pour déterminer les dates au plus tôt de chaque sommet, on commence par initialiser la date au plus tôt du premier sommet à 0, c'est-à-dire $T_1 = 0$, avec T_1 la date au plus tôt du sommet 1. Ensuite, pour chaque sommet i , on calcule T_i , sa date au plus tôt par :

$$T_i = \text{Max} (T_j + \text{Durée de la transition } T_{ij} \text{ entre le sommet } i \text{ et le sommet } j)$$

pour tous les prédécesseurs j de i .

1.4.2.2 - Date au plus tard

Pour calculer les dates au plus tard de chaque sommet, on initialise la date au plus tard du dernier sommet n, notée par T_n^* , avec sa date au plus tôt notée T_n ($T_n^* = T_n$). Ensuite, pour chaque sommet i, on calcule sa date au plus tard T_i^* par :

$$T_i^* = \text{Min} (T_j^* - \text{Durée } T_{i,j} \text{ de la transition entre } i \text{ et } j)$$

pour tous les successeurs j de i.

4.3 - Marge totale

Pour une tâche F entre deux sommets i et j, on a :

$$\text{la marge totale de } F_{ij} = T_j^* - T_i - \text{Durée } T_{i,j}.$$

- T_j^* : est la date au plus tard du sommet j.
- T_i : date au plus tôt du sommet i.
- $T_{i,j}$: durée de la tâche F entre les sommets i et j.

Sur notre exemple, on a :

Tâches	A	B	C	D	E
Marges totales	4-0-2=2	4-0-4=0	9-4-4=1	9-4-5=0	15-9-6=0

Remarque : sur le chemin critique, les marges totales des différentes tâches sont nulles.

4.4 - Marge Libre

La marge libre est le retard que l'on peut prendre dans la réalisation d'une tâche sans retarder la date de début au plus tôt de tout autre tâche qui suit. Ainsi, la marge libre de tâche entre les sommets i et j est :

- $T_j - T_i - \text{durée } T_{i,j}$

Sur l'exemple, nous avons :

Tâches	A	B	C	D	E
Marges libres	2-0-2=0	4-0-4=0	9-2-4=3	9-4-5=0	15-9-6=0

