Chapitre 1 : Introduction à la théorie des graphes

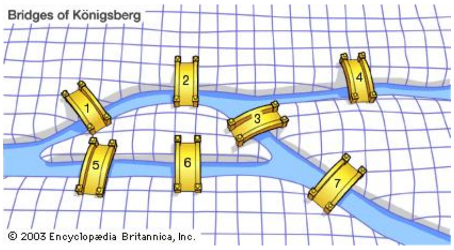
Y. DIENG, Département Informatique
UFR ST, Université Assane Seck de Ziguinchor

8. oktober 2021

1 Introduction

La théorie des graphes est née en 1735 quand Euler démontra qu'il était impossible de traverser chacun des sept ponts de la ville russe de Konigsberg (aujourd'hui Kaliningrad) une fois exactement et de revenir au point de départ.

En effet, comme illustré par la figure ci-dessous, la ville était traversée par un fleuve qui crée deux iles. Il y avait donc 7 ponts pour relier les diférentes parties de la ville. Le pont numero deux permet de relier les deux iles, Les ponts numéro 1, 2, 5 et 6 relient la première ile avec les autres parties de la vile. Les ponts 4 et 7 permettent de relier la deuxième ile avec le reste de la vile.



Plus tard, d'autres scientifiques ont travaillé sur ce thème. Les plus marquant sont J. Petersen evec ses graphes réguliers (1891), André Sainte-Lague avec ses réseaux, en 1926 et surtout Déne Konig (1936) et en 1958, on a Claude Berge avec *Théorie des graphes et applications*

De manière informelle, un graphe est un ensemble de points (appelés sommets) et un ensemble de lignes (appelées arcs ou arêtes) dont les extrémités sont des sommets. Les applications des graphes sont multiples.

1.1 Objets et relations entre objets

A la base de la notation des graphes, on trouve une `collection d'objets` et une `relation binaire` entre les objets. Une relation binaire est un ensemble de couples d'objets. Elle est souvant exprimée sous forme de prédicats en mathématique. Par exemple, $\leq$ pour la relation textttest inférieure ou égale à et $=$ pour la relation textttest égale à. Ces relations sont caractérisées en mathématique classique par le fait qu'elles s'appliquent à un nombre infini d'objets (par exemple tous les nombres réels). Une relation $\Re$ est un ensemble fini de couples (x, y) tel que $x \Re y$. L'esemble correspondant à la relation $=$ est donc $\{(3.14, 3.14), (1/2, 0.5), \ldots\}$.

En informatique, les objets sont souvent plus concrets qu'en mathématique. Il peut s'agir de personnes, de marchandises, de villes, de voitures, de d'ordinateurs. Un ensemble de tels objets est souvant de taille finie. Une relation entre des couple d'objets d'un ensemble fini est forcément finie. En d'autres termes, si on a un ensemble d'objet de taille n, l'ensemble des couples sera de taille inférieure ou égale à n^2.

Exemples:

1. Si on prend l'ensemble des personnes voyageant ensemble dans un même bus, tous les couples de personnes (p_1, p_2) tels que p_1 est ancêtre de p_2".

Nous avons ici une relation non symetrique car si p_1 est un ancêtre de p_2, on n'a pas nécéssairement p_2 est un ancêtre de p_1. La relation est même antisymetrique et transitive.

2. Si on prend l'ensemble des personnes voyageant ensemble dans un même bus, avec la relation tous les couples de personnes (p_1, p_2) tels que p_1 est parent de p_2". La relation est antisymetrique mais elle n'est pas transitive.

3. Si on prend l'ensemble des personnes voyageant ensemble dans un même bus, avec la relation tous les couples de personnes (p_1, p_2) tels que p_1 est cousin avec p_2". Cette relation est symetrique car si p_1 est cousin de p_2, on a aussi p_2 est aussi cousin de p_1.

4. L'ensemble des composants éléctroniques d'un circuit et la ralation tous les couples de composants (c_1, c_2) tels que c_1 est directement connecté à c_2.

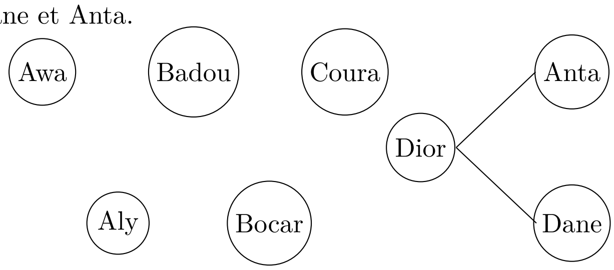
5. L'ensemble des station-relaits d'un réseau de télécommunication et la relation tous les couple de stations (s_1, s_2) tels qu'il existe un lien directe de communication (cable, micro-onde, etc.) entre s_1 et s_2

1.2 Représentation graphique d'une relation

Si un ensemble d'objets est fini, il est possible de représenter une relation dans cet ensemble par un dessin ou graphe. Il est souvant util de faire une telle représentation pour mieux comprendre un problème.

Le plus souvant, les objets de l'ensemble sont représentés par des cercles et les couples de la ralation par des segments de droites ou des courbes reliant deux cercles. L'orsque la relation est symetrique, il n'y aura pas de distinction entre les objets d'un même couple. Un tel graphe est appelé `graphe non orienté`.

Exemple 1: L'ors du pélérinage à Touba, un groupe de 8 personnes composé par Coura , Badou, Bocar, Awa, Dior, Aly, Anta et Dane ont partagé la même voiture. La figure, ci-après, est un graphe dont les objets sont des personnes voyageant ensemble et la relation contient les couples (p_1, p_2) tels que p_1 est cousin avec p_2. Sur ce graphe on remarque que Dior est cousine avec Dane et Anta.



Dans cas où on a une relation non symétrique (cas du graphe de la relation est parent de), les objets d'un couple ne jouent pas le même rôle. Les segements ou courbes représentant la relation sont orientés par une flèche. On parle alors de graphe orienté.

Exemple 2: L'ors d'un pélérinage à Touba, un groupe de 8 personnes composé par Coura, Badou, Bocar, Awa, Dior, Aly, Anta et Dane ont partagé la même voiture. La Figure 1, ci-après, est un graphe dont les objets sont des personnes voyageant ensemble et la relation contient les couples (p_1, p_2) tels que p_1 est parent de p_2.

Pour distinguer les deux personnes, on a dessiné une flèche pointant sur p_1. Ainsi, dans l'exemple `Coura` et `Badou` ont pour parents `Bocar` et `Awa`, `Dior` a pour parent `Aly` et `Coura` et Anta et Dane ont pour parents Badou.

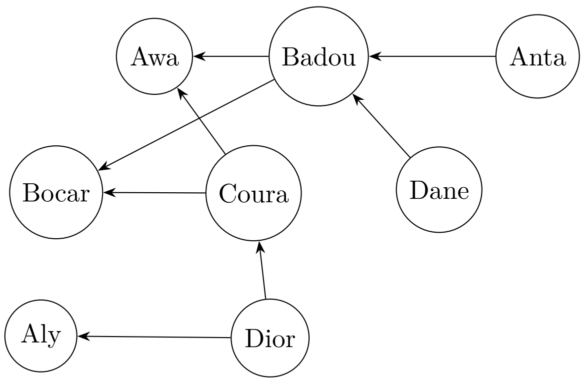


Figure 2:

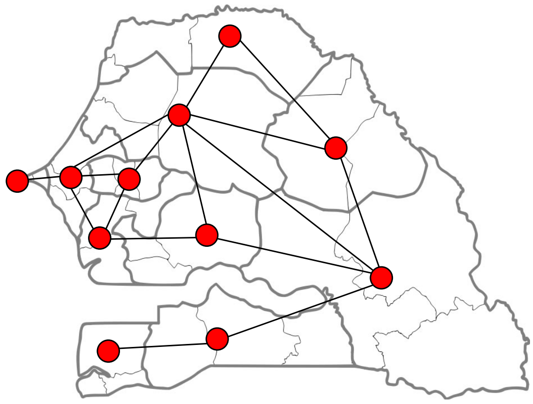
1.3 Interet des graphes

Les graphes sont un des outils privilégiés pour modéliser des ensembles structurés complexes. Ils sont indispensables si on veut représenter et étudier des ralations entre des objets. Les graphes modélisent toute situation dans laquelle il y a des interactions entre les objets:

1. Les réseaux routiers.
2. les réseaux de chemin de fer.
3. les réseaux sociaux ou encore.
4. les réseau internet.

A la base, les graphes sont des objets mathématiques étudiés par la théories des graphes (branche des Maths discètes). Cepedant cette théorie s'interesse peu aux applications et aux question algorithmique : d'où l'interêt de faire cette étude.

Par exemple, pour modéliser un réseau routier d'un pays par un graphe, les sommets du graphe représentent les villes. Les arêtes représentent les routes reliant les villes entre elles. Losrque les routes sont à double sens on considère un graphe non orienté et dans le cas contraire, le graphe sera orienté. Les arêtes peuvent être valuées par la longueur des routes correspondantes. Vous avez ci-dessous un graphe des régions du Sénégal. Les sommets modélisent les régions. Deux sommets sont reliés par une arête si les régions qu'ils modélisent partagent au moins une frontière.



Les questions types qu'on peut se poser dans ce genre de réseau sont:

1. Quel est le plus court chemin, en nombre de kilomètres, passant par un certain nombre de villes données ?
2. Quel est le chemin traversant le moins de villes pour aller d'une ville à une autre ?
3. Est-il possible de passer par toutes les villes sans passer deux fois par une même route ?

Les graphes sont aussi un bon modèle pour les réseaux. Les techniques utilisées en théorie de graphes permettent de répondre à beaucoup de problèmes algorithmiques posés sur ces réseaux. Etudier les propriétés de ces réseaux revient donc à étudier les propriétés structurelles de leurs topologies représentées par des graphes. Une question typique qu'on pourrait se poser dans un réseau routier est quel est un plus court chemin reliant une ville A à une ville B. Une des techniques couramment utilisées pour résoudre à des problèmes algorithmiques sur les graphes est la décomposition de graphe.

Les domaines d'application des graphes sont divers et variés:

1. Mathématique (algèbre, combinatoire, ...),
2. Informatique,
3. Recherche opérationnelle (tournées de distribution, ordonnancement, construction de circuits imprimés, ...),
4. Cartographie (coloriage de cartes),
5. Chimie,
6. Sociologie,
7. etc...

2 Définitions

2.1 Graphe orienté

Un *graphe orienté* G est un couple (V, E) où V est l'ensemble des *sommets* et E l'ensemble des *arcs*. Le nombre de sommets du graphe G est appelé *l'ordre* de G. Pour illustration, vous avez ci-dessous un graphe ayant 3 sommets et 3 arcs.

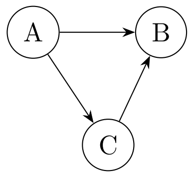


Fig. 1: Un graphe $G = (V = \{A, B, C\}, E = (A, B), (A, C), (C, B))$

Toute arc $e \in E$ correspond à un couple (u, v) de sommets de V tel que u représente *l'extrémités initiale* ou *origine* et v représente *l'extrémités finale*. On dira que e est une boucle si $u = v$.

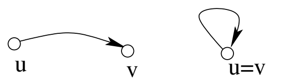


Fig2. : Une arête $e_1 = (u, v)$ et ne boucle $e_2 = (u, v = u)$

Si $G = (V, E)$ un graphe orienté, dans sa représentation graphique, chaque ligne $e = (u, v) \in E$ est orientée avec une flèche.

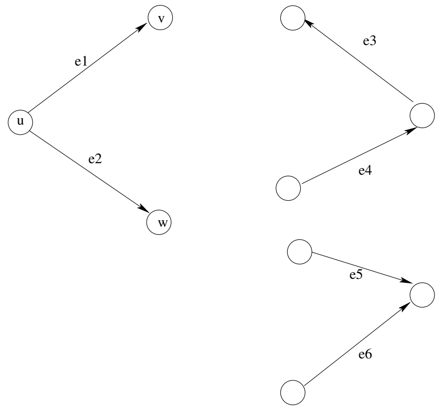
1. Un arc $e = (u, v)$ de G peut apparaître plusieurs fois dans E mais pas plus de p fois; on parle alors de p-graphe.
2. Un arc $e = (u, v)$ de G a une extrémité initiale u et une extrémité finale v;
3. Un arc $e = (u, v)$ de G correspond à une paire ordonnée de sommets appelé *arc* et noté $e = (u, v)$.

2.2 Définitions centrées arcs

Soient $e_1 = (u, v) \in E$, $e_2 = (u, w)$. Alors on dit que :

- e_1 est un arc sortant de u / e_1 est incident a u vers l'exterieur;
- e_1 est un arc rentrant de u/ e_1 est incident de u vers l'interieur,;
- u est l'extrémité initiale de e_1 et aussi un *prédécésseur* de v ;
- v est l'extrémité final de e_1 et aussi un *successeur* de u;
- les arcs e_1 et e_2 sont dits adjacents.

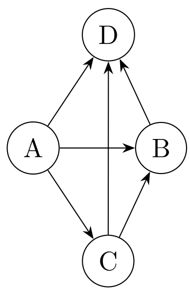
Exemple : e_1 est adjacent à e_2, e_3 est adjacent à e_4, e_5 st adjacent à e_6.



2.3 Définitions centrées sommets

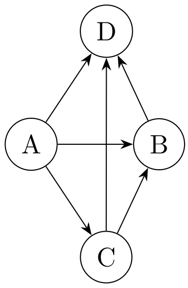
Pour tout sommet $u \in V$, on dit que :

- $\omega^+(u)$ est l'ensemble des arcs sortant de u;
- $\omega^-(u)$ est l'ensemble des arcs entrant de u.
- $\omega(u)$ est l'ensemble des arcs sortant et entrant de u.



Nous avons ci-dessus un graphe G tel que $\omega^+(C) = 2$, $\omega^-(C) = 1$, $\omega(C) = 3$, ...

- L'ensemble des sommets successeurs de u est l'ensemble noté $succ(u) = \{s_1, \ldots, s_k\}$ des sommets s_i tels $(u, s_i) \in \omega^+(u)$.
- L'ensemble des sommets prédecesseurs de u est l'ensemble noté $pred(u) = \{s_1, \ldots, s_k\}$ des sommets s_i tels $(s_i, u) \in \omega^-(u)$.
- L'ensemble $N(u) = succ(u) \cup pred(u)$ est l'ensemble des sommets voisins/adjacents de u.

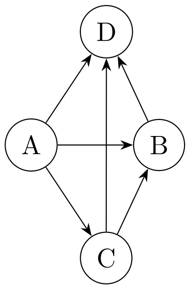


Dans le graphe ci-dessus, pour illustration, on a $succ(A) = \{B, D, C\}$, $succ(C) = \{B, D\}$.

2.4 Degré

Pour tout sommet $u \in V$, on a :

- le degré sortant de u est $d^+(u) = |\omega^+(u)| = |succ(u)|$
- le degré entrant de u est $d^-(u) = |\omega^-(u)| = |pred(u)|$
- le degré de u est $d(u) = d^+(u) + d^-(u) = |\omega(u)| = |N(u)|$



Sur l'exemple ci-dessus, on a : $d^+(A) = 3$, et $d^-(A) = 0$, $d(A) = 3$ et $d^+(D) = 0$, $d^-(D) = 3$ et $d(D) = 3$, ...

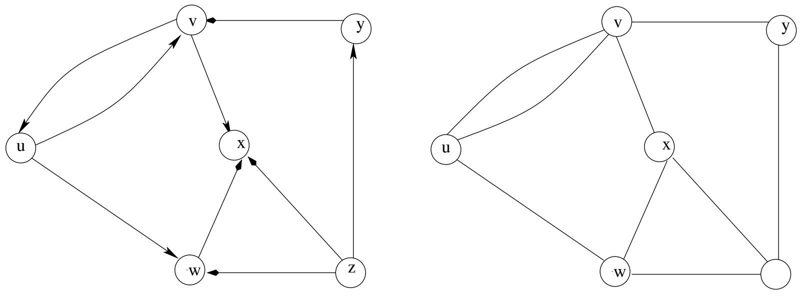
2.5 Graphe non orienté

Si G est un graphe orienté alors, pour étudier certaines propriété `non oriantée` de G, il peut arriver que la direction des flèches n'importe pas; seul importe les paires de points reliées et combien de fois elles sont reliées. Dans ce cas, le graphe non orienté G' obtenu à partir de G est tel que :

- à la place du ième arc $e_i = (u, v) \in E$ on considère l'ensemble formé des points u et v noté $e_i = \{u, v\}$ que l'on appellera la ième arête de G'.
- La famille $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}$ de m arêtes du graphe G' sera notés par E';

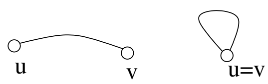
Le graphe non orienté G' obtenu à partir de G est donc le graphe G sans son orientation; on parlera de *multigraphe* $G' = (V, E')$.

Exemple A gauche, on a un graphe orienté G et à droite le multigraphe graphe G' obtenu à partir de G en omettant les orientations.



Un *graphe non orienté* G est un couple (V, E) où V est l'ensemble des *sommets* et E l'ensemble des *arêtes*. Toute arête $e \in E$ correspond à une paire $\{u, v\} \in V$ de sommets représentant ses *extrémités*. On dira que e est une boucle si $u = v$. Le nombre de sommets d'un graphe G est appellé ordre de G. Graphiquement, les sommet du graphe sont représentés par des points. Un arete $\{u, v\}$ est représentée par une ligne entre les deux points représentants u et v.

Exemple Une arete $\{u, v\}$ et une boucle $\{u, u\}$.



2.6 Graphe orienté & graphe non orienté

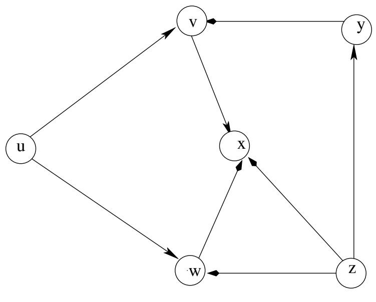
Tout graphe peut être considéré comme orienté. C'est pour des raisons conceptuelles, qu'il est parfois peu commode de le considerer avec des lignes orientées si le problème posé est de nature non orienté. Le passage d'un multi graphe G à un graphe orienté G' se fait en orientant chaque arête de G dans les deux sans. Le passage d'un graphe orienté G' à un graphe G se fait en ométtant les orientations des arêtes de G'. Dans un graphe orienté G :

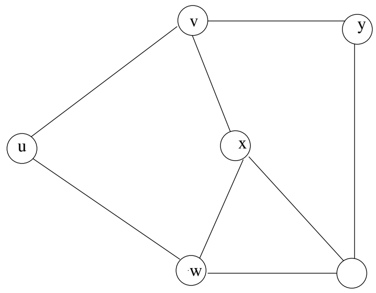
1. On parlera de *couple* de sommets et non de paire de sommets.
2. On dira que G est élémentaire s'il ne contient pas de boucle.
3. On dira que G est un p-graphe s'il comporte au plus p arcs entre deux sommets.
4. On distinguera les notations par :
   a) (u, v) pour la notation de couple/arc et
   b) $\{u, v\}$ pour la notation paire/arete.

2.7 Graphe simple

Un *graphe simple* $G = (V, E)$ est un multi-graphe sans boucle tel que entre deux sommets x, y de V, il y a au plus un arc pour les relier. Dans ce cas, la famille E devient un sous-ensemble de l'ensemble $P_2(V)$ des parties à deux éléments de l'ensemble V.

Exemple A gauche, on a un graphe orienté G et à droite le graphe simple G' obtenu à partir de G en omettant le orientations.



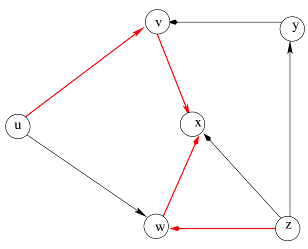


3 Chaine, Chemin et Cycle

3.1 Chaine

Une **chaine** est une sequence $\rho = (u_1, u_2, u_3 \ldots, u_q)$ d'arcs de G telle que chaque arc de la sequence ait une extremite en commun avec l'arc precedent, et l'autre extremité en commun avec l'arc suivant. Le nombre d'arcs de la sequence est la longueur de la chaine ρ. Une chaine qui ne rencontre pas deux fois le meme sommet est dite **elémentaire**. Une chaine qui n'utilise pas deux fois le meme arc est dite **simple**.

Exemple Un grqphe G et un exemple de chaine $\rho = ((u, v), (v, x), (w, x), (z, w))$



3.2 Chemin

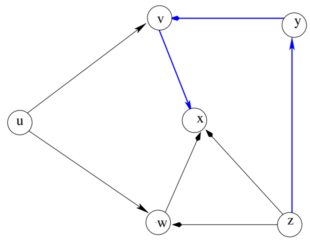
Une chaine $\rho = (u_1, u_2, u_3 \ldots, u_q)$ où pour tout arc u_i (avec $i < q$) l'extremite terminale de u_i, coincide avec l'extremite initiale de u_{i+1} est un **chemin**. Dans le cas d'un 1-graphe ou d'un graphe simple, un chemin est determiné completement par la succession des sommets $x_1, x_2, \dots$ qu'il rencontre, et l'on note indifferemment :

$\rho = ((x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), \dots) = [x_1, x_2, \dots, x_{k-3}, x_{k-1}, x_k] = \rho[x_1, x_k]$.

x_1 est l'extremite initiale, et x_k I'extremite terminale du chemin ρ.

Par exemple, ci-dessous, on a un graphe 1-$G = (V, E)$ tel que : $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ $E = \{\{a, d\}, \{d, b\}, \{d, e\}, \{d, h\}, \{d, g\}, \{g, f\}, \{b, c\}, \{c, e\}, \}$ et un chemin de longueur 5 reliant les sommets f à b.

Exemple: Un graphe G et un chemin $\rho = ((z, y), (y, v), (v, x)) = [z, y, v, x]$



G

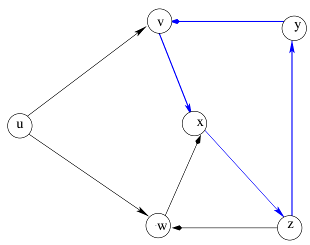
3.3 Cycle

Un **cycle** est une chaine $\rho = (u_1, u_2, u_3 \dots, u_q)$ telle que :

- le meme arc ne figure pas deux fois dans la sequence,
- les deux sommets aux extremités de la chaine coincident.

Un **cycle élémentaire** est un cycle qui vérifie en outre qu'en parcourant le cycle, on ne rencontre qu'une fois le meme sommet (excepté bien entendu le sommet initial qui coincide avec Ie sommet terminal). Pour un cycle μ donné, on designe par μ^+ I'ensemble des arcs du cycle orientes dans Ie sens de parcours, et par μ^- l'ensemble de tous les autres arcs du cycle. Tout cycle μ est une somme de cycles élémentaires sans arcs communs. C'est evident: si l'on parcourt μ, on définira un cycle élémentaire chaque fois qu' on arrive en un sommet deja rencontré. Un cycle est élémentaire si et seulement si c'est un cycle minimal (c'est-a-dire si on ne peut en déduire un autre cycle par suppression d'arcs). Un **circuit** est un cycle $\rho = (u_1, u_2, u_3 \dots, u_q)$ tel que pour $i < q$, l'extrémité terminal de u_i coinside avec l'extrémité initial de u_{i+1}(cf. Figure ci-dessous).

Exemple: Un graphe G et en bleu, on a un exemple de circuit dans G.

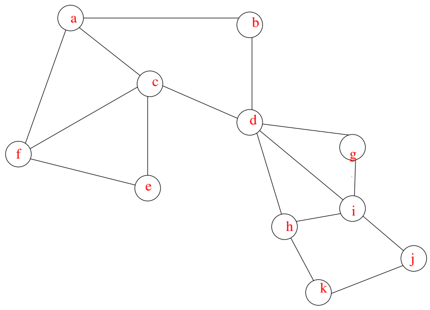


G

3.4 Connexité

Un **graphe connexe** est un graphe tel que pour toute paire x, y de deux sommets distincts, iI existe une chaine $\rho[x, y]$ reliant ces deux points. Vous avez ci-dessous un exemple de graphe connexe.

Exemple: Un graphe connexe



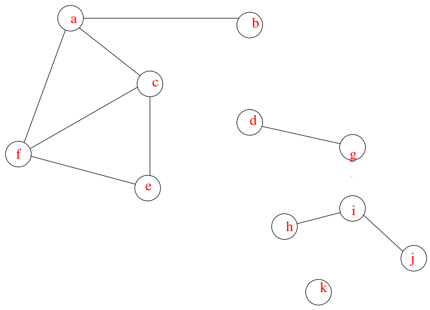
II est facile de remarquer que la relation « $x = y$, ou $x \neq y$ et iI existe dans G une chaine reliant x et y » est une relation d'equivalence (notee $x \equiv y$), car

- $x \equiv x$ (reflexivité)
- $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$ (symétrie)
- $x \equiv y, y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$ (transitivité)

Les classes de cette equivalence constituent une partition de V en sousgraphes connexes de G, appelés les **composantes connexes** de G.

Si un graphe n'est pas connexe, alors on peut identifier plusieurs sous-graphes connexes, maximaux au sens de l'inclusion appelés **composantes connexes**. Ci-dessous, vous avez un exemple de graphe non connexe composé de 4 composantes connexes.

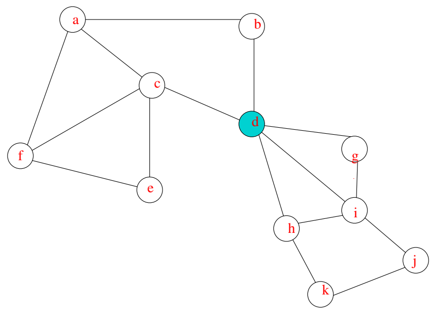
Exemple: Un graphe G non connexe.



3.5 Point d'articulation, isthme et séparateur

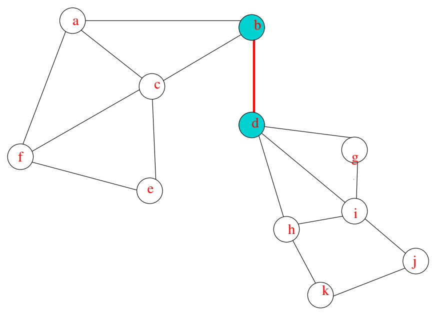
Un **point d'articulation** est un sommet qui augmente le nombre de composantes connexes si on enlève. Sur le graphe ci-après, le sommet d est un point d'articulation.

Exemple: Un graphe G et un point d'articulation.



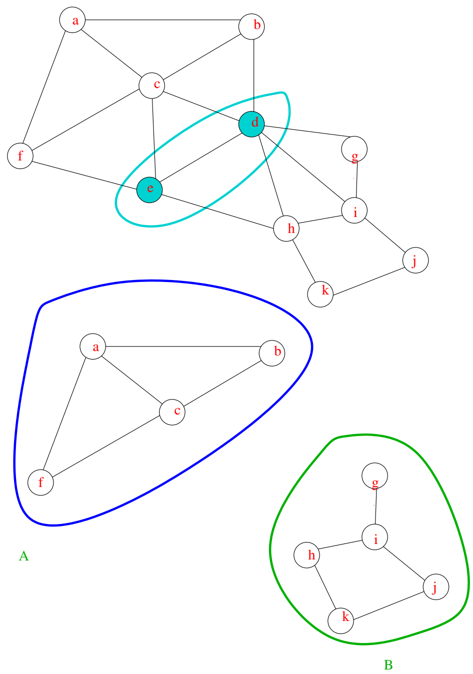
Un **isthme** est un arc qui augmente le nombre de composantes connexes si on enlève.

Exemple: Un graphe G et une arête $\{b, d\}$ mise en évidence en rouge formant un isme dans G.



Un **séparateur** dans un graphe connexe est un ensemble de sommets tels que leur suppression augmente le nombre de composantes connexes.

Exemple: Un graphe G et un ensemble $S = \{e, d\}$ formant un séparateur dans le graphe



La suppression de ces sommets déconnecte le graphe en deux composantes connexes dont l'une A contient les sommets $\{a, b, c, f\}$ et l'autre B contient les sommets $\{g, h, i, j, k\}$.

- Si S est un séparateur de G, alors il existe deux sommets a et b de G qui sont dans deux composantes connexes différentes de $G \setminus S$.
- Un séparateur S de G est dit minimal si tout séparateur S' de G est tel que $|S'| \geq |S|$. Dans l'exemple précédent, il est facile de remarquer que S est un séparateur minimal.

Teorem 3.1. *Si $G = (V, E)$ est un graphe et $a \in V$ et $b \in V$. L'adjonction d'un nouvel arc $u = (a, b)$ à G pour donner un nouveau graphe $G' = (V, E \cup \{u\})$ a pour effet :*

- *soit de diminuer de 1 le nombre de composantes connexes, dans ce cas u n'appartient à aucun cycle de G' ;*
- *soit de laisser inchangé le nombre de composantes connexes, dans ce cas u appartient à un cycle de G'.*

Bevis. Si a et b appartiennent à deux composantes connexes distinctes, le nombre de composantes connexes diminue de 1. L'arc u ne peut appartenir à un cycle de G' car si non, en supprimant u de ce cycle, on aurait une chaîne joignant les deux composantes connexes dans G.

Si a et b appartiennent à la même composante connexe, le nombre de composantes connexes reste inchangé. La concaténation de la chaîne joignant a et b dans G et de u donne un cycle dans G'.

■

Teorem 3.2. *u est un isthme si et seulement si u n'appartient à aucun cycle de G.*

Teorem 3.3. *Soit $G = V, E$ un graphe tel que $|V| = n$ et $|E| = m$; on a : G connexe $\Rightarrow m \geq n - 1$ G est sans cycle $\Rightarrow m \leq n - 1$*

@book Berge69, AUTHOR = C. Berge, TITLE = Théorie des graphes et ses applications, PUBLISHER = Dunod, YEAR = 1967,

@book SD2003, AUTHOR = R. Strandh and I. Durand, TITLE = Initiation à l'informatique, PUBLISHER = Meta Modulaire SARL, YEAR = 2003,