Fonction réelle d'une variable reélle.

1 Introduction

1.1 Notations

Nous introduisons ici quelques notations qui seront utilisées par la suite pour l'écriture d'assertions mathématiques :

- le symbole « $\forall$» veut dire «pour tout» ou bien«quel que soit»;
- le symbole «$\exists$» veut dire «il existe»;
- le symbole «$\exists!$» veut dire «il existe un unique»;
- le symbole « :» veut dire «tel que»;
- le symbole «$\Rightarrow$» veut dire «implique» ou encore «si....alors»;
- le symbole « $\Leftrightarrow$ » veut dire « est équivalent à » ou encore « si et seulement si ».

Exemple.

1. «$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 3$» se lit «Pour tout réel x, $f(x)$ est strictement supérieur à 3.»
2. «$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)$» se lit «Pour tout réel y, il existe un réel x tel que y est égal à $f(x)$.»

1.2 Ensembles usuels

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ possède les sous-ensembles remarquables suivants :

- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ l'ensemble des entiers naturels;
- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$ l'ensemble des entiers naturels privé de 0 ;
- $\mathbb{Z} = \{.., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ l'ensemble des entiers relatifs;
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$ l'ensemble des rationnels;
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'ensemble des irrationnels ;
- $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ et $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$;
- $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} =]0, +\infty[$ et $\mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}_- \setminus \{0\} =]-\infty, 0[$.

Remarque. Rappelons que l'on a les inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ et que grande majorité des nombres réels sont des nombres irrationnels donc des éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Définition. (Intervalle de $\mathbb{R}$) *Un sous ensemble non vide I de $\mathbb{R}$ est un intervalle s'il satisfait la condition suivante : A chaque fois que I contient deux réels x et y, il contient tous les réels se trouvant entre x et y.*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Un intervalle de $\mathbb{R}$ est de l'une des 9 formes suivantes :

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$; (les segments de $\mathbb{R}$)
2. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$; (les intervalles ouverts et bornés de $\mathbb{R}$)
3. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$; (les intervalles semi-ouverts et bornés de $\mathbb{R}$)
4. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$; (les intervalles semi-ouverts et bornés de $\mathbb{R}$)

5. $[a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}: x\geqslant a\}$; (les demi-droites fermées et minorées de $\mathbb{R}$)
6. $]a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}: x> a\}$; (les demi-droites ouvertes et minorées de $\mathbb{R}$)
7. $]-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}: x\leqslant b\}$; (les demi-droites fermées et majorées de $\mathbb{R}$)
8. $]-\infty,b[=\{x\in\mathbb{R}: x< b\}$; (les demi-droites ouvertes et majorées de $\mathbb{R}$)
9. $\mathbb{R}$, la droite réelle.

1.3 Règles de calcul dans $\mathbb{R}$

Pour tout $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ on utilisera fréquemment les règles de calcul suivantes :

$$\begin{aligned}
a\times b=0 &\iff (a=0)\vee(b=0) \text{ (propriété d'intégrité de } \mathbb{R})\\
a<b &\iff (a\leqslant b)\wedge(a\neq b);\\
(a\leqslant b)\wedge(b\leqslant a) &\iff a=b \text{ (antisymétrie de la relation } \leqslant)\\
(a\leqslant b)\wedge(b\leqslant c) &\implies a\leqslant c \text{ (transitivité de la relation } \leqslant)\\
(a\leqslant b)\wedge(c\leqslant d) &\implies a+c\leqslant b+d \text{ (compatibilité de la relation } \leqslant \text{ et de } +)\\
(a\leqslant b)\wedge(c\geqslant 0) &\implies a\times c\leqslant b\times c\\
(a\leqslant b)\wedge(c\leqslant 0) &\implies a\times c\geqslant b\times c
\end{aligned}$$

Proposition 1. *Soient $a,b\in\mathbb{R}$.*

$$a^2=b^2 \iff (a=b)\vee(a=-b)$$

Démonstration. **Exercice 1.** □

Proposition 2. *Soient $a,b\in\mathbb{R}$. On a :*

1. *si $a,b\in\mathbb{R}_+$, alors $(a\leqslant b)\iff a^2\leqslant b^2$;*
2. *si $a,b\in\mathbb{R}_-$, alors $(a\leqslant b)\iff a^2\geqslant b^2$;*
3. *si $a\in\mathbb{R}_-$ et $b\in\mathbb{R}_+$ alors on a toujours $a\leqslant\sqrt{b}$;*
4. *si $a\in\mathbb{R}_+$ et $b\in\mathbb{R}_+$ alors $a\leqslant\sqrt{b}\iff a^2\leqslant b$.*

Exemple. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x+1\leqslant\sqrt{x^2+1}$ $(\star)$
Si $x+1<0$, alors $(\star)$ est toujours vérifiée et on trouve comme premier ensemble de solutions

$$S_1=\{x\in\mathbb{R}: x+1<0\}=]-\infty,-1[.$$

Si $x+1\geqslant 0$, alors $(\star)\iff(x+1)^2\leqslant\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2\iff x^2+2x+1\leqslant x^2+1\iff 2x\leqslant 0\iff x\leqslant 0$. On trouve comme deuxième ensemble de solutions

$$S_2=]-\infty,0]\cap[-1,+\infty[=[-1,0].$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de $(\star)$ est $S=S_1\cup S_2=]-\infty,-1[\cup[-1,0]=]-\infty,0]$.

2 Fonction réelle d'une variable réelle

Dans toute la suite, on considère E et F deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

2.1 Définitions

Définition. (Fonction) *Une fonction réelle d'une variable réelle est la donnée d' :*

1. *un ensemble de départ $E\subset\mathbb{R}$;*
2. *un ensemble d'arrivée $F\subset\mathbb{R}$;*
3. *un procédé qui transforme un élément de E en un élément de F appelé expression de la fonction.*

Remarque. Dans toute la suite on écrira « fonction » plutôt que « fonction réelle d'une variable réelle » par soucis de concision.

Notation. *Une fonction f sera notée :*

$$f\colon \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

où pour $x \in E$, $f(x)$ désigne l'image de x par la fonction f.

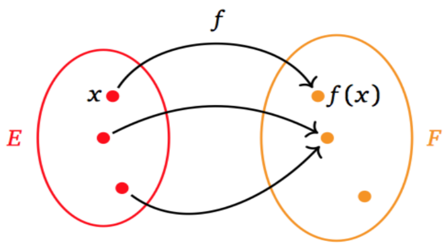

Figure 1.

Définition. (Domaine de définition) *Soit $f\colon E \longrightarrow F$, $x \longmapsto f(x)$ une fonction. On appelle domaine de définition de f et on note $\mathcal{D}_f$, la collection des éléments x de E pour lesquels $f(x)$ est défini (c'est à dire existe).*

$$\mathcal{D}_f := \{x \in E\colon f(x) \text{ existe}\}.$$

Exemple. Soient f_1, f_2 et f_3 trois fonctions définies par :

$$f_1\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{cases} ; \quad f_2\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x+1} \end{cases} ; \quad f_3\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x-2}} \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. $f_1(x)$ existe si et seulement si $x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}^*$. $f_2(x)$ existe si et seulement si $x + 1 \geqslant 0$. Ainsi $\mathcal{D}_{f_2} = [-1, +\infty[$. $f_3(x)$ existe si et seulement si $(x - 2 \geqslant 0) \wedge (\sqrt{x-2} \neq 0)$. Ainsi $\mathcal{D}_{f_3} =]2, +\infty[$.

Définition. (Égalité fonctionnelle) *Deux fonctions $f_1\colon E_1 \longrightarrow F_1$, $x \longmapsto f_1(x)$ et $f_2\colon E_2 \longrightarrow F_2$, $x \longmapsto f_2(x)$ sont égales si $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$ et $\forall x \in E_1 = E_2$, $f_1(x) = f_2(x)$.*

Exemple. Les fonctions

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x+1 \end{cases} \quad \text{et} \quad g\colon \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x+1 \end{cases}$$

ne sont pas égale car les ensembles de départ ne sont pas les mêmes.

2.2 Monotonie, parité et périodicité.

Définition. (Monotonie) *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$. On dit que :*

- *f est croissante (resp. strictement croissante) sur E si $\forall x, y \in E, (x \leqslant y) \Rightarrow (f(x) \leqslant f(y))$ (resp. $f(x) < f(y)$).*
- *f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur E si $\forall x, y \in E, (x \leqslant y) \Rightarrow (f(x) \geqslant f(y))$ (resp. $f(x) > f(y)$).*
- *f est monotone (resp. strictement monotone) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).*

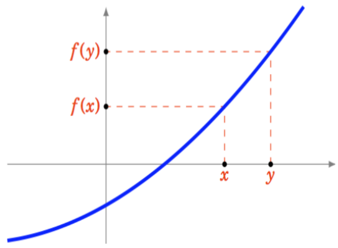

Figure 2. *Une fonction strictement croissante*

Définition. **(Parité)** *Soit E un sous ensemble symétrique par rapport à 0 de $\mathbb{R}$ (c'est à dire $\forall x \in E$, $-x \in E$) et $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur E. On dit que :*

- *f est paire si $\forall x \in E, f(-x) = f(x)$. Son graphe est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;*

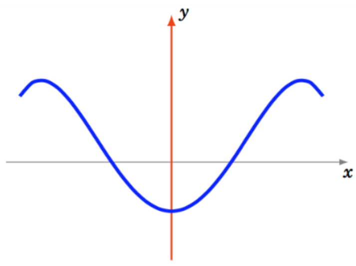

Figure 3. *Une fonction paire*

- *f est impaire si $\forall x \in E$, $f(-x) = -f(x)$. Son graphe est alors symétrique par rapport à l'origine $(0,0)$.*

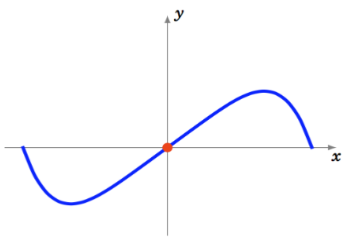

Figure 4. *Une fonction impaire*

Remarque. L'étude d'une fonction paire (resp. impaire) peut être réduite à l'étude sur la partie positive ou négative de son domaine de définition puis complétée par symétrie axiale d'axe l'axe des ordonnées (resp. centrale de centre le point $(0,0)$).

Définition. **(Périodicité)** *Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et un réel $T > 0$. La fonction f est dite périodique de période T ou T-périodique si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.*

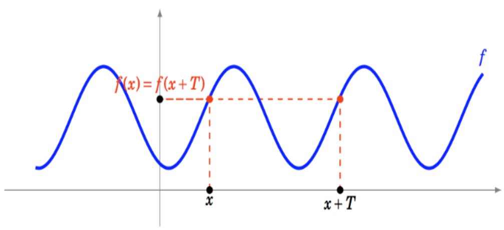

Figure 5. *Une fonction T-périodique.*

2.3 Opérations sur les fonctions

Définition. (Addition, multiplication et rapport) *Soient* $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x)$, $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto g(x)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On définit :*

- *a fonction* $\lambda.f$ *par :*
$$\lambda.f\colon \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda.f(x) \end{cases}$$
- *la fonction* $f+g$ *par :*
$$f+g\colon \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)+g(x) \end{cases}$$
- *la fonction* $f \times g$ *par*
$$f \times g\colon \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \times g(x) \end{cases}$$
- *la fonction* $\frac{f}{g}$ *par :*
$$\frac{f}{g}\colon \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{cases}$$

Définition. (Composition) *Soient E,F,G,H des sous-ensembles de* $\mathbb{R}$ *et* $f : E \to F$ *et* $g : G \to H$ *deux fonctions. Si l'espace d'arrivée* F *de* f *est inclus dans l'espace de départ* G *de* g *alors on définit la fonction composée* $g \circ f$ *par :*

$$g \circ f\colon \begin{cases} E \longrightarrow H \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{cases}$$

Remarque.

1. La condition $F \subset G$ est essentielle pour que l'image par la fonction g de $f(x)$ ait toujours un sens. De même, la condition $H \subset E$ est essentielle pour que l'image par la fonction f de $g(x)$ ait toujours un sens.
2. Il faut faire attention à l'ordre dans lequel on écrit les fonctions car en général les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ ne sont pas égales. La composition de fonctions est une opération non commutative.

Exemple. On considère les fonctions :

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \\ x \longmapsto \sin(x) \end{cases}, \quad g\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}, \quad f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}.$$

Peut-on définir les fonctions $f \circ g, g \circ f, g \circ h$?

1. La fonction $g \circ f$: $[-1,1]$ n'est pas inclus dans $\mathbb{R}_+$ donc $g \circ f$ n'a pas de sens.
2. La fonction $f \circ g$: on a $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ donc $f \circ g$ a un sens et est définie par :
$$f \circ g\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow [-1,1] \\ x \longmapsto \sin(\sqrt{x}) \end{cases}$$
3. La fonction $g \circ h$: $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}_+$ donc $g \circ h$ a un sens et est définie par :
$$g \circ h\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \sqrt{x^2} \end{cases}$$

2.4 Antécédent, image, image directe et image réciproque

Définition. (Antécédent et image) *Soit* $f\colon E \longrightarrow F$ *une fonction définie sur E.*

- *Soit* $y \in F$. *On appelle antécédent de* y *par la fonction* f *tout élément* $x \in E$ *tel que* $f(x) = y$.
- *Soit* $x \in E$. *On appelle image de* x *par la fonction* f *l'unique élément* $y \in F$ *tel que* $y = f(x)$.

Remarque. Pour une fonction f, l'ensemble des antécédents d'un élément $y \in F$ peut être vide, peut contenir un élément, ou un nombre quelconque d'éléments. Par exemple considérons la fonction définie par :

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \in [0,1] \longmapsto x^2 \\ x \in \mathbb{R}\backslash[0,1] \longmapsto 5 \end{cases}$$

Considérons respectivement les éléments $y_1 = -1$, $y_2 = 1$ et $y_3 = 5$. L'ensemble des antécédents de y_1 est vide, celui des antécédents de y_2 est égal au singelton $\{1\}$, alors que celui de y_3 est égal à $\mathbb{R}\backslash[0,1]$ donc infini.

Définition. (Image réciproque, image directe) *Soit $f\colon E \longrightarrow F$ une fonction A un sous ensemble de E et B un sous-ensemble de F.*

- *On appelle image réciproque de B par f le sous-ensemble de l'espace de départ E, noté $f^{-1}(B)$ défini par*

$$f^{-1}(B) := \{x \in E\colon f(x) \in B\}.$$

- *On appelle image directe de A par f le sous-ensemble de l'espace de d'arrivée F, noté $f(\mathrm{A})$ défini par*

$$f(A) := \{y \in F\colon \exists x \in A\colon y = f(x)\} = \{f(x), x \in A\}.$$

- *On appelle image de la fonction f et on note $\mathrm{Im}(f)$, l'image directe de son ensemble de départ :*

$$\mathrm{Im}(f) := f(E).$$

Remarque. L'image réciproque $f^{-1}(B)$, d'une partie B de l'espace d'arrivée, n'est rien d'autre que l'ensemble des antécédents des éléments de B. C'est une partie de l'ensemble de départ de la fonction.

L'image directe $f(A)$, d'une partie A de l'espace de départ, n'est rien d'autre que l'ensemble des images des éléments de A. C'est une partie de l'ensemble d'arrivée de la fonction.

Il ne faut pas confondre l'image de f notée $\mathrm{Im}(f)$ et l'image de x par f notée $f(x)$ car ce ne sont pas le même type d'objet. En effet, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-ensemble de l'espace d'arrivée F alors que $f(x)$ est un élément de F. $\mathrm{Im}(f)$ est le sous-ensemble des éléments de l'espace d'arrivée F qui ont au moins un antécédent par f.

2.5 Injectivité, surjectivité, bijectivité et fonction réciproque

Définition. (Injectivité) *Une fonction $f\colon E \longrightarrow F$ est dite injective si tout point y de l'espace d'arrivée F possède **au plus un** antécédent x dans l'espace de départ E par la fonction f.*

Autrement dit :

$$\forall y \in F, \# f^{-1}(\{y\}) \leqslant 1.$$

Autrement dit encore :

$$\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Définition. (Surjectivité) *Une fonction $f\colon E \longrightarrow F$ est dite surjective si tout point y de l'espace d'arrivée F possède **au moins un** antécédent x dans l'espace de départ E par la fonction f.*

Autrement dit :

$$\forall y \in F, \exists x \in E\colon f(x) = y.$$

Définition. (Bijectivité) *Une fonction $f\colon E \longrightarrow F$ est dite bijective si tout point y de l'espace d'arrivée F possède **exactement un** antécédent x dans l'espace de départ E par la fonction f. Autrement dit :*

$$\forall y \in F, \exists! x \in E\colon f(x) = y.$$

Proposition. *Une fonction est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.*

Exemple.

1. La fonction $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ n'est pas injective car $1 \in \mathbb{R}_+$ admet deux antécédents -1 et 1 dans l'espace de départ $\mathbb{R}$. En effet $f(1) = f(-1) = 1$. Elle est surjective car tout $y \in \mathbb{R}_+$ admet au moins $x = \sqrt{y}$ comme antécédent. Ainsi elle n'est pas bijective.

2. La fonction $g\colon \begin{cases} [0,2] \longrightarrow [0,4] \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ est bijective car tout $y \in [0,\,4]$ admet un unique antécédent $x = \sqrt{y}$ dans l'espace de départ $[0,2]$.

3. La fonction $h\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$ n'est pas injective car $0 \in [-1,1]$ admet au moins deux antécédents dans son espace de départ : $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$. Donc elle n'est pas bijective.

En pratique on utilise souvent le résultat suivant pour montrer qu'une fonction est bijective, bien souvent en dressant le tableau de variations de la fonction :

Théorème 3. (Théorème de la bijection) *Si une fonction $f : E \rightarrow F$ est strictement monotone et est telle que $F = \mathrm{im}(f)$ alors elle est bijective.*

Exemple. La fonction $g\colon \begin{cases} [0,2] \longrightarrow [0,4] \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ est bijective car elle est strictement croissante et $\mathrm{Im}(g) := g([0,2]) = [0,4]$.

L'intérêt principal que nous apporte le caractère bijectif d'une fonction f est qu'il nous permet de définir une nouvelle fonction appelée fonction réciproque de f.

Définition. (Fonction réciproque) *Si une fonction $f\colon E \longrightarrow F$ est bijective alors il existe une fonction appelée « fonction réciproque » de f, notée f^{-1} et définie par*

$$f^{-1} \begin{cases} F \longrightarrow E \\ y \longmapsto l'unique\ x \in E\ tel\ que\ y = f(x). \end{cases}$$

Remarque. On remarquera que la condition « f bijective » est essentielle si l'on veut que le x tel que $y = f(x)$ soit défini de manière unique.

Exercice 2. On considère la fonction $f\colon \begin{cases}]-\infty, 2] \longrightarrow \mathrm{Im}(f) \\ x \longmapsto x^2 - 4x + 3 \end{cases}$.
Déterminer $\mathrm{Im}(f)$, montrer que f est une bijection et calculer f^{-1}.

Proposition 4. *Soient $f\colon E \longrightarrow F$ une fonction bijective et $f^{-1}\colon F \longrightarrow E$ sa réciproque. Alors*

$$\forall x \in E,\, f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in F,\, f(f^{-1}(y)) = y$$

2.6 Continuité et dérivabilité d'une fonction

On note dans la suite I et J des intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition. (Continuité) *Soient $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.*

- *On dit que f est continnue au point a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.*
- *On dit que f est continue sur I si f est continnue en tout point de I.*

Proposition. *Soient $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :*

1. *la fonction $\lambda.f$ est continue sur I*
2. *la fonction $f + g$ est continue sur I,*
3. *la fonction $f \times g$ est continue sur I,*

4. si g ne s'annule pas sur I, la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur I.

Définition. (Dérivabilité) *Soient $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.*

- *On dit que f est dérivable au point a si la fonction $p_f\colon I\backslash\{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :*

$$p_f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie lorsque x tends vers a. Si elle existe, cette limite est notée $f'(a)$ et appelée dérivée de f en a.

- *On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.*
- *On appelle domaine de dérivabilité de f l'ensemble $\tilde{I} := \{x \in I\colon\ f \text{ est dérivable en } x\}$. On note la fonction dérivée de f par :*

$$f'\colon \begin{cases} \tilde{I} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f'(x) \end{cases}.$$

Exemple. La fonction $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$p_f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a.$$

Ainsi :

$$\lim_{x \to a} p_f(a) = \lim_{x \to a} (x + a) = 2a < \infty.$$

Par conséquent f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x$.

Définition. (Dérivée d'ordre supérieur) *Soient $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et f' sa dérivée. Si la fonction $f'\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ est aussi dérivable, on note $f^{(2)} = (f')'$ sa dérivée et on l'appelle la dérivée seconde de f. Plus généralement, on note :*

$$f^{(0)} = f,\ f^{(1)} = f',\ f^{(2)} = (f')' \ldots,\ f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

si la dérivée n-ième $f^{(n)}$ existe, on dit que f est n fois dérivable.

Proposition. (Règles de dérivation) *Soient $f, g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors, pour tout $x \in I$, on a :*

1. *la fonction $f + g$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;*
2. *la fonction λf est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$;*
3. *la fonction $f \times g$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$;*
4. *la fonction $\frac{1}{f}$ est dérivable en tout point x où $f(x) \neq 0$ et :*

$$\forall x \in I\colon f(x) \neq 0,\ \text{ on a : } \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2},$$

5. *la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en tout point x où $g(x) \neq 0$ et :*

$$\forall x \in I\colon g(x) \neq 0,\ \text{ on a : } \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

Proposition. (Dérivation de composée de fonctions) *Soient $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur des intervalleqs I et J et telles que $\mathrm{Im}(f) \subset J$. Alors pour tout $x \in I$, g est dérivable en $f(x)$ et $g \circ f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$*

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)).$$

Exemple. La fonction $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2x+1)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f = f_1 \circ f_2$ où $f_1(x) = \sin(x)$ et $f_2(x) = 2x+1$ sont définies et dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = (f_2)'(x) \times f_1'(f_2(x)) = 2\cos(2x+1).$$

Corollaire. (Dérivation de la fonction réciproque) *Soient $f\colon I \longrightarrow J$ une fonction dérivable et bijective et $f^{-1}\colon J \longrightarrow I$ sa réciproque. Si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable et on a pour tout $y \in J$*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Définition. (Tangente en un point) *Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point $a \in I$. Une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $(a, f(a))$ est donné par :*

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

2.7 Étude des variations d'une fonction

Proposition. (Sens de variation d'une fonction dérivable) *Soient $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.*

1. *Si $\forall x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ alors f est croissante.*
2. *Si $\forall x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$ alors f est décroissante.*
3. *Si $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$ alors f est constante.*
4. *Si $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante.*
5. *Si $\forall x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante.*

Remarque. Les réciproques des points 1. 2. et 3. sont vraies et celles des points 4. et 5. sont fausses. Par exemple, la fonction $x \longmapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

3 Fonctions usuelles

3.1 La valeur absolue

Définition. *La fonction valeur absolue, notée $|.|$ est définie par :*

$$|.| \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \left\{ \begin{array}{cc} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

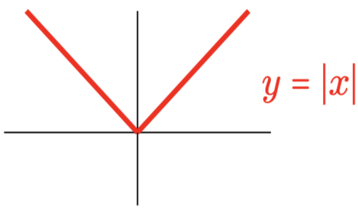

Figure 6. *Graphe de la fonction valeur absolue*

Remarque. Sur la droite numérique $\mathbb{R}$, $|x-y|$ représente la distance entre les réels x et y.

Proposition. *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, la valeur absolue vérifie les propriétés suivantes :*

1. $|x| \geqslant 0$ *et* $|x| > 0 \Longleftrightarrow x \neq 0$;
2. *la fonction valeur absolue est paire :* $|-x| = |x|$;
3. $\sqrt{x^2} = |x|$;
4. $|x.y| = |x|.|y|$;
5. $\forall r \in \mathbb{R}_+,\ |x| \leqslant r \Longleftrightarrow -r \leqslant x \leqslant r$;
6. $\forall b \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant b \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant b \text{ ou } x \leqslant -b & si \quad b \geqslant 0 \\ x \in \mathbb{R} & si \quad b < 0 \end{cases}$;
7. *L'inégalité triangulaire :* $|x + y| \leqslant |x| + |y|$;
8. *Seconde inégalité triangulaire :* $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$

Démonstration. **Exercice 3.** □

3.2 Fonctions trigonométriques

Définition. (cosinus et sinus) *Considérons la figure suivante :*

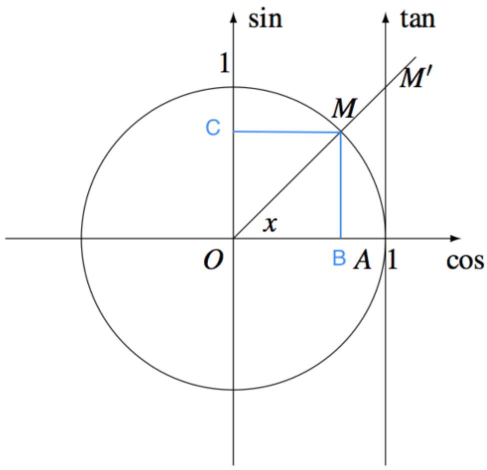

Figure 7. *Cercle trigonométrique.*

On définit :

1. *la fonction cosinus comme la fonction de* $\mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ *qui à l'angle* $x \in \mathbb{R}$ *(exprimé en radian) associe la mesure algébrique du segment OB :*

$$\cos\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longmapsto \overline{\mathrm{OB}} \end{cases}.$$

2. *la fonction sinus comme la fonction de* $\mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ *qui à l'angle* $x \in \mathbb{R}$ *(exprimé en radian) associe la mesure algébrique du segment OC :*

$$\sin\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longmapsto \overline{\mathrm{OC}} \end{cases}.$$

Proposition. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :* $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Démonstration. **Exercice 4.** □

Proposition. (Continuité, parité et périodicité) *Les fonctions cosinus et sinus sont continues et 2π-périodiques. De plus cosinus est paire et sinus impaire.*

Démonstration. Exercice 5. $\square$

Remarque. (Importante) nous rappelons que la longueur L d'un arc de cercle de rayon R et d'angle α exprimé en radian est :

$$L = \alpha R.$$

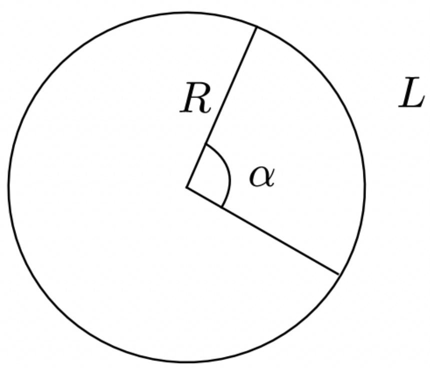

Figure 8.

Proposition. *Les fonctions cosinus et sinus vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$;
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$

Démonstration. Exercice 6. $\square$

Proposition. *On a :*

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$

Proposition. (dérivabilité) *Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables et :*

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin'(x) = \cos(x)$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin(x)$.

Proposition. *La fonction sinus restreinte à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ à valeurs dans $[-1, 1]$ est bijective.*

Démonstration. Exercice 7. $\square$

Définition. (arcsinus) *On appelle arcsininus, notée arcsin : $[-1,\ 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction réciproque de la fonction sin :$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$.*

Remarque. Par définition, pour tout $y \in [-1,1]$, $\arcsin(y)$ est l'unique angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus est égal à y. Ceci nous donne la relation suivante :

$$\text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) = y \Longleftrightarrow x = \arcsin(y).$$

Exemple. Que vaut $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$?

Par définition,

$$\theta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \Longleftrightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \sin(\theta) = \frac{1}{2}.$$

Par identification, $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Proposition. *La fonction arcsinus est continue et bijective de* $[-1,1]$ *dans* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, *dérivable sur* $]-1,1[$ *et vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\arcsin(\sin(x)) = x$, $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
2. $\sin(\arcsin(y)) = y$, $\forall y \in [-1,1]$,
3. *la fonction arcsinus est impaire*
4. $\forall y \in]-1,1[$, $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

Proposition. *La fonction cosinus restreinte à* $[0,\pi]$ *à valeurs dans* $[-1,1]$ *est bijective.*

Démonstration. **Exercice 8.** □

Définition. (arccosinus) *On appelle arccosinus, notée arccos :* $[-1,\ 1] \longrightarrow [0,\ \pi]$ *la fonction réciproque de la fonction cos:*$[0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$.

Remarque. Par définition, pour tout $y \in [-1,1]$, $\arccos(y)$ est l'unique angle compris entre 0 et π dont le cosinus est égal à y. Ceci nous donne la relation suivante :

$$\text{si } x \in [0,\pi], \cos(x) = y \Longleftrightarrow x = \arccos(y).$$

Exemple. Que vaut $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$?

Par définition,

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \Longleftrightarrow \theta \in [0,\pi] \text{ et } \cos(\theta) = \frac{1}{2}.$$

Par identification, $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Proposition. *La fonction arccosinus est continue et bijective de* $[-1,1]$ *dans* $[0,\pi]$, *dérivable sur* $]-1,1[$ *et vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\arccos(\cos(x)) = x$, $\forall x \in [0,\pi]$,
2. $\cos(\arccos(y)) = y$, $\forall y \in [-1,1]$,
3. $\forall y \in]-1,1[$, $\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

Démonstration. **Exercice 9.** □

Définition. (tangente) *La fonction tangente* $\tan\colon D_{\tan} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est définie par :*

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{avec} \quad D_{\tan} = \left\{x \in \mathbb{R} \colon x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Proposition. *La fonction tangente est continue et dérivable sur* $D_{\tan}$ *et vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\forall x \in D_{\tan}$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$;

2. *La fonction tangente est impaire :* $\forall x \in D_{\tan}, \tan(-x) = -\tan(x)$*;*
3. *La fonction tangente est* π*-périodique :* $\forall x \in D_{\tan}, \tan(x+\pi) = \tan(x)$.

Démonstration. **Exercice 10.** $\square$

Proposition. *La fonction tangente restreinte à* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *est bijective.*

Démonstration. **Exercice 11.** $\square$

Définition. (arctangente) *On appelle fonction arctangente, notée* $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, *la fonction réciproque de la fonction* $\tan\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$.

Remarque. Par définition, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\arctan(y)$ est l'unique angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont la tangente est égal à y. Ceci nous donne la relation suivante :

$$\text{si } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tan(x) = y \Longleftrightarrow x = \arctan(y).$$

Proposition. *La fonction arctangente est continue, bijective et dérivable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *et vérifie :*

1. $\arctan(\tan(x)) = x, \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$*;*
2. $\tan(\arctan(y)) = y, \forall y \in \mathbb{R}$*;*
3. *la fonction arctangente est impaire :* $\forall y \in \mathbb{R}, \arctan(-y) = -\arctan(y)$*;*
4. $\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}, \forall y \in \mathbb{R}$.

Exercice 12. En posant $t = \tan(\frac{x}{2})$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{y \in \mathbb{R} : y = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

3.3 Fonction polynomiale

Définition. *Soient* $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ *et* $a_n \in \mathbb{R}^*$. *Alors la fonction*

$$P\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \end{cases}$$

est appelée fonction polynôme de degré n. *Elle est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée* P' *est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à* $n-1$ *donné par*

$$P'\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} \end{cases}$$

Remarque. La dérivée de $P\colon x \longmapsto x^k$ est donc $P'\colon x \longmapsto k x^{k-1}$.

Définition. *Soit* $P\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction polynomiale de degré* n. *On dit que* $\alpha \in \mathbb{R}$ *est une racine ou un zéro de* P *si* $P(\alpha) = 0$.

Exemple. La fonction polynomiale P définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 + x - 2$ admet - il des racines ? Pour répondre à cette question, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 9$ et on trouve deux racines $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$.

Théorème. *Soit* $P\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction polynomiale de degré* n. *Alors :*

1. P *possède au plus* n *racines;*
2. $\alpha \in \mathbb{R}$ *est racine de* P *si et seulement si pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *il existe une fonction polynomiale de degré* $n-1$ *telle que* $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$.

Remarque. Lorsque $n=2$, si $P(x)=ax^2+bx+c$ admet deux racines x_1 et x_2 alors une factorisation de P est $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3.4 Fonction logarithme

Définition. (logarithme népérien) *On appelle logarithme népérien et on le note* $\ln$, *l'unique fonction de* $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *dérivable dont la dérivée vaut* $x \longmapsto \frac{1}{x}$ *et qui prend la valeur 0 en* 1, *autrement dit :*

$$\ln\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \end{cases}$$

Proposition. *Pour tout* $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{Z}$, *on a :*

1. $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$;
2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$;
3. $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$;
4. $\ln(a^n)=n\ln(a)$.

Démonstration. Exercice 13. □

Proposition. (Limites usuelles)

1. $\lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$;
2. $\lim_{x\to +\infty}\ln(x)=+\infty$;
3. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

Démonstration. Exercice 14. □

Théorème. *La fonction logarithme est une bijection continue, dérivable et strictement croissante de* $\mathbb{R}_+^*$ *dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Exercice 15. □

3.5 Fonction exponentielle

Définition. *La fonction exponentielle notée* $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ *est définie comme la bijection réciproque de la fonction logarithme* $\ln\colon \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

Remarque. On utilise la notation $\exp(x)=e^x$. Comme elle est la réciproque de la fonction logarithme, on en déduit que la fonction exponentielle vérifie

$$\forall x>0, e^{\ln(x)}=x \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}, \ln(e^y)=y.$$

Proposition. *Pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, *on a :*

1. $e^0=1$;
2. $e^{a+b}=e^a.e^b$;
3. $e^{-a}=\frac{1}{e^a}$;
4. $e^{na}=(e^a)^n$;
5. $e^{-na}=(e^a)^{-n}=\frac{1}{(e^a)^n}$.

Démonstration. **Exercice 16.** □

Proposition. **(Limites usuelles)**

1. $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$;
2. $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Démonstration. **Exercice 17.** □

Théorème. *La fonction exponentielle est une bijection continue, dérivable et strictement croissante de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_+^*$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $(e^x)' = e^x$.

Définition. *Soit* $a > 0$. *On définit la fonction exponentielle de base* a *de la manière suivante :*

$$\exp_a \colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto a^x = e^{x \ln(a)} \end{cases}$$

3.6 Fonctions puissances et leurs réciproques

Définition. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *La fonction*

$$u_\alpha \colon \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} \end{cases}$$

s'appelle la fonction puissance. Elle est dérivable et admet pour dérivée la fonction $u'_\alpha \colon \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $u'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$.

Proposition. *La fonction puissance* $u_\alpha \colon \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} \end{cases}$ *est une bijection continue et dérivable. Elle est strictement croissante si* $\alpha > 0$ *et strictement décroissante si* $\alpha < 0$. *Elle admet pour réciproque :*

$$u_\alpha^{-1} \colon \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto x^{\frac{1}{\alpha}} \end{cases}$$

Corollaire. *Lorsque* $n \in \mathbb{N}$ *et* $n \geqslant 2$, *la réciproque de la fonction* $x \longmapsto x^n$ *est la fonction* $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$, *appelée racine* $n-$*ième. Lorsque* n *est pair, elle est définie de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}_+$, *et lorsque* n *est impair elle est définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

4 Techniques de calcul de limites.

Il existe 6 cas où l'on ne peut rien dire sur les limites que l'on appelle formes indéterminées :

$$+\infty - \infty, 0 \times \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^\infty, \text{et } \infty^0$$

Nous allons voir dans cette section plusieurs techniques pour lever ces indéterminations.

4.1 Fractions rationnelles

Règle 1: La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus hauts degrés respectifs du numérateur et du dénominateur. On a 3 cas possibles :

1. le degré du numérateur est plus élevé que celui du dénominateur :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3x^3 - 5}{x^3 + 2x + 1} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} x = +\infty.$$

2. le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 3x^3 - 5}{5x^4 + 2x + 1} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{3x^4}{5x^4} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{3}{5} = \frac{3}{5}.$$

3. le degré du numérateur est plus petit que celui du dénominateur :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{-x^2+3x-5}{x^3+2x+1} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^3} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0.$$

Règle 2 : La limite en 0 d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus bas degrés respectifs du numérateur et du dénominateur :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^4+3x^3}{x^3+2x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{3x^3}{2x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{3}{2}x^2 = 0.$$

4.2 Limites de fonctions composées

1. On veut calculer $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{5x+1}{x^2+3x}}$. On a : $\lim_{x\to 0^+} \frac{5x+1}{x^2+3x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3x} = +\infty$. Comme $\lim_{y\to+\infty} \sqrt{y} = +\infty$, on en déduit que $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{5x+1}{x^2+3x}} = +\infty$.

2. On veut calculer $\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{-3x^4+2x+1}{5x^3+x^2}\right)$. On a $\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^4+2x+1}{5x^3+x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^4}{5x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{5} = +\infty$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \ln(y) = +\infty$, on en déduit que $\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{-3x^4+2x+1}{5x^3+x^2}\right) = +\infty$.

4.3 Astuces récurrentes

Ici sont listés des exemples d'astuces pour lever des indéterminations du type «$\frac{0}{0}$» et «$\infty - \infty$».

1. On veut calculer $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-x-1}{3x^2-7x+4}$. On a là une forme indéterminée du type «$\frac{0}{0}$». Comme 1 annule $2x^2-x-1$ et $3x^2-7x+4$ on peut mettre $(x-1)$ en facteur puis simplifier. Ainsi on a :

$$\frac{2x^2-x-1}{3x^2-7x+4} = \frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(3x-4)} = \frac{2x+1}{3x-4}.$$

   Ainsi $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-x-1}{3x^2-7x+4} = \lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{3x-4} = -3.$

2. On veut calculer $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$. On a là une forme indéterminée du type «$\frac{0}{0}$». On voit que 0 annule le dénominateur et le numérateur, on voudrait factoriser par $x-0$ mais à ce stade on ne peut pas. En présence d'une différence de radicaux $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ le réflexe à avoir est de multiplier et diviser notre expression par la quantité conjuguée $\sqrt{a}+\sqrt{b}$:

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{(\sqrt{1+x})^2-\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{(1+x)-(1+x^2)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{(x-x^2)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{1-x}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-x}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

3. On veut calculer $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}$. On a là une forme indéterminée du type «$+\infty-\infty$» :

$$\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}=\frac{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1})}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1})}$$

$$\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}=\frac{(\sqrt{2x+1})^2-(\sqrt{2x-1})^2}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1})}$$

$$\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}=\frac{2}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1})}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1})}=0$$

4.4 Théorème des gendarmes ou théorème d'encadrement.

Théorème. *Soient $x_0,\ell\in\mathbb{R}$ et f,g,h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que $f\leqslant g\leqslant h$.*

$$\text{Si }\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}h(x)=\ell\ \text{ alors }\ \lim_{x\to x_0}g(x)=\ell.$$

Corollaire. *Soient $x_0\in\bar{\mathbb{R}}$ et f,g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}\backslash\{x_0\}$ telles que $f\leqslant g$.*

1. *Si $\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ alors $\lim_{x\to x_0}g(x)=+\infty$.*
2. *Si $\lim_{x\to x_0}g(x)=-\infty$ alors $\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty$*

4.5 Croissances comparées

Proposition. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0^+$ *et* $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$.

Démonstration. Exercice 18. □

Proposition. *Si $b>0$ alors $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^b}=0^+$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^b}=+\infty$ et $\lim_{x\to0^+}x^b\ln(x)=0$.*

Démonstration. Exercice 19. □

Proposition. (Règle de l'Hospital) *Soient $f,g\colon I\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur l'intervalle I et $x_0\in I$. On suppose que :*

- *$f(x_0)=g(x_0)=0$;*
- *$\forall x\in I\backslash\{x_0\}, g'(x_0)\neq0$.*

$$\text{Si }\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell\in\bar{\mathbb{R}}\ \text{ alors }\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell.$$

Remarque. Ce résultat s'applique également pour lever des indéterminations du type «$\frac{\infty}{\infty}$», c'est à dire lorsque $\lim_{x\to x_0}f(x)=\pm\infty$ et $\lim_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$.

5 Théorèmes fondamentaux

Nous présentons ici des résultats fondamentaux liés à la continuité et la dérivabilité d'une fonction.

Théorème 5. (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=y$.*

Exemple.

Corollaire. *Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(a)\times f(b)<0$ alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(c)=0$.*

Exemple. Montrer que l'équation $x^3+5x+2=0$ admet au moins une solution dans $[-1,0]$. La fonction $f\colon x\longmapsto x^3+5x+2$ est continue sur $[-2,2]$. De plus $f(0)=2>0$ et $f(-1)=-4<0$, alors $f(0)\times f(-1)<0$ et d'après le TVI il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(c)=0$. Ainsi l'équation $x^3+5x+2=0$ admet bien au moins une solution dans $[-1,0]$.

Théorème 6. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0\in I$ et $f\colon I\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction.*

1. *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*
2. *Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.*

Démonstration. **Exercice 20.** □

Remarque. Attention la réciproque de ce théorème est fausse. Une fonction peut être continue en un point sans y être dérivable. Par exemple, la fonction :

$$f\colon\begin{cases}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto|x|\end{cases}$$

est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Théorème 7. (Théorème des accroissements finis) *Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c\in]a,b[$ tel que :*

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Remarque. Géométriquement, ce théorème assure qu'il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite passant par les points $A=(a,f(a))$ et $B=(b,f(b))$.

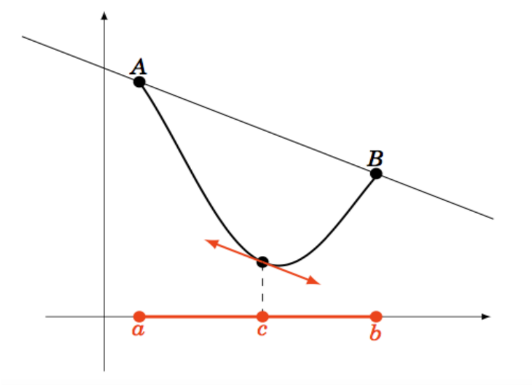

Figure 9.

Exemple. Montrons que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $e^x\geqslant x+1$.

Pour $x=0$, l'inégalité est trivialement vérifiée. Fixons $x\in\mathbb{R}_+^*$. La fonction exponentielle est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$ donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x\in]0,x[$ tel que :

$$e^x-e^0=e^{c_x}(x-0).$$

Or par croissance de la fonction exponentielle, comme $c_x>0$, on a $e^{c_x}>e^0$ et donc

$$e^x-e^0\geqslant e^0(x-0),$$

ce qui donne bien $e^x\geqslant x+1$.

Le théorème suivant est un cas particulier du théorème des accroissements finis.

Théorème 8. (Théorème de Rolle) *Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction telle que :*

1. *f continue sur $[a,b]$;*

2. f dérivable sur $]a,b[$;

3. $f(a)=f(b)$.

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Démonstration. **Exercice 21.** □

Remarque. Géométriquement, le théorème de Rolle assure qu'il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.