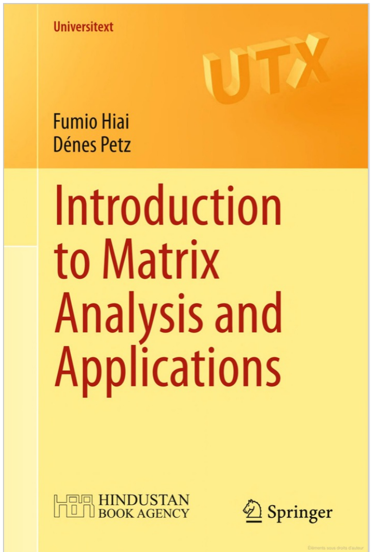
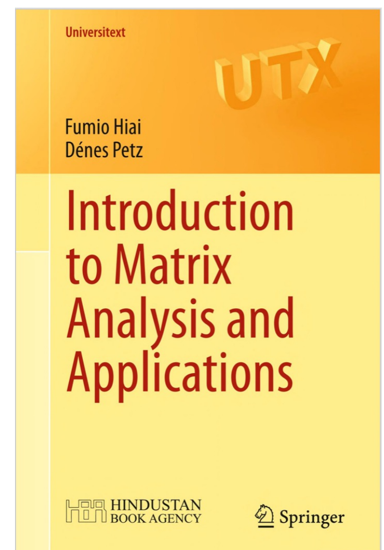


Calcul matriciel

Pr. Youssou DIENG

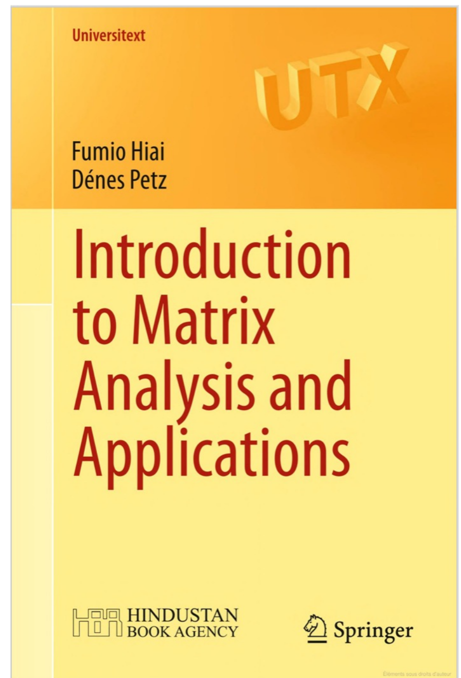


Email : ydieng@univ-zig.sn

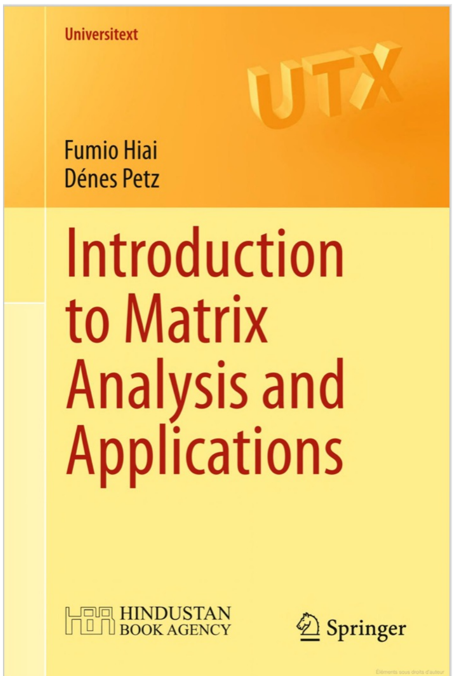
Introduction

Les **opérations matricielles** sont au cœur de beaucoup problèmes de calcul scientifique.

- D'où, l'Importance de disposer **d'algorithmes efficaces** pour les matrices

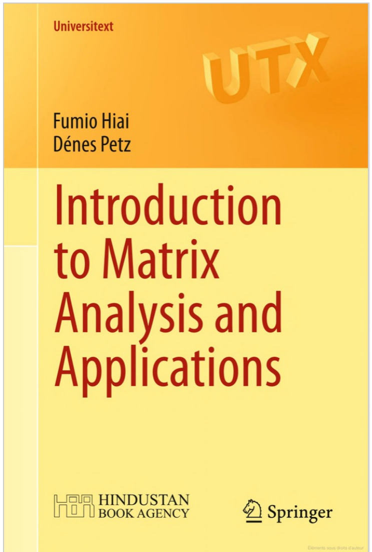


Objectifs généraux



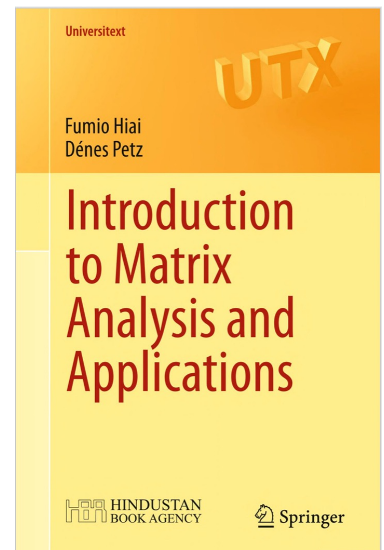
Dans ce cours, …

1. **Chap 1 :** Une introduction à la théorie des matrices
2. **Chap 2 :** Une introduction aux opérations sur les matrices

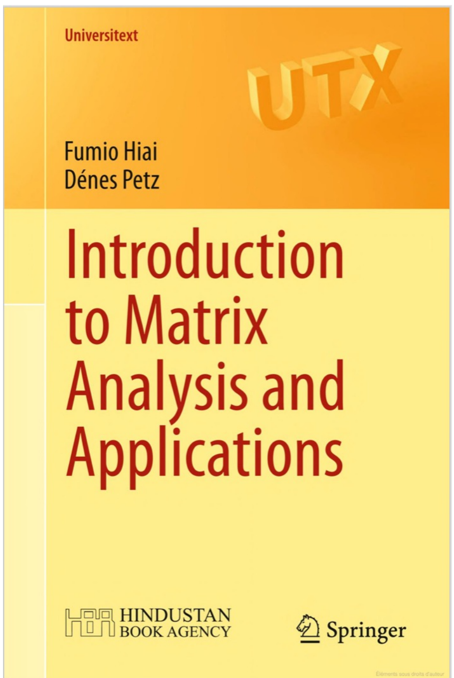


Calcul matriciel

Chapitre 1 : Une introduction à la théorie des matrices



Objectifs généraux



Nous allons, …

1. Passer en revue quelques concepts de base de la théorie des matrices;
2. Passer en revue certaines propriétés fondamentales sur les matrices.

Matrices et vecteurs

- Une matrice peut être défini comme étant un tableau, rectangulaire, de nombres.

Exemple : Une matrice A = (a_{ij}) de taille 2×3.

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Matrices et vecteurs

- Une matrice peut être défini comme étant un tableau, rectangulaire, de nombres.

Exemple : Une matrice A = (a_{ij}) de taille 2×3.

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- Pour i = 1,2 et j = 1,2,3, a_{ij} est l'élément situé à la ligne **i** et à la colonne **j**.

Matrices

- Une matrice peut être défini comme étant un tableau, rectangulaire, de nombres.

- On utilise des lettres majuscules pour représenter les matrices, et les lettres minuscules correspondantes pour représenter leurs éléments.

Exemple : Une matrice A = (a_{ij}) de taille 2×3.

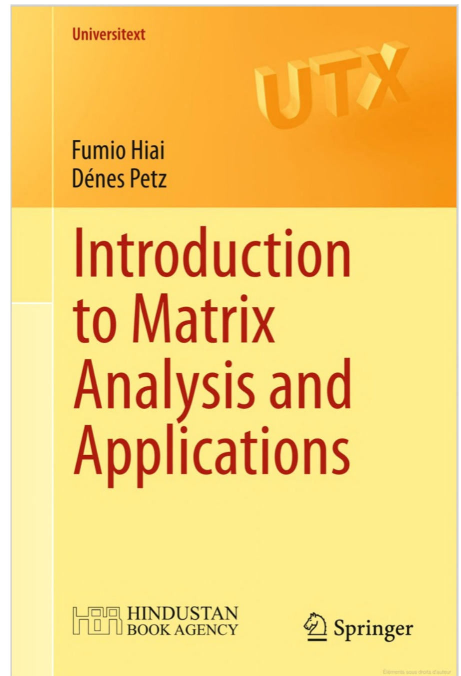
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- Pour i = 1,2 et j = 1,2,3, a_{ij} est l'élément situé à la ligne **i** et à la colonne **j**.

Matrices

L’ensemble de toutes les matrices m × n dont les éléments ont des valeurs réelles est noté $R^{m \times n}$.

- D’une manière générale, l’ensemble des matrices m×n dont les éléments sont pris dans l’ensemble S est noté $S^{m \times n}$.



Transposée de matrice

La transposée d'une matrice **A** est la matrice **^{T}A** obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de **A**.

Exemple : Pour une matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

on a :

$$^{T}A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Matrice vecteur

Un vecteur est un tableau de nombres à une dimension.

- On utilise des lettres minuscules pour représenter les vecteurs, et le i^{ème} élément d'un vecteur x de taille n est notée x_i, pour i = 1,2,...,n.

Exemple : Un vecteur x de taille 3

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Remarque : La **forme standard** d'un vecteur est équivalente à une **matrice n × 1**.

Matrice vecteur

Vecteur ligne : la transposée d'un vecteur donne un vecteur ligne.

Exemple : Le vecteur x ci-dessous

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a comme transposé : ${}^{T}x = (\ 2\ 3\ 5\ )$.

Matrice vecteur

Le **vecteur unité** e_i est le vecteur dont le $i^{ème}$ élément est égal à 1 et tous les autres éléments sont égaux à 0.

[Le plus souvent, la taille d'un vecteur unité est donnée par le contexte.]

Exemples : Les vecteur de taille 3

- $e_1 = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$
- $e_2 = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}.$
- $e_3 = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$

Matrice nulle

- **Une matrice nulle**, souvent notée **0**,est une matrice dont tous les éléments sont égaux à 0.

Exemple : Matrice nulle, M, de taille 3×3

$$M = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Matrices carrées

C’est une matrice de taille n × n.

- Il y a des matrices carrées particulièrement intéressantes.

1. **Matrice diagonale :** C’est la matrice, notée diag, telle que $a_{ij} = 0 \ \forall \ \mathbf{i} \neq \mathbf{j}$.

$$\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrices carrées

2. **La matrice identité** I_n est une matrice **diagonale** n×n avec des 1 sur la diagonale :

$$
\begin{aligned}
I_n &= \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

La i^{eme} colonne d'une matrice identité est le vecteur unité e_i.

3. **Une matrice tridiagonale** T, on a $t_{ij} = 0$ si $|i - j| > 1$.

$$
T = \begin{pmatrix}
t_{11} & t_{12} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
t_{21} & t_{22} & t_{23} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & t_{32} & t_{33} & t_{34} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & t_{n-2,n-2} & t_{n-2,n-1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & t_{n-1,n-2} & t_{n-1,n-1} & t_{n-1,n} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t_{n,n-1} & t_{nn}
\end{pmatrix}.
$$

Matrices carrées

4. On appelle **matrice triangulaire supérieure** une matrice U pour laquelle $u_{ij} = 0$ si $i > j$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Une matrice triangulaire supérieure est **unitaire** si sa diagonale est entièrement composée de 1.

Matrices carrées

5. On appelle **matrice triangulaire inferieure** une matrice L pour laquelle $L_{ij} = 0$ si $i < j$.

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Une matrice triangulaire inferieure est **unitaire** si sa diagonale est entièrement composée de 1.

Matrices carrées

6. Une ***matrice de permutation*** *P* comporte exactement un **1** dans chaque ligne ou colonne, et 0 partout ailleurs.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une telle matrice est appelée matrice de permutation parce que

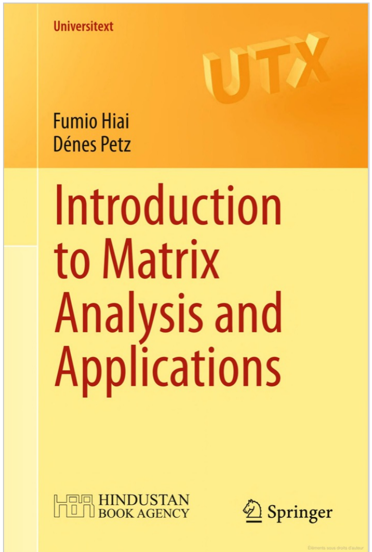
- la multiplication d'un vecteur *x* par une matrice de permutation a pour effet de permuter (réordonner) les éléments de *x*.

Matrices carrées

7. Une ***matrice symétrique*** *A* satisfait la condition $A = {}^{T}A$.

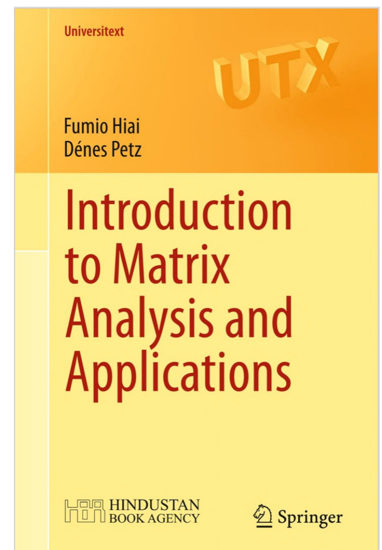
Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$



Calcul matriciel

Chapitre 2 : Une introduction aux opérations sur les matrices



Objectifs

- Adition de matrices;
- Produit scalaire;
- Multiplication de matrices ;
- Inverse d’une matrice;
- Rang d’une matrice;
- Déterminant d’une matrice.

Introduction

Les éléments d’une matrice sont issus d’un système numérique particulier, tel : les nombres **réels**, les nombres **complexes** ou les **entiers** ...

- Ce système numérique définit la manière **d’additionner** et de **multiplier** les nombres.

L’objectif ici est d’étendre ces définitions pour y englober **l’addition et la multiplication des matrices**.

Addition

On définit l'***addition de matrices*** de la manière suivante :

- Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont des matrices $m\times n$, alors leur somme $C = (c_{ij}) = A+B$ est la matrice $m\times n$ définie par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

pour $i = 1,2,\ldots,m$ et $j = 1,2,\ldots,n$.

La matrice nulle est l'élément neutre de l'addition des matrices :

$$\begin{aligned} A + 0 &= A \\ &= 0 + A \end{aligned}$$

Produit scalaire

Si λ est un nombre et $A = (a_{ij})$ une matrice, alors $\lambda A = (\lambda a_{ij})$ est le ***produit scalaire*** de A obtenu en multipliant chacune de ses éléments par λ.

Exemple :

Pour $\lambda = 2$ et

$$M = \begin{matrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & 9 \end{matrix}$$

On a $$\lambda M = \begin{matrix} 6 & 10 & 14 \\ 4 & 2 & 0 \\ 10 & 16 & 18 \end{matrix}$$

Opposé

- On définit l'***opposé*** d'une matrice $A = (a_{ij})$ par $-1 \cdot A = -A$, de sorte que la $ij^{\text{ème}}$ élément de $-A$ prend la valeur $-a_{ij}$.

$$\begin{aligned} A + 0 &= A \\ &= 0 + A \end{aligned}$$

La soustraction d'une matrices est donc l'addition de l'opposé d'une matrice :

$A - B = A + (-B)$

Multiplication

Soit deux matrices A et B ***compatibles :*** le nombre de colonnes de A = nombre de lignes de B *:*

- $A = (a_{ij})$ est une matrice $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ et
- $B = (b_{jk})$ une matrice $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p}$,

$C = AB = (c_{ik})$, de taille $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}$, tel que C_{ij} est égal au produit scalaire de la ligne i de la matrice **A** par la colonne j de la matrice **B**.

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \quad \text{pour } i = 1,2,\ldots,m \text{ et } k = 1,2,\ldots,p.$$

Multiplication

Exemple :

- $A = \begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 7 \end{matrix}$
- $C = AB = \begin{matrix} 1\times1 + 2\times2 + 0\times5 & 1\times6 + 2\times4 + 0\times3 \\ 3\times1 + 4\times2 + 5\times5 & 3\times6 + 4\times4 + 5\times3 \\ 6\times1 + 4\times2 + 7\times5 & 6\times6 + 4\times4 + 7\times3 \end{matrix}$
- $B = \begin{matrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{matrix}$
- $C = AB = \begin{matrix} 5 & 14 \\ 36 & 49 \\ 49 & 73 \end{matrix}$

Multiplication

- **La matrice identité** est l'élément neutre de la multiplication :
- Exemple : pour une matrice $m \times n$ quelconque *A, on a :*

$$I_m A = A I_n = A$$

- *Exemple :*
- $I_3 = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ A = $\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 7 \end{matrix}$

- La multiplication par la matrice nulle donne une matrice nulle :

A 0 = 0

- La multiplication des matrices est **associative** :

A(BC) = (AB)C

pour des matrices compatibles *A*, *B* et *C*.

Multiplication

- **Distributive** par rapport à l'addition :

$$\begin{aligned} A(B+C) &= AB+AC\ , \\ (B+C)D &= BD+CD\ . \end{aligned}$$

- **Non commutative**, sauf si n = 1.
- Exemple :

si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplication

- Les produits **matrice-vecteur** ou **vecteur-vecteur** sont définis comme si le vecteur était la matrice ***n* × 1** équivalente (ou une matrice **1 × *n***, dans le cas d'un vecteur ligne).

Si A est une matrice $m \times n$ et x un vecteur de taille n, alors Ax est un vecteur de taille m.

Si x et y sont des vecteurs de taille n, alors

$$x^{\mathrm{T}}y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

est un nombre appelé ***produit scalaire*** de x et y.

Inversions de matrice

On définit l'***inverse*** d'une matrice A de taille $n \times n$ comme étant une matrice $n \times n$, notée A^{-1} (si elle existe), telle que $AA^{-1} = I_n = A^{-1} A$.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrices : inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

On considère les matrices $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ où $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{d}$ sont des réels.

1. Justifier que $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{ad} - \boldsymbol{bc})\boldsymbol{I_2}$.
2. (a) Montrer que si $\boldsymbol{ad} - \boldsymbol{bc} \neq \mathbf{0}$, la matrice $\boldsymbol{A}$ est inversible et préciser l'inverse de $\boldsymbol{A}$.

   (b) Réciproquement, montrer que si $\boldsymbol{A}$ est inversible alors $\boldsymbol{ad} - \boldsymbol{bc} \neq \mathbf{0}$.
3. On considère la matrice $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ et la matrice $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$.

   $\boldsymbol{C}$ est-elle inversible ? Si oui, donner $\boldsymbol{C}^{-1}$. Même question pour $\boldsymbol{D}$.

Matrices : inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont des réels.

1. Justifier que $A \times B = (ad - bc)I_2$.
2. (a) Montrer que si $ad - bc \neq 0$, la matrice A est inversible et préciser l'inverse de A.

   (b) Réciproquement, montrer que si A est inversible alors $ad - bc \neq 0$.
3. On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ et la matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$.

   C est-elle inversible ? Si oui, donner C^{-1}. Même question pour D.

A est inversible

$\Leftrightarrow$

Il existe B telle que :

$A \times B = I$ et $B \times A = I$

On dit alors que

B est l'inverse de A

et on note $A^{-1} = B$

Matrices : inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

On considère les matrices $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ où $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{d}$ sont des réels.

1. Justifier que $\boldsymbol{A \times B = (ad - bc)I_2}$.
2. (a) Montrer que si $\boldsymbol{ad - bc \neq 0}$, la matrice $\boldsymbol{A}$ est inversible et préciser l'inverse de $\boldsymbol{A}$.
   (b) Réciproquement, montrer que si $\boldsymbol{A}$ est inversible alors $\boldsymbol{ad - bc \neq 0}$.
3. On considère la matrice $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ et la matrice $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$.

   $\boldsymbol{C}$ est-elle inversible ? Si oui, donner $\boldsymbol{C^{-1}}$. Même question pour $\boldsymbol{D}$.

1)

$$A \times B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & \overbrace{-ba + ba}^{=0} \\ \underbrace{cd - dc}_{=0} & -bc + ad \end{pmatrix}$$

$$= (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (ad - bc) I_2$$

A est inversible

$\Leftrightarrow$

Il existe B telle que :

$A \times B = I$ et $B \times A = I$

On dit alors que

B est l'inverse de A

et on note $A^{-1} = B$

Matrices : inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont des réels.

1. Justifier que $A \times B = (ad - bc)I_2$.
2. (a) Montrer que si $ad - bc \neq 0$, la matrice A est inversible et préciser l'inverse de A.

   (b) Réciproquement, montrer que si A est inversible alors $ad - bc \neq 0$.
3. On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ et la matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$.

   C est-elle inversible ? Si oui, donner C^{-1}. Même question pour D.

2) a) On sait que : $A \times B = (ad - bc) I_2$

Donc $\frac{1}{ad-bc} A \times B = I_2$

(car $ad - bc \neq 0$)

D'où $A \times \frac{1}{ad-bc} B = I_2$

A est inversible

$\Leftrightarrow$

Il existe B telle que :

$A \times B = I$ et $B \times A = I$

On dit alors que

B est l'<u>inverse</u> de A

et on note $A^{-1} = B$

Matrices : inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont des réels.

1. Justifier que $A \times B = (ad - bc)I_2$.
2. (a) Montrer que si $ad - bc \neq 0$, la matrice A est inversible et préciser l'inverse de A.
   (b) Réciproquement, montrer que si A est inversible alors $ad - bc \neq 0$.
3. O … $= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$.

   C … n pour D.

On a : $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

b) On suppose A inversible.

Si $ad - bc = 0$ alors $A \times B = 0$

donc $\underbrace{A^{-1} \times A}$ $\times B = A^{-1} \times 0$

$I_2 \times B = 0$

$B = 0$

Si $B = 0$ alors $a = b = c = d = 0$

Donc $A = 0$.

C'est impossible car la matrice nulle n'est pas inversible donc $ad - bc \neq 0$.

A est inversible

$\Leftrightarrow$

Il existe B telle que :

$A \times B = I$ et $B \times A = I$

On dit alors que B est l'<u>inverse</u> de A

et on note $A^{-1} = B$

1. Justifier que $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{ad} - \boldsymbol{bc})\boldsymbol{I_2}$. Th : A inversible $\Leftrightarrow$ $ad - bc \neq 0$
2. (a) Montrer que si $\boldsymbol{ad} - \boldsymbol{bc} \neq \mathbf{0}$, la matrice $\boldsymbol{A}$ est inversible et préciser l'inverse de $\boldsymbol{A}$.

   (b) Réciproquement, montrer que si $\boldsymbol{A}$ est inversible alors $\boldsymbol{ad} - \boldsymbol{bc} \neq \mathbf{0}$.
3. On considère la matrice $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ et la matrice $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$.

   $\boldsymbol{C}$ est-elle inversible ? Si oui, donner $\boldsymbol{C}^{-1}$. Même question pour $\boldsymbol{D}$.

On a : $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

3) $4 \times 5 - 6 \times 3 = 2 \neq 0$

Donc C est inversible et $C^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$

$3 \times (-6) - (-2) \times 9 = 0$

Donc D n'est pas inversible.

A est inversible

$\Leftrightarrow$

Il existe B telle que :

$A \times B = I$ et $B \times A = I$

On dit alors que

B est l'inverse de A

Inversions de matrice

Le nombre *ad - bc* est appelé *déterminant* de la matrice **A**

De nombreuses matrices $n \times n$ n'ont pas d'inverse, bien que n'étant pas nulles.

Une matrice sans inverse est dite ***non inversible***, ou ***singulière***.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Une matrice possédant un inverse, est dite ***inversible***, ou ***non singulière***.

- Si A et B sont deux matrices $n \times n$ non singulières, alors

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$$

- L'opération inversion est commutative avec l'opération transposition :

$$^{\mathrm{T}}(A^{-1}) = (^{\mathrm{T}}A)^{-1} \ .$$

Inversions de matrice

- Les vecteurs $x_1, x_2, . . . , x_n$ sont ***linéairement dépendants*** s'il existe des coefficients $c_1,c_2,\ldots,c_n$ non tous nuls, tels que $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0$.
- Si des vecteurs ne sont pas linéairement dépendants, ils sont dits ***linéairement indépendants***.

Rangs

Si A est une matrice non nulle de taille $m \times n$:

- Le ***rang colonne*** de A est la taille du plus grand ensemble linéairement indépendant de colonnes de *A*.
- Le ***rang ligne*** de *A* est la taille du plus grand ensemble linéairement indépendant de lignes de *A*.

Une propriété fondamentale d'une matrice *A* quelconque est:

- le rang ligne de A = rang colonne de A.

Il suffit donc de parler de ***rang*** de *A*.

Rangs

- Le rang d'une matrice $m \times n$ est un entier compris entre 0 et $\min(m, n)$, inclus.
- Le rang d'une matrice nulle vaut 0,
- Le rang d'une matrice identité $n \times n$ est égal à n.

Rangs

- Une matrice carrée $n \times n$ a un ***rang plein*** si son rang est égal à n.
- Une matrice $m \times n$ a un ***rang colonne plein*** si son rang vaut n.

Théorème 1: Une matrice carrée a un rang plein si et seulement si elle est non singulière.

Rangs

- Un ***vecteur d'annulation*** d'une matrice *A* est un vecteur non nul *x* tel que $Ax = 0$.

Théorème 2: Une matrice A a un rang colonne plein si et seulement si elle ne possède pas de vecteur d'annulation.

Corollaire 3: *Une matrice carrée A est singulière si et seulement si elle possède un vecteur d'annulation.*

Déterminants

- Considérons la matrice A de dimension 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- On a :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Exemple

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de A est ainsi

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Exercice

Calculez le déterminant des matrices 2×2 suivantes :

$$a. \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \qquad b. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c. \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad d. \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice

Calculez le déterminant des matrices 2×2 suivantes :

$$a.\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \qquad b.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c.\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad d.\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solutions :

a) -17
b) 0
c) 5
d) 11

Déterminants

- Le $ij^{\text{ème}}$ ***mineur*** d'une matrice A de taille $n \times n$, pour $n > 1$, est la matrice $A[ij]$ de taille $(n - 1) \times (n - 1)$ obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

Mineur : Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Le mineur M_{12} est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la 1ère rangée et la 2e colonne de A, c'est-à-dire

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 5.3 - 3.8 = 15 - 24 = -9$$

Le mineur M_{22} est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la 2e rangée et la 2e colonne de A, c'est-à-dire

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 2.3 - 4.8 = 6 - 32 = -26$$

Définition d'un cofacteur

Le cofacteur, C_{ij}, d'une matrice A est défini par la relation

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Vous constaterez que le cofacteur et le mineur ont toujours la même valeur numérique, à l'exception parfois de leur signe.

Considérons à nouveau la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Nous avons déjà montré que le mineur $M_{12} = -9$. Ainsi, le cofacteur correspondant, C_{12}, est

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -1.(-9) = 9$$

Déterminants

- Le ***déterminant*** d'une matrice *A* de taille $n \times n$ peut être défini récursivement en fonction de ses mineurs par :

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & \text{si } n = 1\,, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{[1j]}) & \text{si } n > 1\,. \end{cases}$$

Pour une matrice 3×3, cela voudrait dire qu'en choisissant de faire une expansion le long de la première rangée, le déterminant serait

$$det\ A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

Exemple

Quel est le déterminant de la matrice A?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Solution

Suivons le processus proposé plus haut (expansion par cofacteurs) :

- Choisir une rangée ou une colonne de A… Pour l'instant, choisissons la première rangée.
- Multiplier chacun des éléments de cette rangée par leurs cofacteurs correspondants… Les éléments de la première rangée sont $\mathrm{a11} = 2, \mathrm{a12} = 1, \mathrm{et\,a13} = 3$ que l'on multiple avec les cofacteurs correspondants, c'est-à-dire $\mathrm{C}_{11}, \mathrm{C}_{12}$ et C_{13} qui sont

Solution

Suivons le processus proposé plus haut (expansion par cofacteurs) :

- Choisir une rangée ou une colonne de A... Pour l'instant, choisissons la première rangée.
- Multiplier chacun des éléments de cette rangée par leurs cofacteurs correspondants... Les éléments de la première rangée sont $\mathrm{a11} = 2, \mathrm{a12} = 1, \mathrm{et}\, \mathrm{a13} = 3$ que l'on multiple avec les cofacteurs correspondants, c'est-à-dire $\mathrm{C}_{11}, \mathrm{C}_{12}$ et C_{13} qui sont

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1(0.(-2) - 2.0) = 0$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1(1 \times (-2) - 2 \times 2) = 6$$

$$\mathrm{C}_{13} = (-1)^{1+3}\mathrm{M}_{13} = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1(1 \times (0) - 2 \times 0) = 0$$

Solution

Suivons le processus proposé plus haut (expansion par cofacteurs) :

- Choisir une rangée ou une colonne de A... Pour l'instant, choisissons la première rangée.
- Multiplier chacun des éléments de cette rangée par leurs cofacteurs correspondants... Les éléments de la première rangée sont $\mathrm{a11} = 2, \mathrm{a12} = 1, \mathrm{et}\, \mathrm{a13} = 3$ que l'on multiple avec les cofacteurs correspondants, c'est-à-dire $\mathrm{C}_{11}, \mathrm{C}_{12}$ et C_{13} qui sont

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1(0.(-2) - 2.0) = 0$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1(1 \times (-2) - 2 \times 2) = 6$$

$$\mathrm{C}_{13} = (-1)^{1+3} \mathrm{M}_{13} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1(1 \times (0) - 2 \times 0) = 0$$

Finalement, il s'agit de faire le calcul

$$det\ A = a_{12} C_{12} + a_{22} C_{22} + a_{32} C_{32}$$

Solution

Suivons le processus proposé plus haut (expansion par cofacteurs) :

- Choisir une rangée ou une colonne de A… Pour l'instant, choisissons la première rangée.
- Multiplier chacun des éléments de cette rangée par leurs cofacteurs correspondants… Les éléments de la première rangée sont $\mathrm{a11} = 2, \mathrm{a12} = 1, \mathrm{et\,a13} = 3$ que l'on multiple avec les cofacteurs correspondants, c'est-à-dire $\mathrm{C}_{11}, \mathrm{C}_{12}$ et C_{13} qui sont

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1(0.(-2) - 2.0) = 0$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1(1 \times (-2) - 2 \times 2) = 6$$

$$\mathrm{C}_{13} = (-1)^{1+3} \mathrm{M}_{13} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1(1 \times (0) - 2 \times 0) = 0$$

Finalement, il s'agit de faire le calcul

$$det\ A = a_{12} C_{12} + a_{22} C_{22} + a_{32} C_{32}$$

$$det\ A = 2 \times 0 + 6 \times 1 + 3 \times 0 = 6$$

Déterminants

Théorème 4: (Propriétés du déterminant) *Le déterminant d'une matrice carrée A possède les propriétés suivantes :*

- *Si une ligne ou une colonne quelconque de A est égale à zéro, alors* $\det(A) = 0$.
- *Le déterminant de A est multiplié par* λ *si les éléments d'une ligne (ou colonne) quelconque de A sont tous multipliés par* λ.
- *Le déterminant de A reste inchangé si les éléments d'une ligne (resp.colonne)sont ajoutées à ceux d'une autre ligne (resp. colonne).*
- *Le déterminant de A est égal au déterminant de* ${}^{\top}A$.
- *Le déterminant de A est multiplié par* -1 *si deux lignes (resp. colonnes) sont échangées.*

D'autre part, pour deux matrices carrées A et B quelconques, on a $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Déterminants

Théorème 5 : Une matrice A de taille $n \times n$ est singulière si et seulement si $\det(A) = 0$.

- MERCI