Application d'un ensemble dans un autre.

1 Application et relation fonctionnelle

Définition. (Application) *Une application de l'ensemble E dans l'ensemble F est une relation binaire particulière $\mathcal{R}$ entre E et F, dont le graphe G possède les propriétés suivantes :*

– *pour tout élément x de E, il existe un élément y de F tel que (x, y) soit élément de G;*

– *cet élément y est unique.*

Autrement dit :

– $\forall x \in E, \exists y \in F \mid (x, y) \in G;$

– $\forall x \in E, \forall y \in F, \forall y' \in F, [\{(x, y) \in G\} \wedge \{(x, y') \in G\}] \Longrightarrow [y = y'].$

Il existe un concept intermédiaire entre relation binaire et application. Il s'agit de la relation fonctionnelle.

Définition. (Relation fonctionnelle) *On parle de relation fonctionnelle de l'ensemble E dans l'ensemble F quand tout élément de E est en relation avec au plus un élément de F.*

Remarque. Une application est donc une relation fonctionnelle particulière : tout élément de l'ensemble de départ E est en relation avec exactement un élément de l'ensemble d'arrivé F.

Exercice 1. Parmi les relations suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, repérez les relations fonctionnelles, repérez les appplications :

1. $x\mathcal{R}_1 y \Longleftrightarrow |y| = \sqrt{x}$;
2. $x\mathcal{R}_2 y \Longleftrightarrow xy = 1$;
3. $x\mathcal{R}_3 y \Longleftrightarrow y - x + 2 = 0$.

Exercice 2. Donner une interprétation géométrique d'une relation fonctionnelle. En déduire celle d'une application.

2 Image et antécédent d'un élément.

On suppose dorénavant que $\mathcal{R}$ est une application. Pour un x donné de E, il lui correspond un et un seul y de F qui est en relation avec lui par $\mathcal{R}$.

Définition. (Image) *Cet unique y est appelé image de x par l'application définie par $\mathcal{R}$.*

Notation. *Si l'on désigne par f cette application, l'expression « y est l'image de x par f » est formalisée par $y = f(x)$. De plus, on formalise « f est une application de E dans F » par $f: E \to F$. La proposition « y est l'image de x par f » peut aussi être traduite par : $f: x \mapsto y$.*

Exercice 3. Interpréter chacune des situations suivantes au moyen d'une application. Pour cela, on définira deux ensembles A et B ainsi que $f: A \to B$. Préciser dans chaque cas pourquoi il s'agit bien d'une application.

– Le registre d'un hôtel qui possède 50 chambres.

– La parité d'un entier naturel.

Définition. (Antécédent) *Si y est l'image de x par l'application f, alors x est appelé l'antécédent de y par l'application f.*

Remarque. Un élément quelconque y de F ne possède pas forcément d'antécédent par une application $f: E \to F$. Et il n'y a pas forcément unicité quand il en possède : un y de F peut avoir plusieurs antécédents par une application f. Les cas particuliers où tout y de F possède au plus un antécédent, et au moins un antécédent, sont étudiés dans les deux sections suivantes.

3 Applications injectives

Définition. **(Injectivité)** *L'application* $f\colon E\longrightarrow F$ *est dite injective quand tout* $y\in F$ *possède au plus un antécédent par* f.

Remarque. Le terme « injection » est synonyme « d'application injective ».

Proposition 1. **(Caractérisation des applications injectives)** $f\colon E\rightarrow F$ *est une application injective si et seulement si* $[\forall x, x'\in E, \{f(x)=f(x')\}\Rightarrow\{x=x'\}]$.

Exercice 4. Prouver, en utilisant la caractérisation ci-dessus, que les applications suivantes sont injectives :

- $f_1\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, x\mapsto 2x+3$;
- $f_2\colon \mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}, x\mapsto 3x^2+1$.

Exercice 5. Prouver, en utilisant la caractérisation ci-dessus, que les applications suivantes ne sont pas injectives :

- $g_1\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, x\mapsto |x|$;
- $2_2\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, x\mapsto x^2$.

Exercice 6. Tracez le graphe d'une application qui est injective, et d'une application qui ne l'est pas. Trouver une caractérisation de l'injectivité d'une application $f\colon E\rightarrow F$, à partir du nombre d'intersections entre la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites $y=b$, $b\in F$.

Exercice 7. Soit $f\colon E\rightarrow F$ une application injective. Peut-elle perdre ce caractère injectif si on réduit l'ensemble d'arrivée ? Et si l'on réduit l'ensemble de départ ?

Que se passe-t-il si l'on change « réduit » en « augmente » dans les précédentes questions ?

4 Applications surjectives

La définition d'une application $f\colon E\rightarrow F$ exige seulement que chaque élément x de E admette une image (unique) y dans F, mais pas que tout élément y de F admette un antécédent dans E. S'il en est néanmoins ainsi, l'application est dite surjective :

Définition. **(Surjectivité)** *L'application* $f\colon E\longrightarrow F$ *est dite surjective quand tout* $y\in F$ *possède un antécédent dans* E *par* f.

Remarque. Le terme « surjection » est synonyme « d'application surjective ».

Exercice 8. Tracer le graphe d'une application qui est surjective, et d'une application qui ne l'est pas.

Exercice 9. Donnez des exemples (sous forme analytique) d'applications surjectives, et d'applications qui ne le sont pas.

5 Image d'un ensemble par une application

D'une manière générale, on peut considérer l'ensemble des images des éléments de E par une application f de E dans F (ils en ont tous une, et une seule).

Définition. **(Image d'un ensemble par une application)** *Soient* $f\colon E\longrightarrow F$ *une application et* A *une partie de* E. *On appelle image de l'ensemble* A *par l'application* f *le sous-ensemble de* F *noté* $f(A)$ *et définie par* $f(A):=\{f(x)\in F\,/\,x\in A\}$. *Il s'agit de la collection des images des éléments de* A.

Remarque. Si tous les éléments de F ont un antécédent dans E (f est surjective), cela signifie que tout élément de F est élément de $f(E)$, donc $F\subset f(E)$. Comme par ailleurs $f(E)$ est une partie de F, on a dans ce cas particulier $f(E)=F$.

Cette dernière remarque permet la formalisation suivante :

Proposition 2. **(Caractérisation de la surjectivité.)** *l'application* $f\colon E\rightarrow F$ *est surjective si et seulement si* $f(E)=F$.

Cours assuré par : Dr D. N. Diatta(dndiatta@univ-zig.sn)

6 Applications bijectives

Définition. (Applications bijectives) *Une application qui est à la fois injective et surjective est dite bijective.*

Remarque. Le terme « bijection » est synonyme « d'application bijective ».

Exercice 10. Dans chaque cas, dire si l'application $f: A \to B$ est injective, surjective ou bijective.

1. $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f(x) = x + 7$.
2. $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x - 3$.
3. $A = \{x \in \mathbb{R} | 4 \leqslant x \leqslant 9\}, B = \{x < \mathbb{R} | \, 21 \leqslant x \leqslant 96\}, f(x) = x^2 + 2x - 3$.
4. $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f(x) = 3x - 2|x|$.
5. $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f(x) = e^x + 1$.
6. $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{N}, f(x) = x(x + 1)$.

Proposition 3. *Dans le cas d'une bijection, à chaque élément x de E correspond un et un seul élément y de F (définition d'une application) et, réciproquement, à chaque élément y de F correspond un (surjectivité) et un seul (injectivité) élément x de E.*

Cette dernière proposition est précisément l'affirmation de l'existence d'une application g de F dans E, telle que $x = g(y) \iff f(x) = y$.

Définition. (Application inverse) *Cette application est appelée application inverse de l'application bijective f.*

Notation. *On la note f^{-1}.*

Exercice 11. Reprendre l'exercice précédent, en trouvant l'application réciproque des applications bijectives.

Exercice 12. Soit $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = n + (-1)^n$.

1. Montrer que n et $f(n)$ sont toujours de parité différente.
2. Montrer que f est bijective.
3. Calculer $f(f(n))$. En déduire une expression de f^{-1} et résoudre l'équation $347 = n + (-1)^n$.