Introduction à la théorie des ensembles

PAR

Daouda Niang Diatta

1 Notion d'ensemble

1.1 Définitions et propriétés de base

Ensemble. Un ensemble est une collection d'objets réunis en vertu d'une propriété commune. On peut décrire un ensemble de deux manières :

en extension. on donne la liste exhaustive des éléments de l'ensemble;

en compréhension. on donne la propriété que doivent posséder les éléments de l'ensemble.

Exemple.

Ensembles en extension	Ensembles en compréhension
$A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$	A est l'ensemble des puissances de 2 inférieures ou égal à 64.
$B = \{1, 2, 7, 14\}$	B est l'ensemble des diviseurs de 14

Notation. *On note* $\mathbb{N}_n$ *l'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à* n.

Exercice 1. Définir les ensembles suivants en extension.

1. $A = \{x \in \mathbb{R} | x(x+5) = 14\}$
2. $A = \{x \in \mathbb{N} | x(2x+3) = 14\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{N}_{10}^* | x^4 - 1 \,\text{est divisible par}\, 5\}$

Relation d'appartenance. On admet être capable de décider si un objet est ou non élément d'un ensemble. Le fait que l'élément x appartienne à l'ensemble X se note : $x \in X$.

Objets distincts. On admet aussi être capable de distinguer entre eux les éléments d'un ensemble. En particulier, un ensemble ne peut pas contenir deux fois le même objet.

Ensemble vide. Il existe un *ensemble* ne contenant aucun élément, appelé ensemble vide. l'ensemble vide se note par :$\varnothing$ ou $\{\}$.

La notation $\{\varnothing\}$ n'a pas le même sens que $\varnothing$. La dernière notation décrit un ensemble qui ne contient rien alors que le premier décrit un ensemble contenant un élément : l'ensemble vide.

Une propriété fondamentale. Un ensemble ne peut pas s'appartenir à lui même.

Dans l'euphorie de la naissance de la théorie des ensembles, les mathématiciens ne voyaient pas d'objection à envisager un ensemble Ω dont les éléments seraient tous les ensembles (en particulier, $\Omega \in \Omega$) : l'ensemble des ensembles, à l'origine de tout ! Leur enthousiasme fut stoppé lorsque Russell leur opposa le paradoxe.

Exercice 2. (Paradoxe de Bertrand Russell (1872-1970)). Soit X l'ensemble de tous les éléments qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes. A-t-on $X \in X$? A-t-on $X \in X$?

Dit autrement : le barbier qui rase tous les barbiers qui ne se rasent pas eux-mêmes, se rase-t-il lui-même ?

1.2 Sous-ensembles, ensemble des parties

Sous-ensemble. Les sous-ensembles sont de´finis par la relation d'inclusion...

Définition 1. *A est un sous-ensemble de B ($A \subset B$) si et seulement si tout élément de A appartient à B. On dit aussi que A est une partie de B. Autrement dit :*

$$(A \subset B) \Longleftrightarrow (\forall x \in A, x \in B)$$

Proposition 2. *L'ensemble vide est inclus dans n'importe quel ensemble.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. □

Proposition 3. *Tout ensemble est inclus dans lui même. Autrement dit si A est un ensemble alors $A \subset A$.*

Démonstration. □

Ensemble des parties.

Définition 4. *Soit A un ensemble. L'ensemble des parties de A, noté $\mathcal{P}(A)$, est l'ensemble de tous les sous-ensembles de A.*

Proposition 5. *Pour tout ensemble A, on a $\varnothing, A \in \mathcal{P}(A)$.*

Démonstration. □

Exemple. Si $A = \{1, 2, 3\}$, alors $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Proposition 6. *Si un ensemble A possède n éléments, $\mathcal{P}(A)$ en possède 2^n.*

Démonstration. □

Exercice 3. On considère $A = \{1, 2\}$. Dire lesquelles des assertions suivantes sont exactes :
1) $1 \in A$, 2) $1 \subset A$, 3) $\{1\} \in A$ 4) $\{1\} \subset A$ 5) $\varnothing \in A$ 6) $\varnothing \subset A$.

1.3 Représentation graphique

Diagramme de Venn. Un diagramme de Venn (également appelé diagramme logique) est un diagramme qui montre toutes les relations logiques possibles dans une collection finie de différents ensembles. Ils sont utilisés pour illustrer des relations simples en probabilité, logique, linguistique et en informatique.

Les diagrammes de Venn comprennent normalement des cercles qui se chevauchent. L'intérieur du cercle représente symboliquement les éléments de l'ensemble, tandis que l'extérieur représente les éléments qui ne sont pas compris dans l'ensemble. Par exemple, dans un diagramme de Venn à deux ensembles, un cercle peut représenter le groupe de tous les objets en bois, tandis qu'un autre cercle peut représenter l'ensemble de toutes les tables. La zone de chevauchement, ou l'intersection, représenterait alors l'ensemble de toutes les tables en bois.

Exercice 4. A partir des affirmations suivantes :

1. les poètes sont des gens heureux,
2. tous les docteurs sont riches,
3. nul être heureux n'est riche,

déterminer la validité de chacun des conclusion suivantes

1. Aucun poète n'est riche.
2. Les docteurs sont des gens heureux.
3. Nul ne peut être à la fois docteur et poète.

2 Opérations sur les ensembles

2.1 Égalité de deux ensembles

Définition 7. *Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments. Autrement dit :*

$$(A = B) \Longleftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A).$$

Exercice 5. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les ensembles sont égaux :

1. $A=\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$ et $B=\{x\in\mathbb{R}|x\geqslant|x|\}$.
2. $A=\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$ et $B=\{x\in\mathbb{R}|x\leqslant|x|\}$
3. $A=\mathbb{Z}$ et $B=\{x\in\mathbb{Z}\,|(x^2-x)\text{ pair}\}$.

2.2 Réunion, intersection

Réunion. A et B sont deux ensembles, on considère la réunion de A et de B, notée $A\cup B$, l'ensemble des éléments qui sont éléments de A **ou** de B.

Exemple. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,4,5\}$, alors $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$.

Exercice 6. Faire la réunion des ensembles $A=\{x\in\mathbb{R}|0\leqslant x\leqslant3\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}|-2<x\leqslant1\}$.

Proposition 8. *La réunion de deux ensembles possède certaines propriétés :*

idempotence. $A\cup A=A$,

commutativité. $A\cup B=B\cup A$,

associativité. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

élément neutre. $A\cup\varnothing=A$.

Exercice 7. Donner des exemples d'opérateurs idempotents, commutatifs, associatifs, et possédant un élément neutre, par exemple en arithmétique, ou en analyse.

Intersection. L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble, noté $A\cap B$ des éléments communs à A **et** à B.

Exercice 8. Dans chacun des cas suivants, faire l'intersection des ensembles A et B.

1. A = l'ensemble des rectangles, et B = l'ensemble des losanges.
2. $A=\{x\in\mathbb{R}|0\leqslant x\leqslant3\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}|-2<x\leqslant1\}$.

Proposition 9. *L'intersection de deux ensembles possède certaines propriétés :*

idempotence. $A\cap A=A$,

commutativité. $A\cap B=B\cap A$,

associativité. $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$,

élément neutre. *si on se place dans un ensemble E et que A est une partie de E, alors E est l'élément neutre pour l'intersection :* $A\cap E=A$.

Propriétés mutuelles de ces deux opérations. Ces deux opérations ont des propriétés symétriques

Proposition 10. *On a les distributivités :*

1. *de $\cup$ sur $\cap$:* $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,
2. *de $\cap$ sur $\cup$:* $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Exercice 9. On se donne trois ensembles A,B,C tels que $A\cap B\cap C=\varnothing$. Sont-ils nécessairement disjoints deux à deux ? Donner des exemples.

2.3 Complémentaire

Définition 11. *Pour $A\subset E$, on définit le complémentaire de A par rapport à E comme l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas éléments de A.*

Notation. *Il existe plusieurs manières de noter le complémentaire de A dans E : $E\setminus A$ (« E moins A »), $\bar{A}$, ou encore $\mathcal{C}_E A$.*

Remarque 12. Il faut donc se placer, pour la définition de la complémentation, dans $\mathcal{P}(E)$ (où E est un ensemble fixé) : la complémentation se définit par rapport à un ensemble.

Proposition 13. *La complémentation a plusieurs propriétés remarquables :*

involution. $\bar{\bar{A}}=A$,

loi de Morgan. $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$ *et* $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

Exercice 10.

1. Connaissez-vous d'autres opérations involutives ?
2. Illustrez, à l'aide d'un diagramme de Venn, les lois de De Morgan.

2.4 Produit cartésien

Le produit cartésien des ensembles A et B (dans cet ordre) est l'ensemble, que l'on note $A\times B$ des couples ordonnés (a,b) où $a\in A$ et $b\in B$. Dans le couple (a,b), (a,b) n'est pas un ensemble et (a, b) est distinct de (b,a).

Exercice 11. Représenter graphiquement la réunion des ensembles $A=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2|x+y\ \leqslant\ 2\}$, et $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|2<3x-y\}$.