

Feuille de TD 5 : Le problème Arbres couvrants de poids minimum

I. Algorithmes de Kruskal et de Prim

Exercice 1 L'algorithme de Kruskal peut retourner des arbres couvrants différents pour un même graphe G , selon l'ordre dans lequel sont examinés les arêtes de même poids dans la liste triée. Montrer que, pour chaque arbre couvrant minimum T de G , il existe un moyen de trier les arêtes de G dans l'algorithme de Kruskal pour que l'algorithme retourne T .

Exercice 2 On suppose que le graphe $G = (S, A)$ est représenté par une matrice d'adjacences. Donner une implémentation simple de l'algorithme de Prim pour ce cas, qui s'exécute en $O(S^2)$.

Exercice 3 L'implémentation de l'algorithme de Prim via tas de Fibonacci est-elle asymptotiquement plus rapide que l'implémentation via tas binaire d'un graphe peu dense $G = (S, A)$, où $|A| = Q(S)$? Et pour un graphe dense, où $|A| = Q(S^2)$? Quelle doit être la relation entre $|A|$ et $|S|$ pour que l'implémentation via tas de Fibonacci soit asymptotiquement plus rapide que l'implémentation via tas binaire ?

Exercice 4 On suppose que tous les poids des arêtes d'un graphe sont des entiers compris entre 1 et $|S|$. Quel est alors le temps d'exécution de l'algorithme de Kruskal ? Que se passe-t-il si les poids sont des entiers compris entre 1 et W , W étant une constante fixée ?

Exercice 5 On suppose que tous les poids des arêtes d'un graphe sont des entiers compris entre 1 et $|S|$. Quel est alors le temps d'exécution de l'algorithme de Prim ? Que se passe-t-il si les poids sont des entiers compris entre 1 et W , W étant une constante fixée ?

Exercice 6 On suppose que les poids des arêtes d'un graphe sont uniformément répartis sur l'intervalle semi-ouvert $[0,1[$. Lequel des deux algorithmes, celui de Kruskal ou celui de Prim, peut-on accélérer ?

Exercice 7 On suppose qu'un graphe G possède un arbre couvrant minimum déjà calculé. Quel est le temps requis pour la mise à jour de l'arbre couvrant minimum si un nouveau sommet et des arêtes incidentes sont ajoutées à G ?