Feuille de TD N°1

Youssou DIENG*

27 novembre 2021

Table des matières

Table des figures

Consignes

Les exercices proposés sur cette fiche de TD concerne le chapitre 1.

1 La modélisation

Exercice 1. *Considérez les deux relations suivantes :*

1. *A. Robert, Jean et Martin ont fait partie du jury de thèse de Gilbert. Jean, Martin et Françoise étaient dans le jury d'Elisabeth. Jean, Françoise et Gilbert étaient dans le jury de thèse d'Anne.*
2. *B. Robert et Jean ont écrit des lettres de recommandation pour Gilbert. Robert, Martin et Charles ont écrit des lettres de recommandation pour Elisabeth. Jean a écrit des lettres de recommandation pour Robert et Martin. Robert a écrit des lettres de recommandation pour Martin et Thomas. Martin a écrit des lettres de recommandation pour Robert et Françoise.*

Question 1 :

1. *Dessinez les graphes de ces deux relations.*
2. *Quel est le nombre de points et de lignes dans chacun de ces graphes ?*

*Enseignant - Chercheur au département Informatique, Université Assane Seck de Ziguinchor (Sénégal)

Question 2 : *Le concours à la faculté des réseaux sociaux n'admet pas de lettres de recommandation des membres du jury. Dessinez le graphe des lettres de recommandation admissibles.*

2 Degre

Exercice 2. *Démontrez les deux affirmations suivantes :*

- *La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe G quelconque est paire.*
- *Dans tout graphe, le nombre de sommets de degré impair est pair.*

Exercice 3. *Peut-on tracer dans le plan cinq droites distinctes, telles que chacune d'entre elles ait exactement trois points d'intersection avec les autres ? En modélisant ce problème par un graphe, démontrez que cela n'est pas possible.*

Exercice 4. *Voici une affirmation : "dans toute réunion mondaine, il y a au moins deux personnes ayant le même nombre d'amis présents" (on suppose la relation d'amitié symétrique).*

- *Dans le cadre des graphes, à quelle propriété correspond cette affirmation ?*
- *Cette propriété est elle fausse ou vraie ? Donnez une preuve de ce que vous avancez.*

Exercice 5. *Il existe quatre groupes sanguins :*

- *AB pour les personnes ayant des antigènes A et B,*
- *A pour les personnes ayant des antigènes A mais pas d'antigènes B,*
- *B pour les personnes ayant des antigènes B mais pas d'antigènes A,*
- *O pour les personnes n'ayant ni d'antigènes A ni d'antigènes B.*

Il existe également deux rhésus sanguins :

- *positif (+),*
- *négatif (-).*

On admet que les seuls interdits biologiques pour recevoir du sang sont les suivants :

- *recevoir du sang possédant un antigène dont on est dépourvu,*
- *recevoir du sang ayant un rhésus positif si on est rhésus négatif.*

Tracer le graphe orienté dont $\{AB+, AB-, A+, A-, B+, B-, O+, O-\}$ *est l'ensemble des sommets et dont les arcs désignent les possibilités de donner du sang sans violer les interdits biologiques.*

1. *Donner le demi-degré sortant* $d^+(v)$ *et le demi-degré entrant* $d^-(v)$ *de chaque nœud v.*
2. *Donner l'ensemble des successeurs succ(v) et l'ensemble des prédécesseurs pred(v) de chaque neud v.*

Exercice 6. *Soit G = (V, E) un graphe avec E non vide. On definit le graphe ligne L(G) comme étant le graphe* $H = (E, \{(u, v) \in E \times E | uadjacentavdansG\})$.

Questions

1. *Représenter le graphe ligne de K_4, du graphe biparti complet $K_{2,3}$, du cycle à 6 sommets*
2. *Quel est le cardinal de $L(K_n)$?*
3. *Donner une expression du nombre d'arête du graphe $L(G)$ en fonction des degrés des sommets de G.*
4. *Montrer que si G est un graphe simple k-régulier (c-à-d chaque sommet est de degré k), alors $L(G)$ est (2k - 2)-régulier*
5. *Déterminer $L(P_n)$ et $L(C_n)$. Trouver deux graphes connexes distincts G et H tel que $L(G) = L(H)$.*

Exercice 7. ***Séquence de degrés***

On dit qu'une séquence de nombres entiers est réalisable s'il existe un graphe dont les sommets ont exactement les degrés de la séquence.

Question 1 *Pour chaque séquence qui suit, dites si la séquence est réalisable ou non. Si la réponse est oui, dessinez un tel graphe et dire s'il est unique (à isomorphisme près), sinon justifiez pour quoi il n'y a pas de tel graphe.*

— *(1 ; 2 ; 2 ; 4 ; 5 ; 5) ;*
— *(2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2) ;*
— *(1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1) ;*
— *(3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 5) ;*
— *(2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3) ;*
— *(0 ; 2 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5) ;*
— *(5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 2 ; 2).*

Question 2 *Donnez des conditions nécessaires pour qu'une séquence soit réalisable. Sont-elles suffisantes ?*

Exercice 8. ***Jeux de mains***

Le toute l'université se retrouve lors de la visite de la cérémonie de baptème de l'université dans une grande bache aménagée pour l'ocasion. Certaines des personnes présentes se connaissent, d'autres pas. La plus élémentaire des politesses veut que les personnes qui se connaissent se serrent la main.Deux personnes ne se connaissant pas ne se serrent pas la main.

Question 1 *Démontrer qu'il existe au moins deux personnes qui ont serré le même nombre demains.*

Exercice 9. ***Conseil municipal***

Le conseil municipal d'une ville comprend 7 commissions, qui obéissent aux règles suivantes :

1. *Règle 1 : tout conseiller municipal fait partie de 2 commissions exactement ;*
2. *Règle 2 : deux commissions quelconques ont exactement un conseiller en commun.*

Question 1 *Combien y'a t-il de membres dans le conseil municipal ?*

Exercice 10. *Sept étudiants partent en vacances. Ils décident que chacun enverra une carteà trois autres. Est-il posible que chaque étudiant recoivent des cartes postales précisément dela part des trois personnes auxquelles il en a envoyé ?*

3 Chemins et cycles

Exercice 11. *Décrire une relation dans le monde réel telle que tout graphe le modélisant n'admet pas de cycle. Décrie une autre relation qui est non symétrique et qui pour cette fois-ci a une modlisation avec un graphe ayant un cycle.*

Exercice 12. *Montrer que toute chaine entre deux sommet u et v, d'un graphe G contient un chemin entre u et v.*

Exercice 13. *Soit G un graphe tel que pour chaque sommet $u \in G$, on q $d^+(u) = d^-(u)$. Montrer que G peut etre décomposé en une union de cycle.*

Exercice 14. *Montrer qu'un graphe simple de degré minimum au moins k contient une chaîne élémentaire de longueur k.*

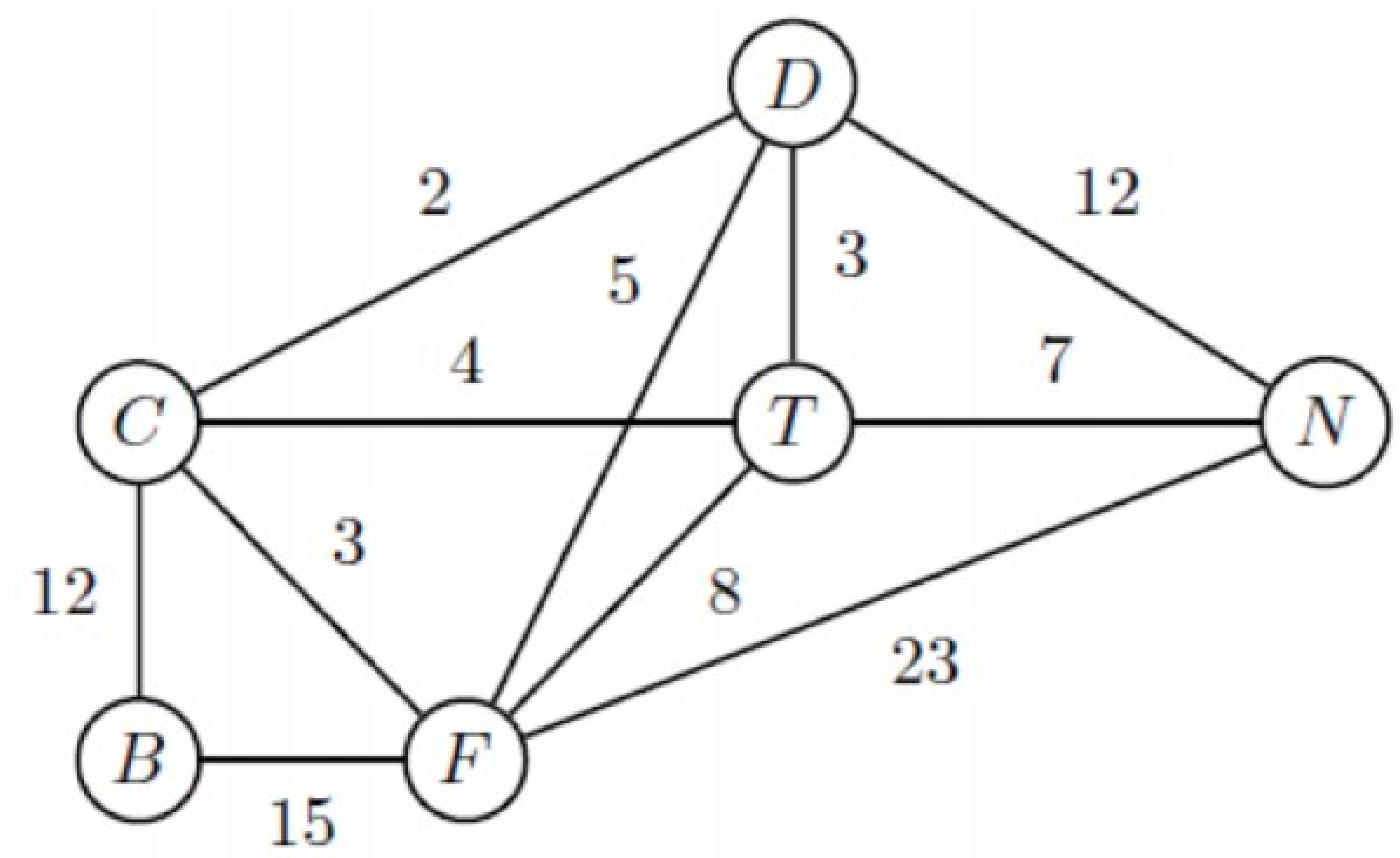
Exercice 15. *Soit G un graphe simple dont exactement deux sommets x et y sont de degré impair. Montrer qu'il existe une chaîne dans G de x à y.*

Exercice 16. *Montrer que si G est un graphe simple tel que chaque sommet est de deré 2, alors G est un cycle.*

Exercice 17. *Soit G = (V,E) un graphe simple non orienté non vide. Soit $k = min_{x \in V} deg(x)$.*

1. *Prouver que G possède un chemin simple de longueur k.*
2. *Prouver que G possède un circuit simple de longueur au moins k + 1 si k vaut au moins 2.*

Exercice 18. *Un groupe d'amis organise une randonnée dans la chaine de montagne des Alpes. On a représenté par le graphe ci-dessous les sommets B, C, D, F, T, N par lesquels ils peuvent choisir de passer. Une arête entre deux sommets coincide avec l'existence d'un chemin entre les deux sommets. Les distances en kilomètres entre chaque sommet sont indiquées sur le graphe. S'ils se trouvent au sommet B et souhaitent se rendre au sommet N, pouvez-vous leur indiquer un chemin dans le graphe qui minimise la distance du trajet ?*



4 Connexité

Exercice 19. *Soit G un graphe simple à n sommets et m arêtes. Montrer que si $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, alors G est connexe.*

Exercice 20. *Soit G un graphe non orienté. Montrer qu'un moins un des deux graphes, G ou son complémentaire, est connexe*

Exercice 21. *Soit G un graphe simple à n sommets tel que chaque sommet est de degré supérieur ou égal à $\frac{n}{2}$. Montrer que G est connexe.*

Exercice 22. *On considère un graphe simple non orienté de 7 sommets, tous de degré supérieur ou égal à 3.*

1. *Prouver que ce graphe est connexe.*
2. *Prouver que ce graphe n'a pas ses sept sommets de degré exactement 3.*