Chapitre 1 : Graphe Eulerien

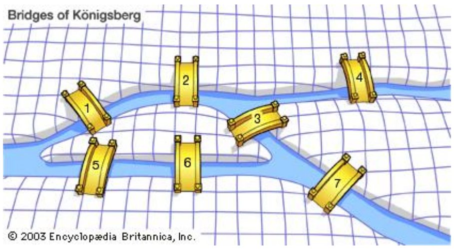
Y. DIENG, Département Informatique
UFR ST, Université Assane Seck de Ziguinchor

28. januar 2022

1 Introduction

Dans la Ville de Konigsberg il y avait 7 ponts reliant les iles ainsi que les deux rives de la ville. La configuration est donnée par la figure ci-après.

En effet, comme illustré par la figure ci-dessous, la ville était traversée par un fleuve qui crée deux iles. Il y avait donc 7 ponts pour relier les diférentes parties de la ville. Le pont numero deux permet de relier les deux iles, Les ponts numéro 1, 2, 5 et 6 relient la première ile avec les autres parties de la vile. Les ponts 4 et 7 permettent de relier la deuxième ile avec le reste de la vile.



Le citoyens de Konigsberg passaient souvant le weekend en promonade à pièd. Plusieurs personnes se demandaient s'il était impossible de traverser chacun des sept ponts de la ville russe de Konigsberg (aujourd'hui Kaliningrad) une fois exactement et de revenir au point de départ.

On voit immédiatement qu'il est possible de modéliser le problème sous forme de graphe dont les sommets correspondent aux iles et aux rives et les dont les arêtes correspondent aux ponts. Le problème peut donc être modélisé de la manière suivante:

Dans un graphe, est-il possible de trouver une chaine $C = s_1, e_1, s_2, e_2, \ldots s_m, e_m, s_{m+1}$ tel que $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ et $|V| = m$.

Autrement dit, il faut trouver une chaine du graphe qui passe par toutes les arêtes de telle sorte qu'aucune arête ne figure plus d'une fois dans la chaine.

Un problème similaire à ce problème est le dessin d'une enveloppe sans lever le crayon. Les segments de droite de l'enveloppe correspondent aux ponts et les intersection entre les segments de droites correspondent aux iles.

En ce qui est de l'enveloppe, on trouve facilement une solution en débutant le dessin en bas à gauche ou en bas à droite. Si on commance n'importe où ailleurs, ce n'est pas possible.

2 Définition de graphe eulerien

Nous allons dans cette section donner plus de précisions sur ce qu'est un graphe eulerien.

Définition 1. *Un graphe $G = (V, E)$ est* eulérien *si et seulement si il est possible de trouver une chaîne $C = s_1, e_1, s_2, e_2, \ldots, s_m, e_m, s_{m+1}$ telle que $\{s_1, s_2, \ldots, s_m, s_{m+1}\} = V$, $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\} = E$ et $|E| = m$.*

Une analyse plus fine de cette définition permettra de mieux comprendre. Une signification de cette définition est que si on trouve une telle chaine, alors le graphe est eulérien ou qu'un graphe n'est Eulérien que s'il a une telle chaine.

La définition nous dit aussi que la chaine doit avoir certaines propriétés. Il faut que l'ensemble des sommets de la chaine soit l'ensemble des sommets du graphe. En d'autres termes la chaine doit passer par tous les sommets du graphe. Nous pouvons donc en déduire qu'un graphe ayant un sommet isolé ne peut pas être Eulérien.

En outre, la chaine doit passer par l'ensemble des arêtes. C'est ce que signifie l'expression $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\} = E$.

Il faut donc que $|E|$ soit égale à m, c'est à dire le nombre total d'arêtes dans le graphe soit égal au nombre d'arêtes dans la chaine. En d'autres termes, la chaine ne peut pas passer deux fois par la même arête. Une telle resriction n'existe pas pour les sommets.

En résumé, comme énoncé dans [**SD03**],la définition veut dire "un graphe est Eulérien si et seulement s'il contient une chaine qui passe par tous les sommets et emprunte exactement une fois chacune des arêtes.

3 Conditions nécessaire pour qu'un graphe soit eulerien

Dans cette section, nous allons examiner un certain nombre de conditions nécessaire pour qu'un graphe soit eulerien. Les condition sont les propriétés impliquées par le fait d'être elérien. Si une telle propriété est fausse, alors le graphe ne peut pas être eulérien.

3.1 Connexité

La première propriété que nous allons examiner est la connexité du graphe.

Théorème : *Un graphe eulérien est forcément connexe.*

Une autre manière de dire la même chose est :

- Tout graphe eulérien est connexe,
- Si un graphe est eulérien, alors il est connexe,
- G eulérien $\Rightarrow$ G connexe,
- Si un graphe n'est pas connexe, alors il n'est pas eulérien,
- G est connexe est une condition nécessaire pour que G soit eulérien.

Pour la preuve de ce théorème, nous allons utiliser la méthode du raisonnement par l'absurde même si on peut trouver d'autres méthodes. L'idée d'une telle méthode est de supposer que l'énoncé est faux, puis de montrer que cette supposition conduit à une contradiction. Puisque la logique ne peut pas être contradictoire, c'est forcément la supposition qui est fausse, et par concéquent l'énoncé est vrai.

La première chose à faire pour prouver ce genre de théorème est d'examiner les définitionss des concepts qu'il fait intervenir. Dans le cadre de ce théorème, il faut examiner la définition de Eulérienet de "connexité". la définition de Éulériense trouve dans la section précedente. Rappelon la définition de "connexité".

Un graphe G est connexe si et seulement si $\forall s_1 m s_2 \in V$, il existe une chaine entre s_1 et s_2.

Avec ces informations, nous pouvons attaquer la preuve:

Bevis. Supposons que l'énoncé soit faux. C'est à dire, on suppose l'existence d'un graphe G eulérien non connexe. Maintenant, il faut examiner les conséquences de cette supposition.

Comme le graphe $G = (V, E)$ est eulérien, alors par définition de Eulérien, il existe une chaîne $C = s_1, e_1, s_2, e_2, \ldots, s_m, e_m, s_{m+1}$ telle que $\{s_1, s_2, \ldots, s_m, s_{m+1}\} = V$, $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\} = E$ et $|E| = m$.

En outre, comme on a supposé que le graphe n'est pas connexe, alors $\exists u, v \in V$, tels qu'il n'existe aucune de chaîne entre u et v.

Puisque la chaîne C contient tous les sommets du graphe, alors elle contient forcément les sommets u et v. Disons que u est le même sommet que s_i et B est le même sommet que s_j. On peut donc écrire la chaine élérienne de la manière suivante :

$C = s_1, e_1, s_2, e_2, \ldots, u, e_i, \ldots, e_{j-1}, v, \ldots, s_m, e_m, s_{m+1}$.

Examinons la sous-chaîne : $C' = u, e_i, \ldots, e_{j-1}, v$ de C. C' est bien une chaîne entre u et v. Nous avons donc une contradiction vu que notre supposition était qu'il n'existe pas de chaine entre u et v.

Notre supposition qu'il existe un graphe Eulérien non connexe est donc fausse. Nous pouvons alors conclure que tout graphe Eulérien est connexe.

■

3.2 Parité des sommets

Dans cette section, nous allons examiner une autre condition nécéssaire pour qu'un graphe soit Eulérien. Il s'agit de la parité des sommets du graphe. La définition ci après sera utile.

Définition 2. *Un sommet est* pair *si son degré est pair. Un sommet est* impair *si son degré est impair.*

La relation entre la parité des sommets d'un graphe et le fait que le graphe soit Eulérien est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1. *Dans un graphe eulérien, le nombre de sommets impairs est forcement* 0 *ou* 2*.*

Avant de prouver ce théorème, arêtons nous un instant pour regarder les concéquences sur le graphe représentant la ville de Konigsberg. Les degrés des sommets de ce graphe sont $3, 3, 3$ et 5 respectivement. il y'a donc quatre sommets impaires. par conséquent, la vile de Konigsberg n'est pas un graphe Eulérien. Nous avons donc une explication du pourquoi les citoyens de Konigsberg. n'arrivaient pas à trouver de chaine appropriée.

Similairement, les degré des sommets du graphe représentant l'enveloppe sont $2, 4, 4, 4, 3$ et 3. Il y'a deux somments impairs. Le théorème ne nous permet pas de conclure que l'enveloppe est Eulérienne vu que c'est juste une condition nécessaire. Il est important de ne pas renverser le flèche de l'implication.

Attaquons maintanant la preuve du théorème. Nous allons à nouveau utiliser la méthode par contradiction.

Bevis. On suppose l'existence d'un graphe eulérien dont le nombre de sommets impairs n'est ni 0 ni 2.

Le graphe étant eulérien. Alors, la définition dit qu'il existe une chaîne $C = s_1, e_1, s_2, e_2, \ldots, s_m, e_m, s_{m+1}$ telle que $\{s_1, s_2, \ldots, s_m, s_{m+1}\} = V$, $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\} = E$ et $|E| = m$.

Regardons un sommet autre que s_1 et s_{m+1} dans cette chaîne. Ce même sommet peut exister plusieurs fois dans la chaîne. Chaque occurence d'un tel sommet, disons s_i, est entourée dans C de e_{i-1} et e_i ce qui donne une contribution de 2 au degré de s_i. Comme toutes les arêtes de C sont différentes, le degré de s_i est donc pair.

Pour ce qui concerne les sommets s_1 et s_{m+1} nous alons distinguer deux cas : dans le premier cas on a $s_1 \neq s_{m+1}$ et dans le deuxième cas on a $s_1 = s_{m+1}$.

Pour le premier cas ($s_1 \neq s_{m+1}$), la contribution de e_1 au degré de s_1 est de 1 et celle de e_m au degré de s_{m+1} est aussi de 1. Le degré de s_1 et s_{m+1} sont donc forcément impaire. Il exitse par conséquent deux sommets impairs.

Pour le deuxième cas ($s_1 = s_{m+1}$), la contribution de e_1 au degré de s_1 est de 1 et celle de e_m au degré de s_{m+1} est aussi de 1. La contribution totale au degré de s_1 est donc 2. Le degré de s_1 est donc paire. Il n'existe par conséquent aucun sommet impaire. ■

La preuve précédente nous indique comment trouver une chaîne eulérienne dans un graphe ayant deux sommets impairs. La chaine doit commencer dans un sommet impair et terminer dans l'autre sommet impair. C'est la raison pour laquelle dans le cadre de l'enveloppe, il falait commencer par l'un des sommets deu bas.

4 Conditions suffisantes pour qu'un graphe soit eulerien

Dans la section précédente, nous avons examiné deux conditions nécéssaires pour qu'un graphe soit eulérien. cependant, nous n'avons pas encore de condition suffisante.

L'établissement de conditions suffisantes est concidérablement plus difficile que celle d'une condition nécéssaire.

En fait, pour établir des conditions suffisantes en informatique, nous préférerons une preuve constructive. Car, une telle preuve indiquera non seulement l'existance d'une chaine, mais elle indiquera aussi une méthode permettant d'en trouver une. Grace à cette méthode, l'informatitien pourra faire sa traduction en algorithme et ultérieurement en programme pour trouver une telle chaine.

On remarque que la réunion des deus conditions nécéssaires examinées précédemment forme une condistion suffisante. sans peurve, voici le théorème final.

Théorème 2. *Un graphe G est eulérien si et seulement si G est connexe et le nombre de sommets impairs de G est* 0 *ou* 2*.*

4.1 Algorithme de recherche d'une chaine eulérienne

Une chaine eulérienne est définie comme étant la liste ordnée alternant les sommets et les arêtes qu'elle emprunte. Nous allons présenter deux algorithmes dont le premier correspond au cas où tous les sommets sont paire et le deuxième correspond au cas où le graphe posède 2 sommets impairs.

Cas 1: Tous les sommets sont pairs

Algorithme 1: *construit un cycle C contenant une seule fois chaque arête de G, G étant un graphe connexe où tous les sommets sont pairs.*

1. Choisir un sommet s_1 arbitraire, et former $C = s_1$
2. Tant que le dernier sommet de C possède une arête e qui n'appartient pas à C, ajouter e et son sommet extremité à C. *(A prouver : C est un cycle.)*
3. Si toutes les arêtes de G sont dans C, alors retourner C. Sinon, soit s_i un sommet de C ayant une arête e qui n'appartient pas à C.
   Former $C' = s_i, e_i, s_{i+1}, \ldots, e_m, s_1, e_1, \ldots, e_{i-1}, s_i$.
4. Poser $C = C'$, puis continuer en 2

Cas 2: Il existe 2 sommets impairs

Algorithme 2: *construit une chaîne C contenant une seule fois chaque arête de G, G étant un graphe connexe avec 2 sommets impairs, notés u et v.*

1. Former $e = \{u, v\}$, et un nouveau graphe G' tel que $V(G') = V(G) = V'$, et $E' = E(G') = E(G) \cup \{e\}$.
   (Tous les sommets de G' sont pairs.)
2. Calculer le cycle C' pour G' par l'Algorithme 1.
   (C' est un cycle eulÈrien pour G'.)
   On supppose que C' contient la sous-chaÓne u, e, v dans ce sens (sinon inverser le rôle de u et v).
3. Former $C'' = u, e, v, e_i, s_{i+1}, \ldots, u$.
4. Retourner $C = v, e_i, s_{i+1}, \ldots, u$.

5 Bibliographie

@book Berge69, AUTHOR = C. Berge, TITLE = Théorie des graphes et ses applications, PUBLISHER = Dunod, YEAR = 1967,

@book SD2003, AUTHOR = R. Strandh and I. Durand, TITLE = Initiation à l'informatique, PUBLISHER = Meta Modulaire SARL, YEAR = 2003,

@book Boll98, AUTHOR = Béla Bollabas, TITLE = Graduate Texts in Mathematics , PUBLISHER = Springer, ISBN = 0 387 98491 7, YEAR = 1998,

@book GM85, AUTHOR = Michel Gondran, Michel Minoux, TITLE = Graphes et algorithmes , PUBLISHER = EYROLLES, ISBN = 0 399 4198, YEAR = 1985,

@book LPS94, AUTHOR = Philippe Lacomme, Christian Prins, Marc Sevaux, , TITLE = Algorithmes de Graphes , PUBLISHER = EYROLLES, ISBN = 2 212 11385 4, YEAR = 1994,