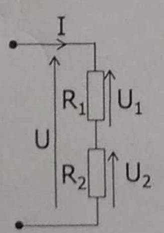
Chapitre 2

Théorèmes généraux et dipôles Electrocinétiques

Théorèmes généraux de l'Electrocinétique

1- Diviseur de tension

Le montage diviseur de tension permet de diviser une tension U en autant de tensions U_i qu'il y a de résistances en série R_i :



$U_1 = R_1 I$

$U_2 = R_2 I$

$U = U_1 + U_2 = (R_1 + R_2) I$

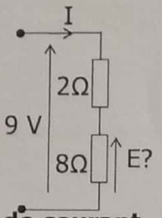
La tension est proportionnelle à la résistance.

d'où : $\frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ $\qquad \frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

Formule générale : $\boxed{U_i = \frac{R_i}{\sum_i R_i} U}$

Question 1 : Calculer la tension E

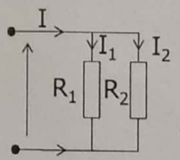
Théorèmes généraux de l'Electrocinétique



Réponse question 1

2- Diviseur de courant

Le *diviseur de courant* divise un courant I en autant de courants I_i qu'il y a de résistances en *parallèle* R_i :



$$I_i = \frac{G_i}{\sum_i G_i} I$$

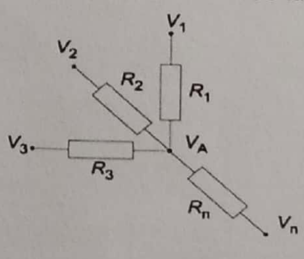
Théorèmes généraux de l'Electrocinétique

-**Cas particulier de deux résistances :**

$$I_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \qquad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

3- Théorème de Millman

Le théorème de Millman est une traduction de la loi des nœuds.



Théorèmes généraux de l'Electrocinétique

Enoncé :

Le potentiel en un nœud quelconque d'un circuit est égal à la moyenne des potentiels des nœuds voisins, pondérée par les valeurs des conductances (inverses des résistances) des différentes branches.

$$V_A = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} + \ldots + \frac{V_n}{R_n}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \ldots \frac{1}{R_n}}$$

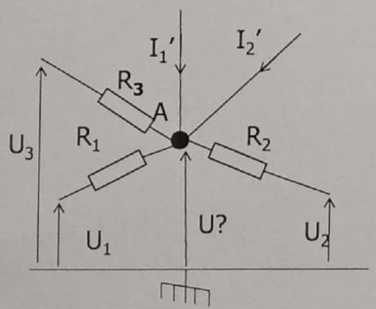
La démonstration de théorème de Millman ne pose aucune difficulté : en réalité, le théorème de Millman dérive de la loi des nœuds.

Question 2 : Démontrer le théorème de Millman en appliquant la loi des nœud (Cf. figure ci-dessus).

Réponse question 2

Théorèmes généraux de l'Electrocinétique

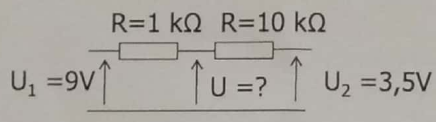
On peut aussi utiliser des tensions, à condition de les référencer par rapport au même potentiel (généralement la masse) :



$$U = \frac{\sum_i \frac{U_i}{R_i} + \sum_j I'_j}{\sum_i \frac{1}{R_i}}$$

Question 3 : Calculer la tension U de la figure ci-dessous.

Théorèmes généraux de l'Electrocinétique

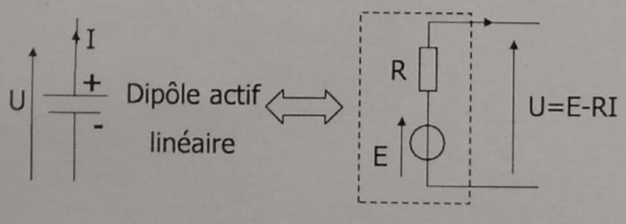


Réponse question 3

Dipôles actifs linéaires et équivalence

Modèle équivalent de Thévenin (modèle série)

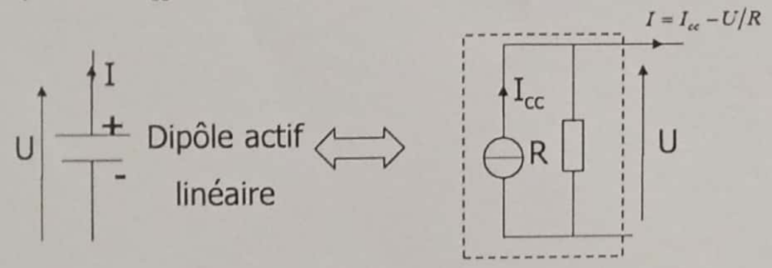
Un dipôle actif linéaire peut être modélisé par une source de tension continue parfaite E en série avec une résistance interne R :



Dipôles actifs linéaires et équivalence

Modèle équivalent de Norton (modèle parallèle)

Un dipôle actif linéaire peut être modélisé par une source de courant continu parfaite I_{cc} en parallèle avec une résistance interne R :



Equivalence entre le modèle de Thévenin et le modèle de Norton

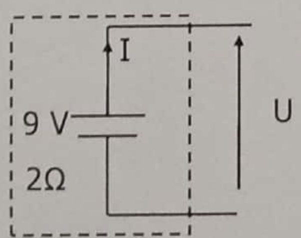
Le passage d'un modèle à l'autre se fait par les relations :

$$E = RI_{cc} \quad \text{ou} \quad I_{cc} = E/R$$

Dipôles actifs linéaires et équivalence

Question 4 : 1) Déterminer le MET, le MEN et la caractéristique U(I) du dipôle suivant.

2) I = +1 A. Calculer U.



Réponse question 4

Dipôles actifs linéaires et équivalence

4- Association de dipôles linéaires

- Exemple

Considérons l'association :

- d'une pile (fem 9 V , résistance interne 2 Ω)

-et d'une résistance (8 Ω) :

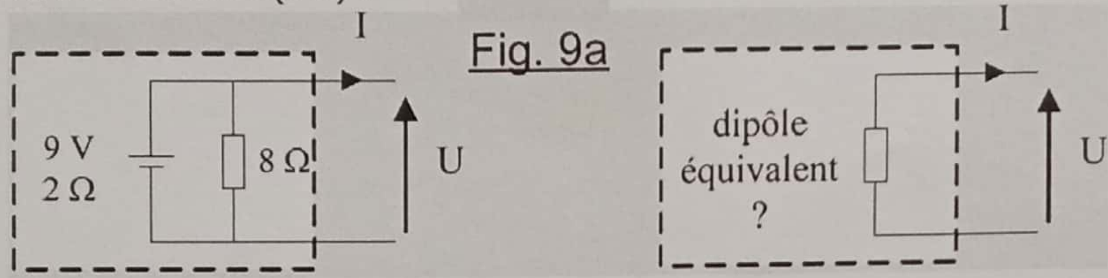


Fig. 9a

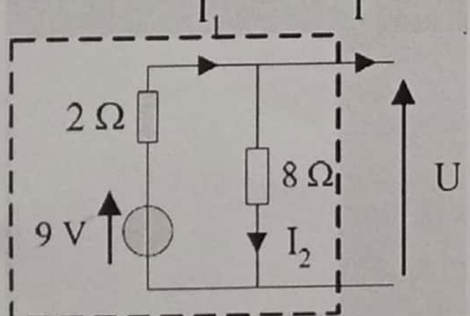
Pour connaître le comportement de l'association, il suffit de déterminer la caractéristique U(I).

Dipôles actifs linéaires et équivalence

1ère méthode : utilisation des lois de Khirchhoff

On suppose que la pile a un comportement linéaire.

On utilise son modèle de Thévenin :

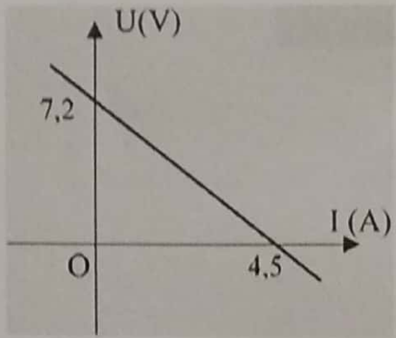


$$\begin{cases} I_1 = I + I_2 \text{ (Loi des nœuds)} \\ U = 8I_2 \text{ (Loi d'Ohm)} \\ U = 9 - 2I_1 \text{ (Loi des branches)} \end{cases}$$

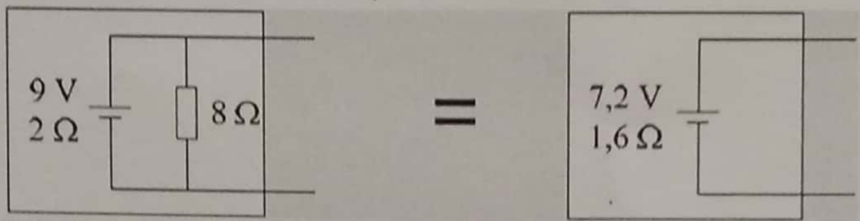
d'où : U (V) = 7,2 – 1,6 I (A)

Dipôles actifs linéaires et équivalence

Tracé de la caractéristique U (V) = 7,2 – 1,6 I (A)



On reconnaît la caractéristique d'un dipôle actif linéaire :



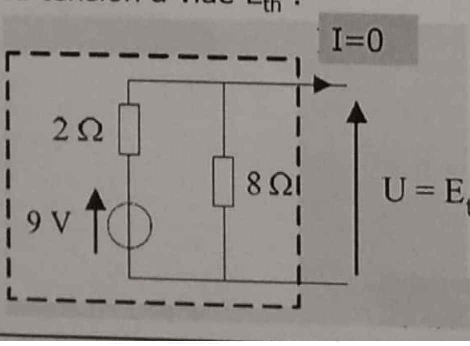
Dipôles actifs linéaires et équivalence

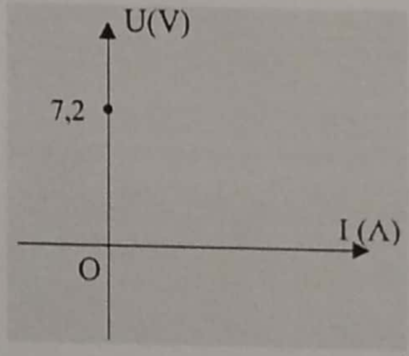
2ème méthode : utilisation du théorème de Thévenin – Norton

- *Un circuit électrique ne comprenant que des dipôles linéaires se comporte comme un dipôle linéaire.*
- Conséquence :

Si on calcule E_{th} et I_{cc} (R s'obtient par $E_{th} = RI_{cc}$) de l'association on obtient les modèles de Thévenin et de Norton et donc la caractéristique U(I).

- Calcul de la tension à vide E_{th} :

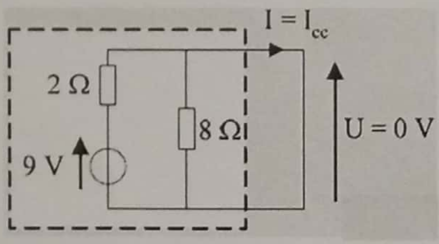


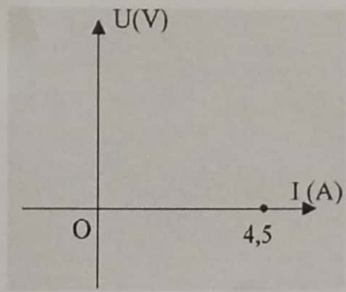


Dipôles actifs linéaires et équivalence

Formule du diviseur de tension : $E_{th} = \frac{8}{2+8} 9 = 7{,}2\ \text{V}$

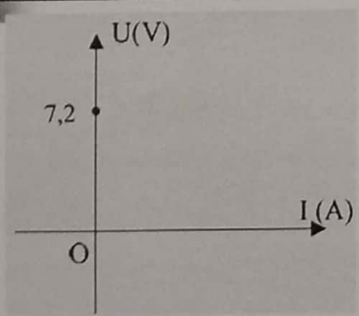
-Calcul du courant de court-circuit I_{cc} :

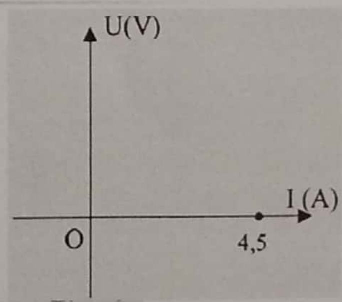




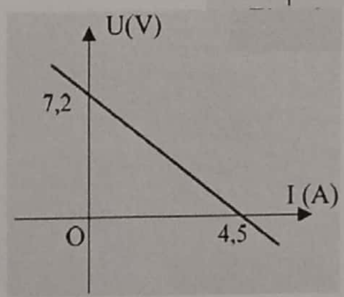
Loi des branches : $9 - 2I_{cc} = 0$ d'où: $I_{cc} = 4{,}5\ \text{A}$

Dipôles actifs linéaires et équivalence



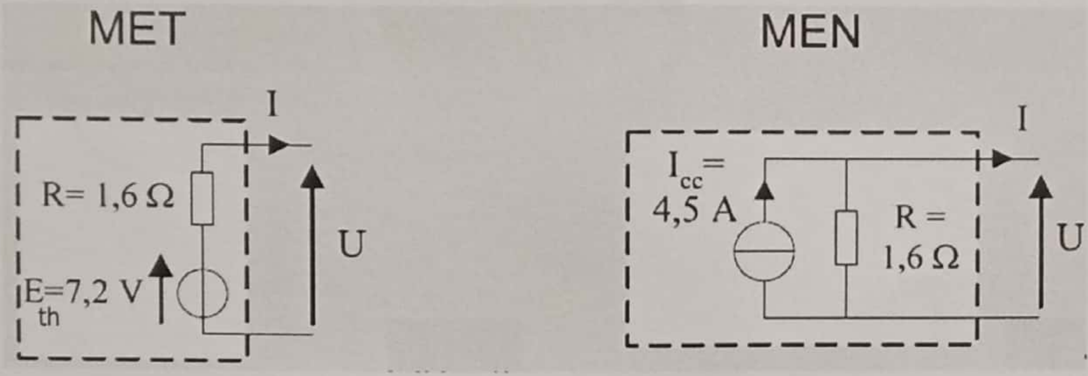


D'où :



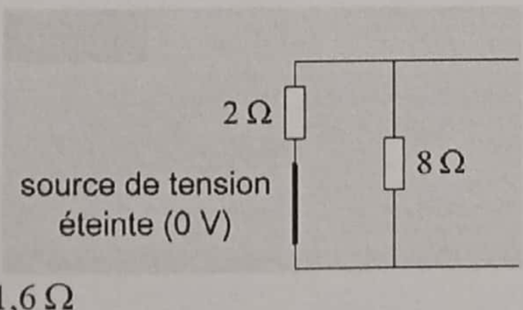
Dipôles actifs linéaires et équivalence

- Calcul de la résistance interne : $R = \frac{E_{th}}{I_{cc}} = \frac{7,2}{4,5} = 1,6\,\Omega$



Dipôles actifs linéaires et équivalence

• Remarque : pour obtenir directement la résistance interne, on éteint toutes les sources (cf. Théorème de superposition) et on calcule la résistance équivalente vue des bornes de l'association :

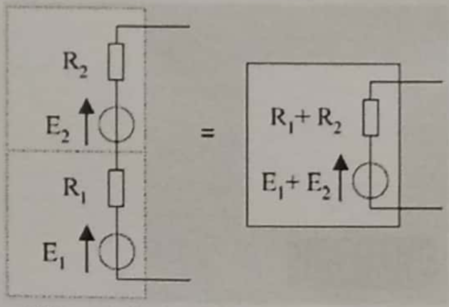


d'où : $R = 2\,\Omega // 8\,\Omega = 1,6\,\Omega$

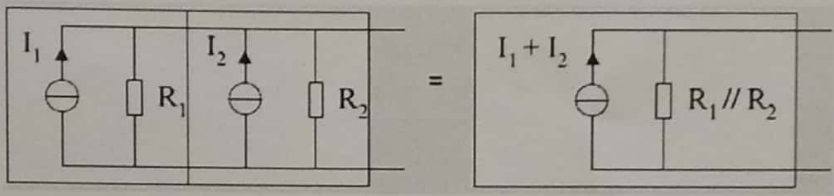
Dipôles actifs linéaires et équivalence

3ème méthode : utilisation de l'équivalence des modèles de Thévenin et de Norton

En série on simplifie en utilisant le MET,

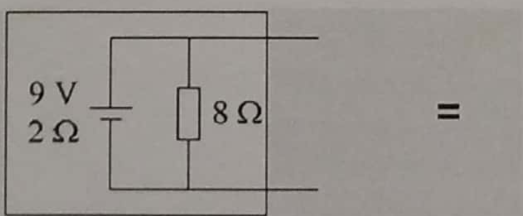


et en parallèle en utilisant le MEN :



Dipôles actifs linéaires et équivalence

Question 5 : Déterminer le MET, le MEN du circuit suivant.



Réponse question 5

Dipôles actifs linéaires et équivalence

5- Théorème de superposition

La tension [le courant] entre deux points d'un circuit électrique linéaire comportant plusieurs sources est égale à la somme des tensions [courants] obtenues entre les deux points lorsque chaque source agit seule.

<u>N.B</u> :

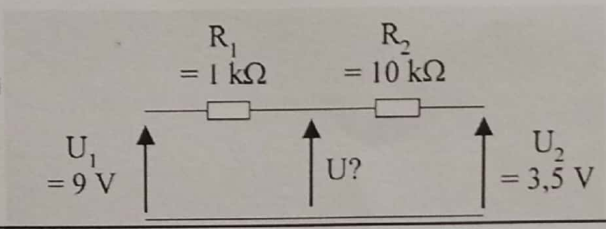
- Eteindre une source de tension revient à la remplacer par un fil (source de tension nulle).

-Eteindre une source de courant revient à l'ôter du circuit (source de courant nul).

<u>Question 6</u> :

Calculer la tension U de la figure ci-contre.

<u>Réponse question 6</u>

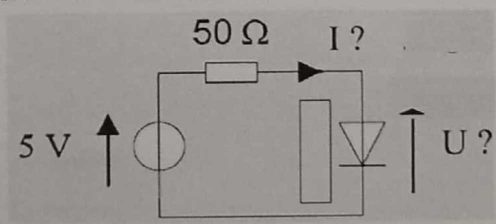


Dipôles actifs linéaires et équivalence

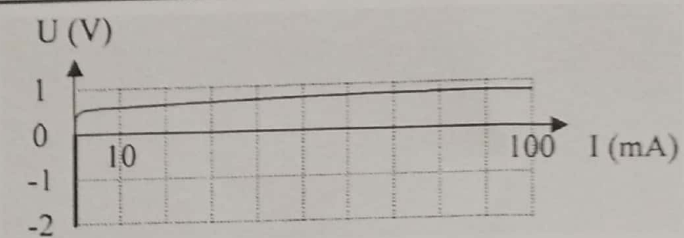
6- Association de dipôles non linéaires

Une méthode graphique s'impose ...

- Exemple : cherchons le courant et la tension aux bornes de la diode :



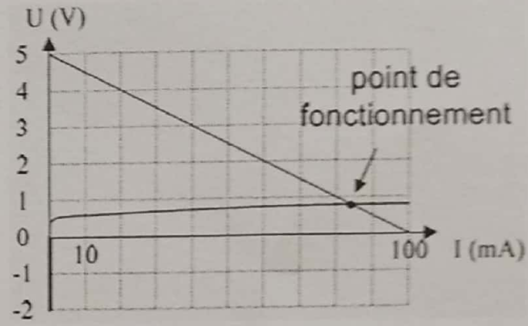
Dipôles actifs linéaires et équivalence



Pour cela, il faut connaître la caractéristique U(I) de la diode :

Loi des branches :

U = 5 –50I (équation d'une droite) :



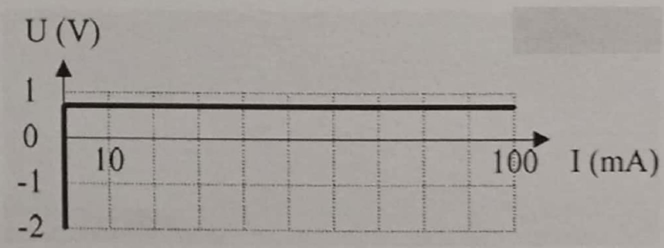
I ≈ 84 mA

U ≈ 0,8 V

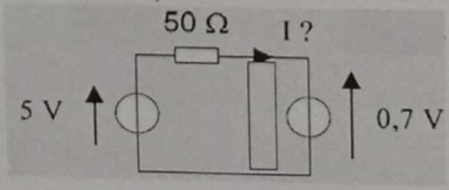
Dipôles actifs linéaires et équivalence

7- Linéarisation de la caractéristique d'un dipôle non linéaire

On simplifie la caractéristique réelle de la diode par des segments de droite :



Le schéma équivalent du circuit est maintenant :



Loi des branches : 5 =0,7+50I

d'où : I =(5 – 0,7)/50=86 mA.

Généralisation du théorème de Thévenin

Le théorème de Thévenin stipule l'existence d'un équivalent simple à tout dipôle actif linéaire.

Énoncé du théorème de Thévenin :

Tout réseau dipolaire comportant des sources de tension, des sources de courant et des résistances, est équivalent à un dipôle élémentaire dit de Thévenin, constitué d'un générateur de tension parfait E_{TH}, placé en série avec une résistance R_{TH} . La tension E_{TH} est égale à la tension à vide du générateur (c'est-à-dire la tension présente aux bornes du dipôle lorsque celui n'est connecté à aucun dipôle). La résistance R_{TH} est la résistance équivalente du dipôle en supposant que toutes les sources sont éteintes (générateur de tension remplacé par des courts circuits et sources de courant remplacées par des circuits ouverts).

Généralisation du théorème de Thévenin

Exemple de Calcul : Calculer I en utilisant le théorème de Thévenin

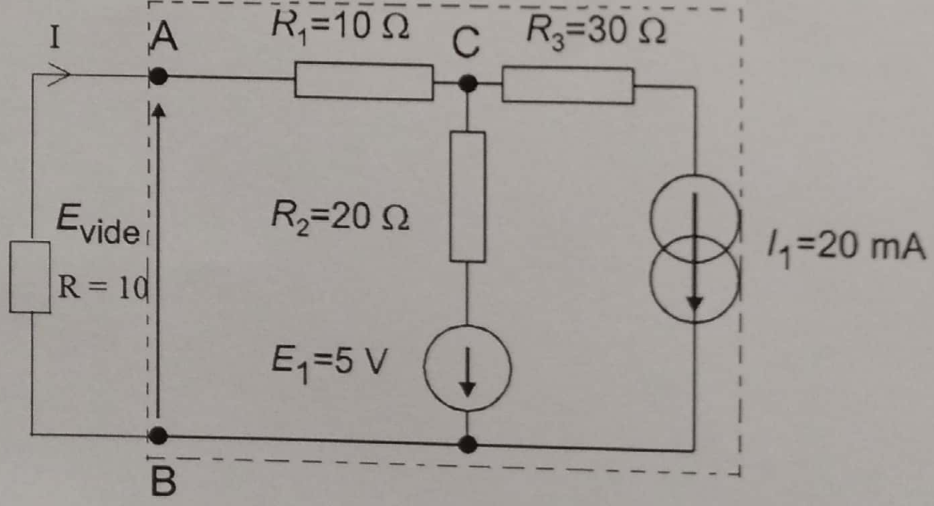


Figure 1

Généralisation du théorème de Thévenin

Exemple de Calcul (suite) :

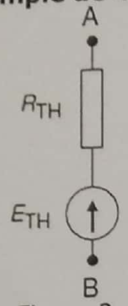


Figure 2

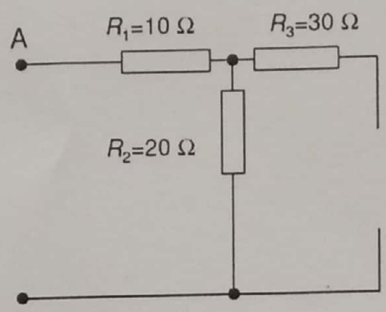


Figure 3

Détermions tout d'abord R_{TH} : court-circuitons le générateur de tension et remplaçons le générateur de courant par un circuit ouvert (figure 3). Le dipôle AB n' est plus que la simple mise en série de R_1 et de R_2. On a donc : $R_{TH} = R_1 + R_2 = 30\ \Omega$.

Le calcul de la tension à vide (figure 4) permet de déterminer E_{TH} : on évalue la tension aux Bornes du dipôle, en l'absence de courant dans R_1 et dans la branche correspondant au point B.

Généralisation du théorème de Thévenin

Exemple de Calcul (suite) :

C' est donc le même courant qui parcourt R_2 et R_3, c 'est-à-dire I_1 et la tension à vide n'est rien d'autre que la tension au point C (en supposant que le point B est l'origine des potentiels). La figure 5 résume ces constatations et nous permet de déterminer E_{TH} .

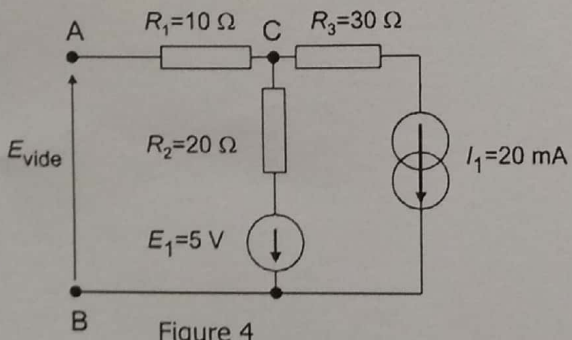


Figure 4

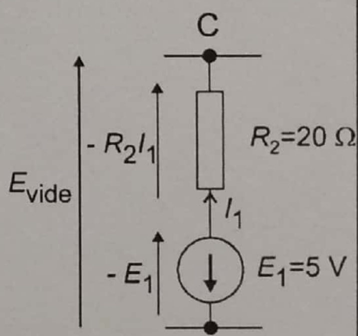


Figure 5

Généralisation du théorème de Thévenin

Exemple de Calcul (suite) :

On veillera particulièrement au respect du sens du courant et des orientations des tensions, notamment à la convention récepteur aux bornes de R_2.

On a donc : $E_{TH}=-R_2I_1-E_1=-20\times0,02-5=-5,4V$.

La présence d'une tension négative ne doit poser aucun problème, le dipôle équivalent de Thévenin pouvant se représenter indifféremment comme proposé sur la figure 6 ou 7.

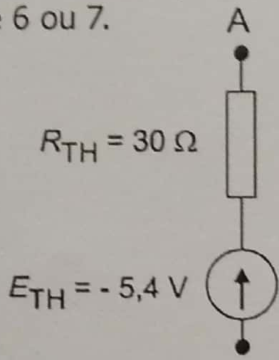


Figure 6

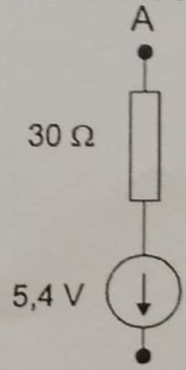
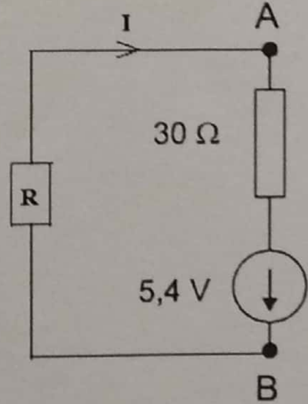


Figure 7

Généralisation du théorème de Thévenin

D'où,

$I = - Eth/(Rth+R) = 5,4/40 = 0,135$ A



ATTENTION : l'erreur à ne pas commettre à propos du générateur de courant consiste à considérer que le potentiel au point C correspond à la différence de potentiels aux bornes de R_3, soit R_3I_1, car ceci suppose à tort, que la chute de potentiel est nulle aux bornes de la source de courant.

Théorème de Norton

C'est le théorème dual de celui de Thévenin : il permet de modéliser un circuit par un générateur de courant réel.

Un circuit quelconque peut toujours se modéliser grâce à chacun de ces deux théorèmes. Dans la pratique, on utilisera celui qui permet d'arriver au résultat le plus simplement.

Enoncé du théorème :

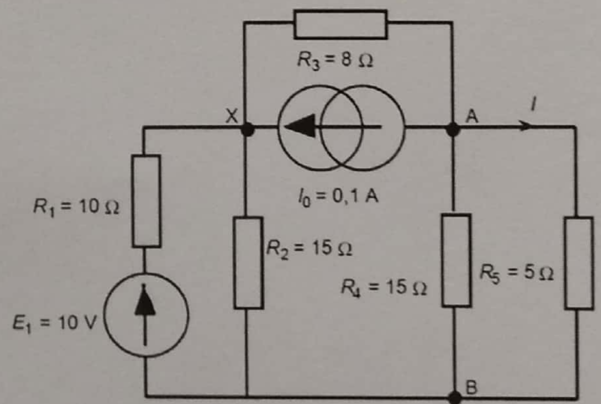
Tout réseau dipolaire comportant des sources de tension, des sources de courant et des résistances, est équivalent à un dipôle élémentaire dit de Norton, constitué d'un générateur de courant parfait I_{NO} placé en parallèle avec une résistance R_{NO}.

Le courant I_{NO} est égal au courant de court-circuit du dipôle (c'est-à-dire le courant circulant entre les bornes du dipôle lorsque l'on court-circuite celles-ci). La résistance R_{NO} est la résistance équivalente du dipôle en supposant que toutes les sources sont éteintes (on a bien $R_{NO}=R_{TH}$).

Théorème de Norton

Application : Utilisation de l'équivalence Thévenin-Norton

En faisant subir plusieurs transformations de type Thévenin-Norton au circuit de la figure ci-dessous, déterminer la valeur du courant *I*.



Théorème de Norton

Aide résolution

Dans ce schéma, nous pouvons considérer que la résistance R_5 est alimentée par le dipôle AB. Il suffit alors de rechercher le générateur de Thévenin équivalent à ce dipôle AB (autrement dit du circuit démuni de sa résistance R_5), ce qui nous permettra de répondre facilement à la question. Plusieurs transformations Thévenin Norton sont nécessaires pour y parvenir.

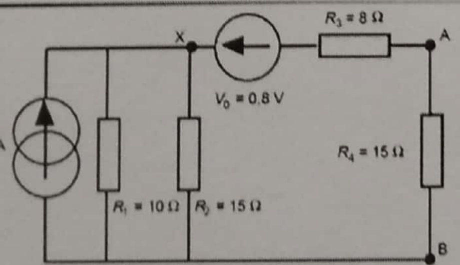
On peut commencer par remplacer le générateur de tension E_1 en série avec la résistance R_1 par un générateur de courant I_1 placé en parallèle avec une résistance R_1 (transformation Thévenin-Norton): $I_1 = \frac{E_1}{R_1} = 1\,\text{A}$

De même, le générateur de courant I_0 placé en parallèle avec la résistance R_3 est équivalent à un générateur parfait de tension E_0 en série avec cette même résistance R_3. Avec :

$E_0 = R_3\, I_0 = 0{,}8$ V

Après ces deux transformations, le dipôle AB se présente comme indiqué sur la figure ci-dessous.

Théorème de Norton

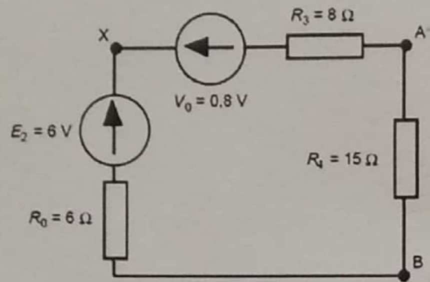


Les résistances R_1 et R_2 placées en parallèle forment une résistance équivalente R_0 telle que : $R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 6\,\Omega$

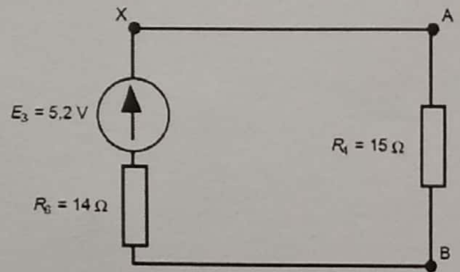
Le générateur de courant I_1 se trouve donc en parallèle avec cette résistance R_0 et est donc équivalent à un générateur de tension E_2 placé en série avec cette résistance R_0 (figure ci-dessous).

On a : $E_2 = R_0 I_1 = 6\ \text{V}$

Théorème de Norton

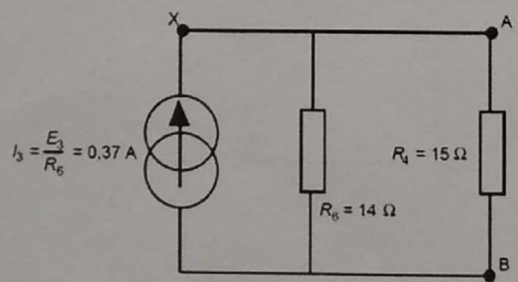


L'association série de R_0, E_2, V_0 et R_3 se simplifie de manière évidente en un générateur de tension E_3 =5,2 V en série avec une résistance $R_6=R_0+R_3$ (figure ci-dessous).



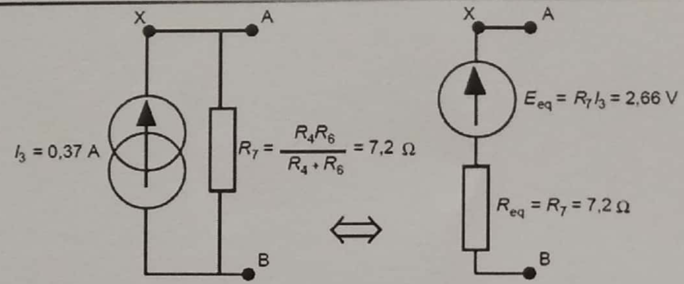
Appliquons encore une fois la transformation Thévenin-Norton (figure ci-dessous).

Théorème de Norton

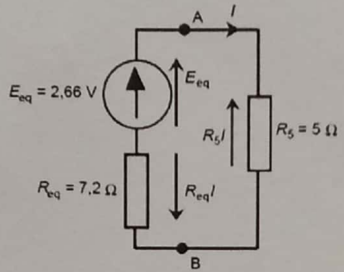


Regroupons pour finir les deux résistances en parallèle et appliquons une dernière fois la transformation Thévenin-Norton (figure ci-après) de manière à obtenir le générateur de Norton équivalent du dipôle AB.

Théorème de Norton



Alimentons la résistance R_5 de notre circuit de départ à l'aide de ce générateur équivalent :



Théorème de Norton

En appliquant la loi des mailles dans l'unique maille du circuit ainsi obtenu, on obtient (en prenant soin de respecter la convention récepteur pour les résistances) :

$$E_{eq} = R_{eq} I + R_5 I$$

D'où l'on tire immédiatement : $I = \dfrac{E_{eq}}{R_{eq} + R_5}$

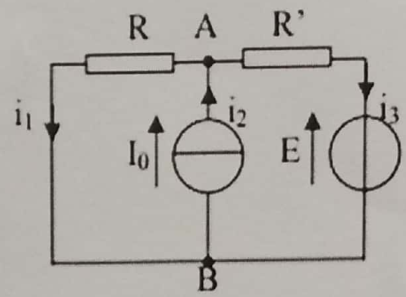
Soit : $I = \dfrac{2{,}66}{7{,}2 + 5} = 0{,}22\ \text{A}$

Cet exercice montre que l'on peut résoudre des cas relativement complexes en ne faisant appel qu'aux théorèmes de Thévenin et de Norton. Cette technique permet d'éviter d'avoir à résoudre des équations multiples et de gagner énormément de temps en transformant pas à pas le circuit initial.

Exercice d'application 1

1. Déterminer les expressions des courants i_1, i_2 et i_3 en utilisant le théorème de Millman
2. Déterminer le courant i_1 par utilisation du :

- théorème de superposition.
- théorème de Thevenin.
- théorème de Norton.
- Les équivalences Thévenin-Norton.

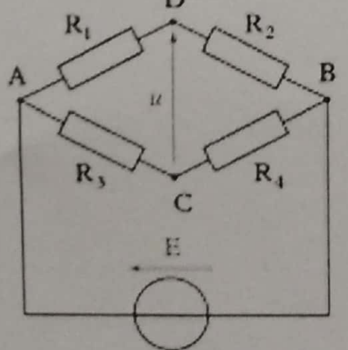


Exercice d'application 2

Un pont de Weahtsone est un montage électrique permettant de déterminer une résistance inconnue.

1) Équilibrage du pont

Le schéma du pont est représenté sur la figure ci-dessous.



La résistance à déterminer est la résistance R_1.

Les résistances R_3 et R_4 sont des résistances fixes connues.

La résistance R_2 est une résistance variable dont on connaît la valeur.

Le pont est équilibré quand la tension u mesurée entre C et D est nulle.

a) Déterminer la tension u en fonction de E et des résistances R_1, R_2, R_3 et R_4.

b) À quelle condition le pont est-il équilibré ? Déterminer alors R_1.

A.N. $R_3 = 100\ \Omega$; $R_4 = 5\ k\Omega$; $R_2 = 1\ 827\ \Omega$;
$E = 6\ V$.