UASZ

Cours d’Electromagnétique

Dr DIEDHIOU

Dr DIEDHIOU

ansoumanediedhiou@gmail.com

Formations

28 Avril 2017	**Docteur en : Mécanique et Énergétique** à l'Université Assane Seck de Ziguinchor (Sénégal) et **Génie de Procédés Industriels et développement durable** à l'Université de Technologie de Compiègne (France)	
2010-2011	**Master 2 en Physique des Matériaux :** Université Assane Seck de Ziguinchor(UASZ)	**Sénégal**
2008-2009	**Licence en Physique** : Université Assane Seck de Ziguinchor (UASZ)	**Sénégal**
2007-2008	**Licence 1 en MPCI :** Université Assane Seck de Ziguinchor (UASZ)	**Sénégal**

Chapitre I : Introduction sur l’électromagnétisme

Chapitre II : Particule chargée dans un champ électrique et magnétique

Chapitre III : Electromagnétisme et induction électromagnétique

Introduction

L'**électromagnétisme**, aussi appelé **interaction électromagnétique**, est la branche de la physique qui étudie les interactions entre particules chargées électriquement, qu'elles soient au repos ou en mouvement, et plus généralement les effets de l'électricité, en utilisant la notion de champ électromagnétique ($\vec{E}, \vec{B}$).

Il est d'ailleurs possible de définir l'électromagnétisme comme l'étude du champ électromagnétique et de son interaction avec les particules chargées. Le terme d'*électromagnétisme* fait référence au fait que les phénomènes électriques et magnétiques ont été vus comme indépendants jusqu'en 1860, quand Maxwell a montré qu'ils n'étaient que deux aspects d'un même ensemble de phénomènes. L'**électromagnétique** est un phénomène physique conduisant à l'apparition d'une force dans un conducteur électrique soumis à un flux de champ **électrostatique magnétique** variable.

Le champ électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ en un point M à la date t dû a une distribution caractérisée dans le référentiel d'étude supposé galiléen (mouvement de tout corps non influencé), par la densité volumique totale de charges ρ_{tot} et le vecteur densité volumique totale de courants j_{tot} satisfait aux équations de formulation locale et les relations intégrales.

Formulation locale		***Les relations intégrales.***
$div\vec{E} = \dfrac{\rho_{tot}}{\varepsilon_0}$ (équation de *Maxwell - Gauss*). ε_0 est la *permittivité absolue du vide*. Les lignes de champ $\vec{E}$ divergent à partir des charges + pour aboutir aux charges -.	①	$\underset{M\in\Sigma}{\oiint} \vec{E}(M)\cdot d\vec{S}_{ext}(M) = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ *théorème de Gauss*.

Les équations de Maxwell sont ***linéaires*** vis-à-vis des sources : cette propriété valide le ***principe de superposition*** relatif à $\vec{\boldsymbol{E}}$ et $\vec{\boldsymbol{B}}$. En particulier, cette linéarité permet d'utiliser ***la méthode complexe*** pour les calculs des champs.

$div\vec{B} = 0$ ($\vec{B}$ est un *champ de rotationnel*). Les lignes de champ $\vec{B}$ sont des courbes fermées et ne peuvent jamais se couper (il n'existe pas de « monopôles magnétiques » comme il existe des charges électriques positives ou négatives.	②	$\oint\!\!\!\oint_{M\in\Sigma} \vec{B}(M)\cdot d\vec{S}_{ext}(M) = 0$ $\vec{B}$ est à *flux conservatif* (Le flux de $\vec{B}$ à travers un circuit ne dépend que du circuit et non de la surface choisie pour calculer ce flux).
$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (équation de *Maxwell - Faraday*).	③	$\oint_{M\in\Gamma} \vec{E}\cdot d\overrightarrow{OM} = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt}$, S s'appuie sur Γ. *Relation de Faraday*.
$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}_{tot} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (équation de *Maxwell - Ampère*). μ_0 est la *perméabilité absolue du vide*.	④	$\oint_{M\in\Gamma} \vec{B}\cdot d\overrightarrow{OM} = \mu_0\iint_{P\in S} \vec{j}_{tot}\cdot d\vec{S} + \varepsilon_0\mu_0\frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt}$ où S s'appuie sur Γ orienté. Forme *généralisée* du *théorème d'Ampère*.

Quelques définitions:

Intensité de courant:

On peut se limiter, pour le moment, à un seul type de porteurs, les électrons par exemple. Sous l'action d'un champ électrique $\vec{E}$, chaque électron acquiert une vitesse. En désignant par $\vec{v}$, la vitesse moyenne de l'ensemble des électrons (on dit aussi vitesse d'entraînement ou de dérive), et par ρ la charge volumique du milieu, on définit le vecteur de courant en tout point du milieu par : $\vec{J} = \rho\vec{v}$

ou encore, puisque $\rho = -$ ne où *n* est le nombre d'électrons par unité de volume et *e* la valeur absolue de la charge de l'électron :

$$\vec{J} = -ne\vec{v}$$

$$\delta q = \rho.dS.v.dt.cos(\theta) = \rho.\overrightarrow{dS}.\vec{v}.dt = \vec{j}.\overrightarrow{dS}.dt$$

$$\frac{dq}{dt} = I = \vec{j}.\overrightarrow{dS}$$

les distributions continues de charge : hypothèse d'une charge macroscopique permettant de définir une charge infinitésimale dq, à laquelle on peut appliquer les formules établies dans le cas d'une charge ponctuelle, avant d'intégrer sur la distribution.

On définit ainsi les densités :

– linéique sur un fil : $\lambda = \frac{dq}{d\ell} \quad [C \cdot m^{-1}]$

– surfacique (ou surperficielle) sur une surface : $\sigma = \frac{dq}{dS} \quad [C \cdot m^{-2}]$

– volumique dans un volume : $\rho = \frac{dq}{d\tau} \quad [C \cdot m^{-3}]$

Charge ponctuelle - distribution discrète de charges

Une charge 'q' est dite ponctuelle si elle est assimilable à un point matériel.
Un ensemble de charges ponctuelles q1, q2, …… ,qn, fixent dans un volume τ est dit distribution discrète de charges.

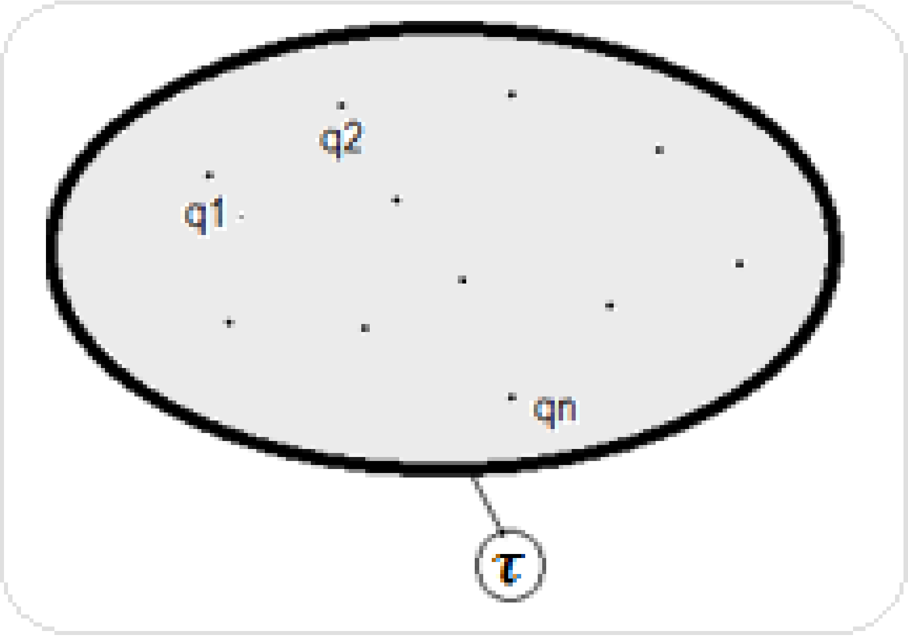


Figure 1.1 : Distribution discrète de charges

On a une distribution continue de charge dans le cas où les charges sont infiniment voisines de sorte qu'on ne peut plus les discerner.

Dans un volume élémentaire $d\tau$ contenant une charge élémentaire dq, nous définissons la densité volumique de charges ρ par : $\rho = \frac{dq}{d\tau}$ (C.m^{-3}).

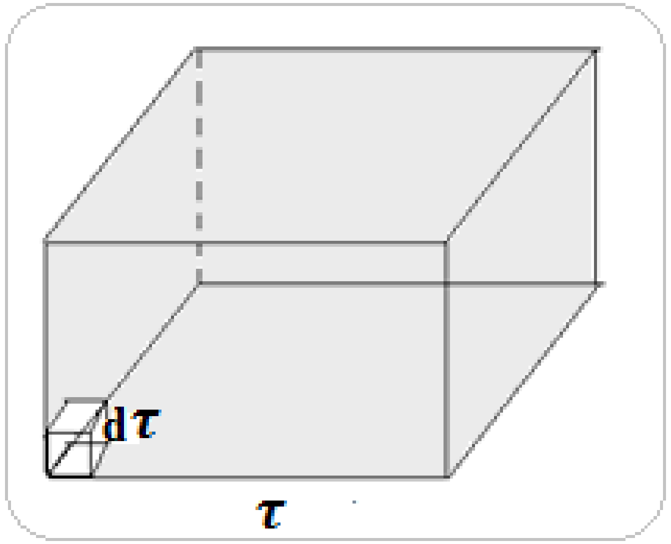


Figure 1.2 : Distribution volumique de charges - Elément de volume

Pour un volume τ donné, lorsque la distribution de charge est uniforme (homogène), alors la densité volumique de charge est constante.

Dans ce cas, on peut écrire : $\rho = \frac{Q}{\tau}$ avec Q la charge totale dans le volume.

En considérant que l'une des dimensions du volume est négligeable devant les deux autres, nous obtenons une distribution surfacique de charge.

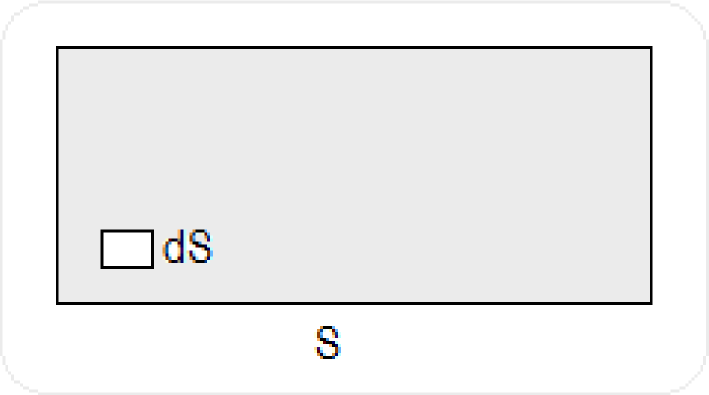


Figure 1.3 : Distribution surfacique de charges - Elément de surface

On définit la densité surfacique de charges σ par le rapport $\sigma = \frac{dq}{ds}$ (en $C.m^{-2}$), avec dS une surface élémentaire prise dans une surface chargée S.

En considérant que les deux dimensions du volume sont négligeables devant l'une, nous obtenons une distribution linéique de charge.

On définit la densité linéique de charges λ par le rapport $\lambda = \frac{dq}{dl}$ (en $C.m^{-1}$), avec dl une longueur élémentaire prise sur la longueur chargée L.

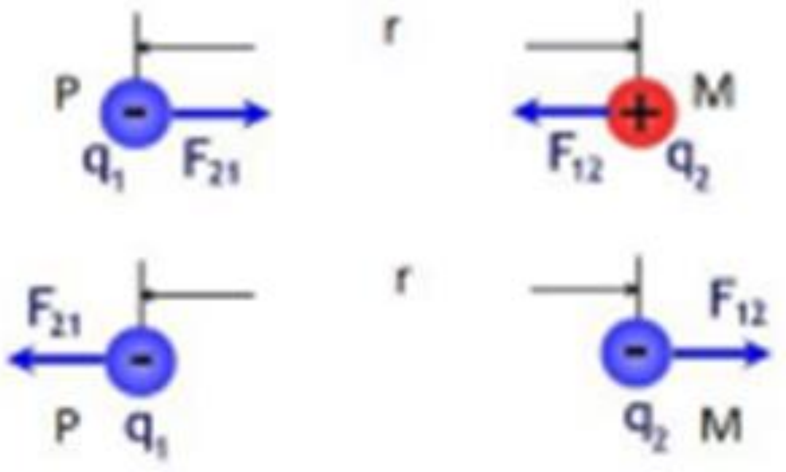
Lorsque la distribution de charge est uniforme (homogène), alors la densité linéique de charge est constante.

Dans ce cas, on peut écrire : $\rho = \frac{Q}{L}$ **avec Q, la charge totale dans la surface L.**

Figure 1.4 : Distribution linéique de charge - Elément de longueur

Loi de coulomb

Deux corps chargés s’attirent ou se repoussent. On appelle, forces électrostatiques ou forces colombiennes les forces d’interaction entre deux corps électrisés. Un corps électrisé peut porter soit une charge positive ou négative. Dans ce cas, on considère que la force électrostatique d’interaction selon la loi de Coulomb par :



$$\vec{F}_{11} = -\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} q_1 q_2 \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Avec K la constante de coulomb et K = $1/4\pi\varepsilon_0 \approx 9.10^9$ SI ; $\varepsilon_0 = 8.84.10^{-12}$ $F.m^{-1}$ étant la permittivité diélectrique du vide.

Où r représente la distance séparant les deux charges alors que la permittivité du vide est donnée par :

Le champ électrique

Soit une charge ponctuelle q qui, placée en un point P de l'espace, subit une force électrostatique proportionnelle à la charge. Cette force traduit l'existence d'un champ électrostatique en ce point défini par la relation :

$$\vec{F} = q\,\vec{E}$$

Tenant compte de la loi de Coulomb, le champ électrique créé par la charge q, dans une direction donnée par le vecteur unitaire $\vec{u}$ et à une distance r, est alors défini par:

$$\boxed{\vec{E}_q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\,\vec{u}}$$

Champ et potentiel électrostatique

La présence d'une charge ponctuelle q au point O de l'espace permet de définir deux propriétés physiques en un pont M situé au environ de O :

Une propriété vectorielle qui est le champ électrostatique défini par $\overrightarrow{E_M} = \frac{\overrightarrow{F_{O/M}}}{q_0}$ avec q_0 une charge test placée au point O.

On aura ainsi $\overrightarrow{E(M)} = K.\frac{q}{OM^2}.\frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$; E en $N.C^{-1}$ ou en $V.m^{-1}$

Une propriété scalaire qui est le potentiel électrostatique, défini à une constante près par :

$V(M) = K.\frac{q}{OM}$ V en volt

Relation entre les deux propriétés :

Le potentiel étant un travail par unité de charge, on a :

$$dV = -\vec{E}\,\overrightarrow{dM}$$

$$dV = -\vec{E}\,\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{-E}\,\overrightarrow{dr} \quad \text{donne} \quad V = \int -\vec{E}\,\overrightarrow{dr}$$

On a $E = -\dfrac{dV}{dr}$ **et de façon générale on a**

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$$ **(quelle que soit les coordonnées)**

Gradient, symbolisé par grad, est un opérateur de dérivation.

Par exemple en coordonnées cartésiennes, on a

$$\overrightarrow{grad} = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

Champ et potentiel créés par une distribution continue de charges

Pour retrouver les expressions du champ et du potentiel créés par une distribution continue de charge, nous partons du champ élémentaire créé par un élément (de longueur, de surface ou de volume), possédant une charge élémentaire considérée comme une charge ponctuelle, centrée en un point P.

Ainsi pour cet élément de charge, on peut écrire :

$$\overrightarrow{dE}(M) = \mathrm{K}.\frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{PM}^2}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM} \quad \text{et} \quad \mathrm{dV} = \mathrm{K}.\frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{PM}}$$

pour une distribution linéique de charge, on a $dq = \lambda.dl$

d'où

$$\overrightarrow{dE}(M) = \mathrm{K}.\frac{\lambda \mathrm{dl}}{\mathrm{PM}^2}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM} \quad \text{et} \quad \mathrm{dV(M)} = \mathrm{K}.\frac{\lambda \mathrm{dl}}{\mathrm{PM}}$$

Pour obtenir le champ total, ou le potentiel total, il faut intégrer sur toute la longueur.

$$\vec{E}(M) = \int_{P\epsilon L} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\vec{u} = \int_{P\epsilon L} \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$$

$$V(M) = \int_{P\epsilon L} \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 PM}$$

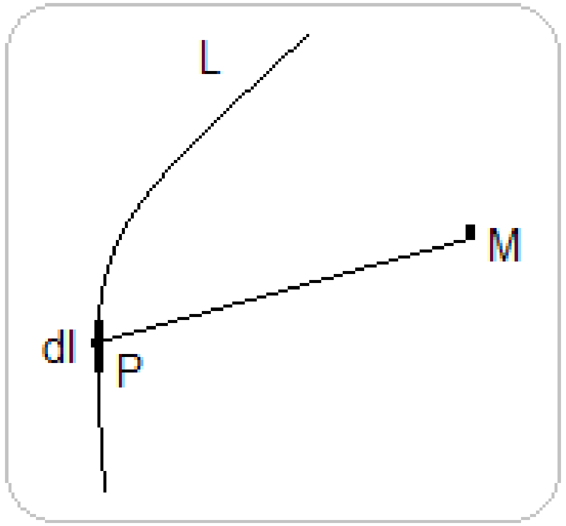


Figure 1.6 : Repérage d'un point M par rapport à un élément de longueur

Pour une distribution surfacique de charge, on a $dq = \sigma ds$, d'où

$$\overrightarrow{dE}(M) = K.\frac{\sigma dS}{PM^2}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM} \quad ; \quad dV = K.\frac{\sigma dS}{PM}$$

Pour obtenir le champ total, ou le potentiel total, il faut intégrer sur toute la surface.

$$\vec{E}(M) = \iint_{P\epsilon S}\frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$$

$$V(M) = \iint_{P\epsilon S}\frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 PM}$$

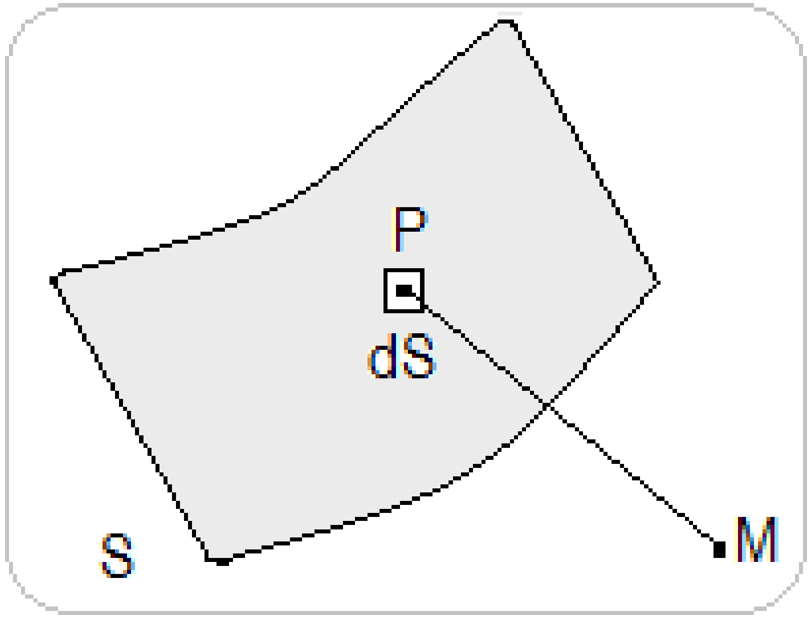


Figure 1.7 : Repérage d'un point M par rapport à un élément de surface

Pour une distribution volumique de charge, on a dq = ρdτ,

d'où

$$\overrightarrow{dE}(M) = K.\frac{\rho d\tau}{PM^2}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM} \quad ; \quad dV = K.\frac{\rho d\tau}{PM}$$

Pour obtenir le champ total, ou le potentiel total, il faut intégrer sur toute la surface.

$$\vec{E}(M) = \iiint_{P\epsilon\tau} \frac{\rho d\tau}{4\pi\varepsilon_0 PM^2} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$$

$$V(M) = \iiint_{P\epsilon\tau} \frac{\rho d\tau}{4\pi\varepsilon_0 PM}$$

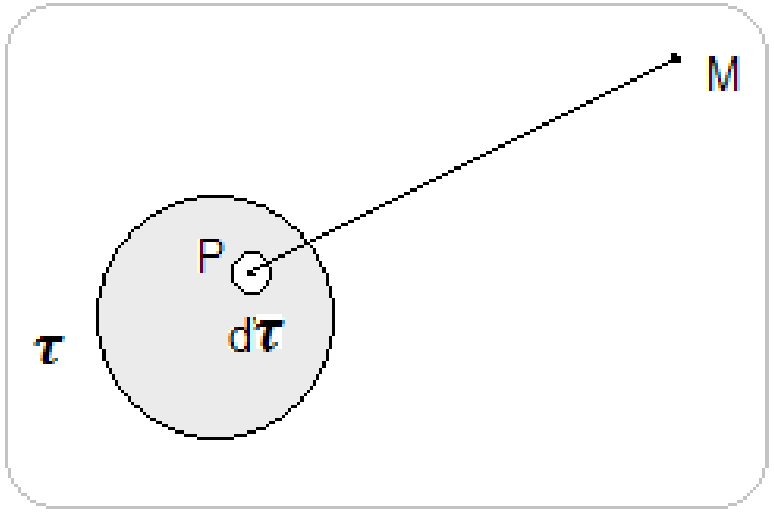


Figure 1.8 : *Repérage d'un point M par rapport à un élément de volume*

Invariance et symétrie

- **Invariance par translation** :

Si (S) est invariant dans toute translation parallèle à un axe (Oz), les effets sont indépendants de z.

- **Invariance par rotation autour d'un axe:**

si (S) est invariant par rotation Θ autour de d'un axe z, alors ses effets exprimés en coordonnées cylindriques (ρ, Θ, z) ne dépendent pas de Θ.

- **Symétrie cylindrique :**

Si (S) est invariant par translation le long de l'axe Oz et rotation autour de l'axe z, alors ses effets exprimés en coordonnées cylindrique ne dépendent que de ρ (indépendant de Θ et z).

- **Symétrie sphérique :**

si (S) est invariant dans toute rotation autour d'un point O, alors ses effets, exprimés en coordonnées sphériques (r, Θ, φ), ne dépendent que de r (indépendant de Θ et φ)., z) ne dépendent pas de Θ.

• **Plan de symétrie (π) :**

si (S) admet un plan de symétrie, alors en tout point de ce plan, les effets à caractère vectoriel sont contenus dans le plan et les effets à caractère pseudo vectoriel sont perpendiculaires au plan.

• **Plan d'antisymétrie (π') :**

si par symétrie par rapport à un plan π', (S) est transformé en son opposé, alors en tout point de ce plan, les effets à caractère vectoriel (exemple : le vecteur champ électrique) est perpendiculaire au plan et les effets à caractère pseudo-vectoriel (exemple : le champ magnétique) sont dans le plan

NB: Les invariances vont nous permettre d'éliminer des coordonnées dont dépendent le champ ou le potentiel par exemple.

Les plans de symétrie ou d'antisymétrie vont nous permettre d'éliminer des composantes du champ ou potentiel par exemple

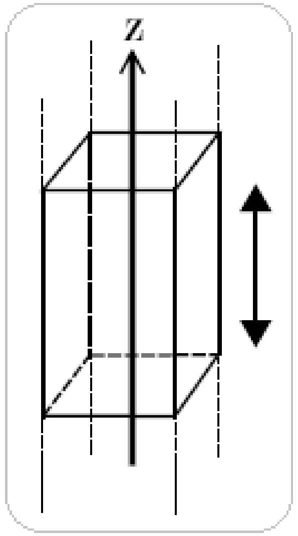


Figure 1.9.a : illustration d'une invariance par translation suivant z

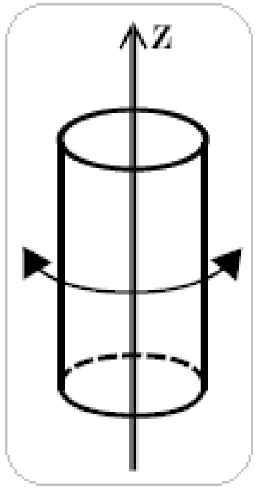


Figure 1.9.b : illustration d'une invariance par rotation autour de l'axe z

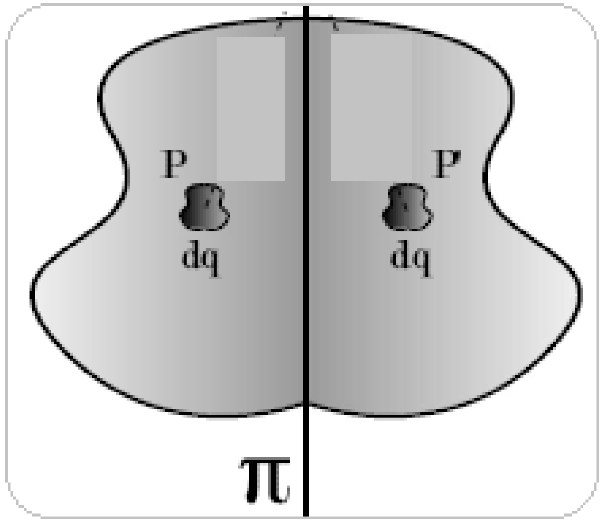


Figure 1.9.c : illustration d'une distribution de charge symétrique

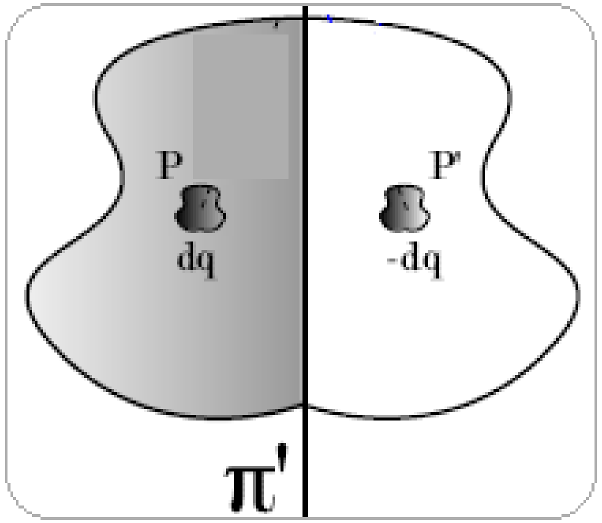
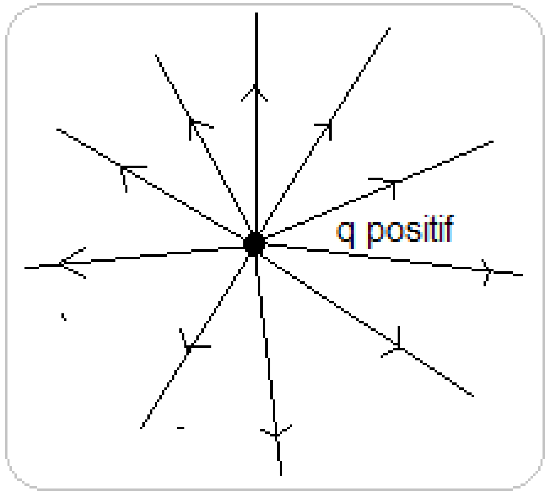
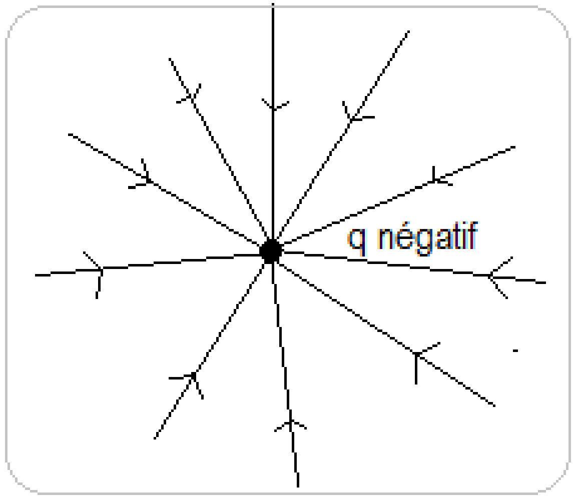


Figure 1.9.d : illustration d'une distribution de charge antisymétrique

Les lignes de champ sont des courbes tangentes en chaque point au champ $\vec{E}$. Elles sont centrifuges ou centripète suivant le signe de la charge (centrifuge si q positive, centripète si q négative).



a



b

c

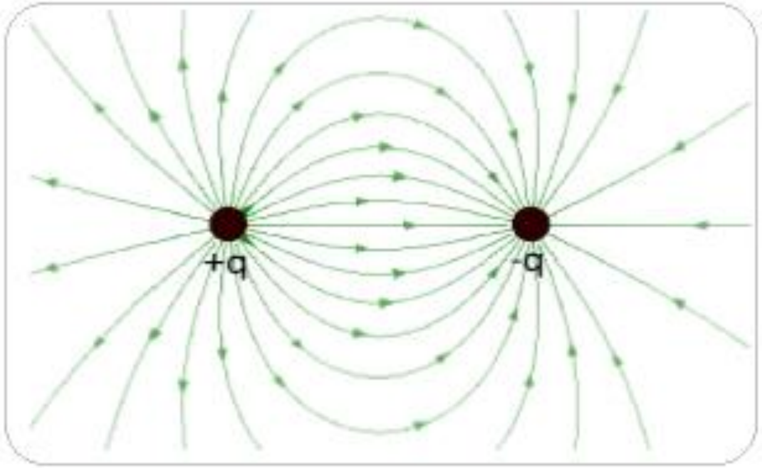
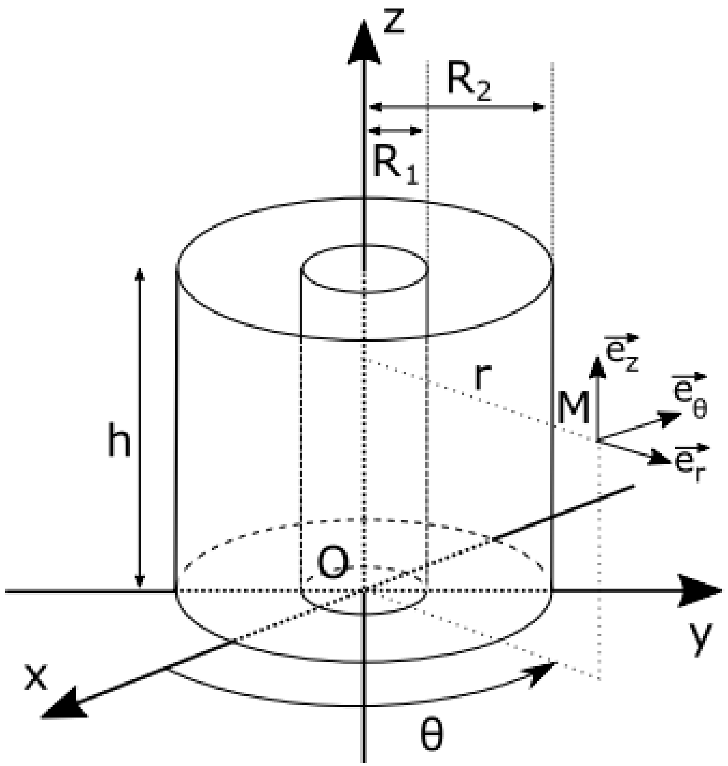


Figure 1.10 : Lignes de champ :
(a) charge ponctuelle positive,
(b) charge ponctuelle négative,
(c) dipole

Exemple d'un condensateur cylindrique

$$\vec{E}(r,\theta,z) = \left| \begin{array}{l} E_r(r,\theta,z) \\ E_\theta(r,\theta,z) \\ E_z(r,\theta,z) \end{array} \right.$$



- **Étude des invariances :**
  - La distribution de charge est invariante par translation selon $\vec{e_z}$.
  - La distribution de charge est invariante par rotation d'angle θ et d'axe $(O, \vec{e_z})$.

$$\Rightarrow \vec{E}(r,\theta,z) = \vec{E}(r)$$

- **Étude des symétries :**
  - Le plan $(M, \vec{e_r}), \vec{e_\theta}$ est plan de symétrie de la distribution de charge $\Rightarrow E_z = 0$
  - Le plan $(M, \vec{e_r}), \vec{e_z}$ est plan de symétrie de la distribution de charge $\Rightarrow E_\theta = 0$

$$\Rightarrow \vec{E}(r,\theta,z) = E_r(r,\theta,z)\vec{e_r}$$

Finalement :

$$\boxed{\vec{E}(r,\theta,z) = E_r(r)\ \vec{e_r} = E(r)\ \vec{e_r}}$$

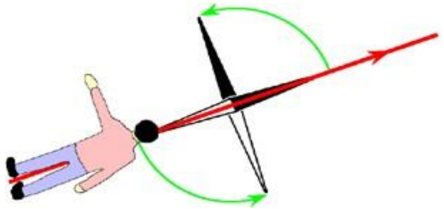
Champ magnétique

Sources de l’interaction magnétique

a) Les aimants:

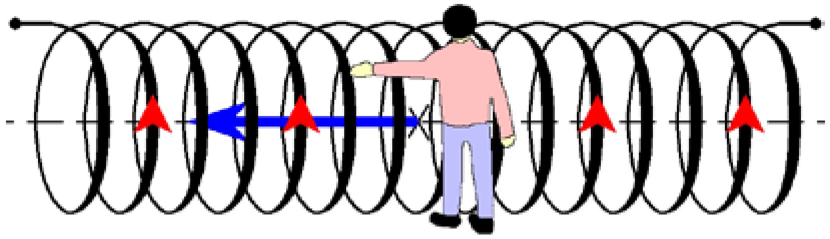
Les aimants sont des sources permanentes de champ magnétique. Ils sont constitués d'alliages à base de fer ou de certains oxydes de fer de cobalt ou de nickel. Les formes des aimants sont liées à leur utilisation. L'action magnétique exercée par un aimant est plus importante au niveau de certaines régions appelées pôles de l'aimant.

Les pôles d'un aimant ne sont pas séparables : il n'existe pas de monopôle magnétique: la plus petite entité magnétique est le dipôle magnétique (association d'un pôle Nord et d'un pôle Sud).



b) Les courants:

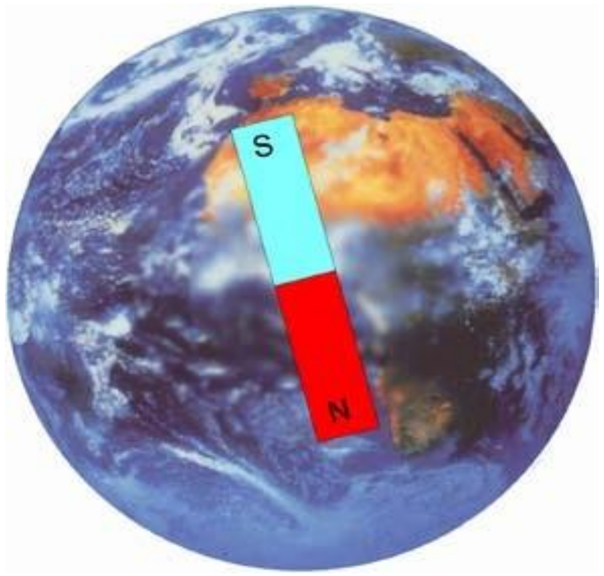
Plaçons une aiguille aimantée au dessous d'un fil conducteur rectiligne de telle façon que cette aiguille soit parallèle au fil lorsque aucun courant ne le parcourt. Lorsqu'un courant électrique circule, l'aiguille tend à s'orienter perpendiculairement au conducteur. Un conducteur parcouru par un courant électrique crée un champ magnétique en son voisinage. Le sens du champ dépend du sens du courant. **Règle du bonhomme d'Ampère :** Un observateur, disposé le long du conducteur de façon que le courant électrique circule de ses pieds vers sa tête, et regardant vers un point M, voit en M le champ magnétique $\vec{B}$ orienté vers sa gauche.



c) La terre:

La terre et pratiquement tous les astres actifs (dont le noyau est en fusion) sont source de champ magnétique. Le "vent solaire", qui est constitué de particules chargées éjectées à très grande vitesse par le Soleil, modifie la topographie du champ magnétique terrestre.

Remarque : Les lignes de champ "sortent du pôle Nord magnétique terrestre qui constitue donc un pôle "sud" du point de vue du magnétisme !!



Unité et mesure du champ magnétique :

a) Unité légale :

Dans le système international (S.I.) l'unité légale fondamentale de mesure du champ magnétique est le tesla (symbole T),

b) Le tesla-mètre :

Nous étudierons le principe de fonctionnement de la sonde à effet Hall dans la suite. La sonde elle-même est constituée d'un petit parallélépipède formé d'un semi-conducteur parcouru par un courant. Lorsque la sonde est "plongée" dans un champ magnétique, il apparaît entre deux de ces faces une faible tension qui est mesurée par un millivoltmètre. Le millivoltmètre est gradué directement en teslas. L'ensemble formé de la sonde et du millivoltmètre constitue un tesla-mètre.

c) Ordre de grandeur :

-La composante horizontale du champ magnétique terrestre vaut $B_H \approx 2.10^{-5}$ T.

-Un aimant permanent produit un champ magnétique de 0,01 T à 0,1 T.

-Une bobine de 1000 spires sur 10 cm parcourue par un courant de quelques ampères produit en son centre un champ magnétique $B_{centre} \approx 0{,}1$T.

-Un électroaimant de même type peut donner un champ de quelques teslas.

-Le champ produit par un électroaimant est limité par l'effet Joule. A très basse température (quelques K) certains métaux ou alliages deviennent supraconducteurs. Grâce à la supraconductivité on peut produire des champs magnétiques intenses (10 à 100 T). Par champ "pulsé" on obtient des valeurs de 1000 T.

Action sur un courant, force de Laplace :

a) Expérience de Laplace :

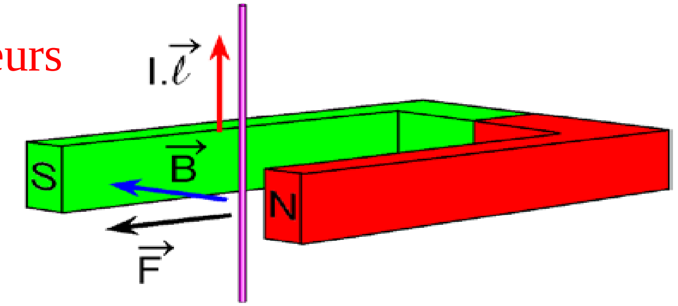
On peut mettre en évidence l'action d'un champ magnétique sur un fil conducteur parcouru par un courant par l'expérience de Laplace : Le champ magnétique est généré par à un aimant en U et a pour sens d'avant en arrière de la figure. Quand le courant circule de bas en haut dans le conducteur, celui-ci est dévié vers la gauche, la force de Laplace s'exerce donc vers la gauche. Lorsqu'on inverse le sens du courant, la force de Laplace s'inverse. Lorsqu'on inverse le sens du champ magnétique, la force de Laplace s'inverse

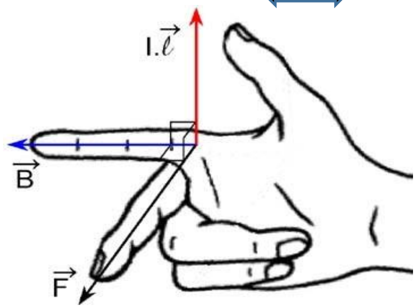
Soit un circuit filiforme parcouru par une intensité I. Les porteurs de charges de ce circuit subissent la force exprimée au paragraphe précédent soit, compte tenu de la distribution linéique de charges envisagée ici :

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \wedge \vec{B}$$

On justifiera à partir de l'effet Hall que cette force subie par les porteurs de charges d'un circuit filiforme se transmet à l'élément de circuit. Cette force dite force de Laplace : $d\vec{F} = Id\vec{l} \wedge \vec{B}$
Permet d'expliquer l'expérience du même nom. Une barre constituant un élément du circuit est parcourue par un courant d'intensité I. La présence d'un champ magnétique conduit à l'existence d'une force

- la direction est orthogonale au plan défini par les vecteurs $I\vec{l}$ et $\vec{B}$,
- le sens est défini par la règle des trois doigts de la main droite :
- la mesure est donnée par : F





perpendiculaire à la barre, expliquant le mouvement de cette dernière.

b) Intensité du champ magnétique :

Nous prendrons l'intensité de la force de Laplace pour définir l'intensité d'un champ magnétique : $\mathbf{B} = \frac{F}{l*I}$

En effet, la mesure de la force exercée sur un élément de circuit plongé dans un champ magnétique, permet de déterminer l'intensité de ce champ magnétique.
C'est sur ce principe que sont conçus la plupart des instruments de mesure du champ magnétique :

balance de Cotton

sonde à effet Hall ...

Définition légale de l'Ampère:

Elle est basée sur l'interaction entre deux fils conducteurs infinis et parallèles. D'après le calcul effectué plus haut, le fil 1 crée un champ magnétique : $\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\vec{u}_\theta$

En notant r la distance du point M au fil rectiligne et en utilisant les coordonnées cylindriques.

Une longueur l du fil 2 subit donc une force magnétique :

$$\vec{F}_{1\to 2} = I_2 l\vec{u}_z \wedge \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{d}\vec{u}_\theta = -\frac{\mu_0}{2\pi}I_1 I_2 \frac{l}{d}\vec{u}_r$$

L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs rectilignes, infinis, parallèles, de section circulaire négligeable et distants de 1 m produit une force d'interaction entre ces deux conducteurs égale à 2.10^{-7} N par mètre de conducteurs.

On fixe en même temps la constante μ_0 ou valeur de la perméabilité du vide à $4\pi 10^{-7} H.m^{-1}$

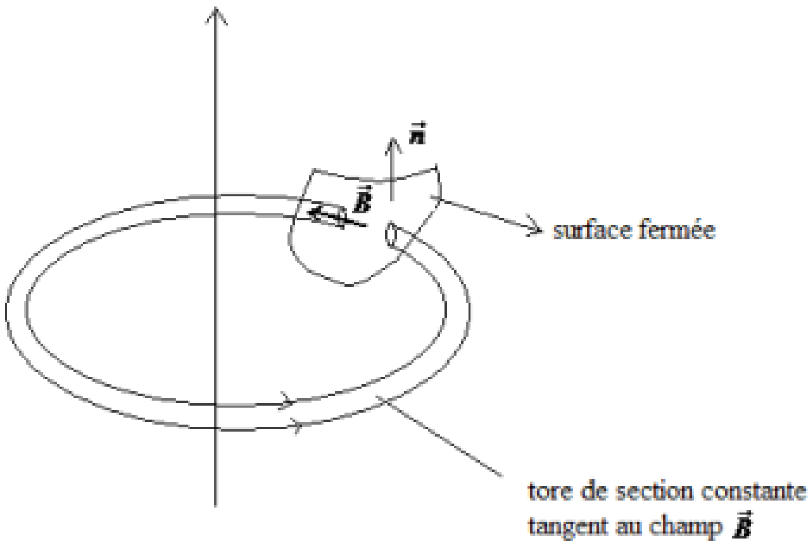
Propriétés du champ magnétique

A- conservation du flux

On a établi précédemment à partir de la loi de Biot et Savart que le champ magnétique créé par un fil pouvait s'écrire en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta$$

Soit un tore de section S constante centré sur l’axe du fil parcouru par un courant. Le flux du champ magnétique à travers toute section du tore est le même: le champ est colinéaire au vecteur surface orienté et la valeur du champ ne dépend que de la distance au fil qui est constante.



Le tore intercepte une surface fermée un nombre pair de fois, le flux étant alternativement entrant et sortant. Les contributions au flux sur la surface fermée sont donc opposées et au total s’annulent.

Pour décrire la totalité d’une surface fermée, il suffit de faire la même chose avec d’autres tores.

Le flux du champ magnétique créé par un fil infini à travers une surface fermée est donc nul.

Cas d'un élément de courant :

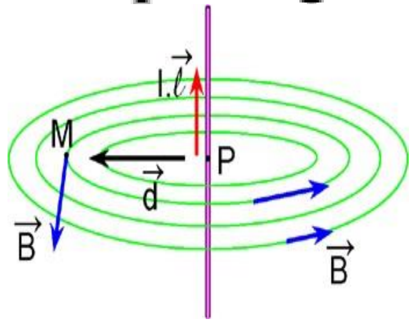
Soit un élément de courant $I\overrightarrow{dl} = Idl\vec{u}_z$ situé à l'origine O.

On a les mêmes propriétés de symétrie que pour le cas du fil rectiligne du paragraphe précédent. Il crée en $M(r,\theta,z)$ le champ magnétique élémentaire

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\vec{u}_z \wedge \left(r\vec{u}_r - z\vec{u}_z\right)}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi}\frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}}\vec{u}_\theta$$

On prend un tore identique à celui du paragraphe précédent et le flux du champ magnétique élémentaire sera le même à travers toute section du tore.

On obtient donc le même résultat au final: le flux du champ magnétique élémentaire à travers une surface fermée est nul.



Généralisation

D'après la loi de Biot et Savart, le champ magnétique dans le cas général résulte de la superposition des champs élémentaires :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in D} I\, d\vec{l}_P \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

En notant D la distribution.

Le calcul du flux à travers une surface orientée est une opération linéaire :

$$\Phi = \iint_{M \in S} \vec{B}(M).d\vec{S}_M = \iint_{M \in S} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in D} I\, d\vec{l}_P \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \right).d\vec{S}_M$$

$$= \iint_{M \in S} \int_{P \in D} d\vec{B}_P.d\vec{S}_M = \int_{P \in D} \iint_{M \in S} d\vec{B}_B(M).d\vec{S}_M = 0$$

Car P et M sont indépendants l'un de l'autre, on peut donc intervertir l'ordre des intégrales. On intègre sur la distribution des contributions de flux élémentaires nulles d'après le paragraphe précédent.

Le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée est nul. On dit que le champ magnétique est à flux conservatif.

On a établi que le champ créé par un fil rectiligne infini s'exprime en coordonnées cylindriques par :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta$$

Le calcul de la circulation du champ magnétique le long d'un contour C donne en coordonnées cylindriques :

$$\oint_{M\in C}\vec{B}(M).d\overrightarrow{OM} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta.\left(dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z\right) = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi}d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint_C d\theta$$

On doit distinguer le cas où le contour C encercle le fil rectiligne infini et le cas où il ne l'encercle pas :

Enonce du théorème d'Ampère :

Ce résultat se généralise à toute distribution de courants par le théorème d' Ampère.

La circulation du champ magnétique le long d' un contour fermé C est égale au produit de μ_0 par l' intensité totale qui traverse une surface quelconque s' appuyant sur C: $\oint_{M \in C} \vec{B}(M).d\overrightarrow{OM} = \mu_0 I_{enlacé}$

Sur l' exemple de la figure ci-contre,

$I_{enlacé} = i_1 + i_2 - i_3 + i_4 - i_4 = i_1 + i_2 - i_3$

Ce résultat est admis ici et sera établi à partir des équations de Maxwell.