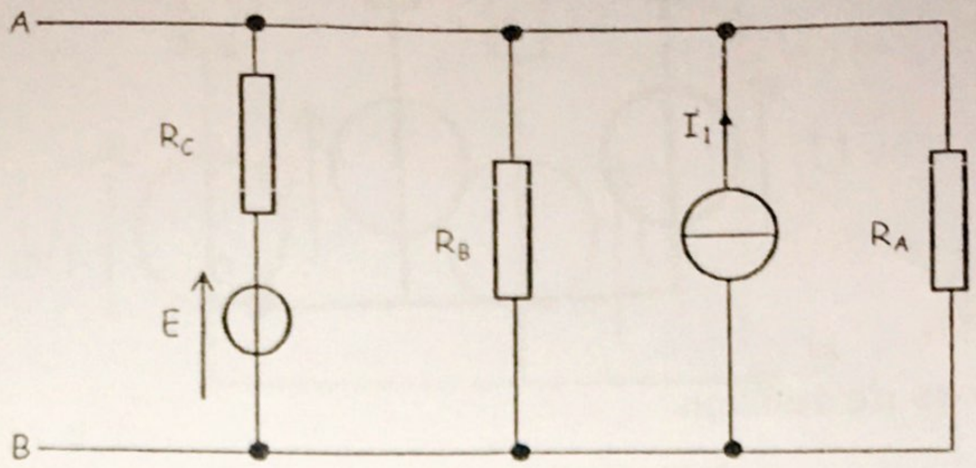
deux applications ...

II

TD N°4

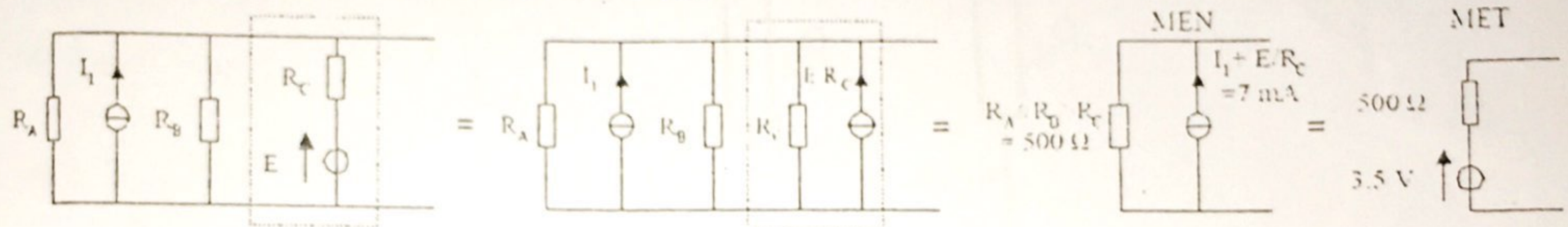
Exercice 1 : MET et MEN

Déterminer les modèles de Thévenin et de Norton du circuit suivant :



On donne : $E = 12$ V, $I_1 = 3$ mA, $R_A = 1{,}5$ kΩ, $R_B = 1$ kΩ et $R_C = 3$ kΩ.

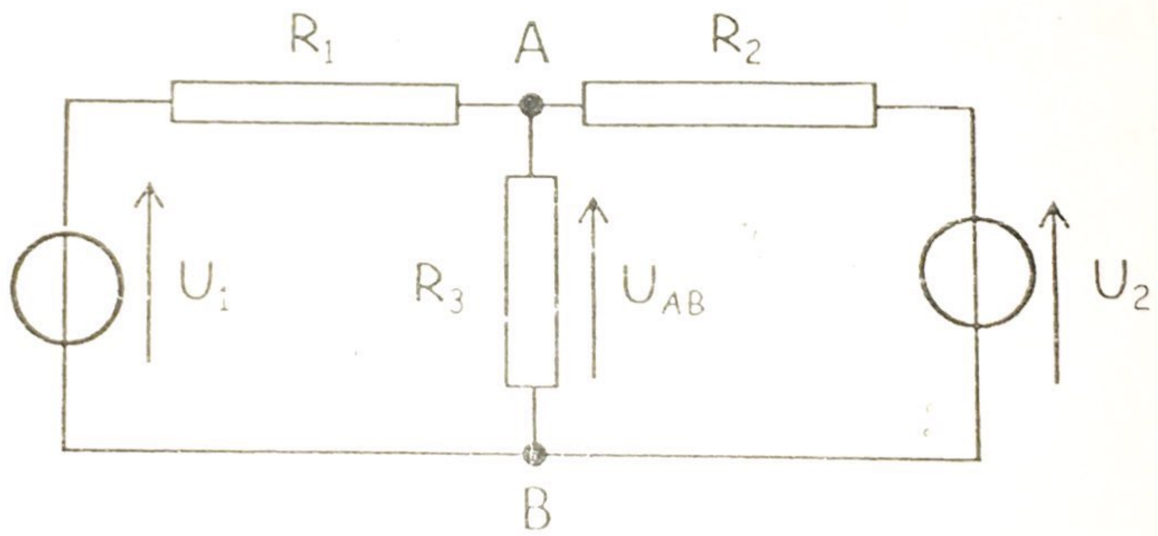
Correction Exercice 1 : MET et MEN



Exercice 2 : Théorème de Thévenin et de Norton

Quelle est la tension U_{AB} aux bornes de la résistance R_3.

On donne : $R_1=R_2=R_3=100\ \Omega$; $U_1 = U_2 = 30V$.

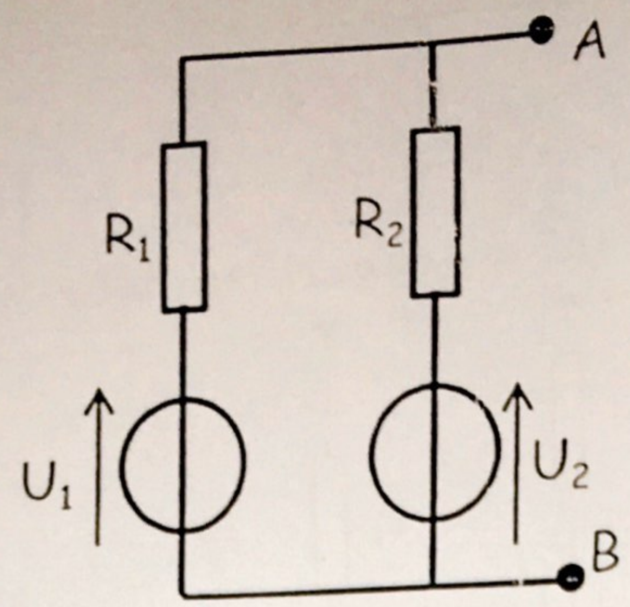


PS : Reprendre l'exercice chez-vous en changeant le sens de la source U_2.

Correction Exercice 2 : Théorème de Thévenin et de Norton

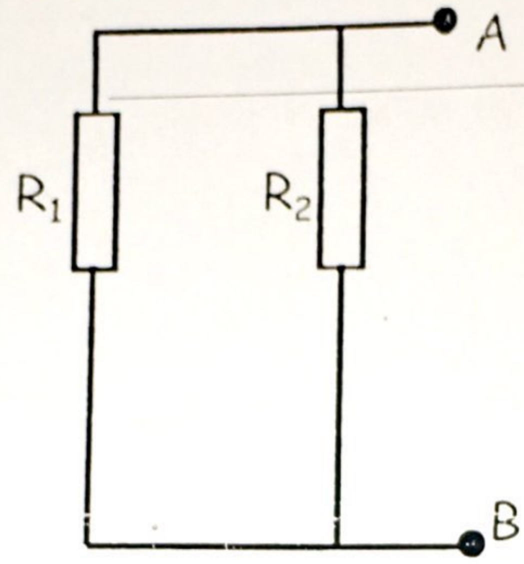
1) Théorème de Thévenin

Déconnectons la charge



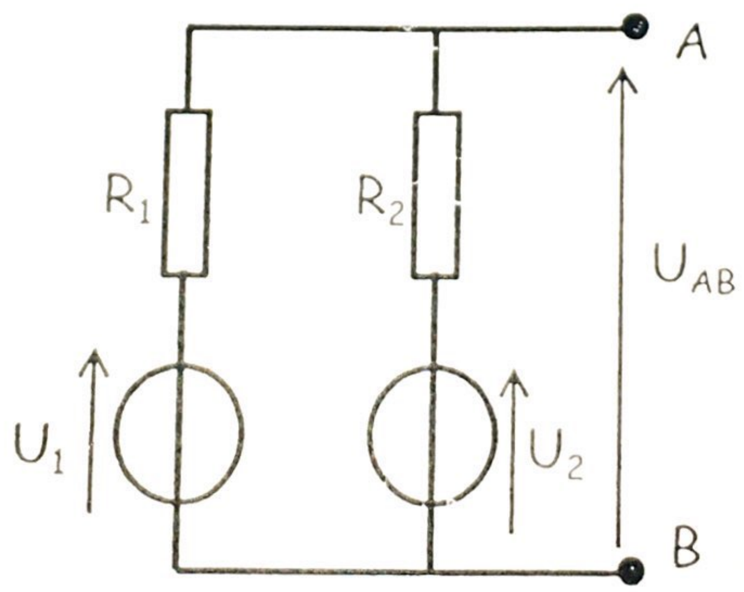
- Calcul de RTh

Eteignons les sources de tension



$R_{Th} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}$; A.N : $R_{Th} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{100 \times 100}{100 + 100} = 50\Omega$

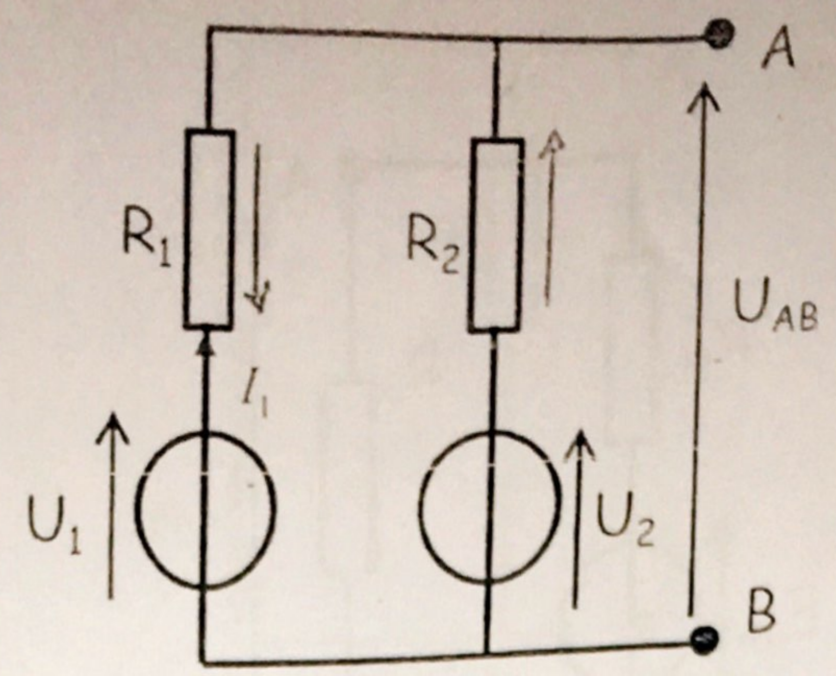
- Calcul de E_{Th}



Les deux sources ont la même f.e.m ; ce qui conduit a deux valeurs différentes de E_{Th}.

E_{Th1} : on fait l'hypothèse que $U_1 > U_2$ ce qui fait que le seul courant circulant dans la maille (puisqu'on est à vide) est le courant imposé par U_1)

Scanné avec CamScanner



$U_{AB} = U_1 - R_1 I_1 = U_2 + R_2 I_1$

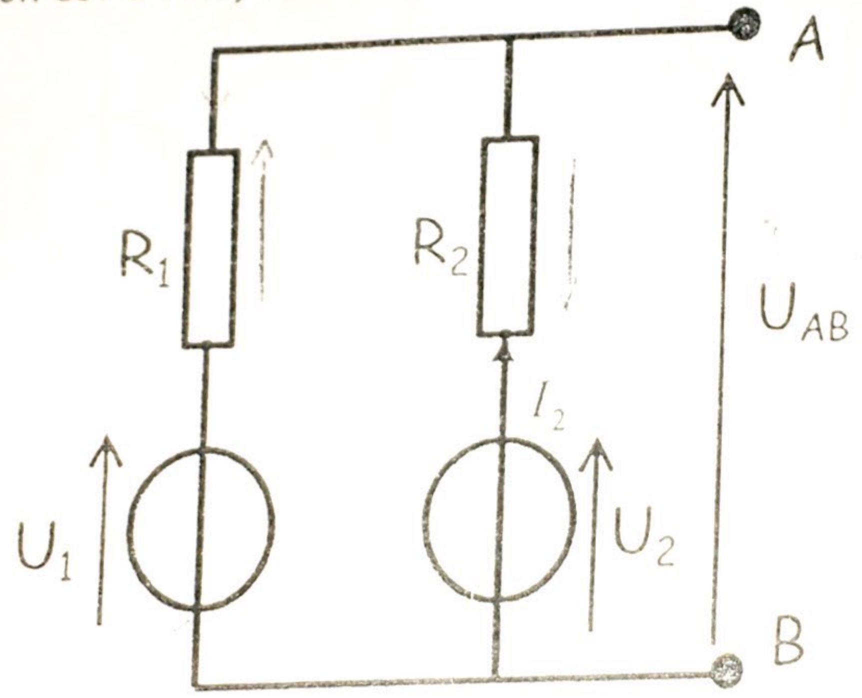
On obtient ainsi I_1 : $I_1 = \dfrac{U_1 - U_2}{R_1 + R_2}$

D'où $E_{Th1} = U_{AB} = U_1 - R_1 \times \dfrac{U_1 - U_2}{R_1 + R_2}$

A.N : $E_{Th1} = U_1 - R_1 \times \dfrac{U_1 - U_2}{R_1 + R_2} = 30 - 100 \times \dfrac{30 - 30}{100 + 100} = 30V$

E_{Th1}=30V

E_{Th2} : on fait l'hypothèse que $U_2 > U_1$ ce qui fait que le seul courant circulant dans la maille (puisqu'on est à vide) est le courant imposé par U_2).



$U_{AB} = U_2 - R_2 I_2 = U_1 + R_1 I_2$

On obtient ainsi I_2 : $I_2 = \dfrac{U_2 - U_1}{R_1 + R_2}$

D'où $E_{Th1} = U_{AB} = U_2 - R_2 \times \dfrac{U_2 - U_1}{R_1 + R_2}$

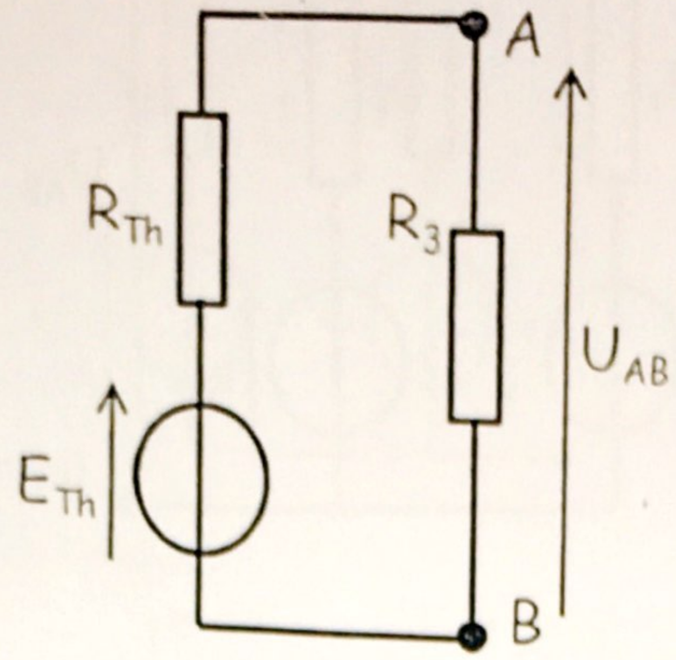
A.N : $E_{Th1} = U_2 - R_2 \times \dfrac{U_2 - U_1}{R_1 + R_2} = 30 - 100 \times \dfrac{30 - 30}{100 + 100} = 30V$

E_{Th2}=30V

Scanné avec CamScanner

- **Calcul de U_{AB}**

On rebranche la charge



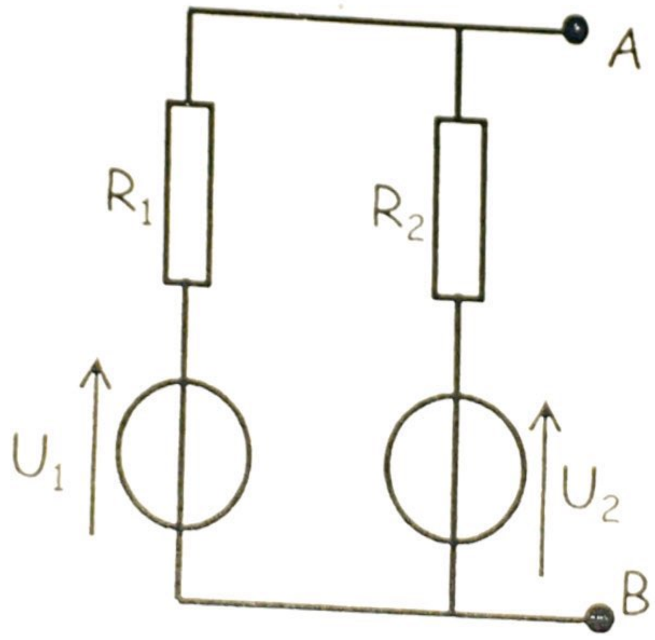
Le diviseur de tension donne : $\frac{U_{AB}}{R_3} = \frac{E_{Th1}}{R_{Th} + R_3} \Rightarrow U_{AB} = \frac{R_3}{R_{Th} + R_3} E_{Th1}$

A.N : $U_{AB} = \frac{R_3}{R_{Th} + R_3} E_{Th1} = \frac{100}{50+100} \times 30 = 20V$

On trouve aussi la même chose avec E_{Th2} car $E_{Th1}=E_{Th2}$

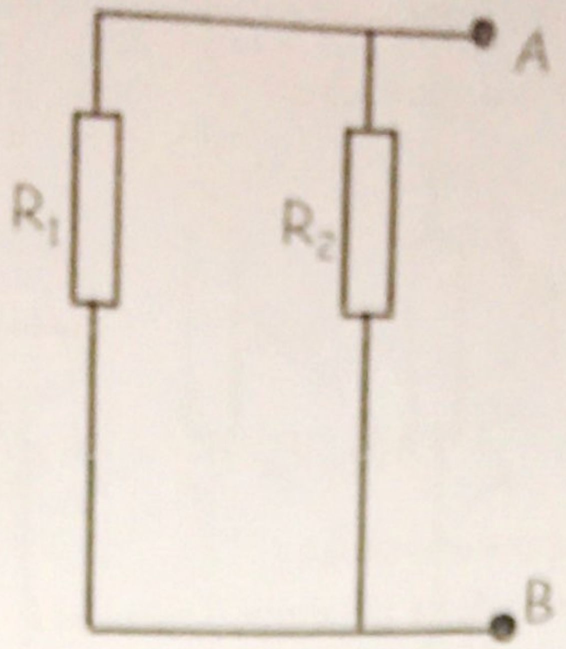
2) **Théorème de Norton**

Déconnectons la charge



- **Calcul de R_N**

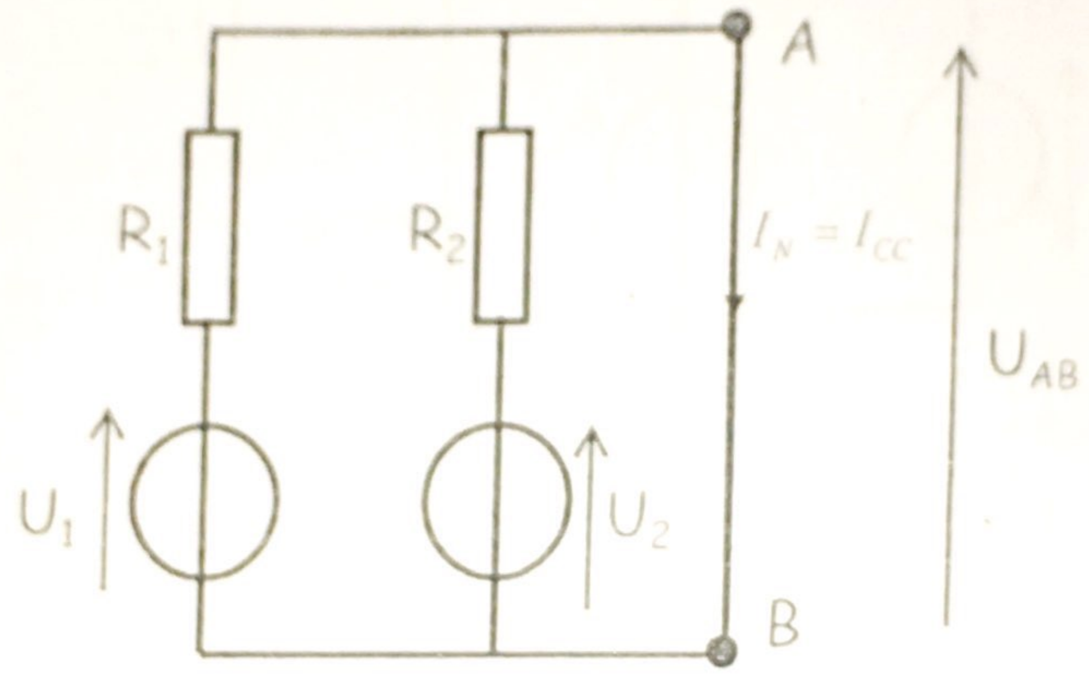
Eteignons les sources de tension



$R_N = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}$; A.N : $R_N = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{100 \times 100}{100 + 100} = 50\Omega$

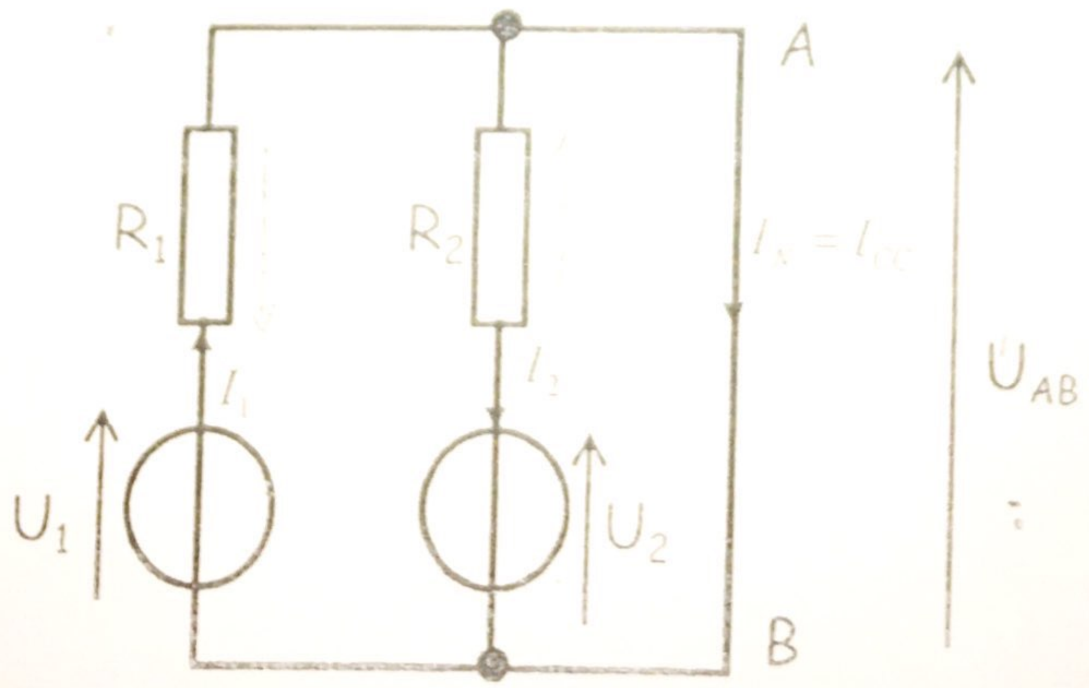
- **Calcul de I_N**

Il suffit de court-circuiter la charge en la remplaçant par un fil !



Remarque : Or U_1=U_2 fait que nous avons ici deux générateurs ; on aura donc deux solutions !

Première solution (I_{N1}): supposons U_1>U_2 !



Scanné avec CamScanner

Au nœud A on a : $I_1 = I_2 + I_{N1} \Rightarrow I_{N1} = I_1 - I_2$

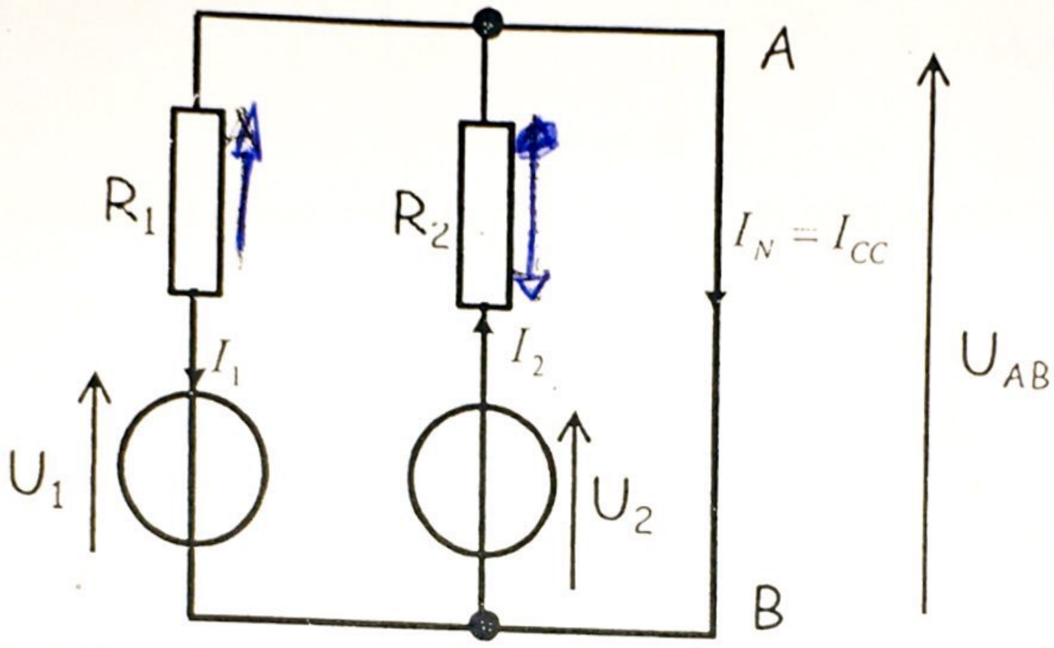
Or en court circuit la tension U_{AB} vaut zéro !

$$\begin{cases} U_{AB} = U_1 - R_1 I_1 = 0 \Rightarrow I_1 = \dfrac{U_1}{R_1} \\ U_{AB} = U_2 + R_2 I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = -\dfrac{U_2}{R_2} \end{cases}$$

Finalement : $I_{N1} = I_1 - I_2 = \dfrac{U_1}{R_1} + \dfrac{U_2}{R_2}$; A.N : $I_{N1} = \dfrac{U_1}{R_1} + \dfrac{U_2}{R_2} = \dfrac{30}{100} + \dfrac{30}{100} = \dfrac{60}{100} = 0{,}6A$

Deuxième solution (I_{N2}) : supposons $U_2 > U_1$!

On permute le sens des courant dans les deux branches !



Au nœud A on a : $I_2 = I_1 + I_{N2} \Rightarrow I_{N2} = I_2 - I_1$

Or en court circuit la tension U_{AB} vaut zéro !

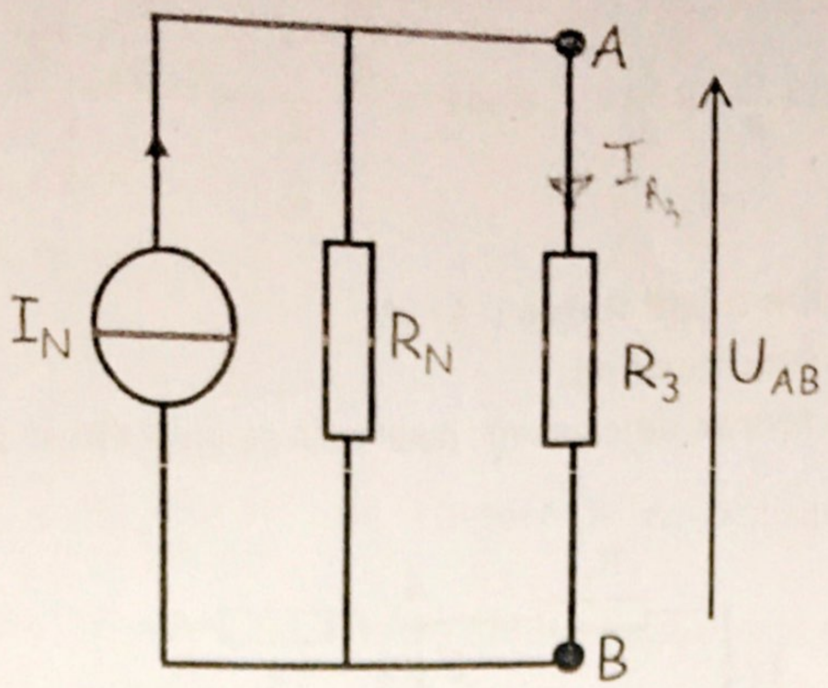
$$\begin{cases} U_{AB} = U_1 + R_1 I_1 = 0 \Rightarrow I_1 = -\dfrac{U_1}{R_1} \\ U_{AB} = U_2 - R_2 I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = \dfrac{U_2}{R_2} \end{cases}$$

Finalement : $I_{N2} = I_2 - I_1 = \dfrac{U_2}{R_2} + \dfrac{U_1}{R_1}$; A.N : $I_{N2} = \dfrac{U_2}{R_2} + \dfrac{U_1}{R_1} = \dfrac{30}{100} + \dfrac{30}{100} = \dfrac{60}{100} = 0{,}6A$

- Calcul de U_{AB}

On rebranche la charge

Scanné avec CamScanner



Le diviseur de courant donne le courant dans R_3 : $I_{R3} = \dfrac{R_N}{R_N + R_3} I_{N1}$

Et la loi d'Ohm donne : $U_{AB} = R_3 \times \dfrac{R_N}{R_N + R_3} I_{N1}$; AN :

$$U_{AB} = R_3 \times \frac{R_N}{R_N + R_3} I_{N1} = 100 \times \frac{50}{100+50} \times 0{,}6 = 20V$$

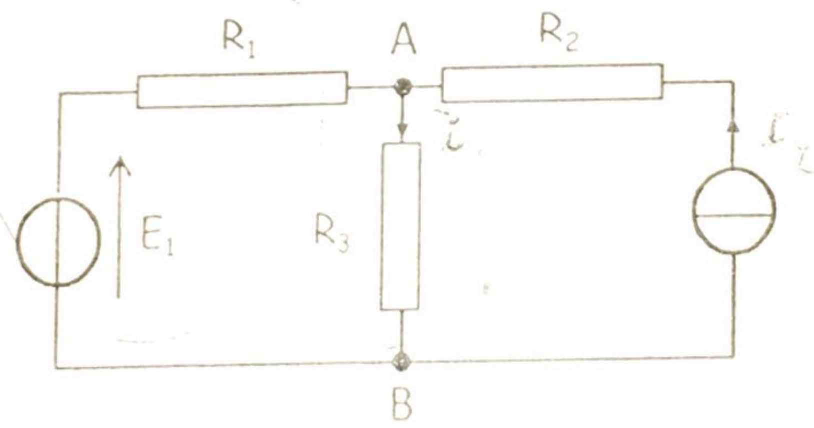
On aura la même solution aussi pour I_{N2} !

Exercice 3 : Théorèmes généraux

$E_1 = 15$ V ; $I_2 = 1$ mA ; $R_1 = 1$ kΩ ; $R_2 = 2$ kΩ et $R_3 = 3$ kΩ.

Déterminer i en appliquant :

1) les lois de Kirchhoff et la loi d'Ohm ;
2) le théorème de Thévenin (déjà fait !) ;
3) le théorème de Norton (déjà fait !);
4) le théorème de superposition.



Correction Exercice 3 : Théorèmes généraux

1) lois de Kirchhoff et loi d'Ohm

$$\begin{cases} E_1 - R_1 I_1 - R_3 i = 0 & (1) \\ i = I_1 + I_2 & (2) \end{cases} \text{ on a } \begin{cases} i = \dfrac{E_1 - R_1 I_1}{R_3} & (1') \\ i = I_1 + I_2 & (2) \end{cases}$$

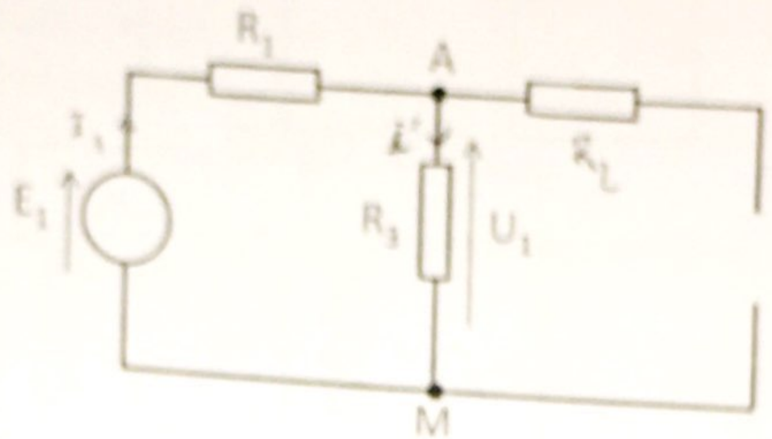
On a :

$$\frac{E_1 - R_1 I_1}{R_3} = I_1 + I_2 \Rightarrow I_1(1 + \frac{R_1}{R_3}) = \frac{E_1}{R_3} - I_2 \text{ d'où } I_1 = \frac{\frac{E_1}{R_3} - I_2}{1 + \frac{R_1}{R_3}} = \frac{\frac{15}{3.10^3} - 10^{-3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{0{,}004 \times 3}{4} = 0{,}003\text{ A}$$

D'où $i = I_1 + I_2 = 0{,}003 + 0{,}001 = 0{,}004$ A d'où $i = 4$ mA

4) le théorème de superposition

Etape 1 : éteignons la source de courant, pour cela remplaçons la par un circuit ouvert :

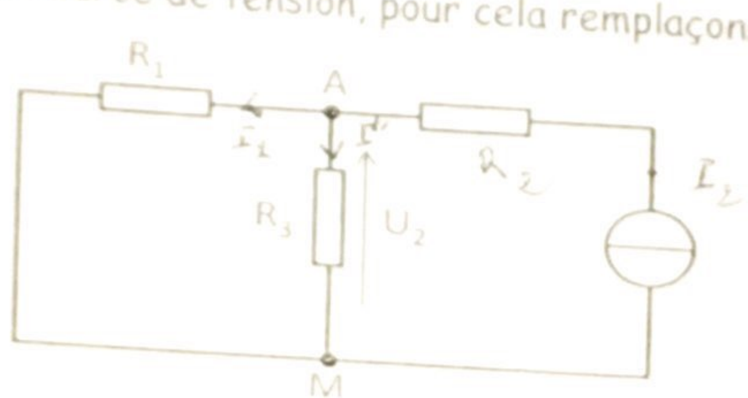


Le seul courant qui circule est celui imposé par E1 qui est aussi égale à I'

La loi des maille donne : $I_1 = I' = \frac{E_1}{R_1 + R_3}$ => $E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_1 = I_1(R_1 + R_3)$

A.N : $I' = \frac{E_1}{R_1 + R_3} = \frac{15}{1.10^3 + 3.10^3} = 3{,}75\,mA$ //

Etape 2 : éteignons la source de tension, pour cela remplaçons la par un fil :



On calcule alors U_2 : appliquons alors la loi d'Ohm afin de déterminer le courant i circulant dans la branche de U_2 :

La loi des nœuds donne : $I_2 = I_1 + I''$ //

La loi d'Ohm donne : $\begin{cases} U_{AM} = R_3 I'' \\ U_{AM} = R_1 I_1 \end{cases} \Rightarrow I'' = \frac{R_1}{R_3} \times I_1$

D'où $I_2 = I_1 + I'' = I_1 + \frac{R_1}{R_3} I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{I_2}{1 + \frac{R_1}{R_3}}$

Scanné avec CamScanner

A.N : $I_1 = \dfrac{I_2}{1+\dfrac{R_1}{R_3}} = \dfrac{10^{-3}}{1+\dfrac{1}{3}} = 0{,}75mA$

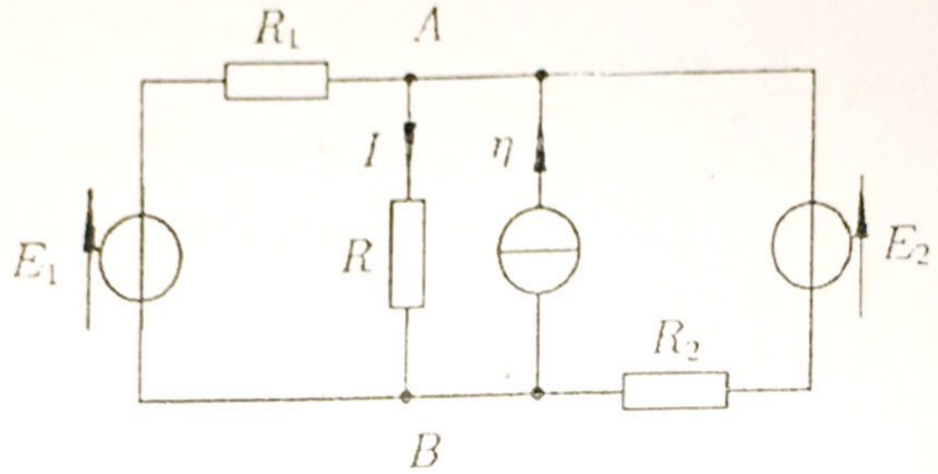
D'où $I'' = \dfrac{R_1}{R_3} \times I_1 = \dfrac{1}{3} \times 75 = 0{,}25mA$

Finalement : $i = I' + I'' = 3{,}75 + 0{,}25 = 4mA$

Exercice 4 :Théorème Généraux

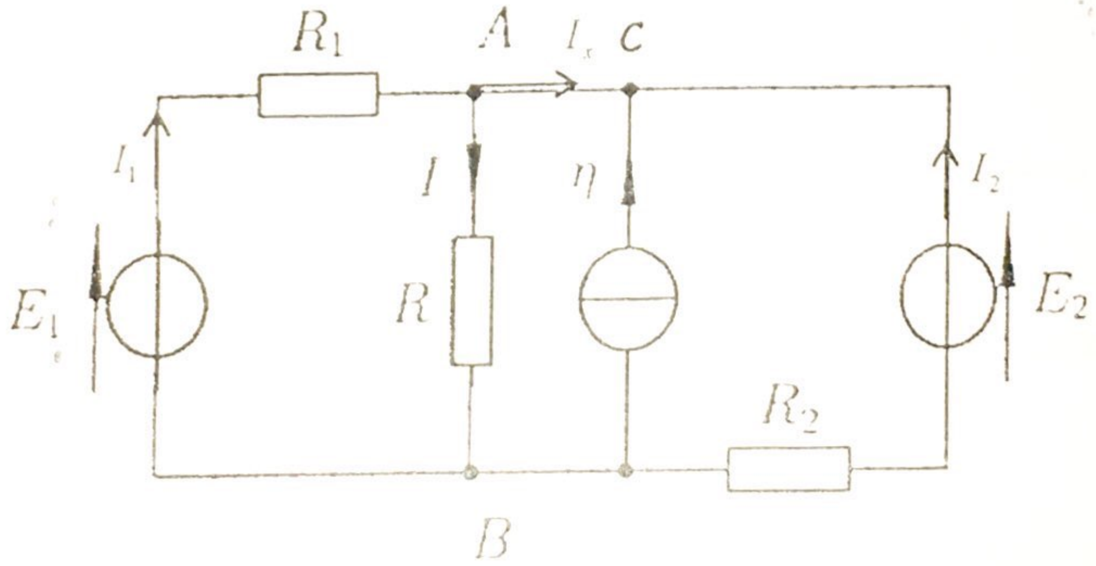
Calculer l'intensité I du courant qui traverse R en utilisant les méthodes suivantes :

1) Lois de Kirchhoff (on se contentera d'établir un système d'équations).
2) Le théorème de Millman.
3) La simplification du circuit.
4) Le théorème de superposition.
5) Le théorème de Thévenin ou Norton.



Correction Exercice 4 :Théorème Généraux

1) Lois de Kirchhoff (on se contentera d'établir un système d'équations).



- Loi des nœuds

Au nœud A :

$I_1 = I + I_x$

Au nœud C :

Scanné avec CamScanner

$I_x + \eta + I_2 = 0$

La combinaison donne : $I_1 = I - (I_2 + \eta) \Rightarrow I = I_1 + I_2 + \eta$

- Loi des mailles

Maille E1R1RBE1

$$E_1 - R_1 I_1 - RI = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{E_1 - RI}{R_1}$$

Maille ACE2R2BA

$$RI + R_2 I_2 - E_2 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{E_2 - RI}{R_2}$$

Finalement : $I = I_1 + I_2 + \eta = \dfrac{E_1 - RI}{R_1} + \dfrac{E_2 - RI}{R_2} + \eta$

Ce qui donne : $I\left(1 + \dfrac{R}{R_1} + \dfrac{R}{R_2}\right) = \dfrac{E_1}{R_1} + \dfrac{E_2}{R_2} + \eta \Rightarrow I = \dfrac{\dfrac{E_1}{R_1} + \dfrac{E_2}{R_2} + \eta}{\left(1 + \dfrac{R}{R_1} + \dfrac{R}{R_2}\right)}$

D'où finalement $I = \dfrac{\dfrac{E_1}{R_1} + \dfrac{E_2}{R_2} + \eta}{\left(1 + \dfrac{R}{R_1} + \dfrac{R}{R_2}\right)}$

2) Le théorème de Millman.

En prenant le point b comme étant la masse on peut écrire : $V_A = V_C$; donc en prenant l'un ou l'autre on aboutit au résultat !

Scanné avec CamScanner

$V_A = \dfrac{\dfrac{E_1}{R_1}+\eta+\dfrac{E_2}{R_2}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R_2}}$ et la loi des nœuds donne :

$$V_A = RI \Rightarrow I = \frac{\dfrac{\dfrac{E_1}{R_1}+\eta+\dfrac{E_2}{R_2}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R_2}}}{R} = \frac{\dfrac{E_1}{R_1}+\eta+\dfrac{E_2}{R_2}}{R(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R_2})} = \frac{\dfrac{E_1}{R_1}+\dfrac{E_2}{R_2}+\eta}{1+\dfrac{R}{R_1}+\dfrac{R}{R_2}}$$

D'où finalement : $I = \dfrac{\dfrac{E_1}{R_1}+\dfrac{E_2}{R_2}+\eta}{1+\dfrac{R}{R_1}+\dfrac{R}{R_2}}$ (même résultat que précédemment !)

3) La simplification du circuit.

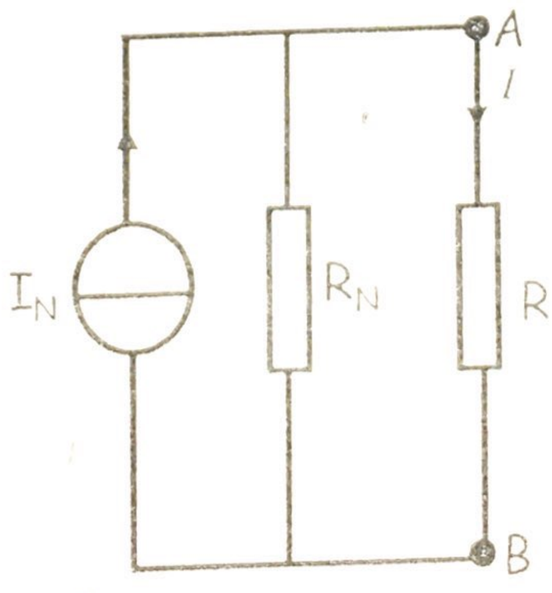
Cela suppose l'utilisation des équivalences

On transforme (E1,R1) et (E2, R2) en MEN

Ainsi on obtient trois sources de courant en // ; ce qui donne : $I_N = \dfrac{E_1}{R_1}+\dfrac{E_2}{R_2}+\eta$

Et la résistance équivalente de R1//R2 donne : $R_N = \dfrac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$

Le schéma équivalent devient



Le diviseur de courant donne : $I = \frac{R_N}{R_N + R} \times I_N = \frac{1}{1+\frac{R}{R_N}} \times I_N$ avec $\frac{1}{R_N} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ en

remplaçant on obtient :

$$I = \frac{1}{1+\frac{R}{R_N}} \times I_N = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \eta}{1 + R\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \eta}{1 + \frac{R}{R_1} + \frac{R}{R_2}}$$

I est encore égale à $I = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \eta}{1 + \frac{R}{R_1} + \frac{R}{R_2}}$

4) Le théorème de superposition.

Remarque : ici on éteindre deux fois au lieu de trois fois : soit on éteint E_1 et η en même temps suivie de E1 soit on éteint E_1 et E_2 et η en même temps. Le fait d'éteindre E_1, puis η et enfin E_2 conduirait à un faux résultat !

- On éteint la source E_1

Au nœud A on a : $I_1 + I' + I_x = 0 \Rightarrow I' = -(I_1 + I_x)$

Au nœud C on a : $I_2 + \eta + I_x = 0 \Rightarrow I_x - (\eta + I_2)$

D'où $I' = -(I_1 + I_x) = -I_1 + \eta + I_2$

La loi d'Ohm donne $R_1 I_1 = RI' \Rightarrow I_1 = \frac{R}{R_1} I'$

La loi des maille donne aussi : $RI' = E_2 - R_2 I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{E_2 - RI'}{R_2}$

$$I' = -I_1 + \eta + I_2 = \frac{E_2 - RI'}{R_2} - \frac{R}{R_1} I' + \eta \Leftrightarrow I'(1 + \frac{R}{R_2} + \frac{R}{R_1}) = \frac{E_2}{R_2} + \eta$$

Finalement :

$$\Rightarrow I' = \frac{\frac{E_2}{R_2} + \eta}{1 + \frac{R}{R_2} + \frac{R}{R_1}}$$

Scanné avec CamScanner

D'où $I' = \dfrac{\dfrac{E_2}{R_2} + \eta}{1 + \dfrac{R}{R_2} + \dfrac{R}{R_1}}$

- Enfin éteignons les sources η et E_2 en même temps

Au nœud A on a : $I_1 = I'' + I_2 \Rightarrow I'' = I_1 - I_2$

La loi d'Ohm donne $R_2 I_2 = RI'' \Rightarrow I_2 = \dfrac{R}{R_2} I''$

La loi des maille donne aussi : $RI'' = E_1 - R_1 I_1 \Rightarrow I_1 = \dfrac{E_1 - RI''}{R_1}$

$$I'' = I_1 - I_2 = \frac{E_1 - RI''}{R_1} - \frac{R}{R_2} I'' \Leftrightarrow I''(1 + \frac{R}{R_2} + \frac{R}{R_1}) = \frac{E_1}{R_1}$$

Finalement :

$$\Rightarrow I'' = \frac{\dfrac{E_1}{R_1}}{1 + \dfrac{R}{R_2} + \dfrac{R}{R_1}}$$

D'où $I'' = \dfrac{\dfrac{E_1}{R_1}}{1 + \dfrac{R}{R_2} + \dfrac{R}{R_1}}$

D'où finalement : $I = I' + I'' = \dfrac{\dfrac{E_2}{R_2} + \eta}{1 + \dfrac{R}{R_2} + \dfrac{R}{R_1}} + \dfrac{\dfrac{E_1}{R_1}}{\left(1 + \dfrac{R}{R_1} + \dfrac{R}{R_2}\right)} = \dfrac{\dfrac{E_1}{R_1} + \dfrac{E_2}{R_2} + \eta}{1 + \dfrac{R}{R_2} + \dfrac{R}{R_1}}$

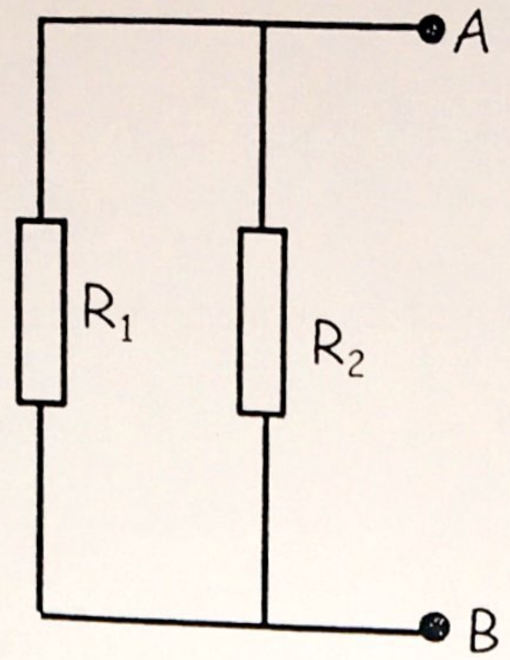
On trouve encore le même résultat !

5) Le théorème de Thévenin ou Norton.

- Théorème de Thénvenin

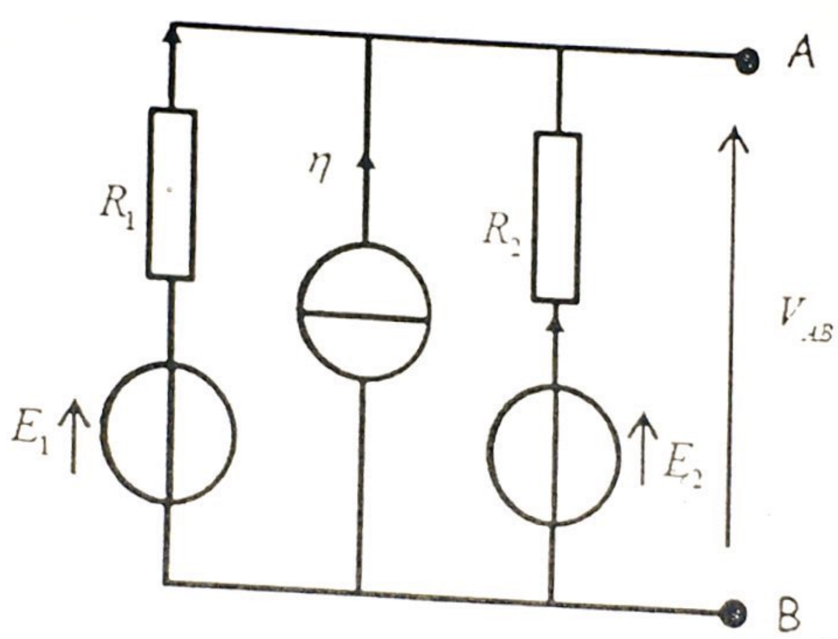
Déconnectons la charge et éteignons les sources

Scanné avec CamScanner



D'où $R_{Th} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

Calcul de E_{Th}

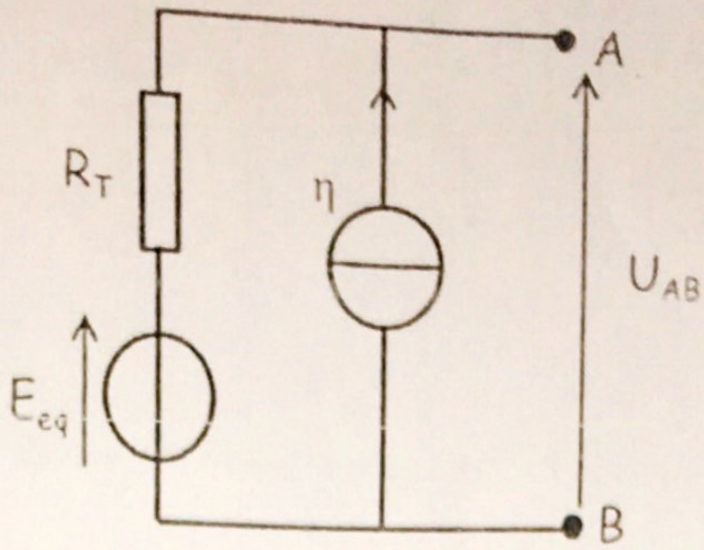


L'utilisation des équivalences permet de réduire les calculs

$I_T = \dfrac{E_1}{R_1} + \dfrac{E_2}{R_2}$ et $R_T = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

On reconvertit le circuit en équivalent de Thévenin ce qui donne

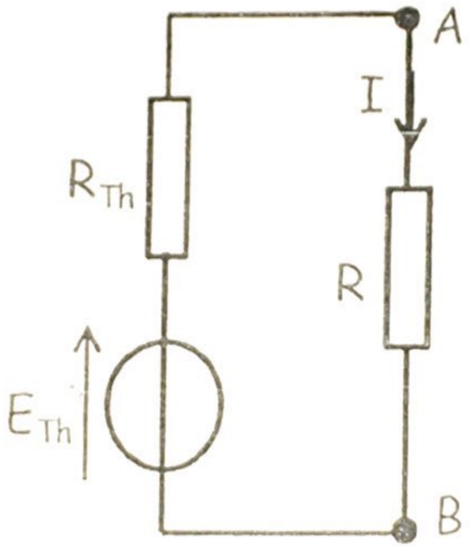
Scanné avec CamScanner



$U_{AB} = E_{eq} + R_T\eta$ avec $E_{eq} = \left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}\right)R_T$ et $R_T = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$

D'où $E_{Th} = \left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \eta\right)\left(\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}\right)$

On branche la charge et on obtient



La loi des maille donne :

$$I = \frac{E_{Th}}{R + R_{Th}} = \frac{\left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \eta\right)\left(\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}\right)}{R + \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{\left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \eta\right)\left(\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}\right)}{\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}\left(1 + \frac{R}{\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}\right)} = \frac{\left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \eta\right)}{\left(1 + \frac{R}{\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}\right)}$$

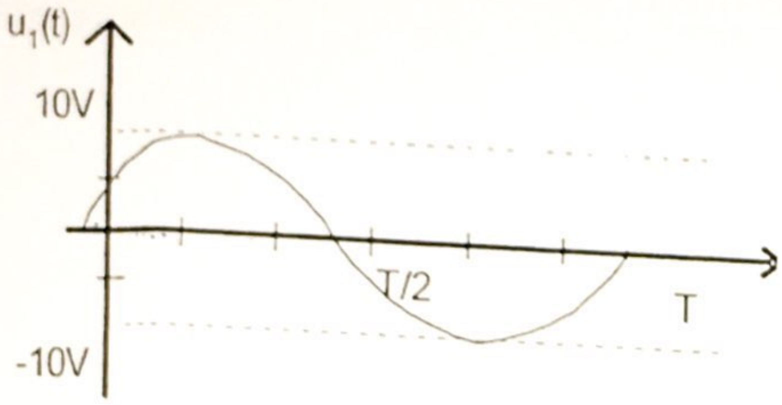
Scanné avec CamScanner

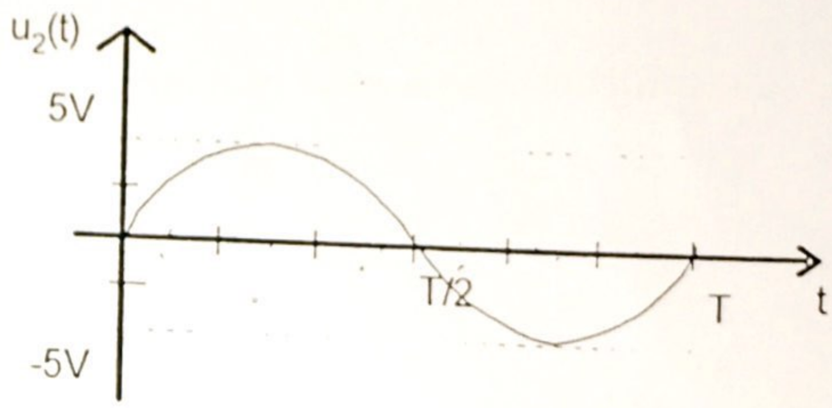
$$I=\frac{\left(\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}+\eta\right)}{\left(1+\frac{R}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}\right)}=\frac{\left(\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}+\eta\right)}{\left(1+\frac{R}{R_T}\right)}=\frac{\left(\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}+\eta\right)}{\frac{R}{R_T}+1}=\frac{\left(\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}+\eta\right)}{R\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+1}$$

D'où $I=\dfrac{\left(\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}+\eta\right)}{\frac{R}{R_1}+\frac{R}{R_2}+1}$

Exercice 5 : Vecteurs de Fresnel

Soit les 2 signaux suivants :





1) Donner l'expression mathématique associé à $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

2) Dessiner les vecteurs de Fresnel $\bar{U}_1$ et $\bar{U}_1$ associé à $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

3) À l'aide d'un diagramme de Fresnel, dessiner le vecteur $\bar{U}$ associé à la grandeur u(t), tel que : $u(t)= u_1(t)+u_2(t)$.

Correction Exercice 5 : vecteurs de Fresnel

Expression mathématique associé à $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

On relève $U_{1max}=10$ V, la période est de 6divisions en effet :

$$\begin{cases} 3divisions \rightarrow T/2 \\ x \quad \rightarrow \quad T \end{cases} \Rightarrow T \rightarrow 6divisions$$

Faisons l'hypothèse que $1division \rightarrow 1ms$ d'où T=6ms

Déterminons ω

On a $\omega=2\pi f=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{6.10^{-3}}=1047{,}2rad/s$

Détermination de φ_{u1}

Scanné avec CamScanner

On mesure $\frac{1}{4}$ de division ce qui donne :

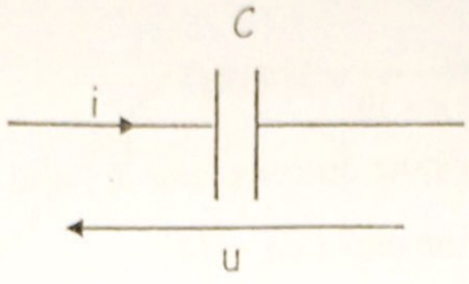
$$\frac{\varphi_{u1}}{\omega} = 1/4 \Rightarrow \varphi_{u1} = 1/4\,\omega = \frac{\omega}{4} = \frac{1047{,}2rad/s}{4.s}10^{-3} = 0{,}26rad$$

Ou encore en degré :47,12°

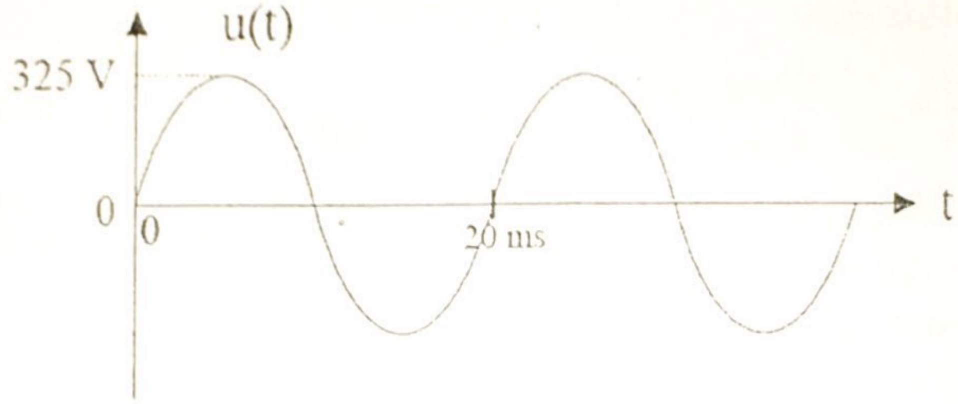
D'où $u_1(t) = 10\sqrt{2}\sin(1047{,}2t + 0{,}26)$

Pour u_2 on a : $\begin{cases} U_{2\max} = 5V \\ T = 6ms \Rightarrow \omega = 1047{,}2rad/s \text{ d'où } u_2(t) = 5\sqrt{2}\sin(1047{,}2t) \\ \varphi_{u2} = 0 \end{cases}$

Exercice 6 : Régime sinusoïdal



u est une tension sinusoïdale alternative :



1) Calculer sa valeur efficace U et sa fréquence f.

On mesure la valeur efficace du courant : I = 0,72 A.

2) En déduire la capacité électrique C du condensateur (en µF).

3) Tracer i(t) en concordance de temps avec u(t).

Correction Exercice 6 : Régime sinusoïdal

1) Sur le graphe on lit U_{max}=325 V or $U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{325}{\sqrt{2}} = 229{,}8$ V

D'où $U_{eff} \approx 230$ V

La fréquence est donnée par $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{20.10^{-3}} = 50$ kHz et 50 Hz

2) La loi d'Ohm donne : $\underline{U} = \underline{Z} \times \underline{I} = \frac{1}{jC\omega} \times \underline{I}$

Or par définition la valeur efficace est égale au module ce qui donne :

$$U = |\underline{U}| = |\underline{Z} \times \underline{I}| = \left|\frac{1}{jC\omega}\right| \times |\underline{I}| = \frac{1}{C\omega} \times I \text{ or } f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \omega = 2\pi f$$

D'où $\frac{1}{C\omega} \times I = U \Leftrightarrow C = \frac{I}{U\omega} = \frac{I}{2\pi f U} = \frac{0{,}72}{2 \times \pi \times 50 \times 230} = 9{,}972.10^{-6}$ F

Scanné avec CamScanner

C=9,97 µF

3) Tracer i(t) en concordance de temps avec u(t).

Pour le tracé de i(t) il faudrait alors déterminer le déphasage par rapport à u(t) u(t) étant la tension d'alimentation donc ayant une phase à l'origine égale à 0 ($\varphi_u=0$)

Par définition $\varphi=\varphi_u-\varphi_i$

Le courant i traversant un condensateur la phase à l'origine du courant est égale à $\varphi=-\pi/2$ qu'on peut déterminer facilement en évaluant le courant i en écriture complexe.

On $\underline{I}=\dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}}=\dfrac{|\underline{U}|\times\exp(j\varphi_U)}{|\underline{Z}|\times\exp(j\varphi_Z)}=\dfrac{230\exp(j\times 0)}{319{,}18\exp(j\varphi_Z)}$

Avec $Z=|\underline{Z}|=\dfrac{1}{C\omega}=\dfrac{1}{9{,}972.10^{-6}\times 2\times\pi\times 50}=319{,}18\,\Omega$

Reste à déterminer la phase à l'origine du complexe Z ; elle est donnée par $\tan\varphi=\dfrac{-319{,}18}{0}=\infty$, cet angle est un angle de $-\pi/2$.

car en effet $\underline{Z}=a+jb=0-j319{,}18\,\Omega$

en revenant à l'équation on a :

$$\underline{I}=\frac{\underline{U}}{\underline{Z}}=\frac{|\underline{U}|\times\exp(j\varphi_U)}{|\underline{Z}|\times\exp(j\varphi_Z)}=\frac{230\exp(j\times 0)}{319{,}18\exp(-j\pi/2)}=0{,}72\exp(+j\pi/2)$$

on retrouve bien la valeur efficace du courant (I=0,72 A) et la valeur de la phase à l'origine du courant qui vaut $\varphi_I=\pi/2$.

Enfin le déphasage vaut : $\varphi=\varphi_u-\varphi_i=-\pi/2$.

On peut alors représenter directement la courbe correspondante en prenant le soin de prendre une échelle grâce à la relation :

$\dfrac{\varphi}{\omega}=x$ (décalage entre les deux courbes) avec $\varphi=\pi/2$ (en valeur absolue) on a donc :

$$x=\frac{\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{2\times\frac{2\pi}{T}}=\frac{T}{4}=\frac{20\text{ ms}}{4}=5\text{ ms}$$

Exercice 7 : Vecteurs de Fresnel

Pour les 2 expressions mathématique suivantes, dessiner le vecteur de Fresnel associé :

a) $u(t) = 25 \sin(wt + \pi/6)$

b) $i(t) = 10\sqrt{2}\sin(wt+2\pi/3)$

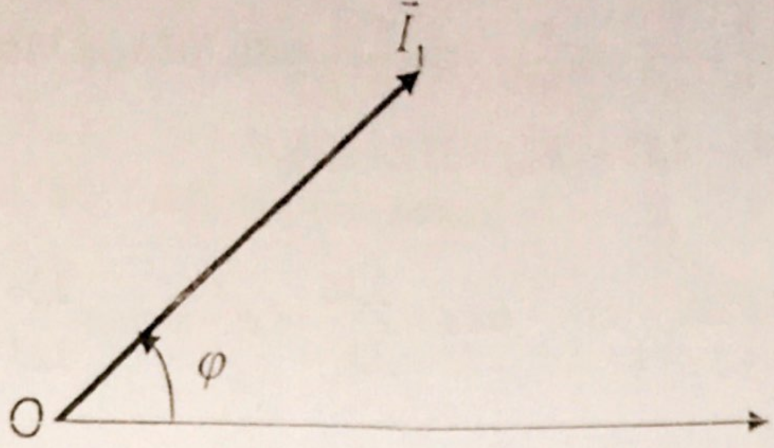
Correction Exercice 7 : Vecteurs de Fresnel

Exercice 8 : Vecteurs de Fresnel

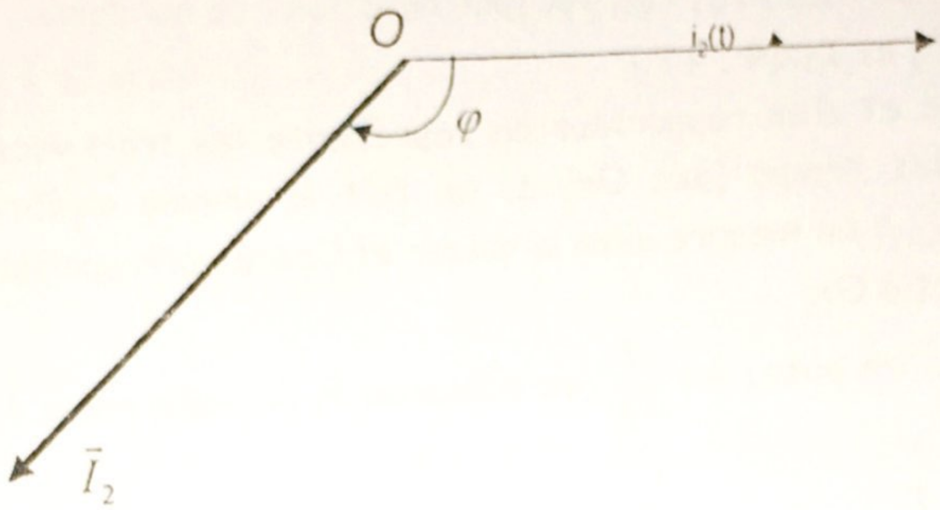
Echelle donnée 1 cm pour 1 A

1) Donner l'expression mathématique de $i_1(t)$ associé au vecteur de Fresnel suivant :

Scanné avec CamScanner



2) Donner l'expression mathématique de $i_2(t)$ associé au vecteur de Fresnel suivant :

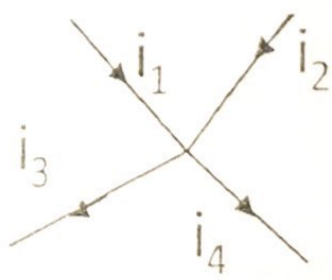


3) En déduire l'expression de i(t) tel que $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ grâce à une construction de Fresnel.

Correction Exercice 8 : Vecteurs de Fresnel

1) On mesure 2cm d'où $I_1=2$ A
2) On mesure 2,3 cm d'où $I_2=2,3$A

X Exercice 9 : Méthodes Fresnel et complexe



Connaissant les équations horaires : $\begin{cases} i_1 = 3\sqrt{2}\sin(\omega t) \\ i_2 = 6\sqrt{2}\sin(\omega t + \dfrac{\pi}{3}) \\ i_3 = 4\sqrt{2}\sin(\omega t + \dfrac{\pi}{4}) \end{cases}$

Déterminer i_4 par la méthode complexe et par la méthode de Fresnel.

Correction Exercice 9 : Méthodes Fresnel et complexe

Méthode complexe :

La loi des nœuds donnes : $\underline{I}_4 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_3$

Ecrivons alors les complexes correspondants : $\underline{I}_1 = |\underline{I}_1|\exp(j\varphi_{i1}) = 3\exp(j\times 0) = 3$,

$\underline{I}_2 = |\underline{I}_2|\exp(j\varphi_{i2}) = 6\exp(j\times\frac{\pi}{3}) = 6\left(\cos(\frac{\pi}{3}) + j\sin(\frac{\pi}{3})\right) = 6(0,5 + j0,866)$ et

Scanné avec CamScanner

$\underline{I}_3 = |\underline{I}_3| \exp(j\varphi_{i3}) = 4\exp(j \times \frac{\pi}{4}) = 4\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + j\sin(\frac{\pi}{4})\right) = 4(0{,}707 + j0{,}707)$

$\underline{I}_4 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 3 + 3 + 5{,}19j - 2{,}82 - 2{,}82j = 3{,}17 + 2{,}36j$

Avec $\underline{I}_4 = |\underline{I}_4| \exp(j\varphi_{i4})$

$I_4 = |\underline{I}_4| = \sqrt{3{,}17^2 + 2{,}36^2} = 3{,}95\,\text{A}$ et $\tan\varphi = \frac{2{,}36}{3{,}17} \Rightarrow \varphi = \arctan(\frac{2{,}36}{3{,}17}) = 0{,}64$ d'où

φ=36,74 ° ou 0,64 rad.

$i_4 = 3{,}95\sqrt{2}\sin(\omega t + 0{,}64)$

Méthode Fresnel (voir détail en cours) : en fait il s'agit pour chaque courant de tracer le vecteur correspondant.

En effet pour i_1 on a : $\underline{I}_1 = [|\underline{I}_1|; \varphi_{i1}] = (|\underline{I}_1|; \varphi_{i1})$ par notation, ce qui donne :

I_1= [3, 0°] ; I_2=[6, 60°] et I_3=[4 ; 45°]

Au moyen d'une règle et d'un rapporteur on représente les trois vecteurs par rapport à l'origine des temps (axe Ox) et on fait la somme algébrique afin d'obtenir le vecteur $\vec{I}_4$; on mesure ainsi la valeur efficace correspondante et le déphasage par rapport à Ox.

Question subsidiaire : on pose $t' = t + \frac{T}{4}$, on demande la nouvelle phase à l'origine des courants i_1 et i_2.

Réponse : pour $t' = t + \frac{T}{4}$, on a $t = t' - \frac{T}{4}$ ce qui donne dans les équations horaires :

$i_1 = 3\sqrt{2}\sin\left(\omega(t' - \frac{T}{4})\right)$, or $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ce qui donne

$i_1 = 3\sqrt{2}\sin\left(\omega(t' - \frac{2\pi}{4\omega})\right) = 3\sqrt{2}\sin\left(\omega t' - \frac{2\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}\sin\left(\omega t' - \frac{\pi}{2}\right)$

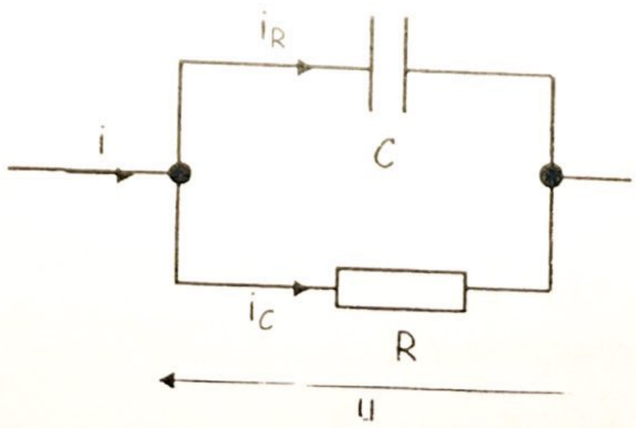
donc la phase à l'origine vaut alors -π/2 et

$i_2 = 6\sqrt{2}\sin\left(\omega(t' - \frac{2\pi}{4\omega}) + \frac{\pi}{3}\right) = 6\sqrt{2}\sin\left(\omega t' - \frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = 6\sqrt{2}\sin\left(\omega t' - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

$i_2 = 6\sqrt{2}\sin\left(\omega t' - \frac{3\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}\right) = 6\sqrt{2}\sin\left(\omega t' - \frac{\pi}{6}\right)$

donc la phase à l'origine vaut alors -π/6.

✗ Exercice 10 : Régime sinusoïdal



On donne U = 10 V, f = 50 Hz, R = 10 kΩ et C = 1 µF.

Scanné avec CamScanner

1) Calculer I_R et I_C.
2) Calculer I et φu/i (au préalable, déterminer l'admittance complexe équivalente : $\underline{Y}_{eq}$).

Correction Exercice 10 : Régime sinusoïdal

1) Calcul de i_C et i_R

On a $\underline{U} = \underline{Z}_C \times \underline{i}_C \Rightarrow \underline{i}_C = \dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}_C} = \dfrac{10}{\dfrac{1}{jC\omega}} = jC\omega \times 10 = j10 \times 10^{-6} \times 2\pi \times 50 = j0{,}00314$

D'où i_C=3,14 mA

Et on a aussi $\underline{U} = \underline{Z}_R \times \underline{i}_R \Rightarrow \underline{i}_R = \dfrac{\underline{U}}{R} = \dfrac{10}{10000} = 0{,}001\ \text{A}$

Soit i_R=1 mA.

2) Calcul de I et φu/i

On a : $\underline{i} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}_{eq}} = \underline{U} \times \underline{Y}_{eq}$

Avec $\underline{Y}_{eq} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{jC\omega}} = \dfrac{1}{R} + jC\omega$ d'où

$$\underline{i} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{eq}} = \underline{U} \times \left(\frac{1}{R} + jC\omega\right) = 10 \times \left(\frac{1}{10000} + j10^{-6} \times 2\pi \times 50\right) = 0{,}0001 + j0{,}000314$$

En module $i = \sqrt{0{,}0001^2 + 0{,}000314^2} = 0{,}00032969\ \text{A}$

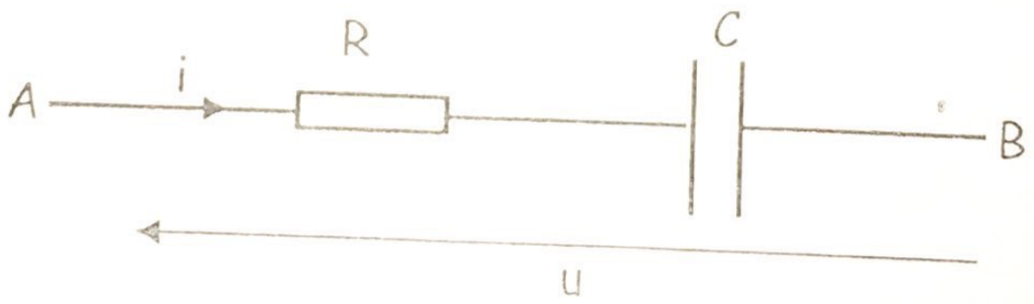
On a donc : i=3,3 mA.

$$\frac{\underline{U}}{\underline{i}} = \underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\underline{Y}_{eq}} = \frac{1}{\dfrac{1}{R} + jC\omega} = \frac{1}{0{,}0001 + j0{,}000314}$$

2) 3,30 mA et φ=-72°

Exercice 11 : Régime sinusoïdal

Exprimer la tension U_{AB} en fonction des éléments du montage en recherchant le modèle de Norton du dipôle équivalent.



1. Calculer les tensions efficaces U_{Reff} et U_{Ceff}.
2. Déterminer l'expression de l'impédance complexe du dipôle AB : $\underline{Z}_{AB}$.
3. Calculer l'impédance Z_{AB} (en Ω).
4. Calculer U_{eff}.
5. Calculer le déphasage entre u et i : φu/i (en °).

On donne : R = 4,7 kΩ ; C = 5,6 nF ; I_{eff} = 400 µA ; f = 10 kHz

Scanné avec CamScanner

Correction Exercice 11 : Régime sinusoïdal

1) $U_{Reff} = RI_{eff} = 4700 \times 400 \times 10^{-6} = 1{,}88$ V

$U_{Ceff} = I_{eff} / (C\omega) = 400\times10^{-6}/(5{,}6\times10^{-9}\times2\pi\times10\,000) = 1{,}137$ V

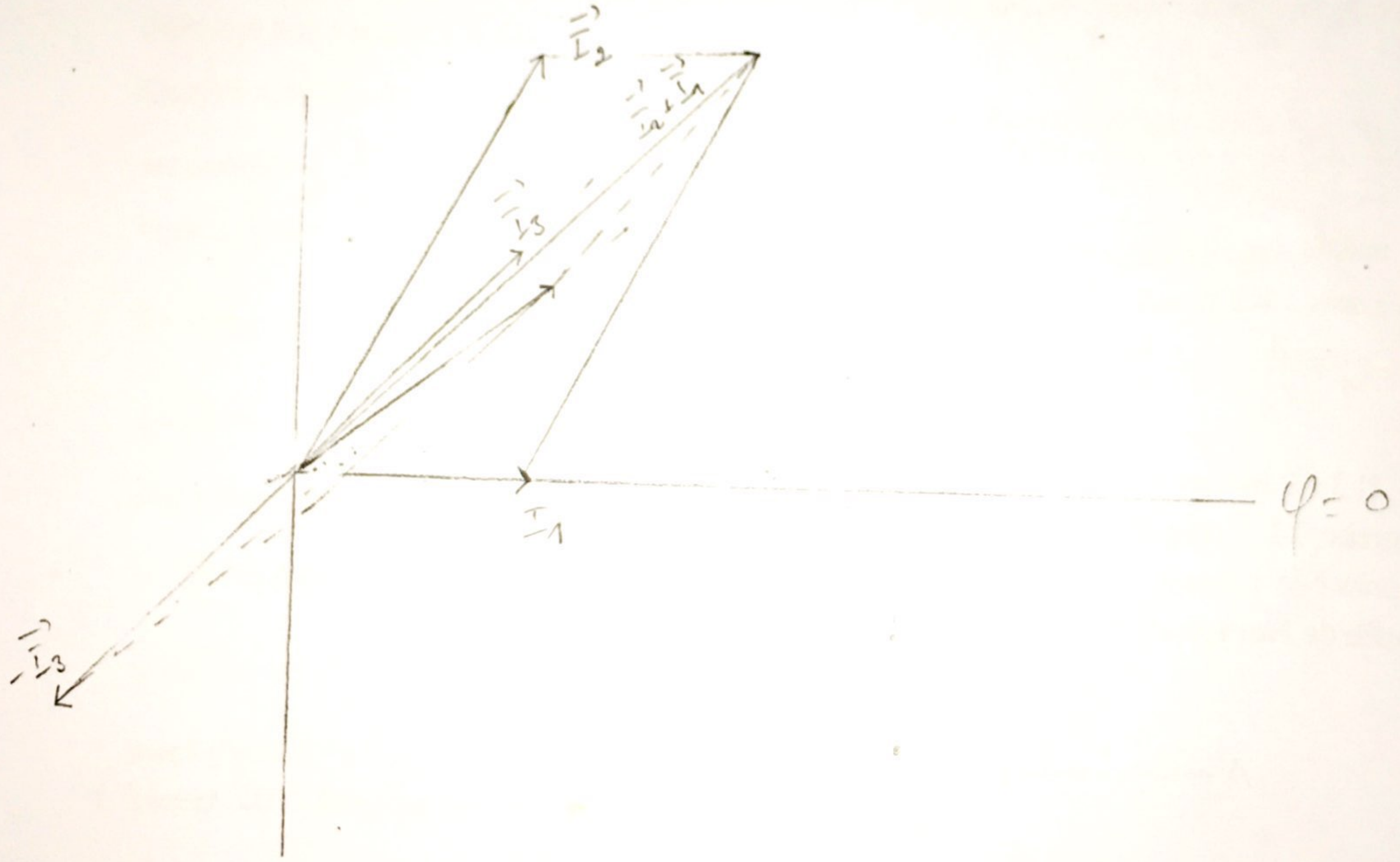
2) $\underline{Z}_{AB} = R - \dfrac{j}{C\omega}$

3) $Z_{AB} = \left| R - \dfrac{j}{C\omega} \right| = \sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}$

4) $U_{eff} = Z_{AB}\, I_{eff} = 2{,}197$ V

5) $\varphi_{u/i} = \arg(\underline{Z}_{AB}) = \arg\left(R - \dfrac{j}{C\omega}\right) = \arctan\left(\dfrac{-\frac{1}{C\omega}}{R}\right) = -31{,}2°$

Exercice 5



M. Sadiq

Scanné avec CamScanner