Espace de probabilité

1 Introduction

1.1 Avant-Propos

Il peut paraître irréaliste et prétentieux de vouloir, de par sa nature même, **quantifier le hasard.** C'est pourtant ce qui a conduit à la notion de Probabilité. Nous allons dans ce cours introduire ce concept mathématique, dont la puissance permettra **de modéliser** d'innombrables situations où le hasard intervient. La modélisation probabiliste est fondamentale dans tous les domaines d'applications, qu'ils soient issus des sciences dures ou des sciences humaines, de la physique (physique quantique, physique des particules), de la climatologie, de la biologie (mutations du génôme), de l'écologie (variabilité des comportements individuels ou variations environnementales), de l'informatique et des réseaux de télécommunications, du traitement du signal et de la parole, de la médecine (imagerie médicale), de l'économie, l'assurance, la finance (marchés boursiers), ou de la sociologie.

Le mot **Hasard** est un mot d'origine arabe : *az-zahr*, le dé. Il est apparu en français pour signifier tout d'abord un jeu de dés, puis plus généralement un événement non prévisible, et par extension le mode d'apparition de ce type d'événement.

Dans la vie quotidienne, chacun est familier avec le mot et même le concept de probabilité : probabilité qu'il pleuve la semaine suivante, probabilité de gagner au loto...

Les assurances fixent le contrat d'assurance-vie d'un individu de 20 ans, grâce à une estimation de sa probabilité de survie à 70 ans. Dans de nombreux domaines, les probabilités interviennent : les entreprises cherchent à calculer le besoin probable de leurs produits dans le futur, les médecins cherchent à connaître les probabilités de succès de différents protocoles de soin, les compagnies pharmaceutiques doivent estimer les probabilités d'apparitions d'effets secondaires pour leurs médicaments. Un exemple récent et spectaculaire est celui de l'utilisation des probabilités en économie, et en particulier en finance. Nous pouvons citer également d'autres domaines d'applications extrêmement importants et en pleine expansion, aussi variés que le calcul de structures, la théorie du signal, l'optimisation et le contrôle des systèmes, l'imagerie médicale, la génomique ...

Les probabilités sont en lien étroit avec la vie quotidienne. A ce titre, elles s'appuient sur un passage du concret à l'abstrait : **la modélisation mathématique**. En effet, la première difficulté face à un problème concret va être de transformer cette réalité physique en un modèle mathématique abstrait qu'il est possible d'étudier et sur lequel des calculs peuvent être menés. Il est alors possible de fabriquer des expérimentations fictives du problème concret sur ordinateur, que l'on appelle des simulations numériques, obtenues à partir du modèle mathématique. Ces simulations sont utilisées, soit à des fins descriptives, soit à des fins numériques.

Pour pouvoir modéliser les innombrables situations, de natures très différentes, où le hasard intervient, un cadre très général d'étude est nécessaire. Ce cadre abstrait a été défini rigoureusement par **Andrei Kolmogorov** en 1933, sous le nom de **modèle probabiliste.**

1.2 Phénomènes aléatoires

Le but de ce cours est d'introduire les notions de base de la théorie des probabilités, et surtout de permettre d'acquérir le raisonnement probabiliste. L'objet de la théorie des probabilités est l'analyse mathématique de phénomènes dans lesquels le hasard intervient. Ces phénomènes sont appelés des **phénomènes aléatoires.**

Définition 1. *Un phénomène est dit aléatoire si, reproduit maintes fois dans « des conditions identiques », il se déroule chaque fois différemment de telle sorte que le résultat de l'expérience change d'une fois sur l'autre de manière imprévisible.*

Nous pouvons donner des exemples variés de tels phénomènes :

- Jeu de Pile ou Face
- Jeu de lancé de dès

Dans ces deux exemples, la différence entre les résultats, si l'on réitère l'expérience, peut être liée à l'impulsion initiale communiquée au dé, à la rugosité de la table, aux vibrations du plancher... Le hasard est l'illustration de la méconnaissance des conditions initiales, car la pièce ou le dé ont des trajectoires parfaitement définies par la mécanique classique.

- Durée de vie d'une ampoule électrique
- Temps de passage d'un bus
- Nombre de voitures passant une borne de péage
- Promenade d'un ivrogne : un pas en avant, deux pas en arrière...
- Position d'un impact sur une cible, dans un jeu de fléchettes
- Evolution du prix d'un actif financier au cours du temps
- Mutations dans le génôme.

Ces exemples présentent comme point commun des variations liées à la présence de facteurs extérieurs, influant sur le résultat de l'expérience, et que l'on ne sait pas contrôler.

Dans d'autres domaines, tels la physique quantique, l'aléatoire fait intrinsèquement partie de la théorie, et certaines mesures ne peuvent être connues qu'aléatoirement dans un ensemble de résultats possibles.

1.3 Deux idées majeures et incontournables

Deux idées majeures illustrent la théorie des probabilités et son extrême richesse : la loi des grands nombres et le conditionnement (lié à la notion d'indépendance).

a) La loi des grands nombres. La notion de hasard, ou d'aléatoire, est souvent liée à la méconnaissance de paramètres intervenant dans une expérience, ou à la trop grande multitude de ceux-ci. Néanmoins, bien que ces comportements aléatoires soient a priori sujets à des variations imprévisibles, nous serons capables de donner des renseignements sur ce type de phénomènes. L'idée majeure est que ces informations seront données par la répétition de l'expérience.

En effet, l'observation d'un grand nombre de répétitions d'un même phénomène aléatoire permet d'y déceler généralement des lois régissant les résultats, tout à fait déterminées, stables. Par exemple, pour toute pièce non truquée d'un jeu de Pile ou Face, et quelque soit l'endroit où se déroule le jeu, 1000 lancés de la pièce donneront environ 50% de piles et 50% de faces. De même, l'étude de la répartition des tailles d'un groupe d'individus, et quel que soit l'échantillon pris dans ce groupe, montre qu'il y aura toujours une courbe des répartitions de même type. Il va être ainsi possible de prévoir la fréquence d'apparition de chaque résultat, la valeur moyenne de ces résultats et les oscillations autour de cette valeur moyenne.

C'est cette stabilité confirmée par l'expérience qui s'appelle **Loi des grands nombres**, et qui légitime l'utilisation d'un modèle mathématique.

b) Conditionnement et Indépendance.

La construction d'un modèle probabiliste repose sur l'information connue a priori sur l'expérience aléatoire. Ce modèle permet de quantifier les probabilités de réalisation de certains résultats de l'expérience. Il est fondamental de remarquer que si l'information change, les probabilités de réalisation changent. Par exemple, la chance de choisir au hasard un homme de plus de 100 kilos parmi 1000 hommes de la population sénégalaise est plus grande si le groupe est composé d'hommes de plus de 1,80m que si le groupe est composé d'hommes de moins de 1,65m. La richesse du modèle probabiliste que nous allons construire réside dans le fait que si l'information change par rapport au modèle initial, les nouvelles chances de réalisation pourront être calculées. Ce raisonnement lié à l'information a priori se résume en théorie des Probabilités par le mot **conditionnement**. Quand l'information donnée a priori sur un phénomène aléatoire n'a aucune influence sur la réalisation d'un autre phénomène, par exemple deux tours successifs de roulette dans un casino, ces phénomènes aléatoires sont dits **indépendants.** Cette hypothèse d'indépendance sera fondamentale dans toute la théorie, et simplifiera de nombreux calculs.

1.4 Les variables aléatoires

a) Loi d'une variable aléatoire. Nous allons dans ce cours étudier des fonctions qui dépendent du résultat de l'expérience aléatoire sous-jacente. Elles sont appelées **variables aléatoires**, car leurs valeurs varient en fonction du hasard. Plutôt que de chercher les antécédents de chaque valeur possible de la fonction, nous allons nous intéresser à la chance de réalisation de l'ensemble des antécédents qui permettent à la fonction d'être égale à une de ces valeurs ou d'appartenir à un ensemble de ces valeurs. C'est cela que nous appellerons **la loi de la variable aléatoire.** Cette notion de loi d'une variable aléatoire est à la base du raisonnement probabiliste moderne.

b) Simulation de variables aléatoires. La simulation consiste en une expérimentation fictive sur machine d'un phénomène modélisé. Elle permet de visualiser une expérience aléatoire, de calculer des quantités numériques et de vérifier certains résultats théoriques.

La méthode de simulation probabiliste la plus célèbre est la **méthode de Monte-Carlo**, du nom du quartier où se trouve le casino de Monaco. Elle consiste à effectuer certains calculs par de nombreuses simulations numériques de réalisations indépendantes de variables aléatoires de loi donnée. Ce procédé est fondé sur la loi des grands nombres qui en assure la convergence. Mais, pour obtenir une précision acceptable, nous verrons qu'il faut accomplir une grande quantité de simulations, ce qui explique que la méthode n'a pu se développer de manière significative que depuis l'introduction massive d'ordinateurs performants.

L'outil de base est un générateur de nombres au hasard qui simule une variable aléatoire de loi uniforme. La plupart des langages de programmation et des logiciels mathématiques en possèdent un :

- la méthode **Math.random** en JAVA,
- les fonctions **rand** et **grand** sous SCILAB.

Ainsi, par exemple, l'application répétée de la fonction **rand** fournit une suite de nombres indépendants les uns des autres et uniformément répartis sur [0,1]. Nous verrons comment, à partir de ce générateur, nous pouvons simuler de nombreux types de loi.

2 Le langage des probabilités

2.1 Expériences et événements aléatoires

a) Expérience Aléatoire.

Définition 2. *Nous appelons* ***expérience aléatoire*** *une expérience $\mathcal{E}$ qui, reproduite dans des conditions identiques, peut conduire à plusieurs résultats possibles, et dont on ne peut prévoir le résultat par avance. L'espace de tous les résultats possibles, appelé* ***espace d'états*** *(associé à l'expérience), sera noté Ω. Un résultat possible de l'expérience est noté classiquement ω. Ainsi, $\omega\in\Omega$.*

Les jeux de hasard, tels Pile ou Face, jeux de cartes, loterie, fournissent des exemples d'expériences aléatoires pour lesquels Ω est fini, mais Ω peut être un espace beaucoup plus compliqué.

Exemple 3. Lancé de deux pièces à Pile ou Face : $\Omega=\{\mathrm{PP},\mathrm{PF},\mathrm{FP},\mathrm{FF}\}$.

Exemple 4. Lancé d'un dé : $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

Exemple 5. Envoi d'une fléchette sur une cible circulaire de 30 cm de diamètre. L'expérience consiste à décrire l'impact de la flèche dans un repère orthonormé de centre le centre de la cible : $\Omega=\left\{(x,y), \sqrt{x^2+y^2}\leqslant 15\right\}$.

Exemple 6. Durée de vie d'une ampoule électrique : $\Omega=[0,+\infty[$.

Exemple 7. Roméo attend Juliette qui lui a promis d'arriver entre minuit et une heure. Quel va être son temps d'attente ? $\Omega=[0,1]$.

Cette longue liste d'exemples montre que l'espace Ω peut varier énormément dans sa structure, d'une expérience à l'autre. Cela permet de réaliser la richesse de la théorie qu'il faut mettre en place, pour créer un modèle qui englobe tous ces cas.

b) Evénements aléatoires.

Définition 8. *Nous appelons* ***événement aléatoire*** *(associé à l'expérience $\mathcal{E}$) un sous-ensemble de Ω dont on peut dire au vu de l'expérience s'il est re´alisé ou non. Un événement est donc une partie de Ω.*

Ainsi, si l'expérience consiste en un lancé de deux dés,

$$A=\{\text{ la somme des deux dés est inférieure à 4 }\}$$

est un événement aléatoire, mais l'ensemble

$$B=\{\text{ le résultat du premier dé lancé est un nombre inférieur à 4}\}$$

n'en est pas un si Ω ne contient que les résultats non ordonnés des tirages.

Ainsi, **les événements aléatoires sont des ensembles.** Nous allons utiliser le formalisme de la théorie des ensembles, en particulier les opérations élémentaires sur les ensembles, pour décrire diverses possibilités de réalisations d'événements.

c) Rappels sur les ensembles.

Considérons un ensemble Ω, c'est à dire une collection d'objets appelés éléments de Ω, ou points de Ω. L'appartenance d'un point ω à l'ensemble Ω est notée $w\in\Omega$, et $\omega \notin \Omega$ signifie que le point ω n'appartient pas à Ω.

Une partie A de Ω est aussi un ensemble, appelé sous-ensemble de Ω. Dans ce cas, A est dit inclus dans Ω, ce qui s'écrit $A\subset\Omega$.

Rappelons les opérations élémentaires sur les parties d'un ensemble.

Intersection. $A\cap B$ est l'intersection des ensembles A et B, c'est à dire l'ensemble des points appartenant à la fois à A et à B.

Réunion. $A\cup B$ est la réunion des ensembles A et B, c'est-à-dire l'ensemble des points appartenant à au moins l'un des deux ensembles.

Ensemble vide. C'est l'ensemble ne contenant aucun point. Il est noté $\varnothing$.

Ensembles disjoints. Les ensembles A et B sont dits disjoints si $A\cap B=\varnothing$.

Complémentaire. Si $A\subset\Omega$, son complémentaire (dans Ω) est l'ensemble des points de Ω n'appartenant pas à A. Il est noté A^c ou parfois $\Omega\setminus A$. Les ensembles A et A^c sont disjoints.

Différence. Si A et B sont deux sous-ensembles de $\Omega, A\setminus B$ désigne l'ensemble des points qui sont dans A mais pas dans B. Ainsi $A\setminus B=A\cap B^c$.

La réunion et l'intersection sont des opérations commutatives et associatives. Nous avons $A\cup B=B\cup A$ et $A\cap B=B\cap A$, et aussi $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ et $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$, ensembles que nous notons naturellement $A\cup B\cup C$ et $A\cap B\cap C$.

Plus généralement, pour une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'ensembles, indexée par un ensemble quelconque I, $\bigcup_{i\in I}A_i$ désigne la **réunion de cette famille**, i.e. l'ensemble des points appartenant à au moins l'un des A_i. De même, $\bigcap_{i\in I}A_i$ désigne **l'intersection de cette famille**, i.e. l'ensemble des points appartenant à tous les A_i. Dans ces deux cas, l'ordre d'indexation des A_i n'a pas d'importance.

Une **partition** de Ω est une famille $(A_i)_{i\in I}$ telle que les ensembles A_i soient disjoints deux-à-deux ($A_i\cap A_j=\varnothing, \forall i,j$), et que $\bigcup_{i\in I}A_i=\Omega$.

d) Modélisation ensembliste des événements aléatoires.

Les événements aléatoires étant des ensembles, (rappelons-nous qu'une partie de Ω décrit un sous-ensemble de résultats possibles de l'expérience), nous pourrons effectuer les opérations ensemblistes précédemment décrites, avec l'interprétation suivante.

Si A et B sont deux événements,

NON. La réalisation de l'événement contraire à A est représentée par A^c : le résultat de l'expérience n'appartient pas à A.

ET. L'événement " A et B sont réalisés" est représenté par $A \cap B$: le résultat de l'expérience se trouve à la fois dans A et dans B.

OU. L'événement " A ou B sont réalisés" est représenté par l'événement $A \cup B$: le résultat de l'expérience se trouve dans A ou dans B.

IMPLICATION. Le fait que la réalisation de l'événement A entraîne la réalisation de B se traduit par $A \subset B$.

INCOMPATIBILITÉ. Si $A \cap B = \varnothing$, A et B sont dits incompatibles. Un résultat de l'expérience ne peut être à la fois dans A et dans B.

TOUJOURS VRAI. L'événement Ω est l'événement certain (tous les résultats de l'expérience prennent leurs valeurs dans Ω).

IMPOSSIBLE. $\varnothing$ est l'événement impossible.

Remarque. Nous notons par $\mathcal{A}$ l'ensemble de tous les événements. Il modélise **l'information** qui peut être obtenue à partir des résultats de l'expérience. Nous pourrons prendre $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, ensemble de toutes les parties de Ω, mais pas toujours et nous verrons pourquoi dans la suite de ce cours.

Remarque. (Fomdamentale) Pour que la modélisation soit cohérente avec l'intuition, $\mathcal{A}$ doit être stable par les opérations ensemblistes ci-dessus : si $A, B \in \mathcal{A}$, alors $A \cap B \in \mathcal{A}$, $A \cup B \in \mathcal{A}$, $A^c \in \mathcal{A}$, mais aussi $\Omega \in A, \varnothing \in A$.

2.2 Probabilité - premières propriétés.

Nous cherchons à définir, pour un ensemble possible de réalisations de l'expérience $A \in \mathcal{A}$, la vraisemblance accordée a priori à A (avant le résultat de l'expérience). Nous voulons donc associer à chaque événement A un nombre $\mathbb{P}(A)$ compris entre 0 et 1, qui représente la chance que cet événement soit réalisé à la suite de l'expérience.

Approche intuitive. Pensons à un jeu de Pile ou Face. Si nous jouons 3 fois, une suite de 3 résultats n'offre presqu'aucune information. En revanche, si nous jouons 10000 fois et si nous obtenons 5003 Pile et 4997 Face, il est tentant de dire que la probabilité que la pièce tombe sur Pile est la même que celle qu'elle tombe sur Face, à savoir $1/2$.

Cette idée intuitive est à la base du raisonnement probabiliste.

Considérons un événement A lié à une expérience aléatoire donnée $\mathcal{E}$. Nous répétons n fois l'expérience $\mathcal{E}$, dans des conditions similaires. Notons n_A le nombre de fois où A est réalisé, et définissons

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

la fréquence de réalisation de A sur ces n coups. Nous avons les propriétés suivantes :

- → $f_n(A) \in [0,1]$; $f_n(\Omega) = 1$;
- → Si A et B sont disjoints, $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$.

L'approche intuitive et naturelle consiste à définir $\mathbb{P}(A)$ comme étant la limite quand n tend vers l'infini des fréquences de réalisation $f_n(A)$.

Intuitivement,

$$\mathbb{P}(A) = \text{limite de } f_n(A) \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty. \tag{1}$$

Des propriétés évidentes des fréquences, nous déduisons immédiatement que

Proposition 9. *Une probabilité est une application réelle définie sur les ensembles aléatoires liés à l'expérience et vérifie les propriétés essentielles suivantes :*

$$0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1 \tag{2}$$

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1, \tag{3}$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \text{ si } A \cap B = \varnothing \tag{4}$$

Il en découle que :

Corollaire 10. *Une probabilité vérifie de plus :*

$$\mathbb{P}(\varnothing)=0, \tag{5}$$

$$\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(A^c)=1, \tag{6}$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i), \text{ si les } A_i \text{ sont deux à deux disjoints,} \tag{7}$$

$$\mathbb{P}(A\cup B)+\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B). \tag{8}$$

$$\mathbb{P}(A)\leqslant \mathbb{P}(B) \text{ si } A\subset B. \tag{9}$$

Démonstration. □

Définition 11. *Un modèle probabiliste est un triplet* $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathbb{P})$ *constitué de l'espace* Ω*, de l'ensemble des événements* $\mathcal{A}$*, et de la famille des* $\mathbb{P}(A)$ *pour* $A\in\mathcal{A}$*. Nous pouvons ainsi considérer* $\mathbb{P}$ *comme une application de* $\mathcal{A}$ *dans* $[0,1]$*, qui vérifie au moins les propriétés (?) et (?) données ci-dessus. (Nous verrons ultérieurement qu'elle doit satisfaire une propriété supplémentaire nécessaire dès que* Ω *n'est pas un espace fini).*

Nous allons maintenant donner des définitions mathématiques rigoureuses de ces objets.

3 Probabilité sur un espace fini - Calcul combinatoire

3.1 Définition

Dans ce paragraphe, nous supposons que l'espace de probabilité Ω est **un ensemble fini**. Dans ce cas, nous choisirons toujours $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)$.

Définition 12. *Une* ***probabilité*** *sur* Ω ***fini*** *est une application* $\mathbb{P}\colon\mathcal{P}(\Omega)\longrightarrow[0,1]$ *qui vérifie* (3) *et* (4)*. Ainsi elle est caractérisée par :*

- $0\leqslant\mathbb{P}(A)\leqslant 1,$
- $\mathbb{P}(\Omega)=1,$
- $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B) \text{ si } A\cap B=\varnothing.$

La probabilité $\mathbb{P}$ *satisfait également les propriétés (5)...(9).*

Comme l'ensemble des singletons $\{\omega\}$, pour $\omega\in\Omega$, est une partition finie de Ω, nous aurons la proposition fondamentale suivante.

Proposition 13. *Supposons que* $\Omega=\{w_1,...,w_n\}$*.*

i. Une probabilité $\mathbb{P}$ *sur* Ω *est entièrement caractérisée par ses valeurs sur les singletons, c'est-à-dire par la famille* $\{p_{w_i}=\mathbb{P}(\{w_i\}), w_i\in\Omega\}$*.*

ii. Etant donnée une famille $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *de nombres réels, il lui correspond une unique probabilité* $\mathbb{P}$ *telle pour tout* $w_i\in\Omega, p_i=\mathbb{P}(\{w_i\})$ *si et seulement si*

$$0\leqslant p_i\leqslant 1, \sum_{i=1}^{n} p_i=1 \tag{10}$$

nous avons alors

$$\forall A\in\mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A)=\sum_{w\in A}\mathbb{P}(\{w\})=\sum_{w\in A} p_w. \tag{11}$$

Remarquons que les sommes dans (11) sont des sommes finies, puisque Ω et donc A, sont de cardinal fini.

Démonstration. Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω, et soit $p_w = \mathbb{P}(\{w\})$. Il est alors évident que $0 \leqslant p_w \leqslant 1$, et (11) découle de (7) puisque toute partie A de Ω est réunion disjointe (et finie) des singletons $\{w\}$, pour les $w \in A$. Nous en déduisons donc (i) et la condition nécessaire de (ii). En effet, la seconde partie de (10) découle de (11) appliqué à $A = \Omega$ et de $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Inversement, considérons n nombres $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ vérifiant (10). Nous posons $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ et pour tout $A \subset \Omega$, nous définissons $\mathbb{P}(A)$ par (10). La vérification de (2), (3) et (4) est immédiate. □

Exemple 14. Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.

L'espace Ω a deux éléments :

$$\Omega = \{w_1, w_2\} \quad \text{et} \quad p_{w_1} = p; p_{w_2} = 1 - p$$

Cette probabilité modélise en particulier la chance pour une pièce de tomber sur Pile (ou Face) dans un jeu de Pile ou Face. Dans ce cas, $\Omega = \{P, F\}$ peut être assimilé plus simplement à $\{0,1\}$. Si la pièce est équilibrée, p sera égal à $1/2$. Mais cette probabilité peut aussi modéliser la probabilité de réalisation d'un des résultats, pour toute expérience aléatoire avec deux résultats possibles (mon premier enfant sera-t-il une fille ou un garçon ?).

3.2 Probabilité Uniforme

Un exemple important de probabilité sur un espace d'états Ω fini est celui de la probabilité uniforme, pour laquelle chaque singleton de Ω a la même chance de réalisation. Ainsi, la définition suivante découle de (?).

Définition 15. *Nous dirons que la probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace fini Ω est uniforme si $p_w = \mathbb{P}(\{\omega\})$ ne dépend pas de ω. Nous avons donc pour tout ω :*

$$p_w = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$$

où card(Ω) *désigne le cardinal de Ω, c'est à dire son nombre d'éléments.*

Proposition 16. *Si $\mathbb{P}$ est une probabilité uniforme sur Ω fini, alors*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} \tag{12}$$

de sorte que le calcul des probabilités se ramène, dans ce cas, à des dénombrements : nous sommes dans le cadre du ***calcul combinatoire****.*

Démonstration. En effet, par (11), $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \sum_{w \in A} p_w$. Or, si $\mathbb{P}$ est une probabilité uniforme, $\forall w \in A$, $p_w = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$.

Ainsi, $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \sum_{w \in A} p_w = \sum_{w \in A} \frac{1}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{\text{card}(\Omega)} \sum_{w \in A} 1 = \frac{1}{\text{card}(\Omega)} \times \text{card}(A)$. □

Remarque 17. Remarquons que sur un espace fini donné Ω, il existe une et une seule probabilité uniforme.

Cette probabilité décrit mathématiquement l'expression intuitive de "au hasard" (tirage au hasard d'une carte, lancé au hasard d'un dé, choix au hasard d'un échantillon dans une population).

3.3 Modèles d'urnes

Dans les calculs de probabilités uniformes sur des ensembles finis, il est fondamental de faire très attention à bien préciser l'espace de probabilité sous-jacent. Cette remarque prend toute son ampleur dans ce paragraphe, où nous allons développer différents "modèles d'urnes" que l'on peut également voir comme des modèles de prélèvement d'échantillons dans une population au cours d'un sondage. Ces modèles interviennent aussi en contrôle de fabrication, ou dans de multiples autres situations.

Le modèle général est le suivant : une urne contient N boules de k couleurs différentes, réparties en N_1 boules de couleur 1, N_2 boules de couleur 2, ..., N_k boules de couleur k. Nous appelons $p_i = \frac{N_i}{N}$ la proportion de boules de couleur i. Tirons au hasard n boules de cette urne, $n \leq N$, et intéressons-nous à la répartition des couleurs dans l'échantillon obtenu. Nous notons par $P_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ la probabilité d'obtenir n_1 boules de couleur 1, n_2 boules de couleur 2,..., n_k boules de couleur k, avec bien sûr $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Nous allons considérer trois façons de tirer les boules au hasard : **tirage avec remise**, **tirage sans remise**, **tirage simultané**. Nous verrons que chaque tirage donnera lieu à un calcul de probabilité et à un résultat différent.

Remarque 18. Le problème du choix du tirage de l'échantillon se pose sans cesse dès que l'on souhaite récolter des données statistiques.

Remarque 19. Pour k et n deux entiers tels que $k \leq n$, nous allons souvent utiliser, dans la suite, le nombre de parties $\binom{n}{k}$ à k éléments dans un ensemble à n éléments, qui vaut :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$$

Tirage exhaustif ou simultané - Loi hypergéométrique.

Nous tirons toutes les boules en même temps. L'ensemble Ω est alors l'ensemble de toutes les parties possibles de n éléments distincts dans un ensemble à N éléments, et le nombre de résultats possibles est$\binom{N}{n}$. Le nombre de cas favorables donnant la bonne répartition des couleurs est alors égal à $\binom{N_1}{n_1}...\binom{N_k}{n_k}$. La probabilité recherchée vaut donc :

$$P_{n_1 n_2 ... n_k} = \frac{\binom{N_1}{n_1}...\binom{N_k}{n_k}}{\binom{N}{n}} \tag{13}$$

Cette distribution s'appelle **la distribution polygéométrique.** Dans le cas de deux couleurs, elle vaudra

$$P_{n_1 n - n_1} = \frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N-N_1}{n-n_1}}{\binom{N}{n}}$$

qui est appelée distribution (ou loi) **hypergéométrique**.

Ainsi, si dans une fabrication en série, nous savons que parmi N pièces usinées, M sont à mettre au rebut, et si nous choisissons au hasard et simultanément un échantillon de n pièces, la probabilité pour que cet échantillon contienne k pièces défectueuses sera :

$$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Tirage avec remise - La loi binomiale.

Les tirages sont successifs. Nous replaçons la boule tirée dans l'urne avant le tirage suivant. Nous pouvons donc tirer plusieurs fois la même boule. L'ensemble Ω est alors l'ensemble de tous les n-uplets d'éléments de l'urne. Toutes les répétitions étant possibles, card$(\Omega) = N^n$. Nous munissons Ω de sa probabilité uniforme. Le nombre de façons de déterminer les places des k couleurs parmi n est égal au nombre de façons de partager n en k parties de tailles n_i, à savoir $\frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}$. Une fois la place des couleurs choisies, nous avons N_i possibilités pour chaque boule de couleur i. Le nombre de n-uplets de répartition $n_1, n_2, ..., n_k$ est alors égal à $\frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!} N_1^{n_1} ... N_k^{n_k}$. Nous avons donc finalement

$$P_{n_1 n_2 ... n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!} \frac{N_1^{n_1} ... N_k^{n_k}}{N^n} \tag{14}$$

Cette probabilité est appelée **une distribution multinomiale**. Dans le cas particulier où $k = 2$, $p_1 = p = \frac{N_1}{N}$ et $p_2 = 1 - p$, la probabilité définie par

$$P_{n_1, n - n_1} = \binom{n}{n_1} p^{n_1} (1-p)^{n - n_1} \tag{15}$$

sera appelée **loi binomiale** de paramètres n et p. (Elle fait intervenir les coefficients du binôme, d'où son nom). Attention, les paramètres ne sont pas interchangeables : $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$. Notons également que cette probabilité est définie sur l'espace $\Omega = \{0,1,2,...,n\}$ comportant $n+1$ éléments.

Remarque 20. le lecteur pourra vérifier que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = 1.$$

Tirage sans remise.

Nous tirons maintenant successivement les boules de l'urne, mais sans les replacer dans l'urne après tirage. L'ensemble Ω est alors l'ensemble des suites de n éléments distincts parmi N et le nombre de cas possibles sera $N(N-1)...(N-n+1) = A_N^n$.

En raisonnant comme dans le cas avec remise, nous pouvons montrer que le nombre de cas favorables vaut $\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!} A_{N_1}^{n_1}...A_{N_k}^{n_k}$, ce qui finalement donne pour probabilité la même que celle du cas de tirage simultané :

$$P_{n_1 n_2 ... n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!} \frac{A_{N_1}^{n_1}...A_{N_k}^{n_k}}{A_N^n} = \frac{\binom{N_1}{n_1}...\binom{N_k}{n_k}}{\binom{N}{n}} \tag{16}$$

Ainsi, il y a équivalence du tirage sans remise et du tirage simultané, du point de vue de la composition de l'échantillon, et l'on peut se permettre de ne pas prendre en compte l'ordre des individus dans le tirage.

3.4 Exerices d'application

Exercice 1. Les yeux bandés, vous manipulez 7 fiches où sont écrites les lettres E, E, T, B, R, L, I. Quelle est la probabilité que vous écriviez le mot LIBERTE.

Exercice 2. On tire au hasard quatre cartes d'un jeu de cinquante-deux cartes. Quelle est la probabilité pour que, parmi ces quatre cartes, il y ait exactement deux rois ?

Exercice 3. On lance trois dés parfaitement équilibrés. Montrer que la probabilité que la somme des points amenés dépasse dix est égale à la probabilité que cette somme ne dépasse pas dix. (Cela permettra de construire un jeu parfaitement équitable...)

Exercice 4. Parmi n personnes en présence ($n \leq 365$), quelle est la probabilité pour qu'au moins deux personnes soient nées le même jour ? (On conviendra de ne pas prendre en compte les personnes nées le 29 février). Que vaut cette probabilité pour $n=4, n=16, n=22, n=40, n=64$?

Exercice 5. Un facteur possède n lettres adressées à n destinataires distincts. Il est totalement ivre et poste au hasard une lettre par boîte.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir la bonne répartition ?
2. Quelle est la probabilié qu'une lettre au moins arrive à la bonne adresse ?
3. Quelle est la probabilité qu'aucune lettre n'arrive à la bonne destination ?
4. Quel est le nombre dn de manières différentes de poster les lettres de telle sorte qu'aucune n'arrive à destination ?