

Доклад

Программное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Демидова Е. А.

29 мая 2023

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Информация

- Демидова Екатерина Алексеевна
- студентка группы НКНбд-01-21
- Российский университет дружбы народов
- <https://github.com/eademidova>



Введение

Исследовать программные решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

- Описать метод Эйлера и методы Рунге-Кутты
- Исследовать возможности Octave и Julia для решения ОДУ
- Решить конкретную задачу Коши с помощью Octave и Julia
- Провести сравнительный анализ результатов

Общие сведения о дифференциальных уравнениях

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$y'(x) = f_k(x, y(x)), \quad (1)$$

$$y = y_1, y_2, \dots, y_n, f = f_1, f_2, \dots, f_n.$$

Численные методы

Метод Эйлера

Требуется найти функцию $y = y(x)$, являющуюся решением задачи Коши.

$$y'(x) = f(x, y) \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

Проведём разбиение отрезка $[x_0; x_n]$.

$$x_i = x_0 + ih, i = \overline{1, n}$$
$$h = \frac{x_n - x_0}{n}$$

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + y''(x_0)\frac{h^2}{2} + \dots$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Методы Рунге-Кутты

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^n b_i k_i,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(x_n, y_n), \\ k_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} h k_1), \\ \dots \\ k_s = f(x_n + c_s h, y_n + a_{s1} h k_1 + a_{s2} h k_2 + \dots + a_{s,s-1} h k_{s-1}). \end{array} \right.$$

Таблица 1: Таблица Бутчера

c_1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1s}
c_2	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2s}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	a_{ss}
	b_1	b_2	\dots	b_s

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i \text{ для } i = 2, \dots, s.$$

Таблица 2: Таблица Бутчера для метода Богацки-Шампина

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$		
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	
	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	0
	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$

Решение задачи Коши с помощью программных средств

$$\begin{cases} y'(x) = 11y + e^{10x} + x^4 + x^3 - \sin(x) \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

$$y(x) = -\frac{x^4}{11} - \frac{15x^3}{121} - \frac{45x^2}{1331} - \frac{90x}{14641} + \frac{\cos(x)}{122} + \frac{11\sin(x)}{122} + \frac{117739261e^{11x}}{19648222} - e^{10x} - \frac{90}{161051}$$

Решение задачи Коши с помощью Octave

- `ode23(@f, interval, X0, options)` – метод Богацки-Шампина
- `ode45(@f, interval, X0, options)` – метод Дормана-Принса

Опции:

- `RelTol` – относительная точность решения
- `AbsTol` – абсолютная точность решения
- `InitialStep` – начальное значение шага
- `MaxStep` – максимальное значение шага

```
function dydx = f(x,y)
    dydx = y*11 + exp(10*x) + (x^4 + x^3) - sin(x);
endfunction

[X23,Y23]=ode23(@f,[0 0.5],5);
```

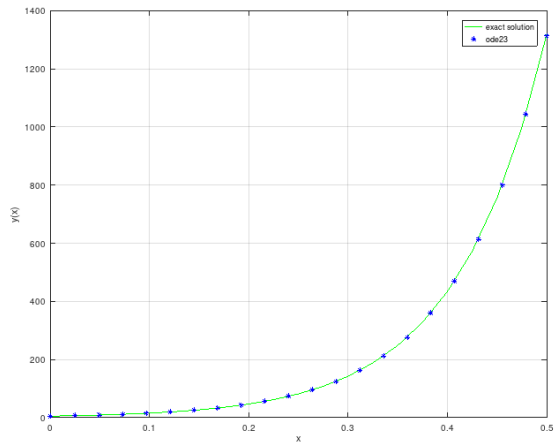



Рис. 1: Графики решения методом ode23() и точного решения

```
function dydx = f(x,y)
    dydx = y*11 + exp(10*x) + (x^4 + x^3) - sin(x);
endfunction

[X45,Y45]=ode45(@f,[0 0.5],5);
```

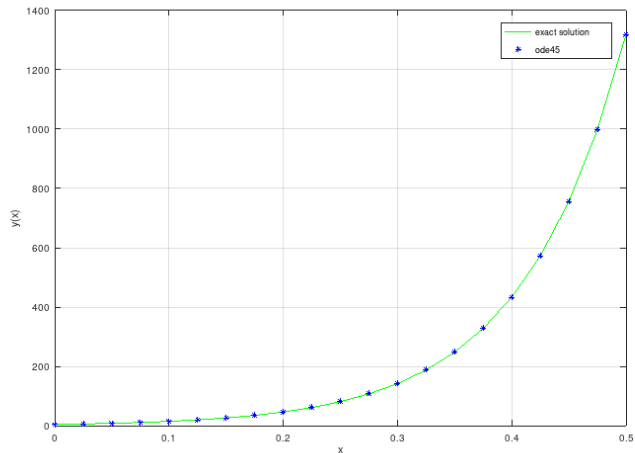


Рис. 2: Графики решения методом ode45() и точного решения

Решение задачи Коши с помощью Julia

- `ODEProblem(f::ODEFunction,u0,tspan,p=NULLParameters();kwargs...)`
- `solve(prob, alg; kwargs)`
 - `BS3()` – соответствует `ode23()`
 - `DP5()` – соответствует `ode45()`

```
function F!( y, p, x)
    dydx = x*11+exp(10*x)+(x.^4+x.^3)-sin(x);
end

begin
    x0 = 5.0
    X = (0.0, 0.5)
    prob = ODEProblem(F!, y0, x)
end

sol = solve(prob, BS3(), dtmax=0.025, dt=0.025, abstol = 1e-3, reltol = 1e-3)
```

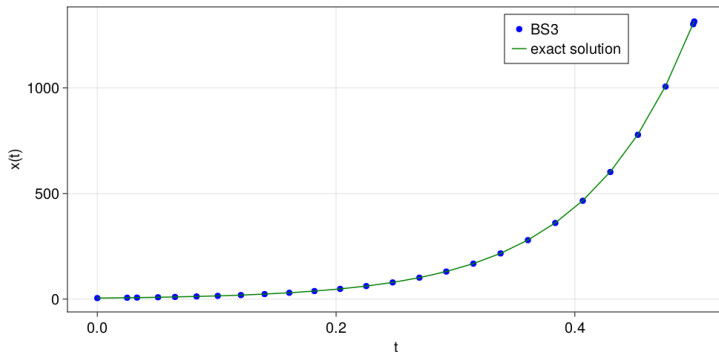


Рис. 3: Графики решения методом BS3() и точного решения

```
function F!( y, p, x)
    dydx = x*11+exp(10*x)+(x.^4+x.^3)-sin(x);
end

begin
    x0 = 5.0
    X = (0.0, 0.5)
    prob = ODEProblem(F!, y0, x)
end

sol = solve(prob, DP5(), dtmax=0.025, dt=0.025, abstol = 1e-3, reltol = 1e-3)
```

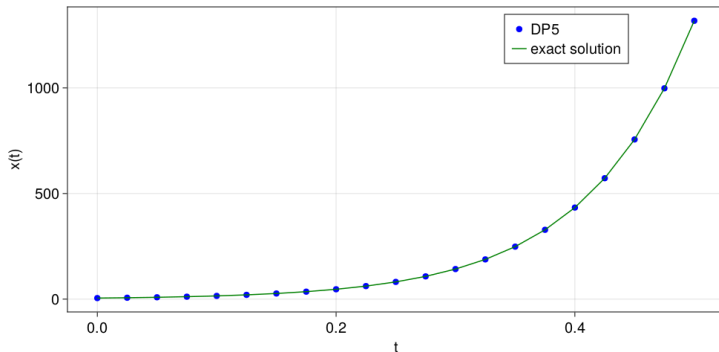



Рис. 4: Графики решения методом $DP5()$ и точного решения

Сравнительный анализ решений

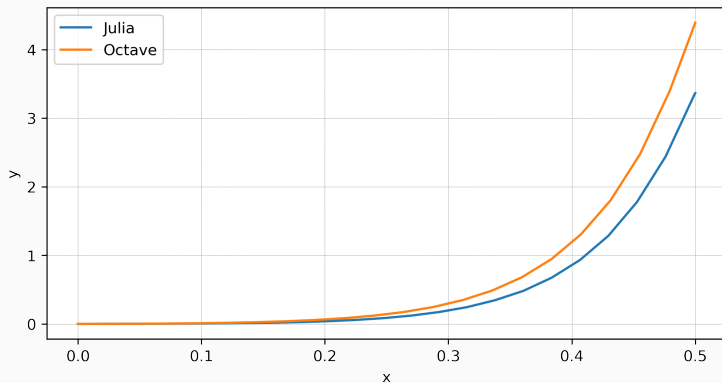


Рис. 5: Абсолютные погрешности

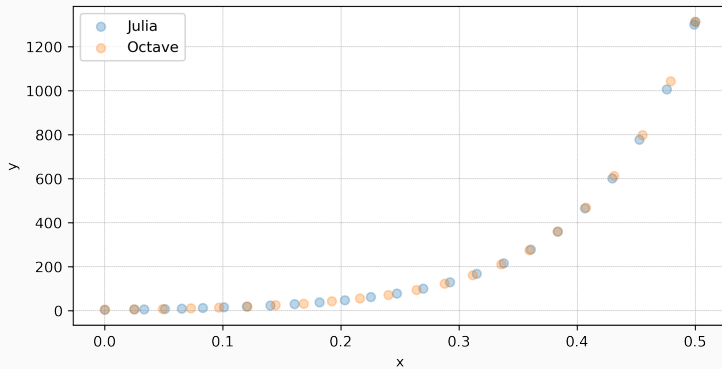


Рис. 6: Найденные точки решения

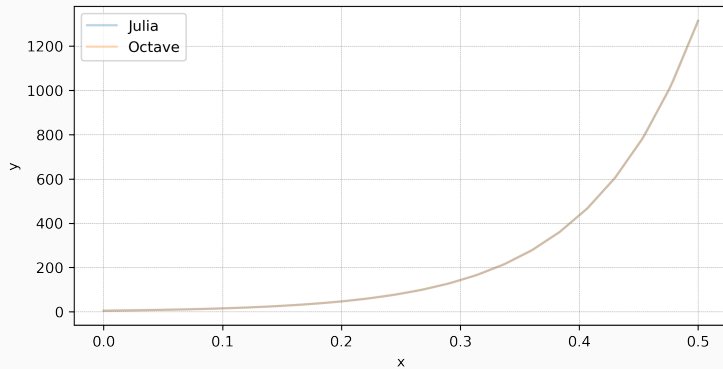


Рис. 7: Найденные решения

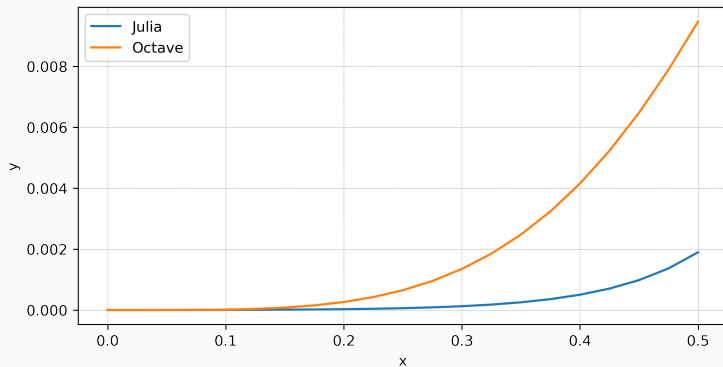


Рис. 8: Абсолютные погрешности

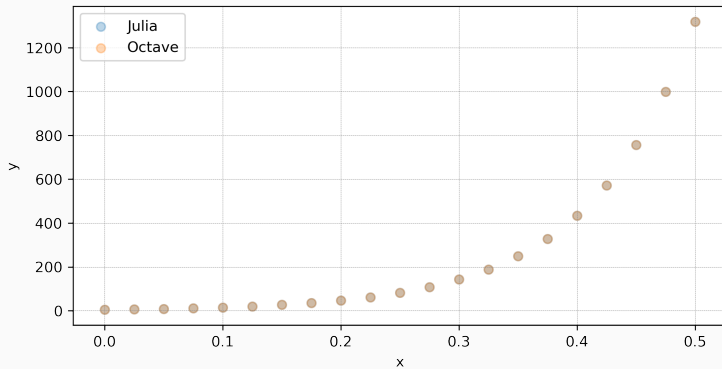


Рис. 9: Найденные точки решения

Сравнение решений методом Дормана-Принса

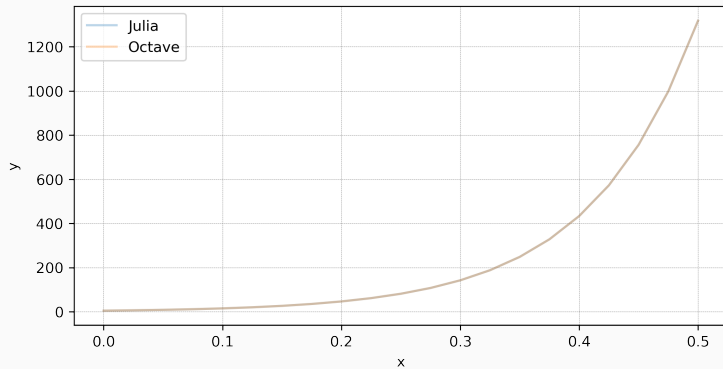


Рис. 10: Найденные решения

Выводы

- Программные решения достаточно точно решают задачу Коши
- Julia решает точнее Octave

1. Понтрягин Л.С. Дифференциальные уравнения и их приложения. Наука, 1988. 207 с.
2. Калиткин Н.Н. Численные методы. Наука, 1978. 512 с.
3. GNU Octave Documentation [Электронный ресурс]. Free Software Foundation, 2023. URL: https://docs.octave.org/v4.2.0/Matlab_002dcompatible-solvers.html.
4. Julia Documentation [Электронный ресурс]. JuliaLang.org contributors, 2023. URL: <https://docs.sciml.ai/DiffEqDocs/stable/>.