

Этап 1

Научная проблема проекта Хищник-жертва

Беличева Д. М., Демидова Е. А.,
Самигуллин Э. А., Смирнов-Мальцев Е. Д.

Содержание

1	Введение	3
1.1	Цель работы	3
1.2	Задачи	3
2	Теоретическое описание задачи	5
3	Аналитическое исследование модели	7
4	Постановка задачи	8
5	Выводы	9
	Список литературы	10

1 Введение

Математическая модель Лотки – Вольтерры (зачастую называемая модель «хищник - жертва») является одной из наиболее популярных моделей, используемых в экологии, однако свое применение она так же нашла в биологии, медицине, социальных исследованиях, истории, радиофизике и других науках.

На основе классической модели Лотки – Вольтерры образовался целый класс моделей типа Лотки – Вольтерры, состоящий из различных обобщений и модификаций классической модели. Новые модели учитывают дополнительные факторы внешней среды и внутреннего взаимодействия видов. Однако, несмотря на многообразие уже построенных математических моделей, большинство из них не подвергалось глубокому качественному анализу, необходимому для рационального приложения их к реальным процессам.

1.1 Цель работы

Исследование модели Лотки-Вольтерра.

1.2 Задачи

- Описание модели “Хищник-жертва” и её аналитическое исследование.
- Построить график зависимости изменения численности хищников от изменения численности жертв (фазовый портрет) и графики изменения численности хищников и жертв в зависимости от времени.

- Найти стационарное состояние системы, которая описывается моделью “Хищник-жертва”.

2 Теоретическое описание задачи

Модель “Хищник-жертва” основывается на следующих предположениях [1]:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса (экспоненциальный рост с постоянным темпом), при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y – число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c – естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность

взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников. Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxu в правой части уравнения).

3 Аналитическое исследование модели

Найдём стационарное состояние системы. Для этого приравняем её правые части к нулю.

$$\begin{cases} ax(t) - bx(t)y(t) = 0 \\ -cy(t) + dx(t)y(t) = 0 \end{cases}$$

Из полученной системы получаем, что стационарное состояние системы будет в точке $x_0 = c/d, y_0 = a/b$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки.

4 Постановка задачи

В лесу проживают x число волков, питающихся зайцами, число которых в этом же лесу y . Пока число зайцев достаточно велико, для прокормки всех волков, численность волков растет до тех пор, пока не наступит момент, что корма перестанет хватать на всех. Тогда волки начнут умирать, и их численность будет уменьшаться. В этом случае в какой-то момент времени численность зайцев снова начнет увеличиваться, что повлечет за собой новый рост популяции волков. Такой цикл будет повторяться, пока обе популяции будут существовать. Помимо этого, на численность стаи влияют болезни и старение. Данная модель описывается следующим уравнением:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

a, d - коэффициенты смертности, b, c - коэффициенты прироста популяции.

1. Построить график зависимости x от y и графики функций $x(t), y(t)$.
2. Найти стационарное состояние системы

5 Выводы

Во время выполнения первого этапа группового проекта мы сделали теоретическое описание модели “Хищник-жертва”, аналитически исследовали её и поставили задачу нашей работы.

Список литературы

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. Наука, 1976. 354 с.