Доклад

Программное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Демидова Е. А.

29 мая 2023

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Информация

Докладчик

- Демидова Екатерина Алексеевна
- студентка группы НКНбд-01-21
- Российский университет дружбы народов
- https://github.com/eademidova

Введение

Цель работы

Исследовать программные решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задачи

- Описать метод Эйлера и методы Рунге-Кутты
- Исследовать возможности Octave и Julia для решения ОДУ
- Решить конкретную задачу Коши с помощью Octave и Julia
- Провести сравнительный анализ результатов

Общие сведения о дифференциальных уравнениях

Дифференциальное уравнение n-го порядка

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Система дифференциальных уравнений первого порядка

$$y'(x) = f_k(x, y(x)), \tag{1}$$

$$y = y_1, y_2, \dots, y_n, f = f_1, f_2, \dots, f_n.$$

Численные методы

Метод Эйлера

Требуется найти функцию $y = y(x)$, являющуюся решением задачи Коши.

$$y'(x) = f(x, y) \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

Проведём разбиение отрезка $[x_0; x_n]$.

$$x_i = x_0 + ih, i = \overline{1, n}$$
$$h = \frac{x_n - x_0}{n}$$

Метод Эйлера

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + y''(x_0)\frac{h^2}{2} + ...$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Методы Рунге-Кутты

Схема метода

$$\mathsf{y}_{n+1} = \mathsf{y}_n + h \sum_{i=1}^{n} b_i \mathsf{k}_i,$$

$$\begin{cases} \mathsf{k}_1 = \mathsf{f}(x_n, \mathsf{y}_n), \\ \mathsf{k}_2 = \mathsf{f}(x_n + c_2 h, \mathsf{y}_n + a_{21} h \mathsf{k}_1), \\ \ldots \\ \mathsf{k}_s = \mathsf{f}(x_n + c_s h, \mathsf{y}_n + a_{s1} h \mathsf{k}_1 + a_{s2} h \mathsf{k}_2 + \cdots + a_{s,s-1} h \mathsf{k}_{s-1}). \end{cases}$$

Таблица 1: Таблица Бутчера

$$
\begin{array}{c|cccc}
c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\
c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_s
\end{array}
$$

$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i$ для $i = 2, \dots, s$.

Таблица Бутчера для метода Богацки-Шампина

Таблица 2: Таблица Бутчера для метода Богацки-Шампина

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} & & \\
1 & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \\
\hline
 & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & 0 \\
 & \frac{7}{24} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{8}
\end{array}
$$

Решение задачи Коши с помощью программных средств

Рассматриваемая задача Коши

$$\begin{cases} y'(x) = 11y + e^{10x} + x^4 + x^3 - sin(x) \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

Точное решение

$$y(x) = -\frac{x^4}{11} - \frac{15x^3}{121} - \frac{45x^2}{1331} - \frac{90x}{14641} + \frac{cos(x)}{122} + \frac{11sin(x)}{122} + \frac{117739261e^{11x}}{19648222} - e^{10x} - \frac{90}{161051}$$

Решение задачи Коши с помощью Octave

Методы решения в Octave

- `ode23(@f, interval, X0, options)` – метод Богацки-Шампина
- `ode45(@f, interval, X0, options)` – метод Дормана-Принса

Опции:

- `RelTol` – относительная точность решения
- `AbsTol` – абсолютная точность решения
- `InitialStep` – начальное значение шага
- `MaxStep` – максимальное значение шага

Решение методом Богацки-Шампина в Octave

```
function dydx = f(x,y)
  dydx = y*11 +exp(10*x)+(x^4+x^3)-sin(x);
endfunction

[X23,Y23]=ode23(@f,[0 0.5],5);
```

Решение методом Богацки-Шампина в Octave

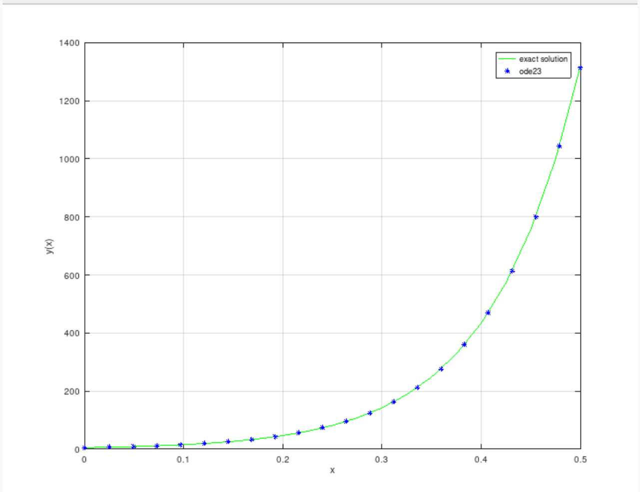

Рис. 1: Графики решения методом ode23() и точного решения

Решение методом Дормана-Принса в Octave

```
function dydx = f(x,y)
  dydx = y*11 +exp(10*x)+(x^4+x^3)-sin(x);
endfunction

[X45,Y45]=ode45(@f,[0 0.5],5);
```

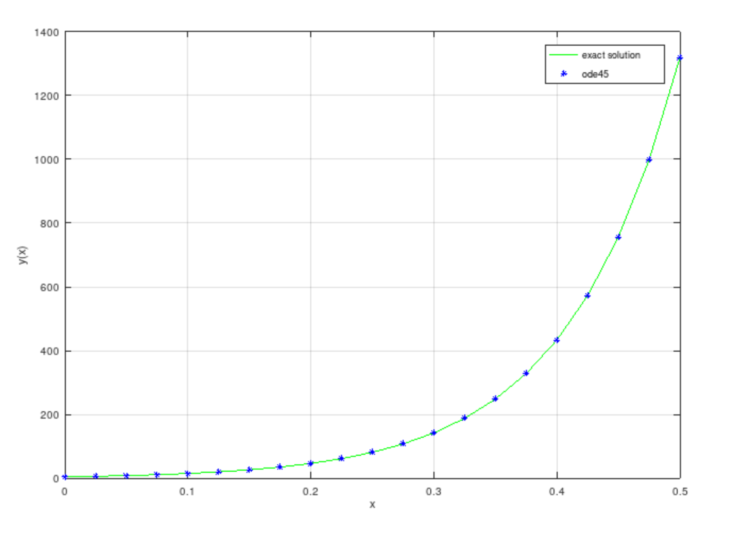

Рис. 2: Графики решения методом ode45() и точного решения

Решение задачи Коши с помощью Julia

- `ODEProblem(f::ODEFunction,u0,tspan,p=NullParameters();kwargs...)`
- `solve(prob, alg; kwargs)`
    - `BS3()` – соответствует `ode23()`
    - `DP5()` – соответствует `ode45()`

```julia
function F!( y, p, x)
    dydx = x*11+exp(10*x)+(x.^4+x.^3)-sin(x);
end

begin
    x0 = 5.0
    X = (0.0, 0.5)
    prob = ODEProblem(F!, y0, x)
end

sol = solve(prob, BS3(), dtmax=0.025, dt=0.025, abstol = 1e-3, reltol = 1e-3)
```

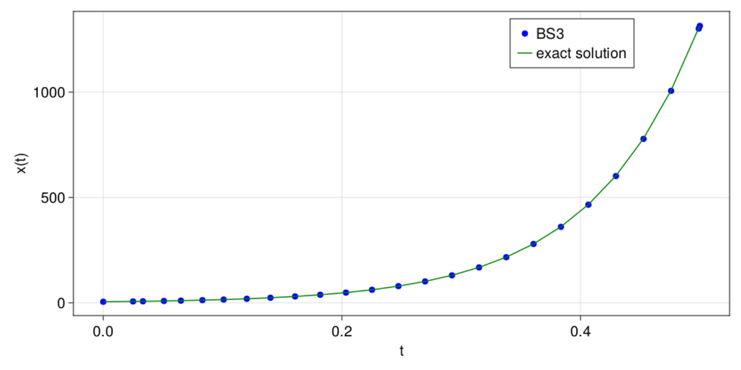

Рис. 3: Графики решения методом BS3() и точного решения

```
function F!( y, p, x)
    dydx = x*11+exp(10*x)+(x.^4+x.^3)-sin(x);
end

begin
    x0 = 5.0
    X = (0.0, 0.5)
    prob = ODEProblem(F!, y0, x)
end

sol = solve(prob, DP5(), dtmax=0.025, dt=0.025, abstol = 1e-3, reltol = 1e-3)
```

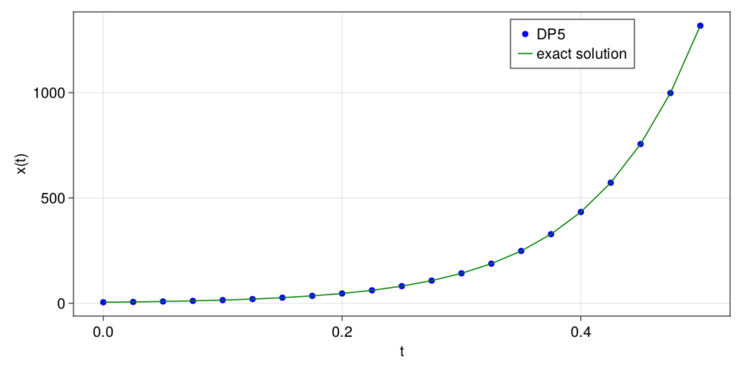

Рис. 4: Графики решения методом DP5() и точного решения

Сравнительный анализ решений

Сравнение решений методом Богацки-Шампина

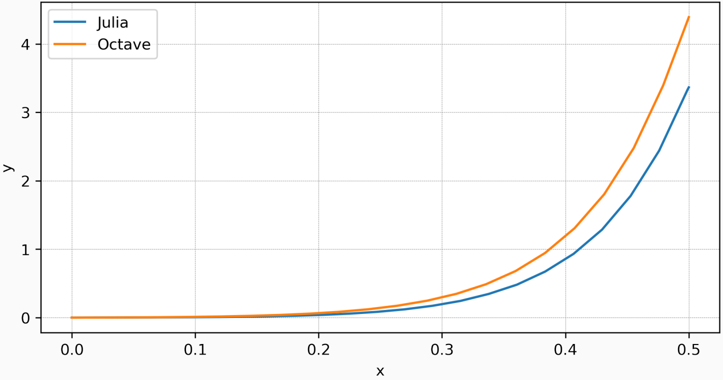

Рис. 5: Абсолютные погрешности

Сравнение решений методом Богацки-Шампина

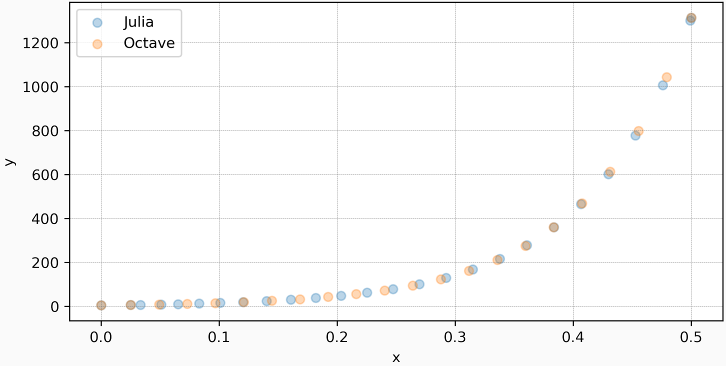

Рис. 6: Найденные точки решения

Сравнение решений методом Богацки-Шампина

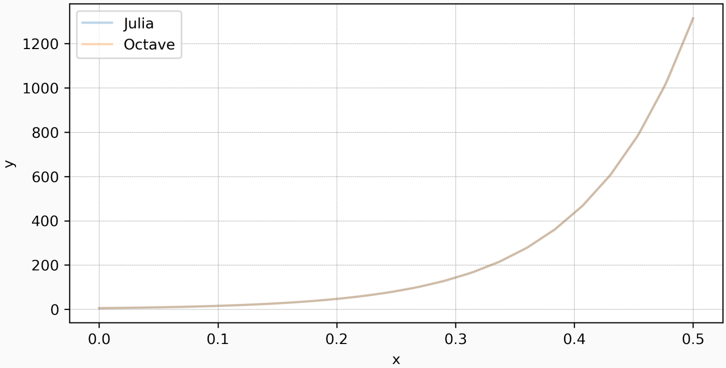

Рис. 7: Найденные решения

Сравнение решений методом Дормана-Принса

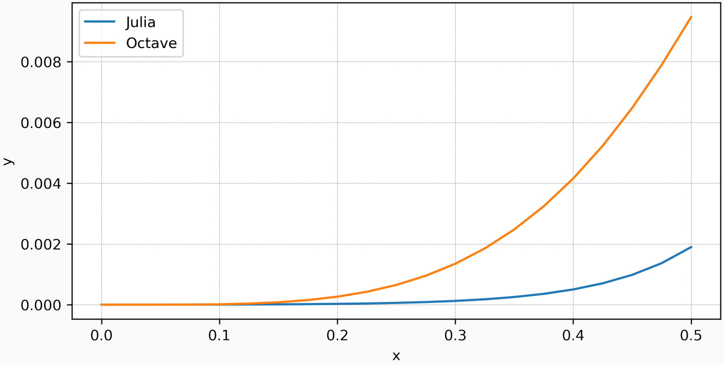

Рис. 8: Абсолютные погрешности

Сравнение решений методом Дормана-Принса

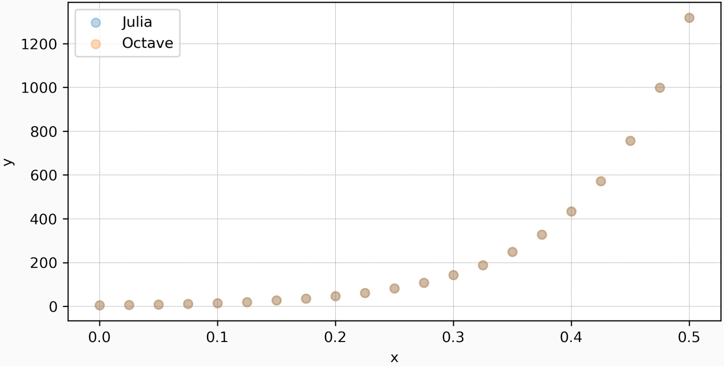

Рис. 9: Найденные точки решения

Сравнение решений методом Дормана-Принса

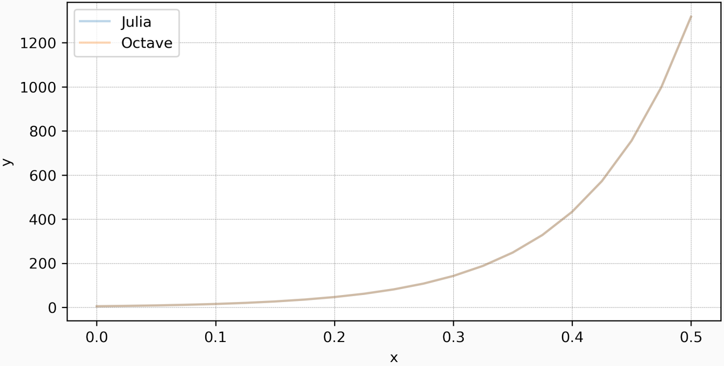

Рис. 10: Найденные решения

Выводы

Выводы

- Программные решения достаточно точно решают задачу Коши
- Julia решает точнее Octave

Список литературы

1. Понтрягин Л.С. Дифференциальные уравнения и их приложения. Наука, 1988. 207 с.
2. Калиткин Н.Н. Численные методы. Наука, 1978. 512 с.
3. GNU Octave Documentation [Электронный ресурс]. Free Software Foundation, 2023. URL: https://docs.octave.org/v4.2.0/Matlab_002dcompatible-solvers.html.
4. Julia Documentation [Электронный ресурс]. JuliaLang.org contributors, 2023. URL: https://docs.sciml.ai/DiffEqDocs/stable/.