Лабораторная работа № 5

Модель эпидемии (SIR)

Демидова Екатерина Алексеевна

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Исследование модели эпидемии (SIR) с помощью xcos и OpenModelica.

2 Задание

- Реализовать классическую модель SIR с помощью xcos(в том числе с помощью блока Modelica) и OpenModelica.
- Реализовать модель SIR с учетом демографических признаков с помощью xcos(в том числе с помощью блока Modelica) и OpenModelica.
- Исследовать модель SIR с учетом демографических признаков, изменяя параметры.

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Математическая модель

$$
\begin{cases}
\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta IS}{N}, \\
\frac{dI}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - \gamma I, \\
\frac{dR}{dt} = \gamma I,
\end{cases}
$$

где S – численность восприимчивой популяции, I – численность инфицированных, R – численность удаленной популяции (в результате смерти или выздоровления), и N – это сумма этих трёх, а β и γ - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно

3.2 Реализация модели в xcos

Зафиксируем начальные параметры в меню *Моделирование, Задать переменные окружения*, а затем построим модель при помощи блоков моделирования(рис. [3.1], [3.2]).

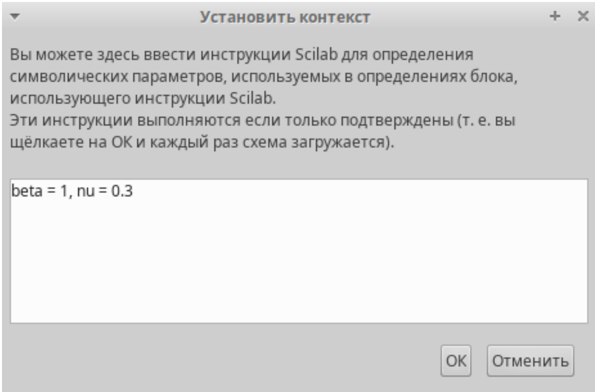

Рис. 3.1: Задать переменные окружения в xcos

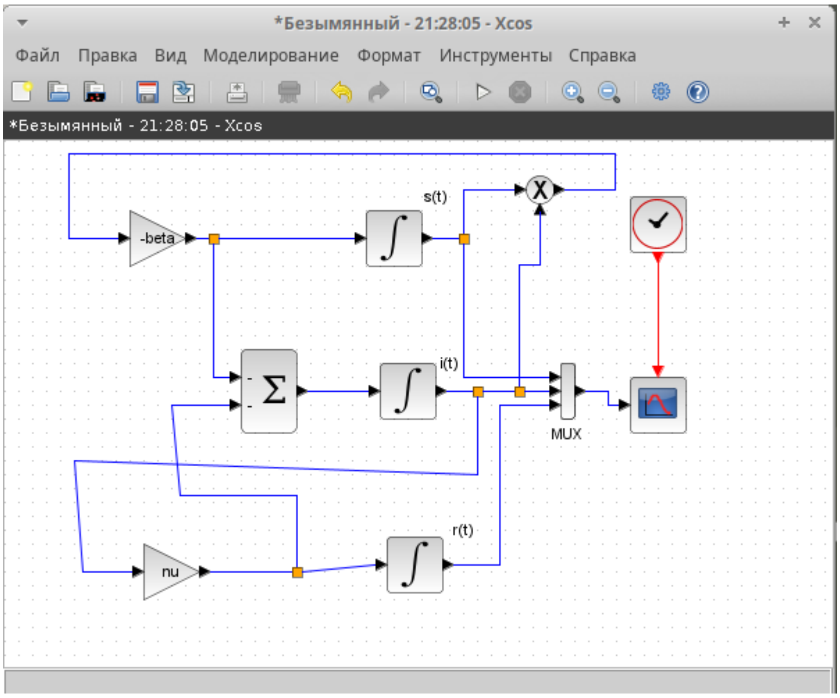

Рис. 3.2: Модель SIR в xcos

Для реализации модели потребовались следующие блоки xcos: - CLOCK_c – запуск часов модельного времени; - CSCOPE – регистрирующее устройство для построения графика; - TEXT_f – задаёт текст примечаний; - MUX – мультиплексер, позволяющий в данном случае вывести на графике сразу несколько кривых; - INTEGRAL_m – блок интегрирования; - GAINBLK_f – в данном случае позволяет задать значения коэффициентов β и ν; - SUMMATION – блок суммирования; - PROD_f – поэлементное произведение двух векторов на входе блока.

Первое уравнение модели задано верхним блоком интегрирования, блоком произведения и блоком задания коэффициента β. Блок произведения соединён с выходами верхнего и среднего блоков интегрирования и блоком коэффициента β, что реализует математическую конструкцию $\beta s(t)i(t)$. Третье уравнение модели задано нижним блоком интегрирования и блоком задания коэффициента ν. Для реализации математической конструкции $\nu i(t)$ соединяем выход среднего блока интегрирования и вход блока задания коэффициента ν, а результат передаём на вход нижнего блока интегрирования.

Средний блок интегрирования и блок суммирования определяют второе уравнение модели, которое по сути является суммой правых частей первого и третьего уравнений. Для реализации соединяем входы верхнего и нижнего блоков интегрирования с входами блока суммирования, меняя при этом в его параметрах оба знака на минус. Выход блока суммирования соединяем с входом среднего блока интегрирования

Зафиксируем начальные значения(рис. [3.3], [3.4]).

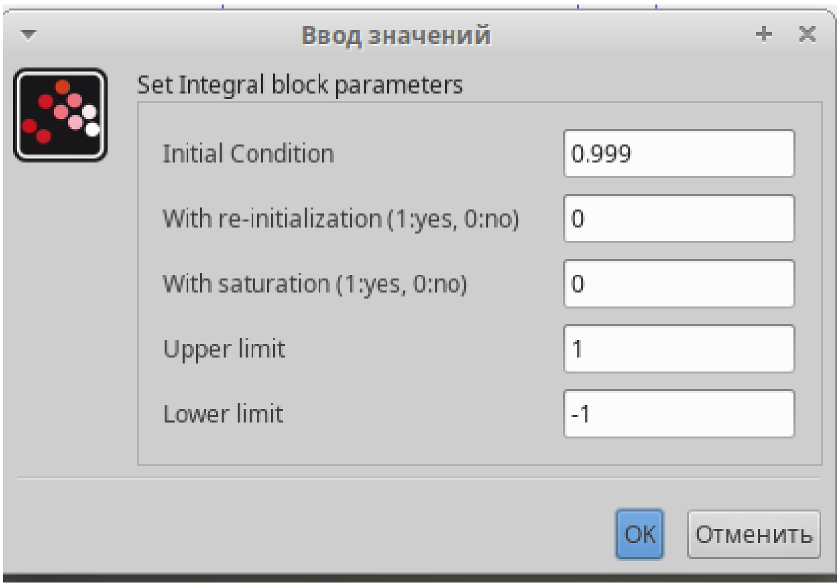

Рис. 3.3: Задать начальные значение в блоке интегрирования для S

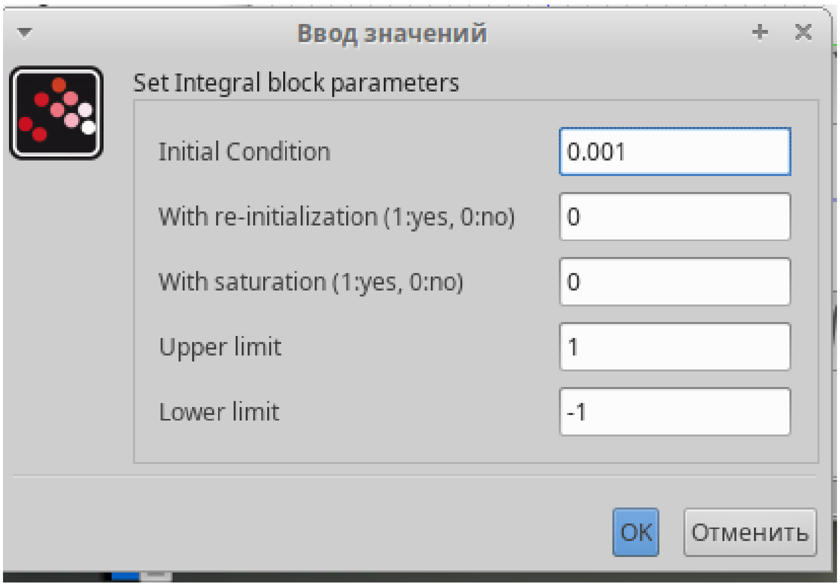

Рис. 3.4: Задать начальные значение в блоке интегрирования для I

Также зададим время интегрирования равное 30(рис. [3.5]).

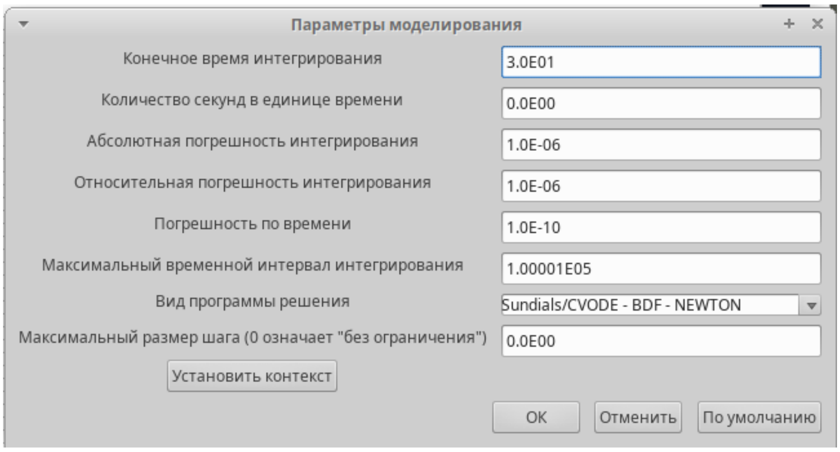

Рис. 3.5: Задать конечное время интегрирования в xcos

Решение модели SIR выглядит следующим образом(рис. [3.6]).

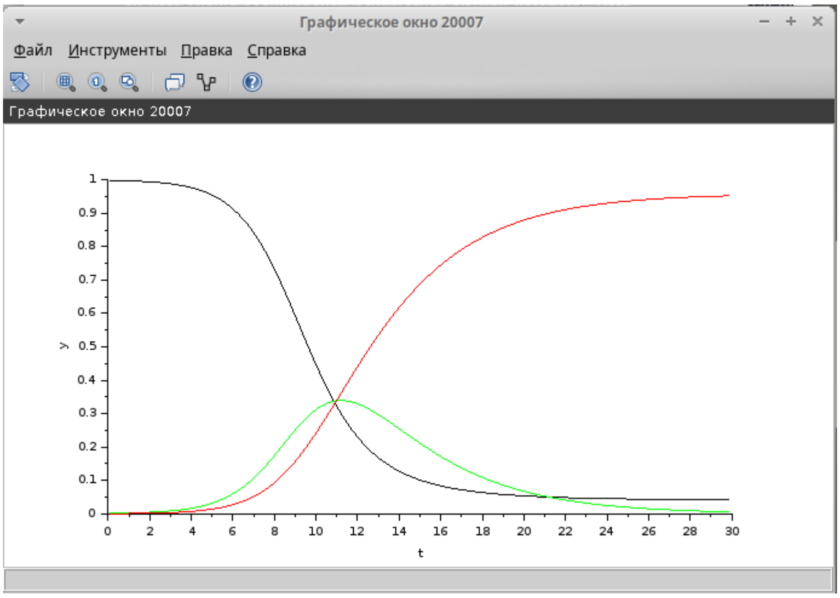

Рис. 3.6: График решения модели SIR при $\beta = 1, \nu = 0.3$

3.3 Реализация модели с помощью блока Modelica в xcos

Для реализации модели с помощью языка Modelica помимо блоков CLOCK_c, CSCOPE, TEXT_f и MUX требуются блоки CONST_m – задаёт константу; MBLOCK(Modelica generic) – блок реализации кода на языке Modelica(рис. [3.7]).

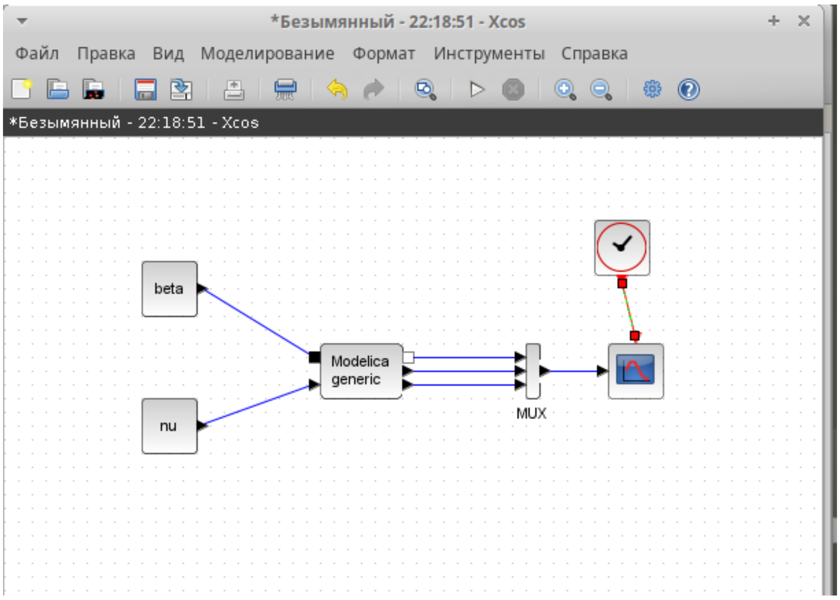

Рис. 3.7: Модель SIR в xcos с применением блока Modelica

Задаём значения переменных β и ν. Параметры блока Modelica gеременные на входе (“beta”, “nu”) и выходе (“s”, “i”, “r”) блока заданы как внешние (“E”).Затем прописываем дифференциальное уравнение(рис. [3.8], [3.9]).

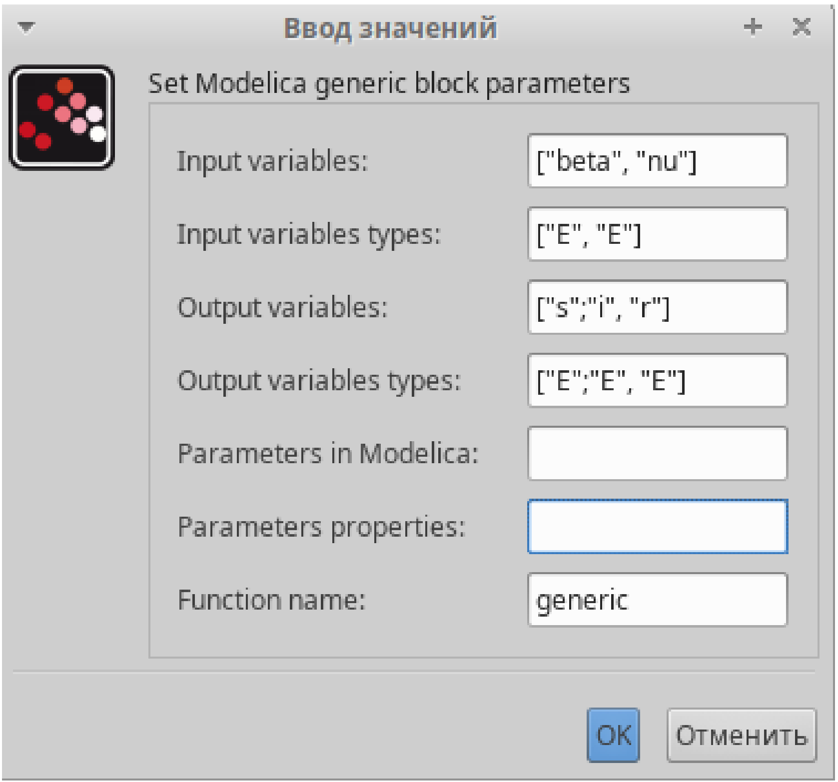

Рис. 3.8: Ввод значений входных параметров блока Modelica для модели

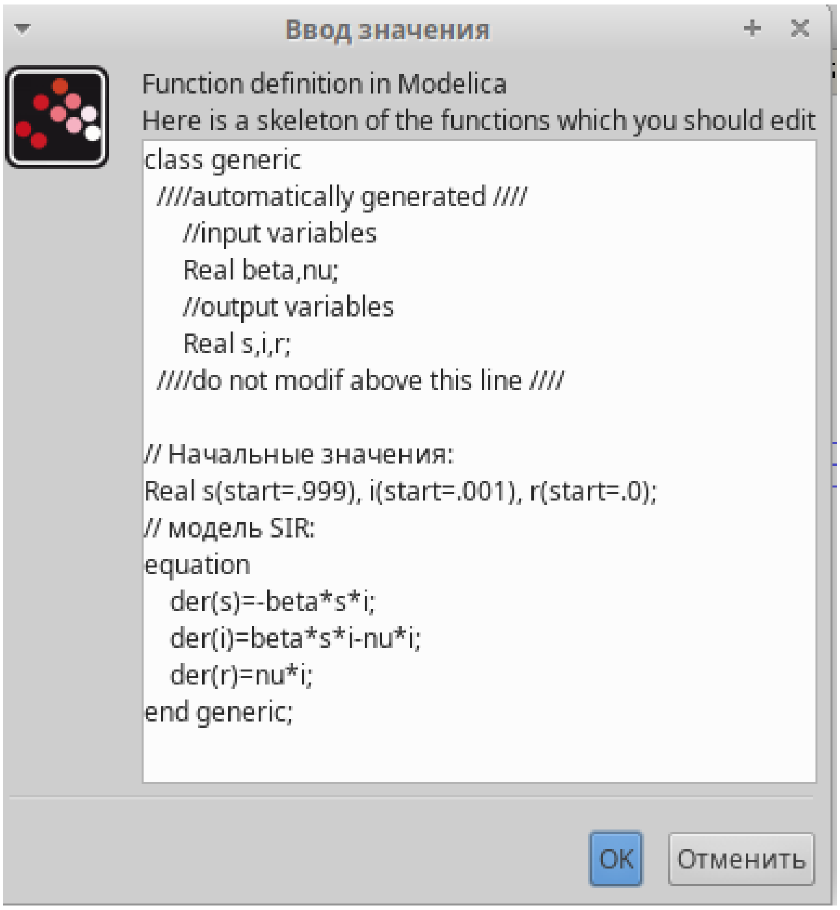

Рис. 3.9: Ввод функции блока Modelica для модели

В результате получим аналогичное предыдущему решение(рис. [3.10]).

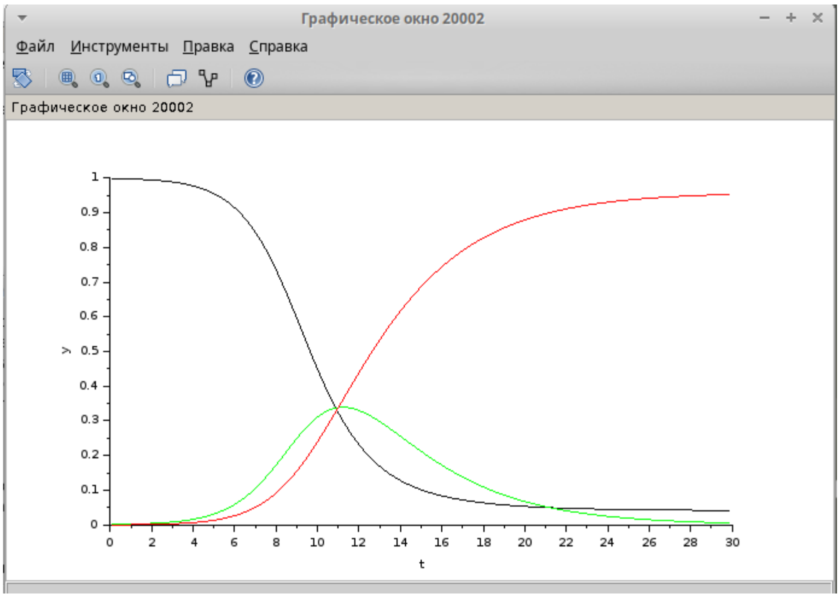

Рис. 3.10: График решения модели SIR при $\beta = 1, \nu = 0.3$. Блок Modelica

3.4 Реализация модели в OpenModelica

Реализуем модель в OpenModelica. Для этого создадим файл модели, пропишем там параметры и начальные условие, а также дифференциальное уравнение(рис. [3.11]).

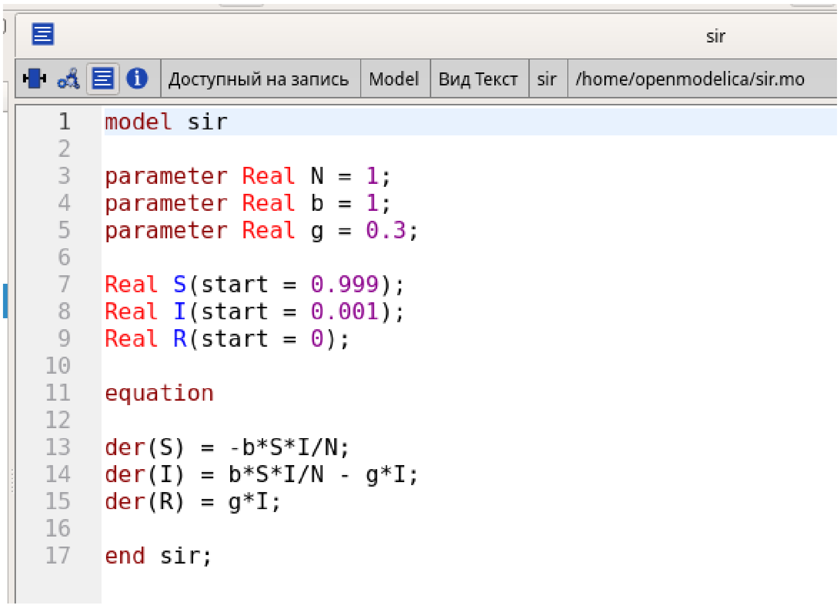

Рис. 3.11: Модель в OpenModelica

Затем укажем параметры моделирование, время также поставим равным 30(рис. [3.12]).

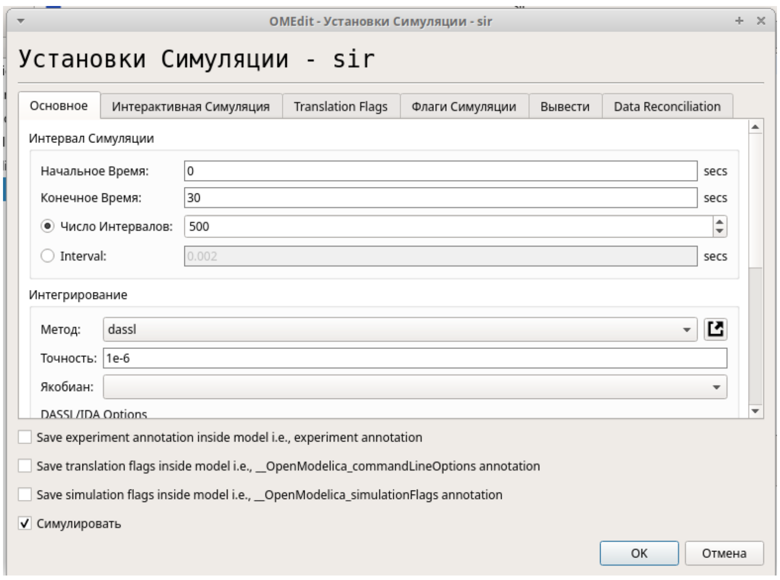

Рис. 3.12: Параметры моделирования в OpenModelica

В результате получим график аналогичный графикам в xcos(рис. [3.13]).

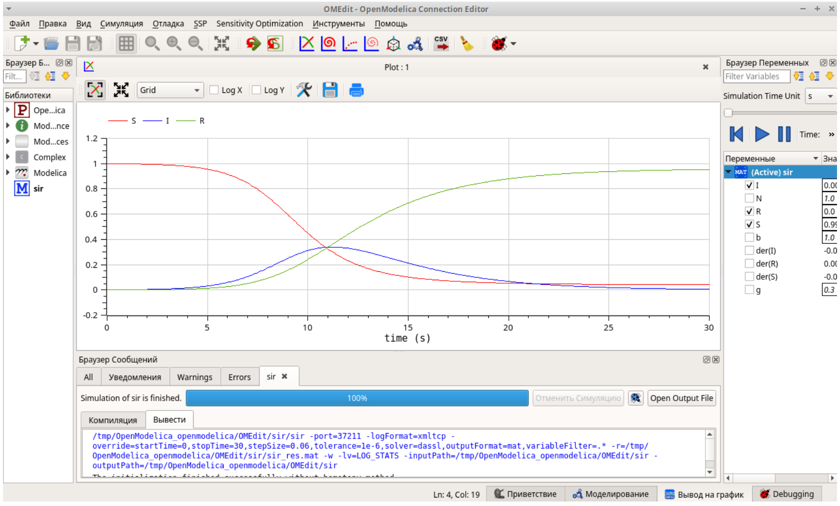

Рис. 3.13: График решения модели SIR при $\beta = 1, \nu = 0.3$. OpenModelica

4 Задание для самостоятельного выполнения

4.1 Модель SIR с учетом демографии

В дополнение к предположениям, которые были сделаны для модели SIR, предположим, что учитываются демографические процессы, в частности, что смертность в популяции полностью уравновешивает рождаемость, а все рожденные индивидуумы появляются на свет абсолютно здоровыми. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta IS + \mu(N - S), \\ \frac{dI}{dt} = \beta IS - \gamma I - \mu I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R, \end{cases}$$

где ν – константа, которая равна коэффициенту смертности и рождаемости.

Требуется:

- реализовать модель SIR с учётом процесса рождения гибели особей в xcos (в том числе и с использованием блока Modelica), а также в OpenModelica;
- построить графики эпидемического порога при различных значениях параметров модели (в частности изменяя параметр μ);
- сделать анализ полученных графиков в зависимости от выбранных значений параметров модели

4.2 Реализация модели в xcos

Для реализации этой модели добавим в переменные окружения mu. Блоки необходимы такие же(рис. [4.1], [4.2]).

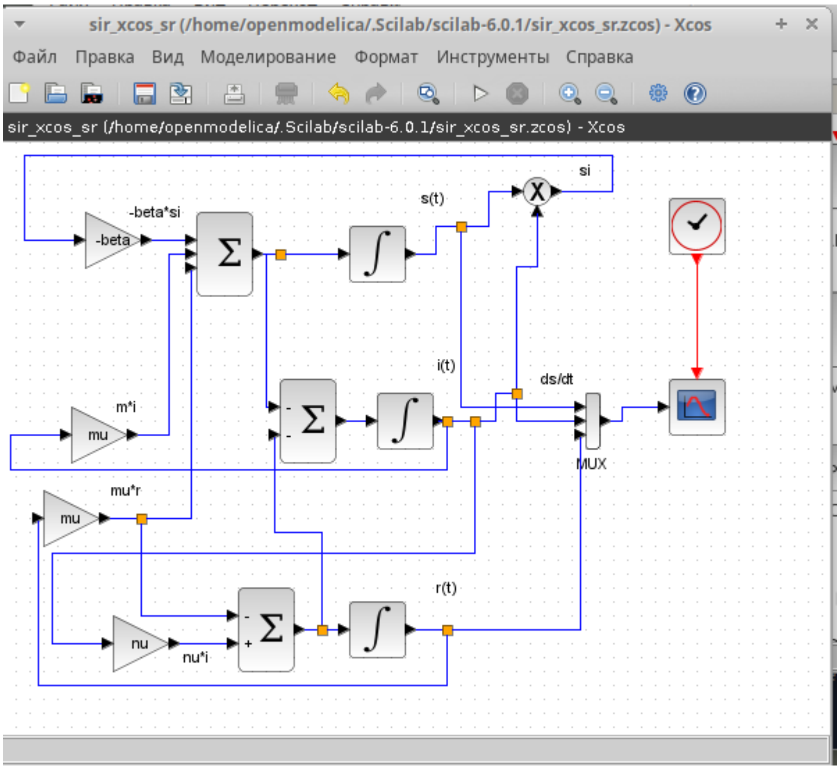

Рис. 4.1: Задать переменные окружения в xcos

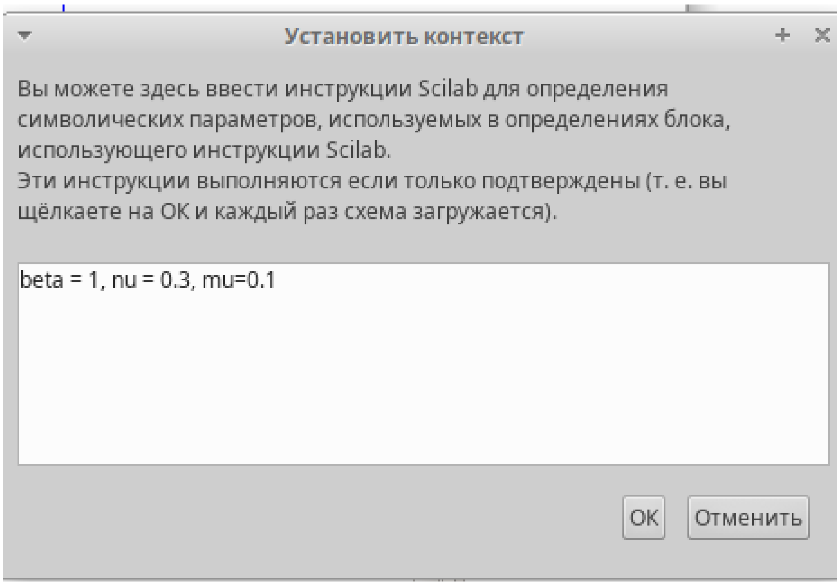

Рис. 4.2: Модель SIR с учетом демографии в xcos

Первое уравнение модели задано верхним блоком интегрирования, блоком произведения, блоком задания коэффициента $-\beta$ и сумматором. Блок произведения соединён с выходами верхнего и среднего блоков интегрирования и блоком коэффициента $-\beta$, что реализует математическую конструкцию $-\beta s(t)i(t)$, которая передается в блок суммирования. Ниже заданы математические конструкции μi и μr, которые со знаком плюс передаются в сумматор перед первым блоком интегрирования.

Третье уравнение модели задано нижним блоком интегрирования и блоком задания коэффициента ν. Для реализации математической конструкции $\nu i(t)$ соединяем выход среднего блока интегрирования и вход блока задания коэффициента ν. Перед блоком интегрирования размешаем сумматор, в которой передаем математические конструкции μr со знаком минус и $\nu i(t)$. Результат суммирования передаём на вход нижнего блока интегрирования.

Средний блок интегрирования и блок суммирования определяют второе уравнение модели, которое по сути является суммой правых частей первого и третьего уравнений со знаком минус. Для реализации соединяем входы верхнего и нижнего блоков интегрирования с входами блока суммирования, меняя при этом в его параметрах оба знака на минус. Выход блока суммирования соединяем с входом среднего блока интегрирования

В результате получим график решения(рис. [4.3]).

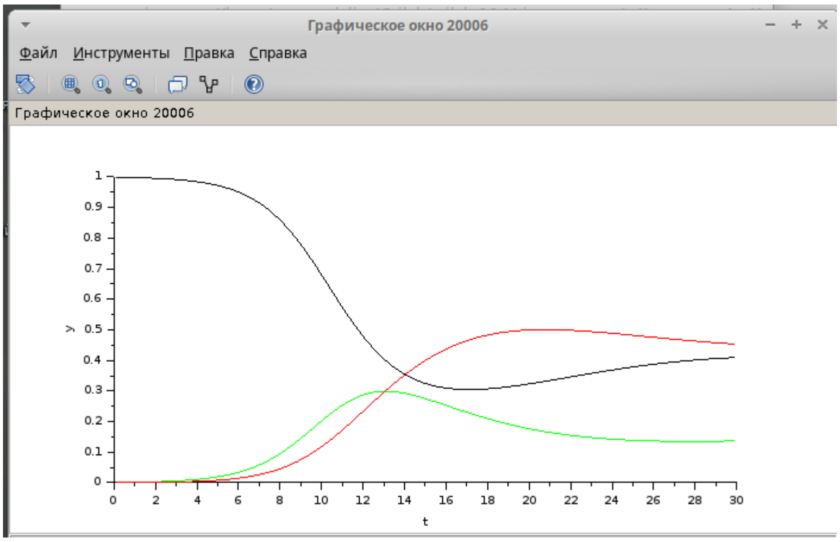

Рис. 4.3: График решения модели SIR с учетом демографии при $\beta = 1, \nu = 0.3$, $\mu = 0.1$

4.3 Реализация модели с помощью блока Modelica в xcos

Для реализации с помощью блока Modelica добавим блок параметра μ(рис. [4.4]).

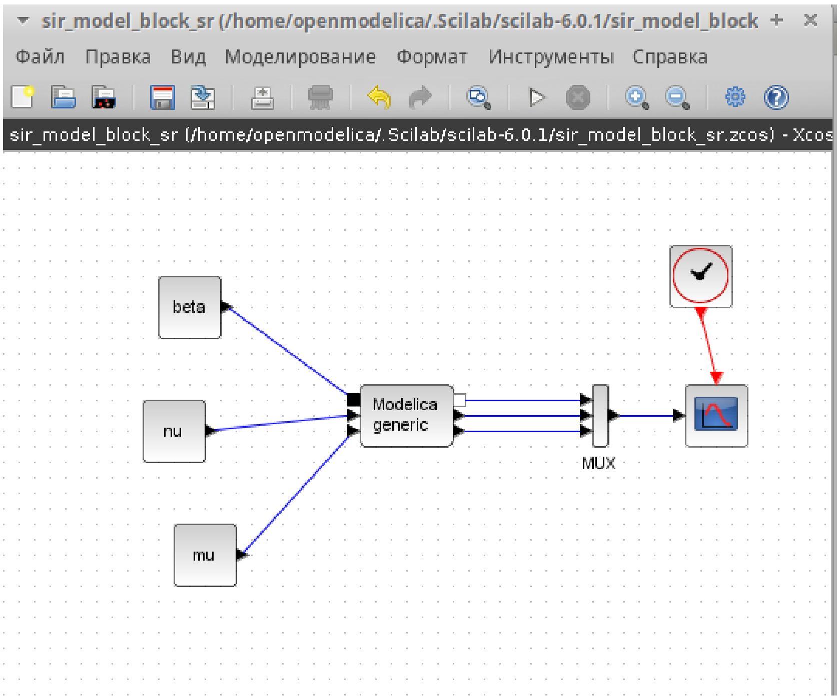

Рис. 4.4: Модель SIR с учетом демографии в xcos с применением блока Modelica

Также изменим данные блока Modelica, добавив информацию о третьем параметре и изменив дифференциальное уравнение(рис. [4.5], [4.6]).

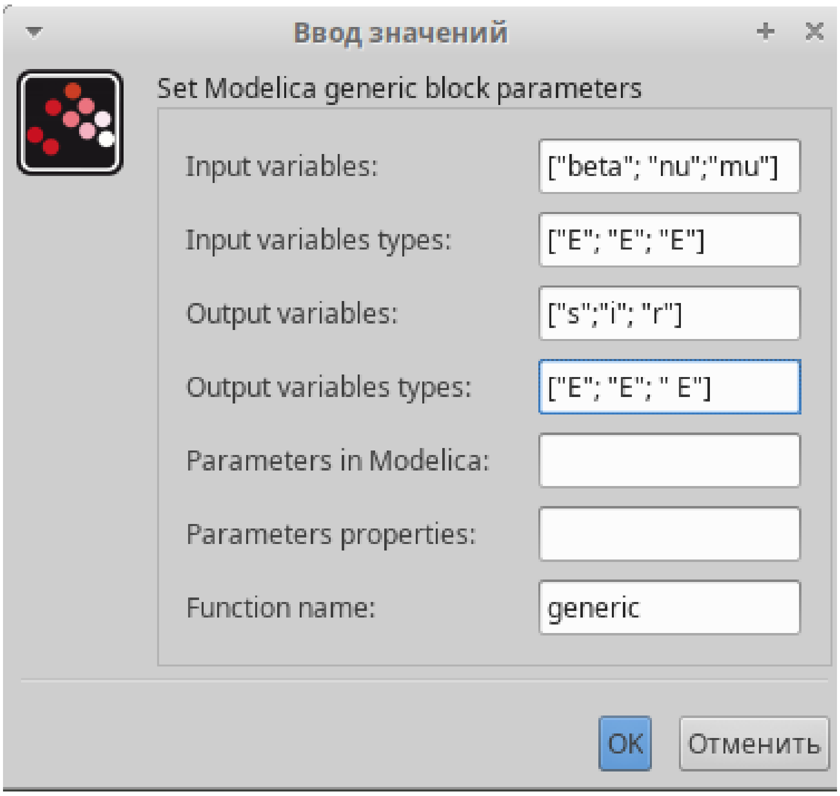

Рис. 4.5: Ввод значений входных параметров блока Modelica для модели

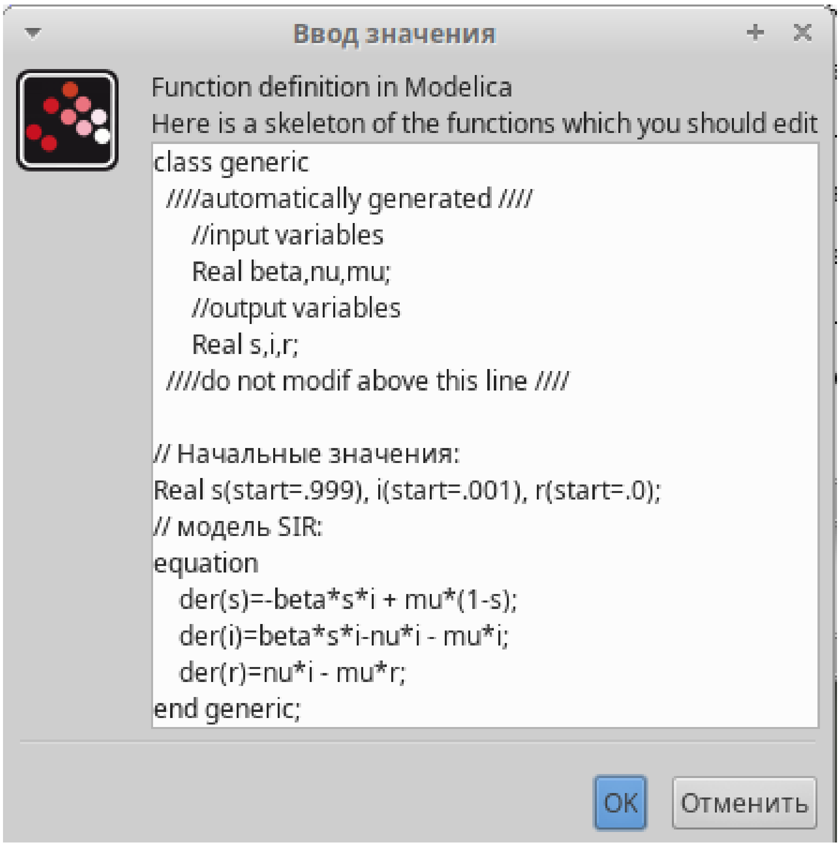

Рис. 4.6: Ввод функции блока Modelica для модели

В результате получим график решения(рис. [4.7]).

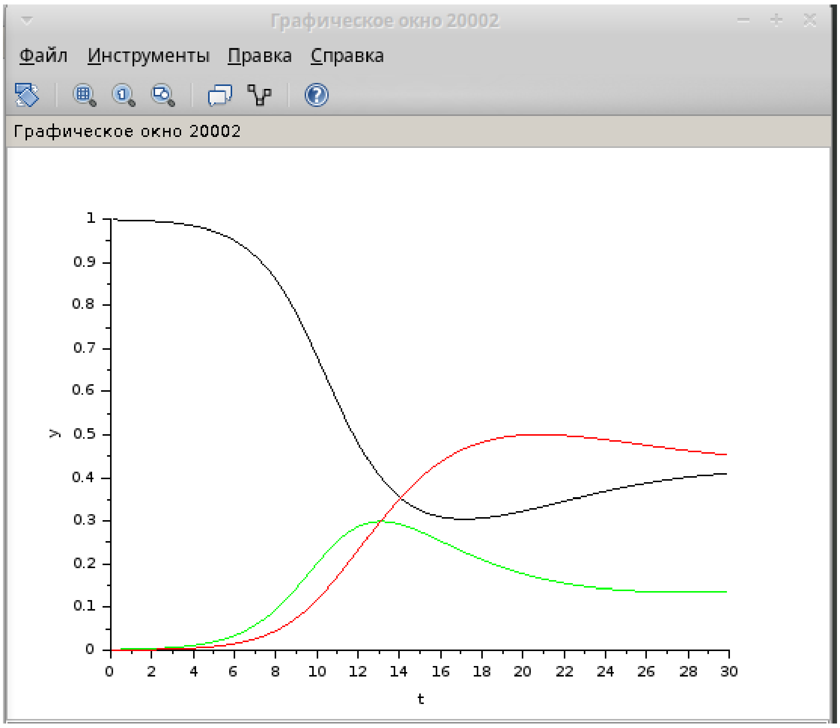

Рис. 4.7: График решения модели SIR с учетом демографии при $\beta = 1, \nu = 0.3$, $\mu = 0.1$. Блок Modelica

4.4 Реализация модели в OpenModelica

Изменим данные программы в OpenModelica, добавив информацию о третьем параметре и изменив дифференциальное уравнение(рис. [4.8]).

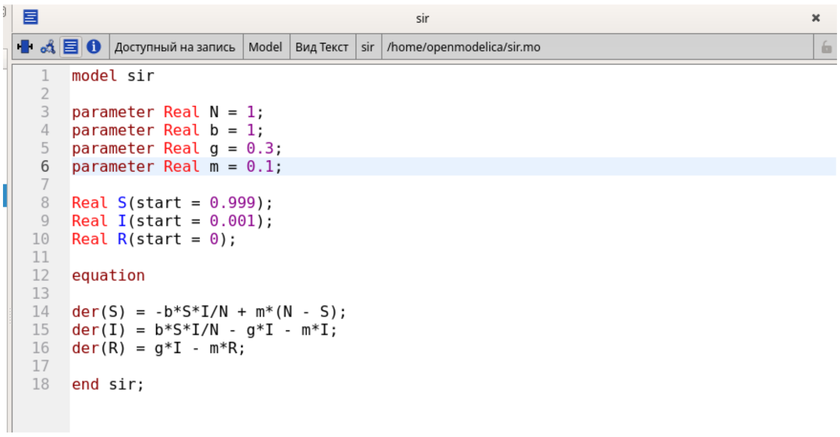

Рис. 4.8: Модель SIR с учетом демографии в OpenModelica

4.5 Анализ графиков при разных параметрах модели

Проанализируем графики, изменяя значения параметров, по-очереди фиксируя два из них.

Можно увидеть, что чем больше значение любого параметра, тем быстрее система приходит в стационарное состояние(рис. [4.11] - [4.17]).

Когда параметр μ достигает значения 0.7(рис. [4.11]) на графике остаются неизменными траектории всех переменных. Это можно объяснить тем, что рождается и умирает столько же здоровых, сколько заражается($\beta - \nu = 1 - 0.3 = 0.7$).

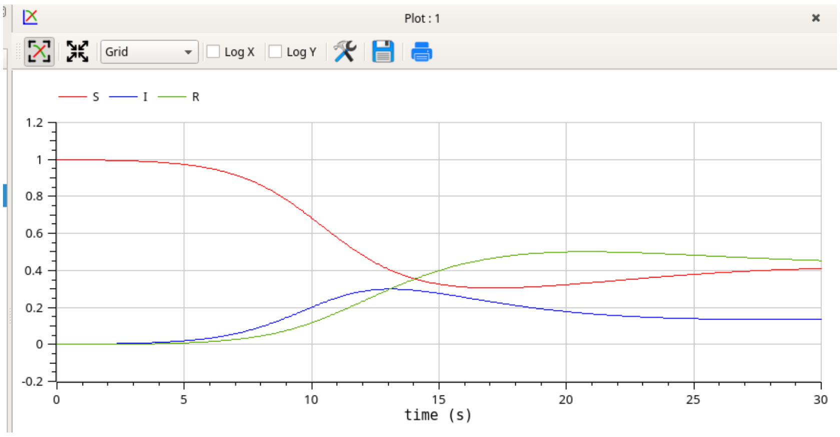

Рис. 4.9: График решения модели SIR с учетом демографии при $\beta = 1, \nu = 0.3$, $\mu = 0.1$. OpenModelica

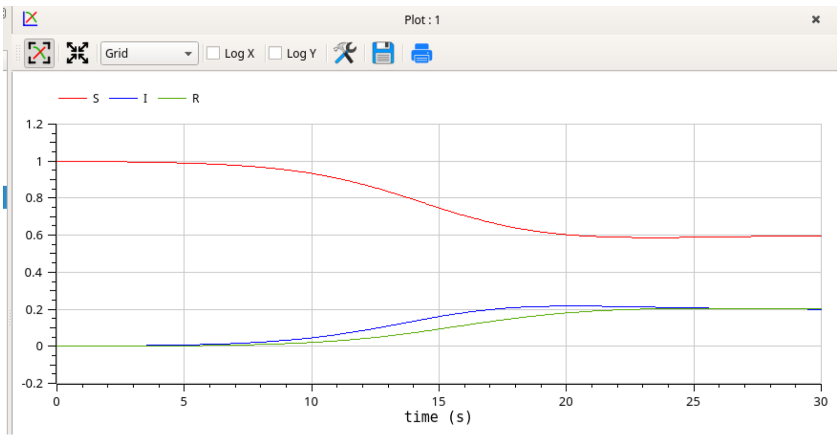

Рис. 4.10: График решения модели SIR с учетом демографии при $\beta = 1, \nu = 0.3$, $\mu = 0.3$. OpenModelica

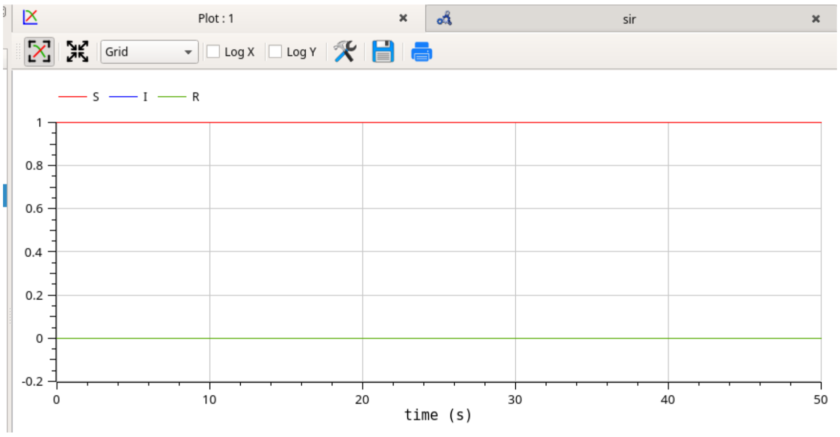

Рис. 4.11: График решения модели SIR с учетом демографии при $\beta = 1, \nu = 0.3$, $\mu = 0.7$. OpenModelica

При увеличении параметра β на графиках отражается, что количество людей с иммунитетом возрастает до максимума всё раньше(рис. [4.14]).

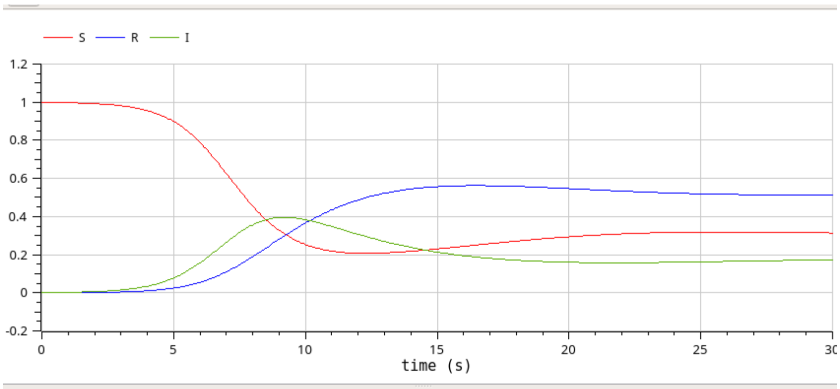

Рис. 4.12: График решения модели SIR с учетом демографии при $\beta = 1.5, \nu = 0.3, \mu = 0.1$. OpenModelica

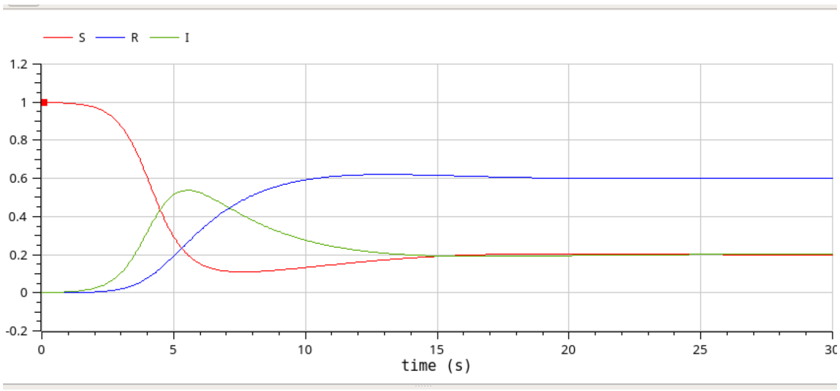

Рис. 4.13: График решения модели SIR с учетом демографии при $\beta = 2, \nu = 0.3$, $\mu = 0.1$. OpenModelica

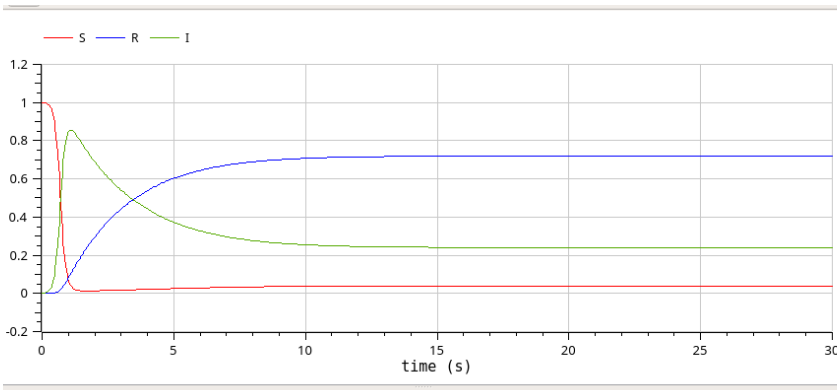

Рис. 4.14: График решения модели SIR с учетом демографии при $\beta = 10, \nu = 0.3$, $\mu = 0.1$. OpenModelica

Когда сумма коэффициентов рождаемости и выздоровления равна коэффициенту заболевания, можно увидеть, что остаются неизменными траектории всех переменных(рис. [4.17]).

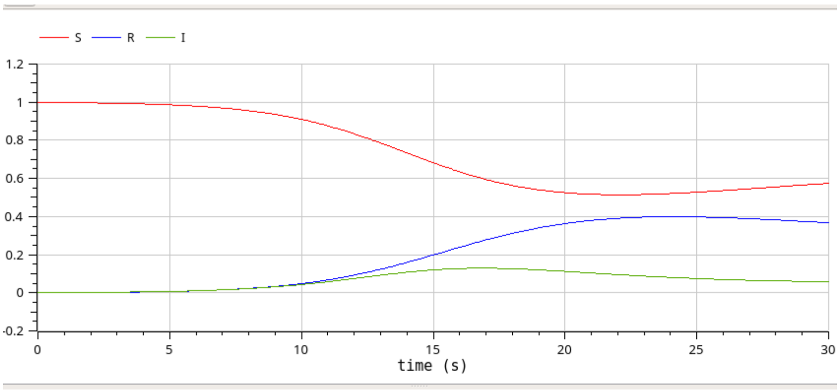

Рис. 4.15: График решения модели SIR с учетом демографии при $\beta = 1, \nu = 0.5$, $\mu = 0.1$. OpenModelica

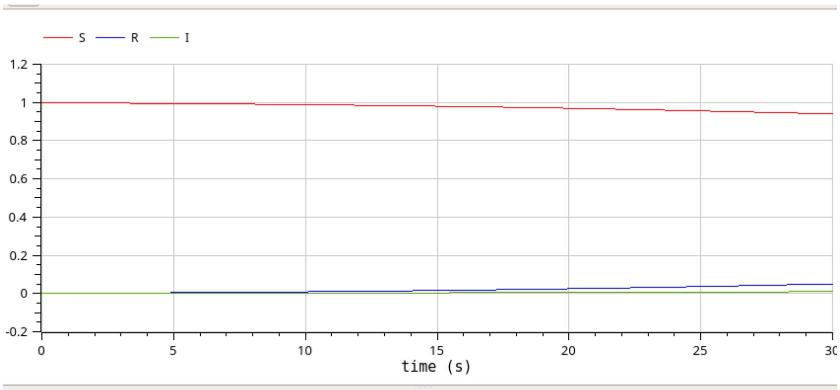

Рис. 4.16: График решения модели SIR с учетом демографии при $\beta = 1, \nu = 0.8$, $\mu = 0.1$. OpenModelica

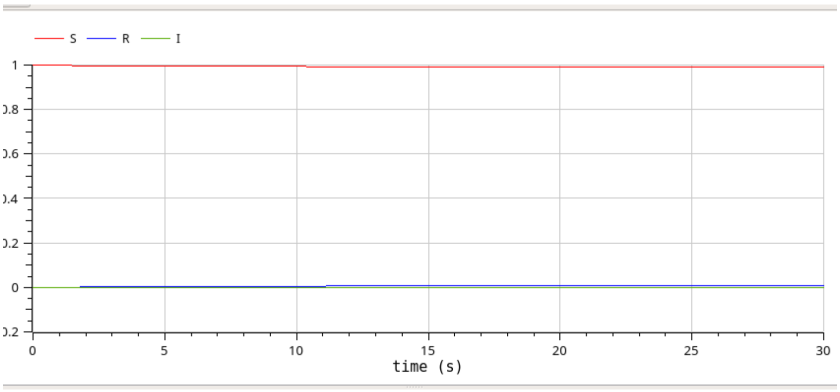

Рис. 4.17: График решения модели SIR с учетом демографии при $\beta = 1, \nu = 0.9$, $\mu = 0.1$. OpenModelica

5 Выводы

В результате выполнения работы была исследована модель SIR при помощи xcos и OpenModelica.