Санкт-Петербургский
Политехнический университет Петра Великого

Отчет по лабораторной работе №3
по дисциплине
"Методы оптимизации"

Решение задач одномерной минимизации

Выполнили:

Марков Михаил Денисович
Аптуков Михаил Ильдусович
группа: 5030102/10201

Преподаватель:

Родионова Елена Александровна

Санкт-Петербург
2024

1 Постановка задачи

Дана функция $f(x) = 0.5 * x^x - e^x$, $x \in [0.1; 3.5]$

Необходимо:

1. Решить задачу одномерной оптимизации методами золотого сечения и методом Фибоначчи.
2. Предусмотреть счетчик числа обращений к вычислению функции, требуемых для достижения заданной точности. Сравнить полученный результат с аналитической оценкой.
3. Показать унимодальность функции построением графика.
4. Сравнить методы между собой.
5. Производить вычисления с точностью 0.1, 0.01, 0.001.

2 Условия применимости методов

Пусть $f(x)$: $[a; b] \to \mathbf{R}$, $f(x) \in C[a; b]$

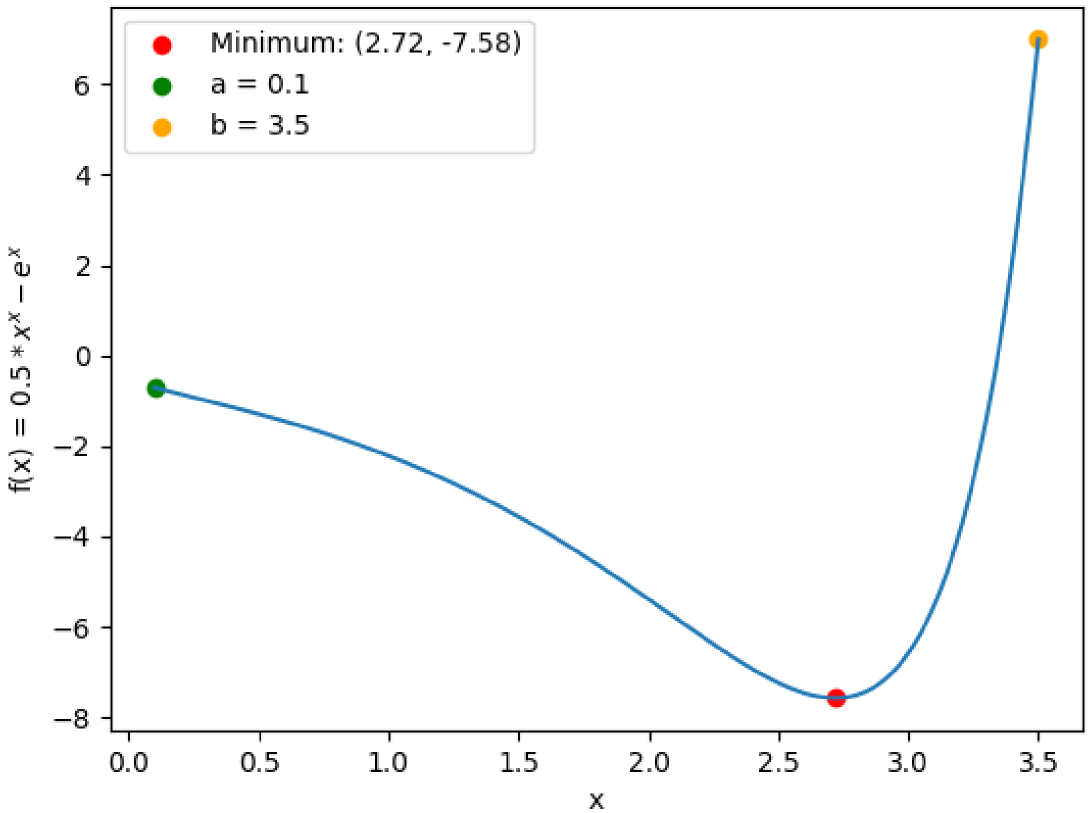
Для решения задачи оптимизации значения функции $f(x)$ будут использоваться прямые методы.

Самым сильным требованием к функции $f(x)$ будет унимодальность данной функции.

Определение
Функция $f(x)$ называется унимодальной, если на $[a; b]$ существует единственная точка глобального оптимума.

Покажем унимодальность нашей функции $f(x) = 0.5 * x^x - e^x$, $x \in [0.1; 3.5]$ с помощью графического метода.

На рисунке ниже изображен график данной функции. Данный график демонстрирует наличие единственного оптимума, что говорит о унимодальности функции.



3 Описание алгоритмов

3.1 Метод золотого сечения

Пусть требуется найти минимум функции $f(x)$ на отрезке [a, b] с заданной точностью ε.
$a_0 = a, b_0 = b$. Рассмотрим k-тый шаг алгоритма.

1. Если $b_k - a_k \leq \varepsilon$, то считаем минимумом функции среднюю точку k-того отрезка $x_* = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ и завершаем алгоритм. Иначе переходим к шагу 2.

2. Вычислим
   $\lambda_k = a_k + \alpha(b_k - a_k)$
   $\mu_k = b_k - \alpha(b_k - a_k)$,
   где $\alpha = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$

3. Если $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$, то сужаем отрезок следующим образом:

   $[a_{k+1}, b_{k+1}] := [\lambda_k, b_k]$
   и
   $\lambda_{k+1} = \mu_k$

Иначе

$[a_{k+1}, b_{k+1}] := [a_k, \mu_k]$
и
$\mu_{k+1} = \lambda_k$

Возвращаемся к шагу 1.

3.2 Метод Фибоначчи

Пусть требуется найти минимум функции $f(x)$ на отрезке [a, b] с заданной точностью ε. Напомним, что $F_0 = F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.
$a_0 = a, b_0 = b$.
Генерируется последовательность чисел Фибоначчи, количество n которых определяется из заданных параметров a, b, ε как $F_{n-1} < \dfrac{b_0 - a_0}{\varepsilon} < F_n$.
Рассмотрим k-тый шаг алгоритма.

1. Если $b_k - a_k \leq \varepsilon$, то считаем минимумом функции среднюю точку k-того отрезка $x_* = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ и завершаем алгоритм. Иначе переходим к шагу 2.

2. Вычислим
   $\lambda_k = a_k + \dfrac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k)$
   $\mu_k = a_k + \dfrac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k)$,
   где $k = \overline{1, n-1}$

3. Если $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$, то сужаем отрезок следующим образом:

   $[a_{k+1}, b_{k+1}] := [\lambda_k, b_k]$
   и
   $\lambda_{k+1} = \mu_k$

   Иначе

   $[a_{k+1}, b_{k+1}] := [a_k, \mu_k]$
   и
   $\mu_{k+1} = \lambda_k$

   Возвращаемся к шагу 1.

4. При $k = n - 1$ получим, что метод сходится в одну точку
   $\lambda_{n-1} = \mu_{n-1} = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$

4 Анализ точности решения

Для оценки точности полученных решений, найдем точное решение исходной задачи с помощью аналитического метода:

$f(x) = 0.5 * x^x - e^x$, $x \in [0.1; 3.5]$

$f'(x) = 0.5 * x^x + 0.5 * x^x * ln(x) - e^x$

$f'(x^*) = 0$

$x^* = e = 2.718281828459045$ Таким образом, x^* - единственный оптимум на заданном промежутке

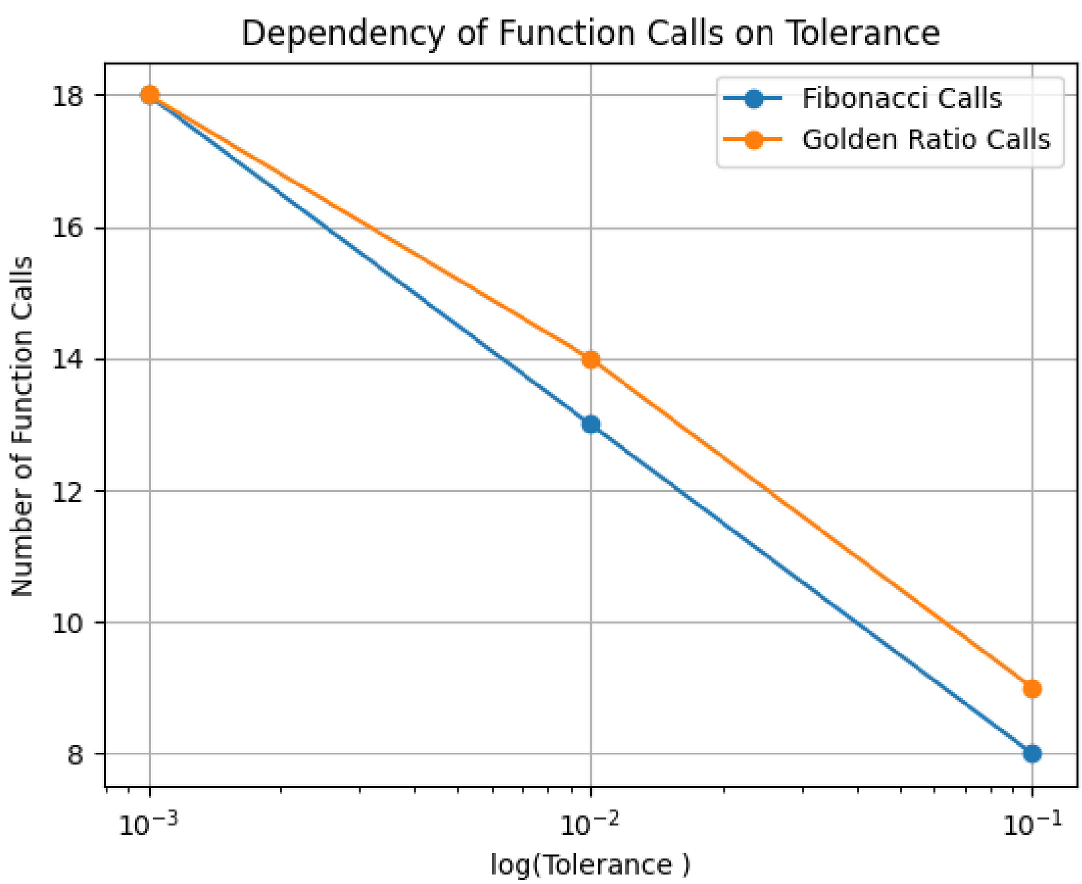
	Золотого сечения			Фибоначчи		
ϵ	$\lvert x^* - x_{res}\rvert$	$\lvert f(x^*) - f(x_{res})\rvert$	N	$\lvert x^* - x_{res}\rvert$	$\lvert f(x^*) - f(x_{res})\rvert$	N
0.1	0.01828	0.00294	8	0.01828	0.00294	8
0.01	0.00172	2.65*10^{-5}	13	0.00828	0.00060	12
0.001	0.00028	7.12*10^{-7}	17	0.00028	7.12*10^{-7}	17

Таблица 1: Данные о точности полученных решений

5 Сравнение методов

Сравним методы с помощью графиков

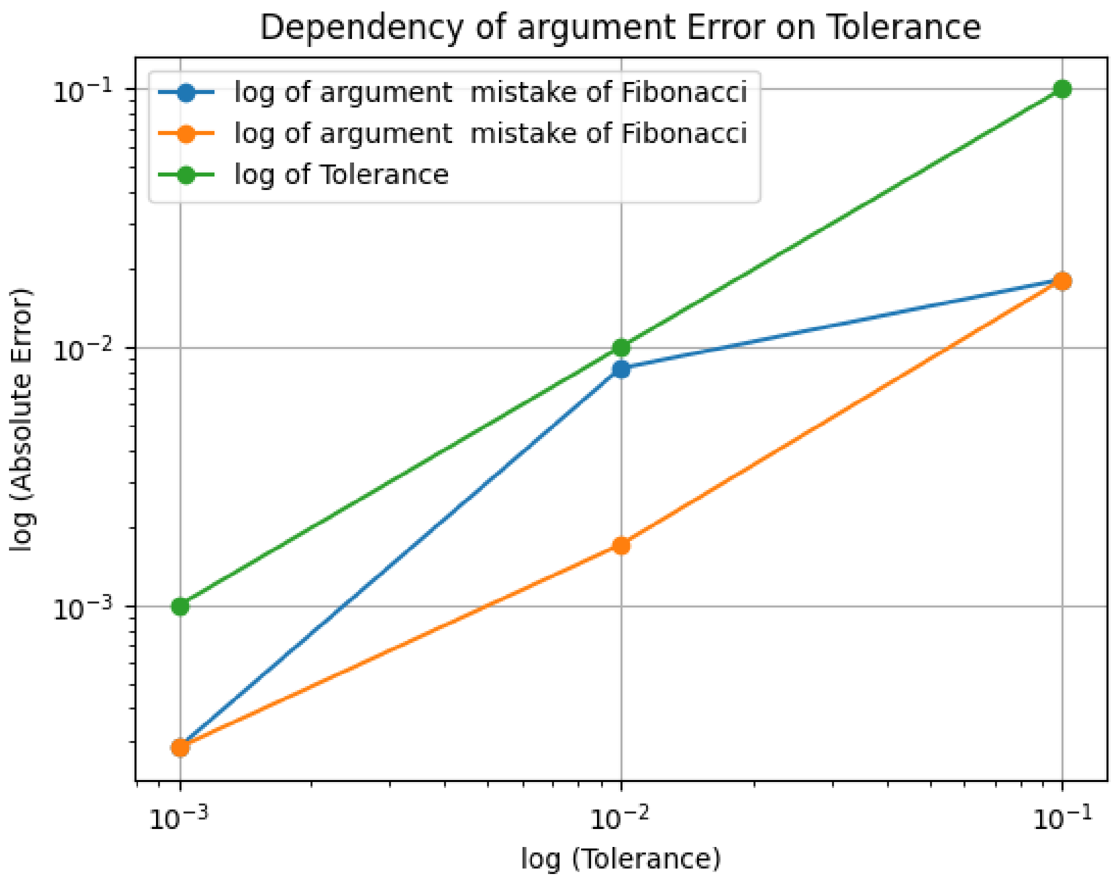
Рассмотрим зависимость числа вызова функций от заданной точности:

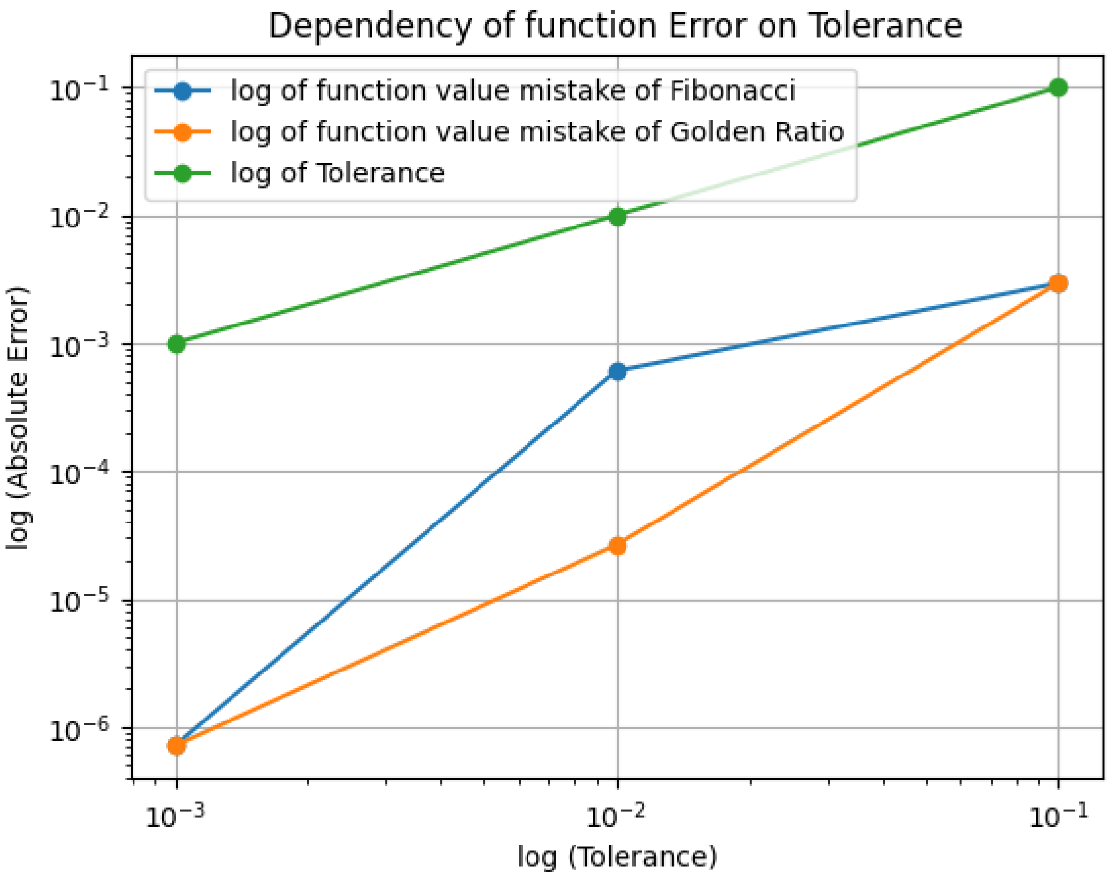


Метод пробных точек и метод золотого сечения не показывает сильного роста при увеличении заданной точности, в отличие от метода равномерного поиска.

Это связанно с тем, что шаг метода равномерного поиска прямопропорционально зависит от заданной точности.

Рассмотрим зависимость полученной ошибки от заданной точности.





На графике видно, что каждый из методов достигает заданной точности, что свидетельствует о корректности работы методов.

6 Выводы

Прямые методы решения задач одномерной оптимизации применимы для унимодальных на заданном отрезке функций.

Благодаря данным методам можно найти точку оптимума с точностью, близкой к машинной, не прибегая к аналитическому методу поиска производной, что весьма удобно, так как методы просты в реализации.

Основная вычислительная сложность данных методов, лежит на вычислении значения функции, из чего следует, что длительность времени алгоритма зависит от сложности вычисления функции в точке.

Каждый из методов достигал заданной точности, из чего следует, что метод равномерного поиска, метод золотого сечения и метод пробных точек решают задачу одномерной оптимизации.