Санкт-Петербургский
Политехнический университет Петра Великого

Отчет по лабораторной работе №2
по дисциплине
"Методы оптимизации"

Решение транспортной задачи

Выполнили:

Марков Михаил Денисович
Аптуков Михаил Ильдусович
группа: 5030102/10201

Преподаватель:

Родионова Елена Александровна

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1 Постановка задачи

Пусть имеется n пунктов хранения, в которых хранится однотипный груз, и m пунктов назначения, нуждающихся в данном продукте. Также известны:

- a_i - количество груза в i-ом пункте хранения
- b_j - суточная потребность в j-ом пункте назначения
- c_{ij} - стоимость перевозки единицы груза из i-ого в j-ый пункт

Необходимо составить план перевозок так, чтобы минимизировать стоимость поставки, то есть:

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to min$, где x_{ij} - количество груза, перевезенного из i-ого в j-ый пункт.

Условие транспортной задачи задано в виде таблицы:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
a_1	9	2	13	21	7	12
a_2	7	3	15	11	10	29
a_3	5	2	14	8	5	15
a_4	5	4	8	13	6	12
	11	28	4	13	12	

Таблица 1: Транспортная задача

Необходимо:

1. Решить транспортную задачу методом потенциалов с выбором начального приближения методом северо-западного угла.
2. Решить эту же задачу методом перебора крайних точек и сравнить результаты.
3. Автоматизировать приведение исходной задачи к закрытому виду.
4. Описать алгоритм построения цикла пересчета.

2 Применимость методов

2.1 Применимость для метода потенциалов

Транспортная задача считается заданной корректно, если:

- $x_{ij} \geq 0$, где $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$
- $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{j=1}^{m} b_i$

Чтобы применять заданные методы для решения транспортной задачи, необходимо привести задачу к закрытому виду.

Проверим выполнение условий:

1. $x_{ij} \geq 0$, где $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$, задается в коде программы при определении данных переменных
2. $\sum_{i=1}^{n} a_i = 12 + 29 + 15 + 12 = 68$ и $\sum_{j=1}^{m} b_i = 11 + 28 + 4 + 13 + 12 = 68$. Задача задана в закрытом виде

Таким образом, данные методы применимы к поставленной задаче.

2.2 Применимость для метода перебора крайних точек

Для того чтобы применить данный метод к задаче, заданной в табличном виде, нужно преобразовать условие к СЛАУ и привести задачу к каноничному виду.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 \\ x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 29 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 15 \\ x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{20} = 12 \\ x_1 + x_6 + x_{11} + x_{16} = 11 \\ x_2 + x_7 + x_{12} + x_{17} = 28 \\ x_3 + x_8 + x_{13} + x_{18} = 4 \\ x_4 + x_9 + x_{14} + x_{19} = 13 \\ x_5 + x_{10} + x_{15} + x_{20} = 12 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, n}, n = 20 \end{cases} \tag{1}$$

Функция цели примет вид $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \rightarrow min$.

3 Описание алгоритмов

3.1 Метод перебора крайних точек

Для применения алгоритма перебора крайних точек приводим задачу к канонической форме. Решение этой задачи связано с системой линейных уравнений (СЛАУ), возникающей после преобразования исходной задачи в каноническую форму. Основной трудностью здесь является поиск эффективного метода решения для неквадратных матриц. Метод реализации включает в себя два этапа. На первом этапе определяются крайние точки. Функция проходит через все возможные комбинации столбцов. Если на входе квадратная матрица, то решение системы линейных уравнений осуществляется непосредственным образом методом Гаусса. Отсекаются решения с отрицательными значениями, согласно ограничениям задачи в канонической форме.

1. Начинаем с получения входного объекта задачи, содержащего матрицу ограничений и вектор правой части.

2. Проверяем, является ли матрица ограничений квадратной. Если да, то система ограничений имеет единственное решение.

3. Если матрица не квадратная, генерируем все возможные комбинации столбцов размерности m, где m - количество строк матрицы ограничений.

4. Для каждой комбинации столбцов создаем соответствующую подматрицу и проверяем ее невырожденность (определитель не равен нулю). Если условие выполняется, решаем систему уравнений методом Гаусса.

5. Проверяем решение : если хотя бы одна компонента отрицательна, решение отбрасываем.

6. Допустимые решения добавляем в список решений.

7. Возвращаем список всех допустимых крайних точек, найденных при переборе комбинаций столбцов.

Вторая часть включает в себя оценку целевой функции. Данная функция перебирает все крайние точки, полученные из предыдущей части алгоритма. Затем происходит поиск точки, дающей наибольшее значение целевой функции.

1. В функции поиска оптимального решения из ранее вычисленных крайних точек находим максимальное значение целевой функции.

2. Начальное оптимальное решение устанавливаем как первая критическая точка, а начальное оптимальное значение - значение целевой функции в первой критической точке.

3. Вычисляем максимум знакчения целевой функции по всем критическим точкам.

4. После завершения перебора возвращаем найденную оптимальную точку и ее значение целевой функции.

3.2 Метод потенциалов

3.2.1 Выбор начального приближения методом северо-западного угла

Предполагается, что задача поставлена в закрытом виде, иначе необходимо сначала привести задачу к закрытому виду.

- Берется верхняя левая ("северо-западная") ячейка таблицы транспортной задачи и выписывается максимально возможная ($\leq$ потребности потребителя) поставка первому потребителю от первого поставщика.
- Если потребности потребителя удовлетворены, переходим к следующему потребителю. В данный столбец напротив всех оставшихся поставщиков установим ноль.
- Если потребности данного потребителя не удовлетворены, а возможности поставщика исчерпаны, переходим к следующему поставщику. В строке для данного поставщика напротив всех оставшихся потребителей установим ноль.
- Будем называть ячейку базисной, если значение в ней не равно нулю, иначе свободной.

Данный метод позволяет найти первоначальное допустимое решение транспортной задачи, которое не будет оптимальным, так как при решении не учитывается стоимость перевозок.

3.2.2 Проверка на вырожденность

Опорный план транспортной задачи называется невырожденным, если число базисных ячеек равен n+m-1, где m - количество строк, n - количество столбцов транспортной задачи. Если число перевозок меньше, такой план называется вырожденным.

При вырожденности у нас одновременно удовлетворяются потребности потребителя и склад поставщика опустошается, происходит потеря базисной клетки. Это приводит к тому, что система определения потенциалов имеет не единственное решение. Чтобы решить эту проблемы, необходимо к базисным клеткам добавить клетку с нулевым значением, расположенную справа от только что заполненной, которая обусловила потерю.

3.2.3 Метод потенциалов

1. Каждому поставщику ставится в соответствие некоторое значение u_i - потенциал поставщика, а каждому потребителю величину v_j - потенциал потребителя. Эти величины связаны между собой следующими соотношениями:
   $v_j - u_i = c_{ij}$ - для базисных переменных (1)
   $v_q - u_p \leq c_{pq}$ - для свободных переменных (2)

2. Если задача открытая, приводим ее к закрытому виду:
   Если запасы превосходят потребности, вводим фиктивного потребителя
   Если запасы меньше потребностей, вводится фиктивный поставщик

3. Формируем начальный опорный план методом северо-западного угла, считаем функцию цели.

4. Выполняется проверка опорного плана на вырожденность.

5. Выполняется проверка опорного плана на оптимальность. Для этого:

   - определяются потенциалы поставщиков и потребителей по выражениям для базисных переменных (выписывается соотношение $v_j - u_i = c_{ij}$, вводится искуственное ограничение, например, $v_0 = 0$ и решается СЛАУ)
   - вычисляется параметр $\alpha_{pq} = v_q - u_p$ для свободных переменных. Если $\alpha_{pq} \leq c_{pq}$ для всех свободных переменных, то найденный план оптимальный, иначе выполняется пересчет плана.

6. Ввести в план перевозок ячейку (p, q) из свободных ячеек, для которой $max\{\alpha_{pq} - c_{pq}\}$ и построить в ней цикл пересчета.

7. В полученном после пересчета списке ячеек найти минимальное значение объема перевозки в ячейках, помеченных знаком минус.

8. Обойти все элементы найденного цикла, применяя к текущей ячейке операцию сложения или вычитания с найденым минимумом объема перевозки в зависимости от знака.

9. Повторить весь процесс с новым опорным планом, начиная с шага 4.

3.2.4 Поиск цикла пересчета

Цикл пересчета - последовательность перемещений в таблице, начиная и заканчивая в выбранной ячейке (i, j), каждые два соседних в последовательности неизвестных лежат либо в одном столбце, либо в одной строке. В заполненных ячейках таблицы происходит смена направления движения. Для любой свободной ячейки существует единственный цикл пересчета (при данном опорном плане), проходящий через нее.

Переход от одного опорного плана к другому осуществляется с помощью цикла.

1. Начальной ячейке цикла присваиваем знак (+), следующей по циклу (начать двигаться можно в любом направлении) — знак (-), следующей ячейке цикла — опять (+) и так далее.

2. Если ячейка не базисная, то продолжаем движение в текущем направлении и запускаем алгоритм уже для следующей ячейки.

3. Если базисная, то запускаем процедуру для всех ячеек, которые доступны по различным направлениям.

4. Если ячейка начальная, алгоритм прекращает работу, возвращая список ячеек, в которых произошла смена направления (цикл пересчета)

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	U
A_1	11 / 9	1 / 2	13	21	7	$u_1 = 0$
A_2	7	27 / 3	2 / 15	11	10	$u_2 = 1$
A_3	5	2	2/ 14	13 / 8	5	$u_3 = 0$
A_4	5	4	8	0 / 13	12 / 6	$u_4 = 5$
V	$v_1 = 9$	$v_2 = 2$	$v_3 = 14$	$v_4 = 8$	$v_5 = 1$	

Таблица 2: Транспортная задача с найденными потенциалами

3.2.5 Демонстрация алгоритма построения цикла пересчета

Последовательно найдем значения потенциалов. Пусть u1 = 0.

$$
\begin{aligned}
A_1B_1: &\quad v_1 + u_1 = 9 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 9 - 0 = 9 \\
A_1B_2: &\quad v_2 + u_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 2 - 0 = 2 \\
A_2B_2: &\quad v_2 + u_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 3 - 2 = 1 \\
A_2B_3: &\quad v_3 + u_2 = 15 \quad \Rightarrow \quad v_3 = 15 - 1 = 14 \\
A_3B_3: &\quad v_3 + u_3 = 14 \quad \Rightarrow \quad u_3 = 14 - 14 = 0 \\
A_3B_4: &\quad v_4 + u_3 = 8 \quad \Rightarrow \quad v_4 = 8 - 0 = 8 \\
A_4B_4: &\quad v_4 + u_4 = 13 \quad \Rightarrow \quad u_4 = 13 - 8 = 5 \\
A_4B_5: &\quad v_5 + u_4 = 6 \quad \Rightarrow \quad v_5 = 6 - 5 = 1
\end{aligned}
$$

Найдем оценки незадействованных маршрутов (c_{ij} - стоимость доставки).

$$
\begin{aligned}
A_1B_3: &\quad \Delta_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 13 - (0 + 14) = -1 \\
A_1B_4: &\quad \Delta_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 21 - (0 + 8) = 13 \\
A_1B_5: &\quad \Delta_{15} = c_{15} - (u_1 + v_5) = 7 - (0 + 1) = 6 \\
A_2B_1: &\quad \Delta_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 7 - (1 + 9) = -3 \\
A_2B_4: &\quad \Delta_{24} = c_{24} - (u_2 + v_4) = 11 - (1 + 8) = 2 \\
A_2B_5: &\quad \Delta_{25} = c_{25} - (u_2 + v_5) = 10 - (1 + 1) = 8 \\
A_3B_1: &\quad \Delta_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 5 - (0 + 9) = -4 \\
A_3B_2: &\quad \Delta_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 2 - (0 + 2) = 0 \\
A_3B_5: &\quad \Delta_{35} = c_{35} - (u_3 + v_5) = 5 - (0 + 1) = 4 \\
A_4B_1: &\quad \Delta_{41} = c_{41} - (u_4 + v_1) = 5 - (5 + 9) = -9 \\
A_4B_2: &\quad \Delta_{42} = c_{42} - (u_4 + v_2) = 4 - (5 + 2) = -3 \\
A_4B_3: &\quad \Delta_{43} = c_{43} - (u_4 + v_3) = 8 - (5 + 14) = -11
\end{aligned}
$$

Есть отрицательные оценки. Следовательно, возможно получить новое решение, как минимум, не хуже имеющегося.
Выберем ячейку A_4B_3, ее оценка отрицательная (-11 наименьшая из возможных).

1. Выбираем начальное направление. Начинаем двигаться по горизонтали вправо
2. Встречаем по горизонтали базисные ячейки A_4B_4 и A_4B_5
3. Начинаем строить циклы из этих базисных ячеек

4. Строим цикл для ячейки A_4B_4
5. Меняем направление поворотом на 90°
6. Встречаем по вертикали базисную ячейку A_3B_4
7. Меняем направление поворотом на 90°
8. Встречаем по горизонтали базисную ячейку A_3B_3
9. Встречаем по вертикали базисные ячейки A_4B_3 и A_2B_3
10. A_4B_3 является началом цикла, поэтому завершаем построение цикла

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	U
A_1	11 / 9	1 / 2	13	21	7	$u_1 = 0$
A_2	7	27 / 3	2 / 15	11	10	$u_2 = 1$
A_3	5	2	2/ 14	13 / 8	5	$u_3 = 0$
A_4	5	4	8	0 / 13	12 / 6	$u_4 = 5$
V	$v_1 = 9$	$v_2 = 2$	$v_3 = 14$	$v_4 = 8$	$v_5 = 1$	

Таблица 3: Транспортная задача с построенным циклом пересчета

4 Решение задачи

Приведем таблицу «стоимостей» для нашей задачи:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	9	2	13	21	7
a_2	7	3	15	11	10
a_3	5	2	14	8	5
a_4	5	4	8	13	6

Таблица 4: Транспортная задача

Каждой ячейке $c_{i,j}$ соответствует стоимость «транспортировки» из a_i-го пункта в b_j-й пункт

4.1 Решение задачи методом потенциалов

Оптимальное базисное решение методом потенциалов:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	0	10	0	0	2
a_2	11	18	0	0	0
a_3	0	0	0	13	2
a_4	0	0	4	0	8

Таблица 5: Базисное решение методом потенциалов

Пусть a_n - «склады», точки загрузки

Пусть b_k - «магазины», точки разгрузки

Пусть значение из ячейки $d_{i,j}$ таблицы базисного решения соответствует оптимальному количеству товара для перевозки из a_i-го пункта в b_j-й пункт

Стоимость перевозки вычисляется, как $c_{i,j}d_{i,j}$

Тогда решение можно привести к следующему виду:
Из 1-го склада нужно доставить в 2-й магазин 10 ед. товара, стоимость: 20.0
Из 1-го склада нужно доставить в 5-й магазин 2 ед. товара, стоимость: 14.0
Из 2-го склада нужно доставить в 1-й магазин 11 ед. товара, стоимость: 77.0
Из 2-го склада нужно доставить в 2-й магазин 18 ед. товара, стоимость: 54.0
Из 3-го склада нужно доставить в 4-й магазин 13 ед. товара, стоимость: 104.0
Из 3-го склада нужно доставить в 5-й магазин 2 ед. товара, стоимость: 10.0
Из 4-го склада нужно доставить в 3-й магазин 4 ед. товара, стоимость: 32.0
Из 4-го склада нужно доставить в 5-й магазин 8 ед. товара, стоимость: 48.0

Итого, минимальные затраты составят:
$20.0 + 14.0 + 77.0 + 54.0 + 104.0 + 10.0 + 32.0 + 48.0 = 359.0$

4.2 Решение задачи методом перебора крайних точек

Оптимальное базисное решение методом перебора крайних точек:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	0	2	0	0	10
a_2	3	26	0	0	0
a_3	0	0	0	13	2
a_4	8	0	4	0	0

Таблица 6: Базисное решение методом перебора крайних точек

Пусть a_n - «склады», точки загрузки

Пусть b_k - «магазины», точки разгрузки

Пусть значение из ячейки $d_{i,j}$ таблицы базисного решения соответствует оптимальному количеству товара для перевозки из a_i-го пункта в b_j-й пункт

Стоимость перевозки вычисляется, как $c_{i,j}d_{i,j}$

Тогда решение можно привести к следующему виду:
Из 1-го склада нужно доставить в 2-й магазин 2 ед. товара, стоимость: 4.0
Из 1-го склада нужно доставить в 5-й магазин 10 ед. товара, стоимость: 70.0
Из 2-го склада нужно доставить в 1-й магазин 3 ед. товара, стоимость: 21.0
Из 2-го склада нужно доставить в 2-й магазин 26 ед. товара, стоимость: 78.0
Из 3-го склада нужно доставить в 4-й магазин 13 ед. товара, стоимость: 104.0
Из 3-го склада нужно доставить в 5-й магазин 2 ед. товара, стоимость: 10.0
Из 4-го склада нужно доставить в 1-й магазин 8 ед. товара, стоимость: 40.0
Из 4-го склада нужно доставить в 3-й магазин 4 ед. товара, стоимость: 32.0

Итого, минимальные затраты составят:
$4.0 + 70.0 + 21.0 + 78.0 + 104.0 + 10.0 + 40.0 + 32.0 = 359.0$

4.3 Сравнение результатов

Транспортная задача решалась двумя разными методами и нашла два разных базисных решения, тем не менее, функции цели имеют одинаковое значение. Это связано с тем, что множество допустимых решений - выпуклое множество, а значит любая линейная комбинация наших решений, удовлетворяющая ограничениям на спрос и предложение, также является допустимым решением. Можно сделать вывод, что методы корректно решают поставленную транспортную задачу.

5 Обоснование результатов

Заметим, что имеем два различных опорных плана, но они имеют одинаковые функции цели - это из-за того, что допускается несколько оптимальных планов. Чтобы опорный план был оптимальным, необходимо $v_i + u_j \leq c_{ij}$, где c_{ij} - небазисные ячейки.

5.1 Проверка оптимальности решения метода потенциалов

:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	0	10	0	0	2
a_2	11	18	0	0	0
a_3	0	0	0	13	2
a_4	0	0	4	0	8

Таблица 7: Базисное решение методом потенциалов

Последовательно найдем значения потенциалов. Пусть u1 = 0.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
a_1	9	2	13	21	7	12
a_2	7	3	15	11	10	29
a_3	5	2	14	8	5	15
a_4	5	4	8	13	6	12
	11	28	4	13	12	

Таблица 8: Условие транспортной задачи

$$
\begin{aligned}
A_1B_2: &\quad v_2 + u_1 = 2 &\Rightarrow&\quad v_2 = 2 - 0 = 2\\
A_1B_5: &\quad v_5 + u_1 = 7 &\Rightarrow&\quad v_5 = 7 - 0 = 7\\
A_2B_2: &\quad v_2 + u_2 = 3 &\Rightarrow&\quad u_2 = 3 - 2 = 1\\
A_2B_1: &\quad v_1 + u_2 = 7 &\Rightarrow&\quad v_1 = 7 - 1 = 6\\
A_4B_5: &\quad v_5 + u_4 = 6 &\Rightarrow&\quad u_4 = 6 - 7 = -1\\
A_4B_3: &\quad v_3 + u_4 = 8 &\Rightarrow&\quad v_3 = 8 + 1 = 9\\
A_3B_5: &\quad v_5 + u_3 = 5 &\Rightarrow&\quad u_3 = 5 - 7 = -2\\
A_3B_4: &\quad v_4 + u_3 = 8 &\Rightarrow&\quad v_4 = 8 + 2 = 10
\end{aligned}
$$

Потенциалы: $v_i = (6\ \ 2\ \ 9\ \ 10\ \ 7)$, $u_i = (0\ \ 1\ \ -2\ \ -1)$

$$
\begin{aligned}
A_1B_1: &\quad \Delta_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 9 - (0 + 6) = 3 \geq 0 \\
A_1B_3: &\quad \Delta_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 13 - (0 + 9) = 4 \geq 0 \\
A_1B_4: &\quad \Delta_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 21 - (0 + 10) = 1 \geq 0 \\
A_1B_5: &\quad \Delta_{15} = c_{15} - (u_1 + v_5) = 7 - (0 + 7) = 0 \geq 0 \\
A_2B_3: &\quad \Delta_{23} = c_{23} - (u_2 + v_3) = 15 - (1 + 9) = 5 \geq 0 \\
A_2B_4: &\quad \Delta_{24} = c_{24} - (u_2 + v_4) = 11 - (1 + 10) = 0 \geq 0 \\
A_2B_5: &\quad \Delta_{25} = c_{25} - (u_2 + v_5) = 10 - (1 + 7) = 2 \geq 0 \\
A_3B_1: &\quad \Delta_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 5 - (-2 + 6) = 1 \geq 0 \\
A_3B_2: &\quad \Delta_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 2 - (-2 + 2) = 2 \geq 0 \\
A_3B_3: &\quad \Delta_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 14 - (-2 + 9) = 7 \geq 0 \\
A_4B_1: &\quad \Delta_{41} = c_{41} - (u_4 + v_1) = 5 - (-1 + 6) = 0 \geq 0 \\
A_4B_2: &\quad \Delta_{42} = c_{42} - (u_4 + v_2) = 4 - (-1 + 2) = 3 \geq 0 \\
A_4B_4: &\quad \Delta_{44} = c_{44} - (u_4 + v_4) = 13 - (-1 + 10) = 4 \geq 0
\end{aligned}
$$

=> Опорный план является оптимальным.

5.2 Проверка оптимальности решения метода перебора крайних точек

:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	0	2	0	0	10
a_2	3	26	0	0	0
a_3	0	0	0	13	2
a_4	8	0	4	0	0

Таблица 9: Базисное решение методом перебора крайних точек

Последовательно найдем значения потенциалов. Пусть u1 = 0.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
a_1	9	2	13	21	7	12
a_2	7	3	15	11	10	29
a_3	5	2	14	8	5	15
a_4	5	4	8	13	6	12
	11	28	4	13	12	

Таблица 10: Условие транспортной задачи

$$
\begin{array}{llll}
A_1B_2: & v_2+u_1=2 & \Rightarrow & v_2=2-0=2 \\
A_1B_5: & v_5+u_1=7 & \Rightarrow & v_5=7-0=7 \\
A_2B_2: & v_2+u_2=3 & \Rightarrow & u_2=3-2=1 \\
A_2B_1: & v_1+u_2=7 & \Rightarrow & v_1=7-1=6 \\
A_4B_1: & v_1+u_4=5 & \Rightarrow & u_4=5-6=-1 \\
A_4B_3: & v_3+u_4=8 & \Rightarrow & v_3=8+1=9 \\
A_3B_5: & v_5+u_3=5 & \Rightarrow & u_3=5-7=-2 \\
A_3B_4: & v_4+u_3=8 & \Rightarrow & v_4=8+2=10
\end{array}
$$

Потенциалы: $v_i = (6\ \ 2\ \ 9\ \ 10\ \ 7)$, $u_i = (0\ \ 1\ \ -2\ \ -1)$

$$
\begin{array}{ll}
A_1B_1: & \Delta_{11}=c_{11}-(u_1+v_1)=9-(0+6)=3\geq 0 \\
A_1B_3: & \Delta_{13}=c_{13}-(u_1+v_3)=13-(0+9)=4\geq 0 \\
A_1B_4: & \Delta_{14}=c_{14}-(u_1+v_4)=21-(0+10)=1\geq 0 \\
A_1B_5: & \Delta_{15}=c_{15}-(u_1+v_5)=7-(0+7)=0\geq 0 \\
A_2B_3: & \Delta_{23}=c_{23}-(u_2+v_3)=15-(1+9)=5\geq 0 \\
A_2B_4: & \Delta_{24}=c_{24}-(u_2+v_4)=11-(1+10)=0\geq 0 \\
A_2B_5: & \Delta_{25}=c_{25}-(u_2+v_5)=10-(1+7)=2\geq 0 \\
A_3B_1: & \Delta_{31}=c_{31}-(u_3+v_1)=5-(-2+6)=1\geq 0 \\
A_3B_2: & \Delta_{32}=c_{32}-(u_3+v_2)=2-(-2+2)=2\geq 0 \\
A_3B_3: & \Delta_{33}=c_{33}-(u_3+v_3)=14-(-2+9)=7\geq 0 \\
A_4B_2: & \Delta_{42}=c_{42}-(u_4+v_2)=4-(-1+2)=3\geq 0 \\
A_4B_4: & \Delta_{44}=c_{44}-(u_4+v_4)=13-(-1+10)=4\geq 0 \\
A_4B_5: & \Delta_{41}=c_{41}-(u_4+v_1)=6-(-1+6)=1\geq 0
\end{array}
$$

=> Опорный план является оптимальным.

6 Дополнительные исследования

6.1 Существование оптимального решения

Транспортная задача является задачей линейного программирования, тогда задача не имеет оптимальных решений, в случае, когда допустимое множество решений - пустое множество, либо когда множество допустимых решений не ограничено.

Конкретизируя случай транспортной задачи, решения не существует, если:

- Общее количество ресурсов (например, товаров) не равно общему количеству потребностей (например, заказов).
- Некоторые из затрат (например, стоимость перевозки) отрицательны.

6.2 Единственность оптимального решения

Задача линейного программирования имеет единственное решение, когда вектор цели не перпендикулярен опорной гиперплоскости, иными словами, решение совпадает с вершиной допустимого множества.

Для транспортной задачи единственность решения достигается в том случае, когда в таблице затрат нет одинаковых стоимостей.

6.3 Множественность оптимального решения

Задача линейного программирования имеет множественное решение, в том случае, если решение задано гиперплоскостью множества допустимых решений, тогда задача имеет бесконечно много оптимальных решений.

Методом перебора крайних точек было получено 4 опорных вектора – вершины, ограничивающих гиперплоскость оптимальных решений. Все точки гиперплоскости сообщают минимум функции цели. Так как решениями являются лишь те оптимальные планы, которые содержат целочисленные коэффициенты, то мы можем их все. Для этого построим 2 вектора ограничений таким образом, чтобы вектор верхних ограничений содержал i-ю координату, равную максимуму по всем i-м координатам всех найденных опорных векторов, полученных из метода перебора крайних точек. Аналогично строится вектор нижних ограничений.
Решения:

- $[0, 2, 0, 0, 10, 3, 26, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 13, 2, 8, 0, 4, 0, 0]$
- $[0, 10, 0, 0, 2, 11, 18, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 13, 2, 0, 0, 4, 0, 8]$
- $[0, 12, 0, 0, 0, 3, 16, 0, 10, 0, 0, 0, 0, 3, 12, 8, 0, 4, 0, 0]$
- $[0, 12, 0, 0, 0, 11, 16, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 11, 4, 0, 0, 4, 0, 8]$

Векторы ограничений:

- $\min = [0, 2, 0, 0, 0, 3, 16, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 2, 0, 0, 4, 0, 0]$
- $\max = [0, 12, 0, 0, 10, 11, 26, 0, 10, 0, 0, 0, 0, 13, 12, 8, 0, 4, 0, 8]$

Будем проверять решения из этого диапазона на оптимальность.
Всего решений в диапазоне: 1291467969
Всего оптимальных решений: 8466109
В число найденных также входит решение из задачника: $[0, 9, 0, 0, 3, 8, 19, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 11, 4, 3, 0, 4, 0, 5]$
Если необходимо изменить объем перевозки по маршруту, то надо сравнить текущее значение со соответствующими значениями в векторах ограничений. Таким образом можно получить диапазон значений, за пределами которого не удастся найти оптимальный план.

7 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы было сделано:

- Постановка транспортной задачи.
- Приведение транспортной задачи к закрытому виду.
- Решение транспортной задачи методом потенциалов с начальным приближением методом северо-западного угла.
- Решение транспортной задачи методом перебора крайних точек.
- Сравнение решения методов.

Методом потенциалов и перебора крайних точек были получены одинаковые решения поставленной транспортной задачи.

Очевидно, что при решении небольших транспортных задач можно предпочесть метод перебора крайних точек, так как он является более универсальным, применяемым также для задач линейного программирования в целом, а транспортная задача, в свою очередь, представляет собой частный случай задач линейного программирования. Проблема метода в том, что при приведении задачи к канонической форме количество переменных возрастает, увеличивая затраты по времени для решения СЛАУ.

С другой стороны, метод потенциалов специализирован для решения именно транспортных задач, что делает его более предпочтительным при увеличении размерности и сложности условий.