

RMQ

LCA

가장
가까운
조상

트리 2

최백준 choi@startlink.io

LCA

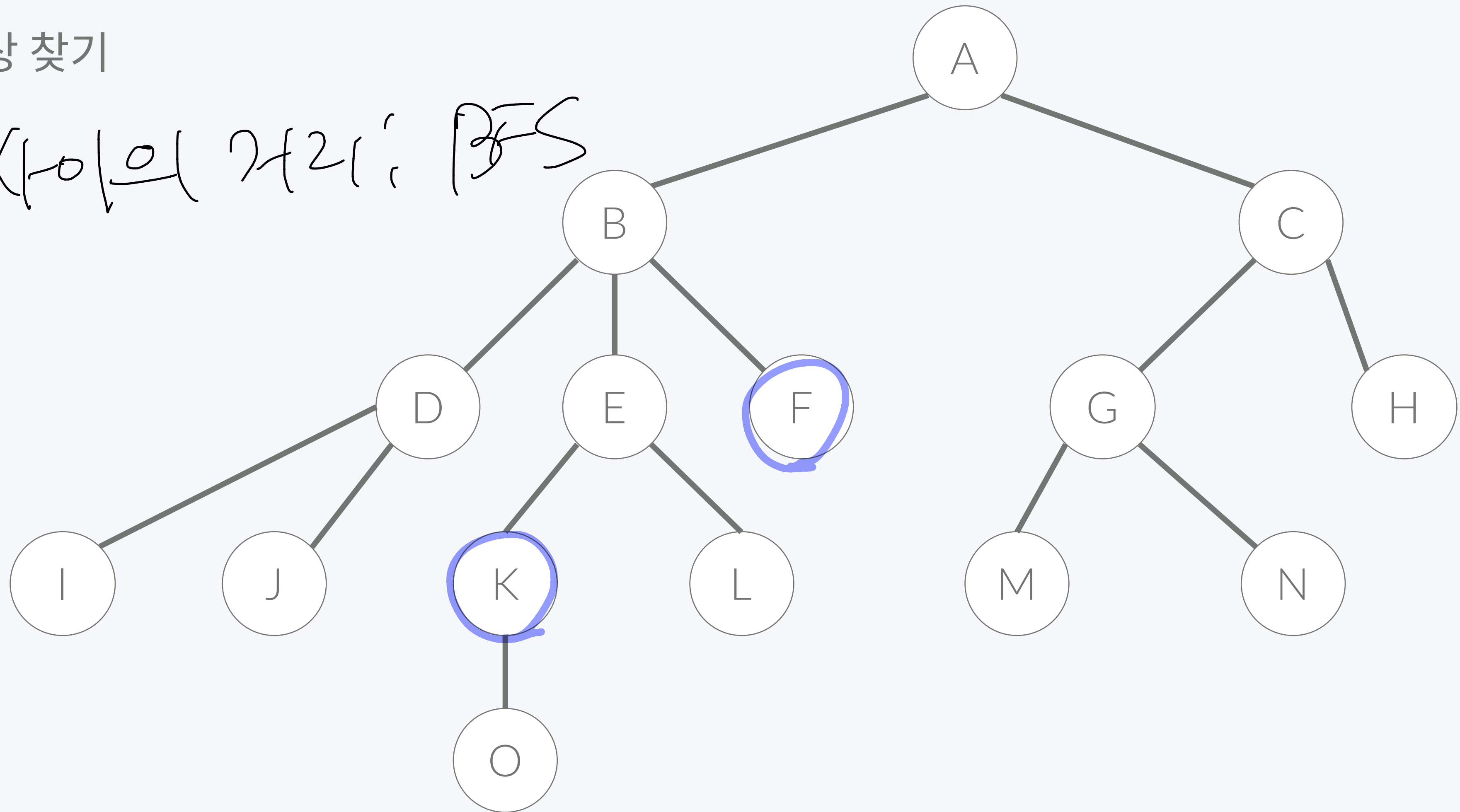
가장 가까운 공통 조상 찾기

3

LCA (Lowest Common Ancestor)

- 가장 가까운 조상 찾기

두 노드 사이의 거리: BFS

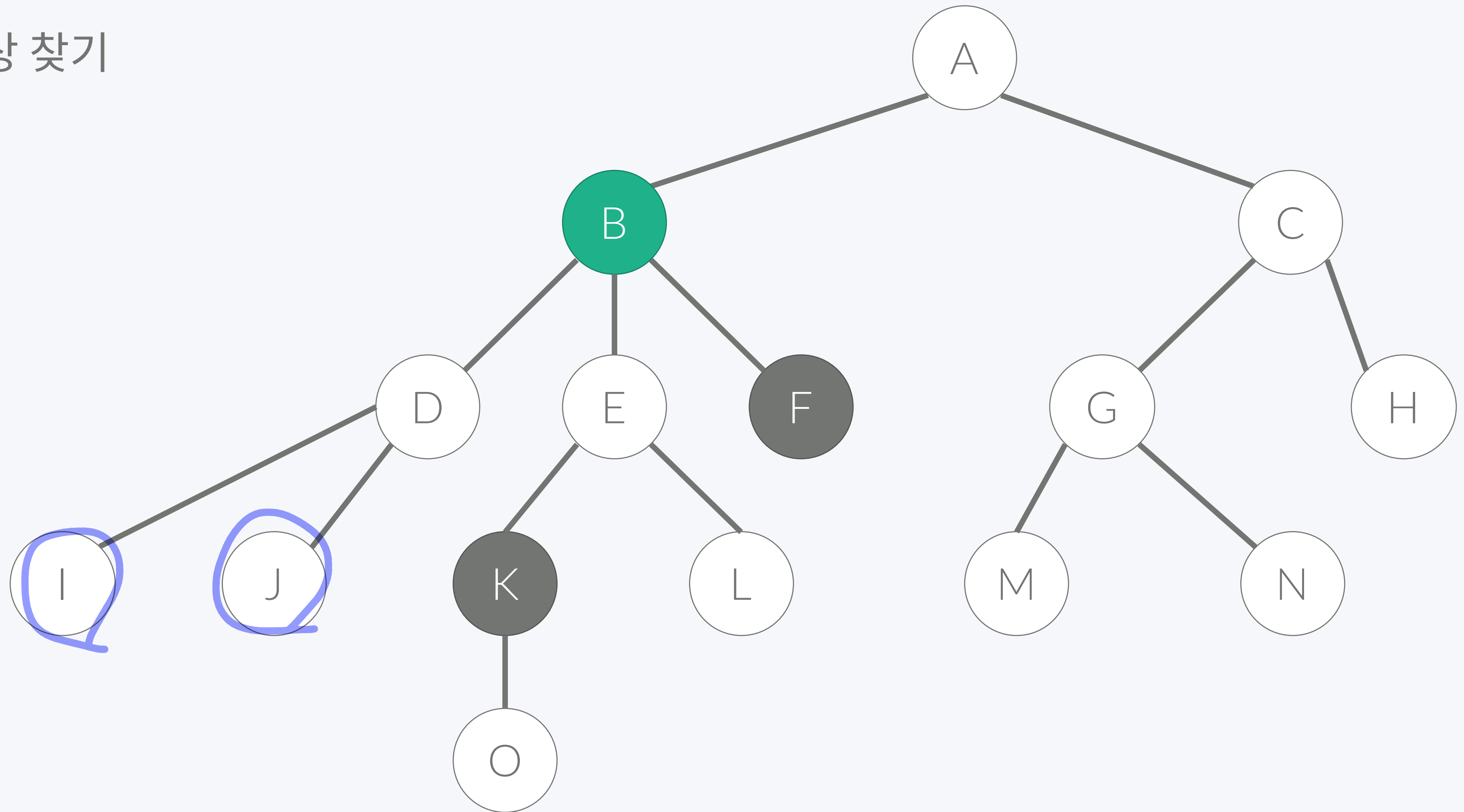


가장 가까운 공통 조상 찾기

4

LCA (Lowest Common Ancestor)

- 가장 가까운 조상 찾기

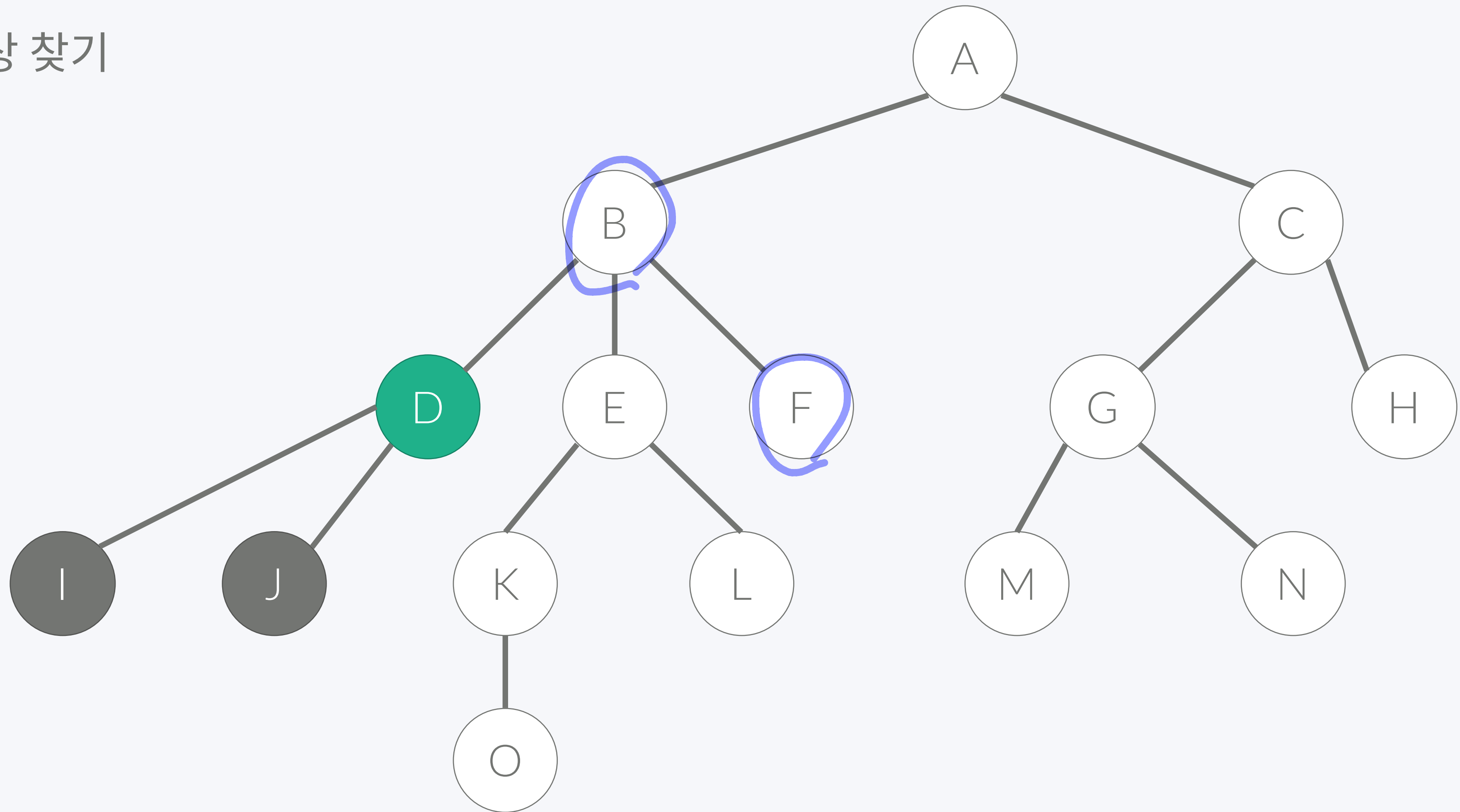


가장 가까운 공통 조상 찾기

5

LCA (Lowest Common Ancestor)

- 가장 가까운 조상 찾기

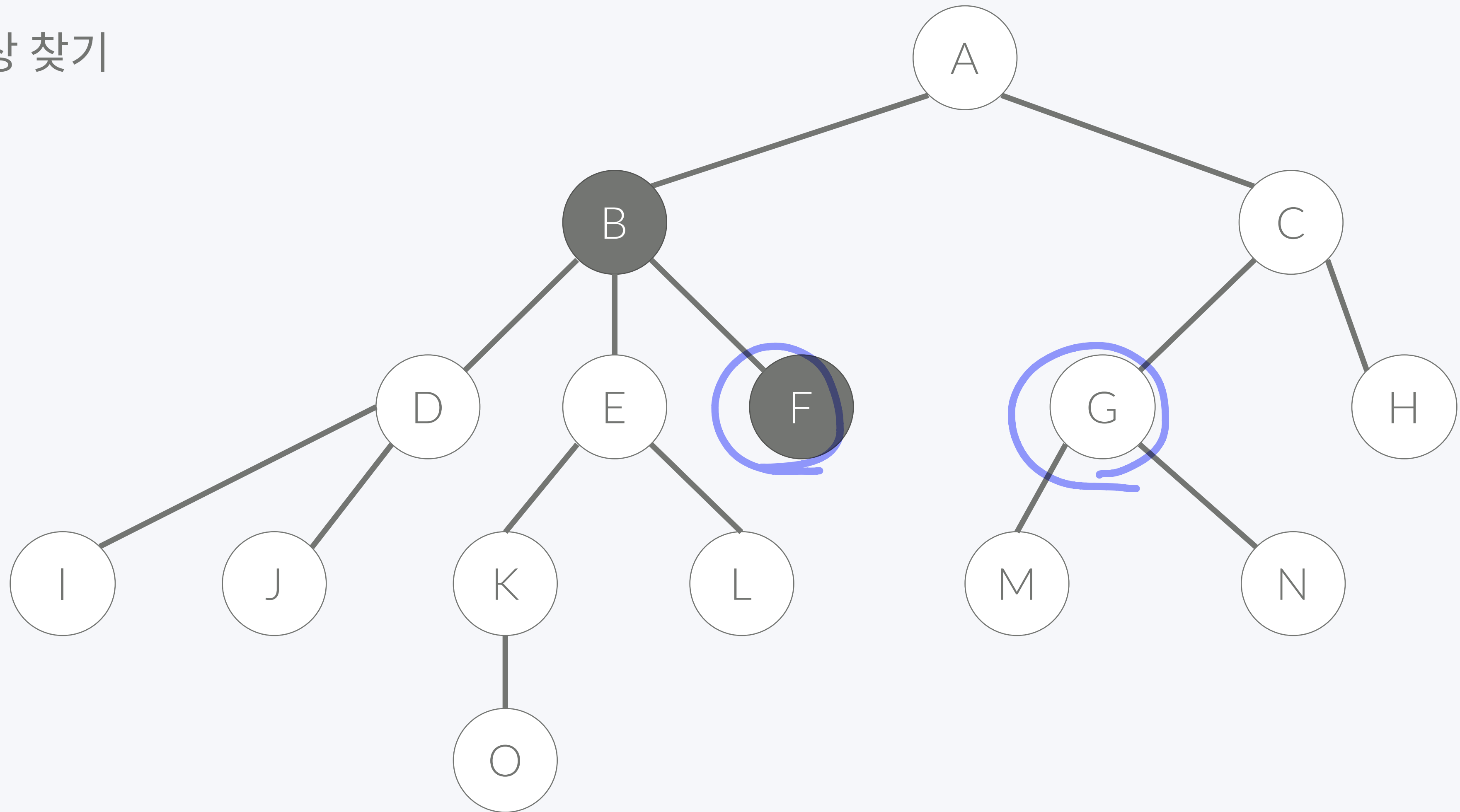


가장 가까운 공통 조상 찾기

6

LCA (Lowest Common Ancestor)

- 가장 가까운 조상 찾기

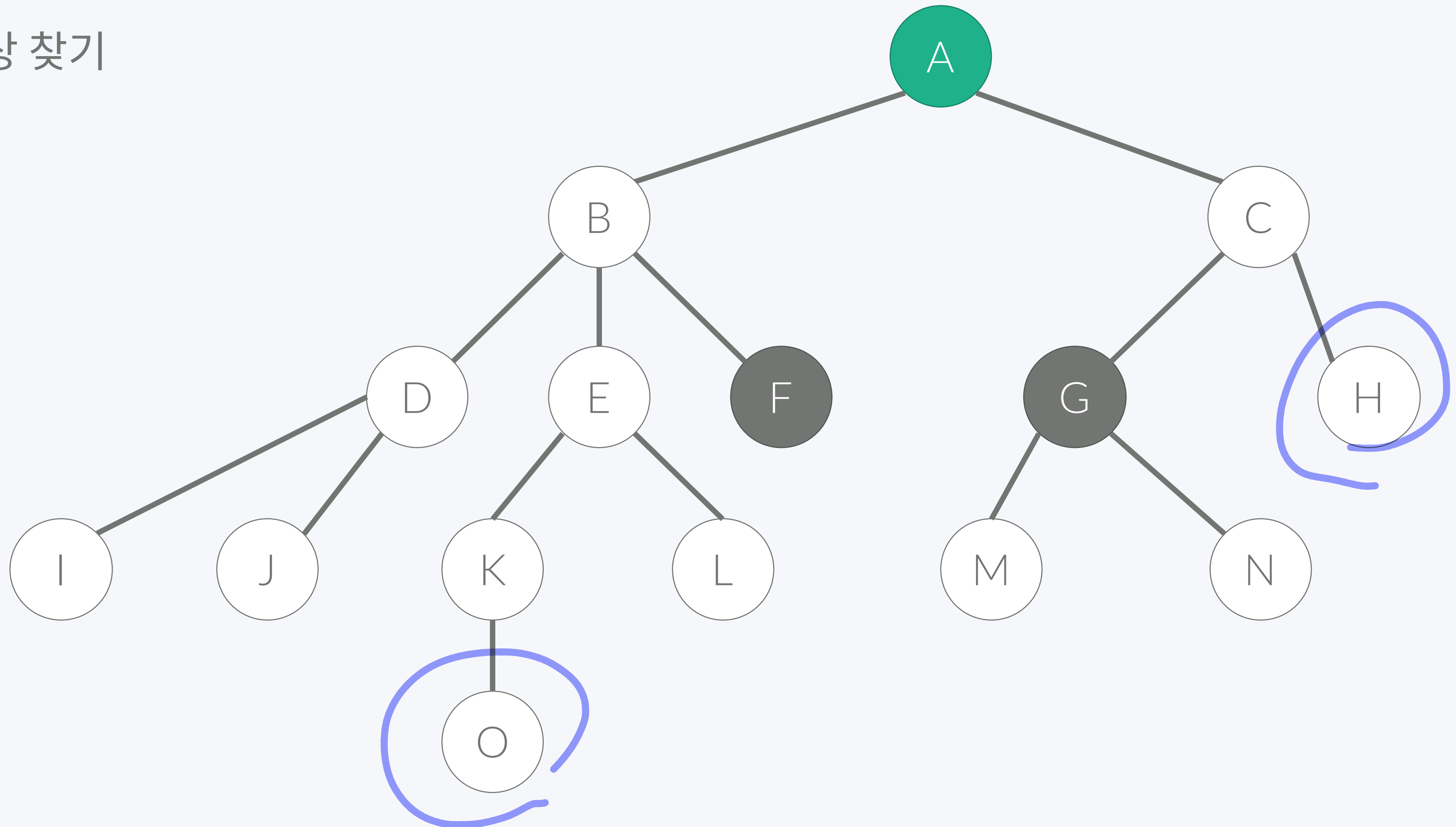


가장 가까운 공통 조상 찾기

7

LCA (Lowest Common Ancestor)

- 가장 가까운 조상 찾기

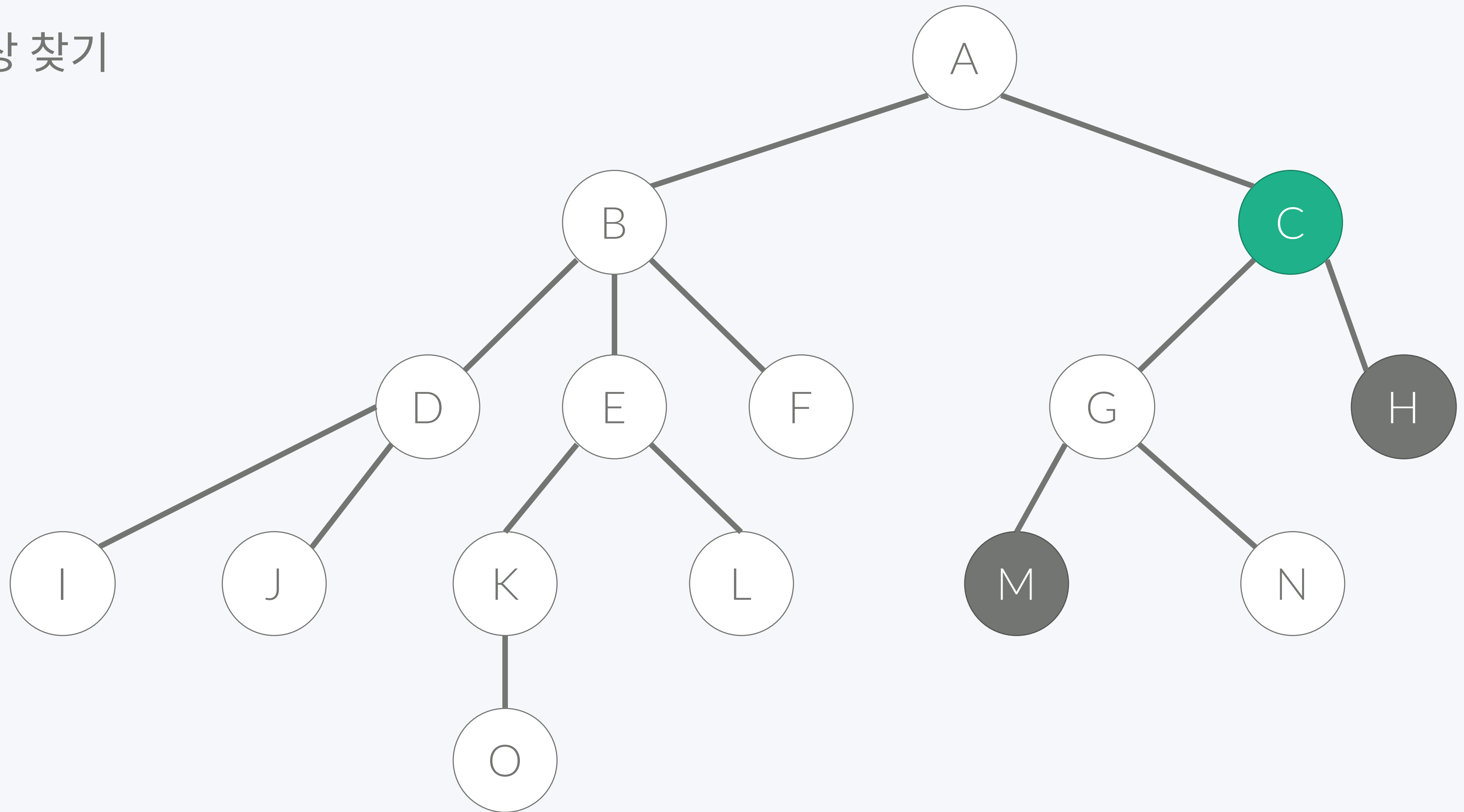


가장 가까운 공통 조상 찾기

8

LCA (Lowest Common Ancestor)

- 가장 가까운 조상 찾기

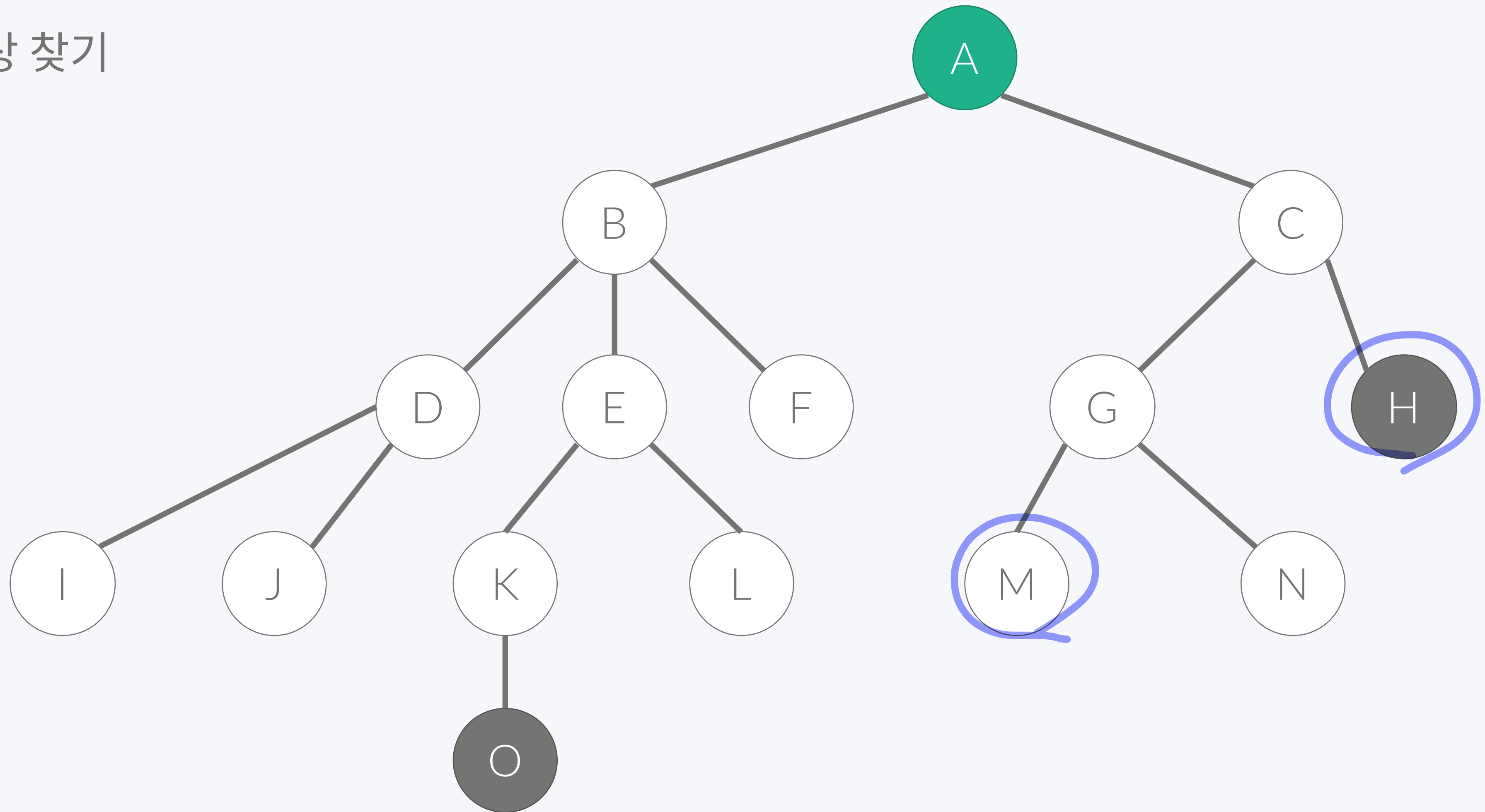


가장 가까운 공통 조상 찾기

9

LCA (Lowest Common Ancestor)

- 가장 가까운 조상 찾기



가장 가까운 공통 조상 찾기

10

LCA (Lowest Common Ancestor)

- x 와 y 의 LCA 구하기
- 두 노드의 레벨이 다르면
- 레벨이 같을 때까지 레벨이 큰 것을 한 칸 씩 위로 올린다
- 두 노드의 레벨이 같아졌으면
- 같은 노드가 될 때까지 한 칸씩 위로 올린다.

가장 가까운 공통 조상 찾기

u, v

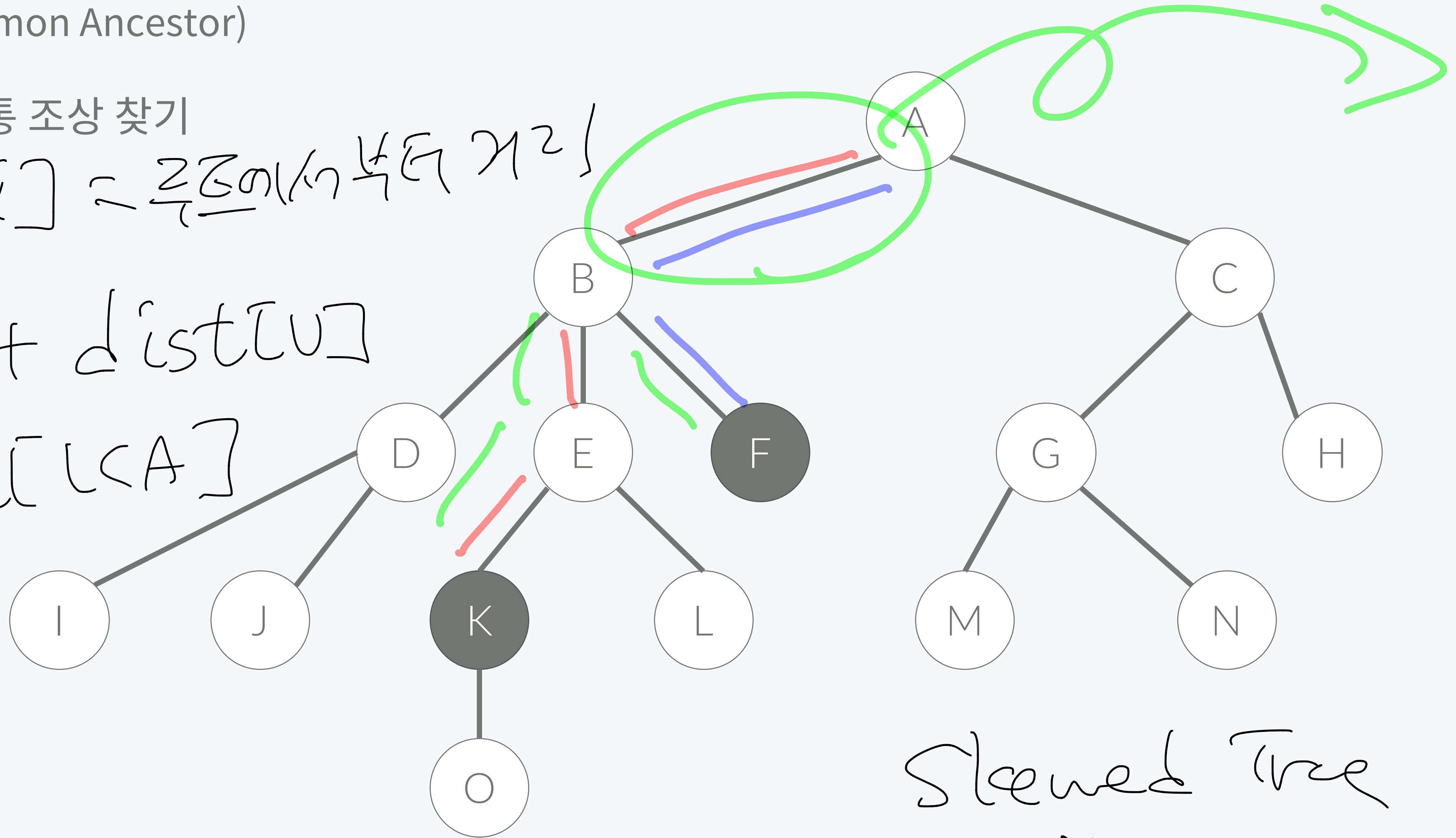
11

LCA (Lowest Common Ancestor)

- 가장 가까운 공통 조상 찾기

$dist[u] \approx \text{루트에서부터 거리}$

$$\underline{dist[u] + dist[v]} - 2 \times dist[LCA]$$



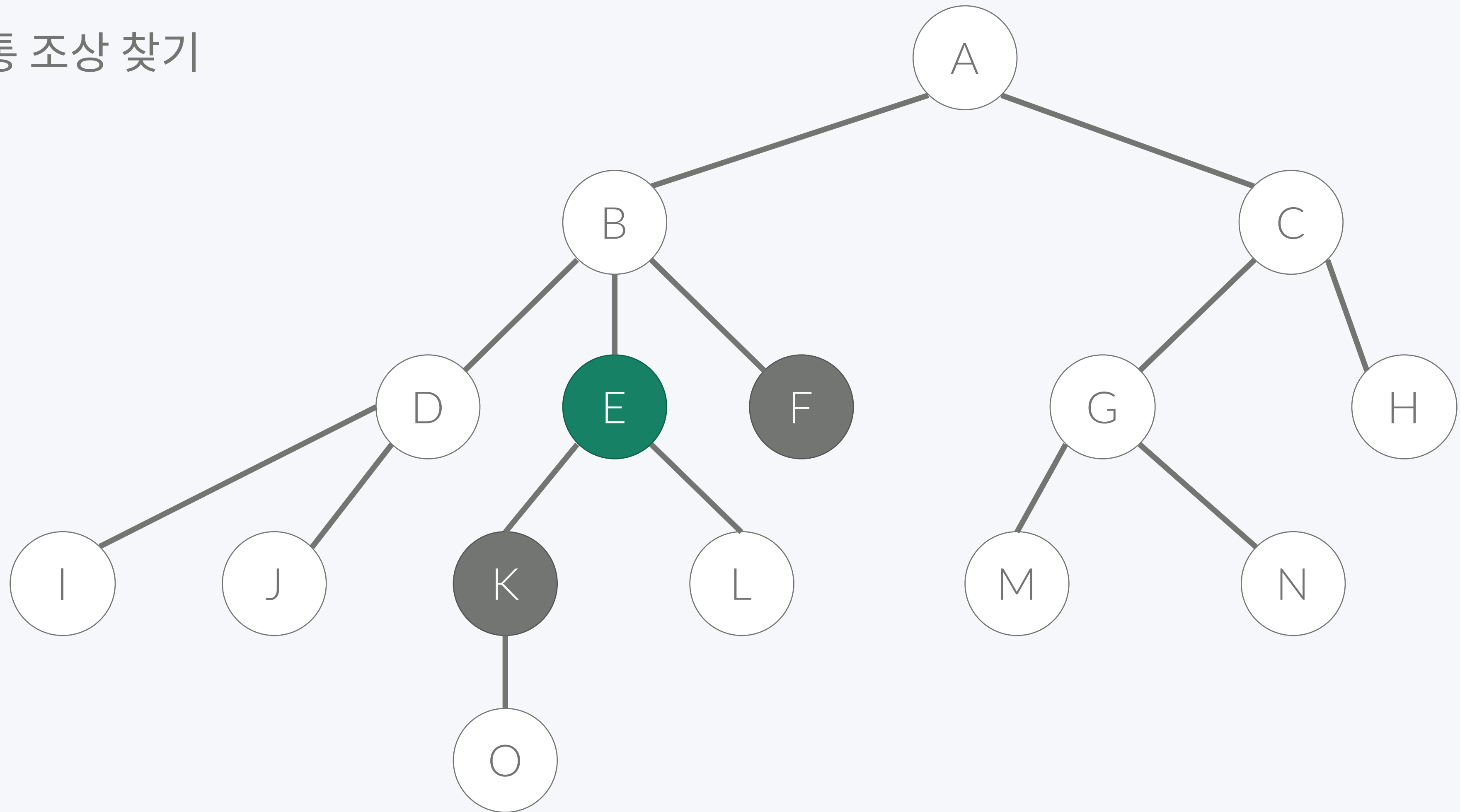
Skewed Tree
사소한 예

가장 가까운 공통 조상 찾기

12

LCA (Lowest Common Ancestor)

- 가장 가까운 공통 조상 찾기

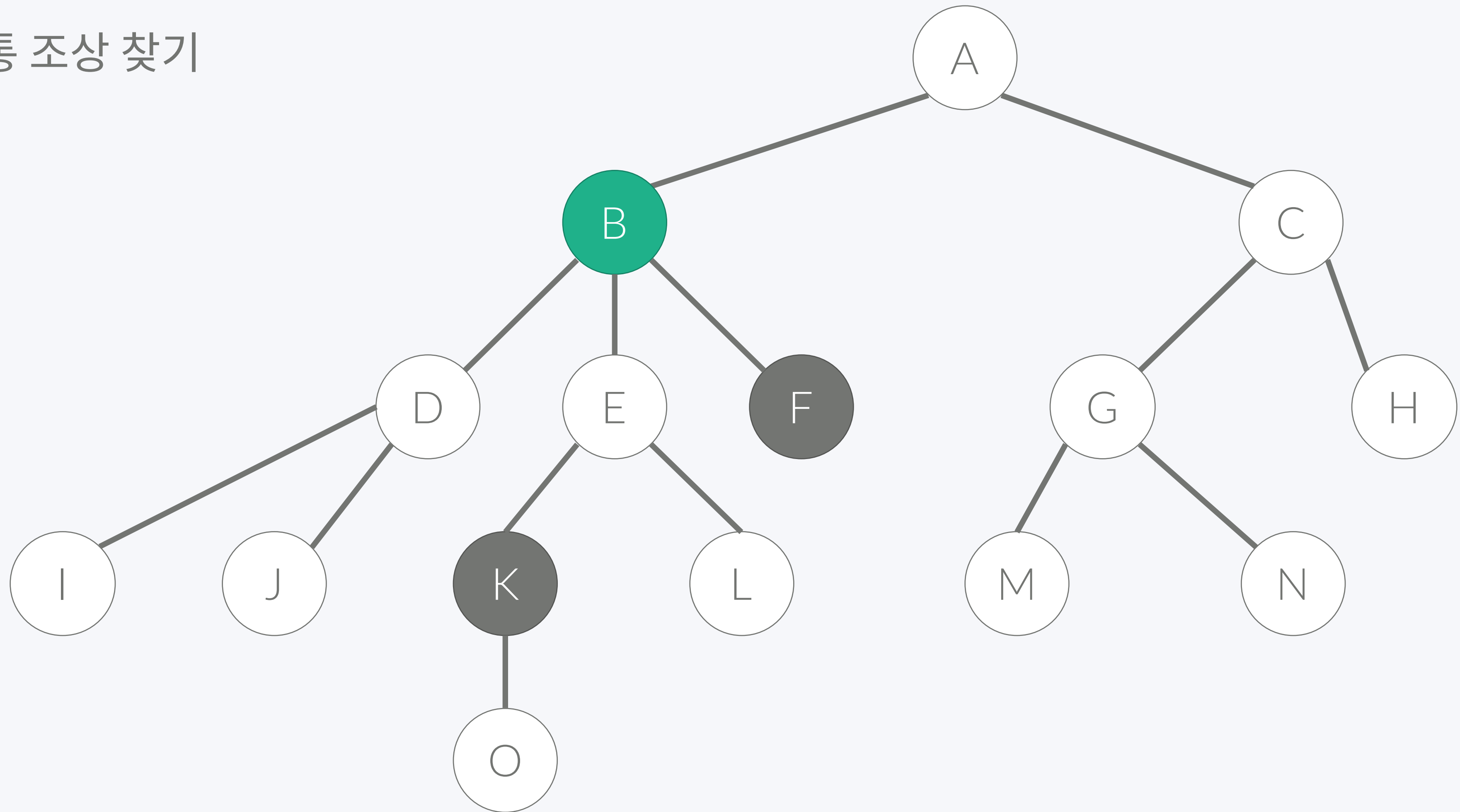


가장 가까운 공통 조상 찾기

13

LCA (Lowest Common Ancestor)

- 가장 가까운 공통 조상 찾기

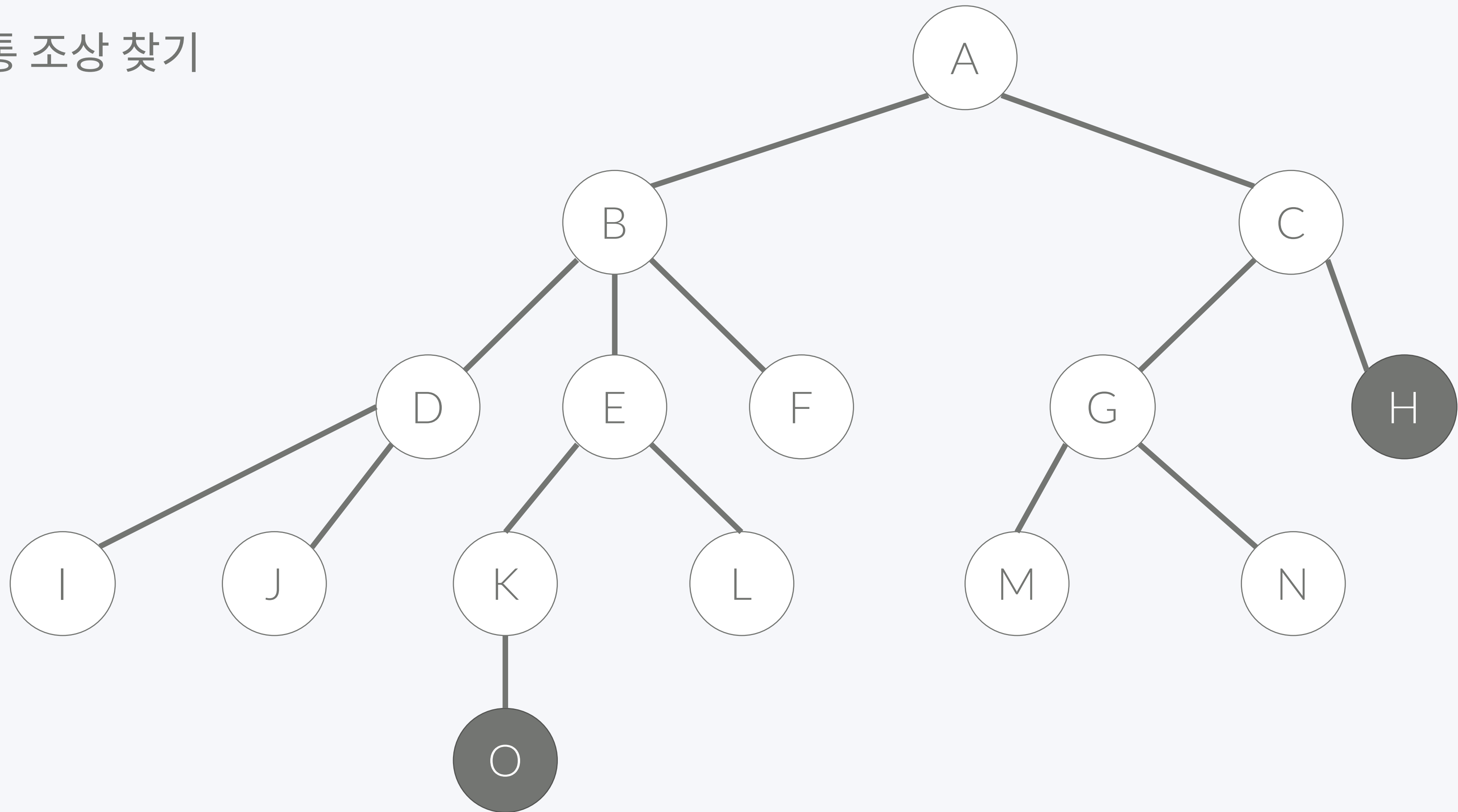


가장 가까운 공통 조상 찾기

14

LCA (Lowest Common Ancestor)

- 가장 가까운 공통 조상 찾기

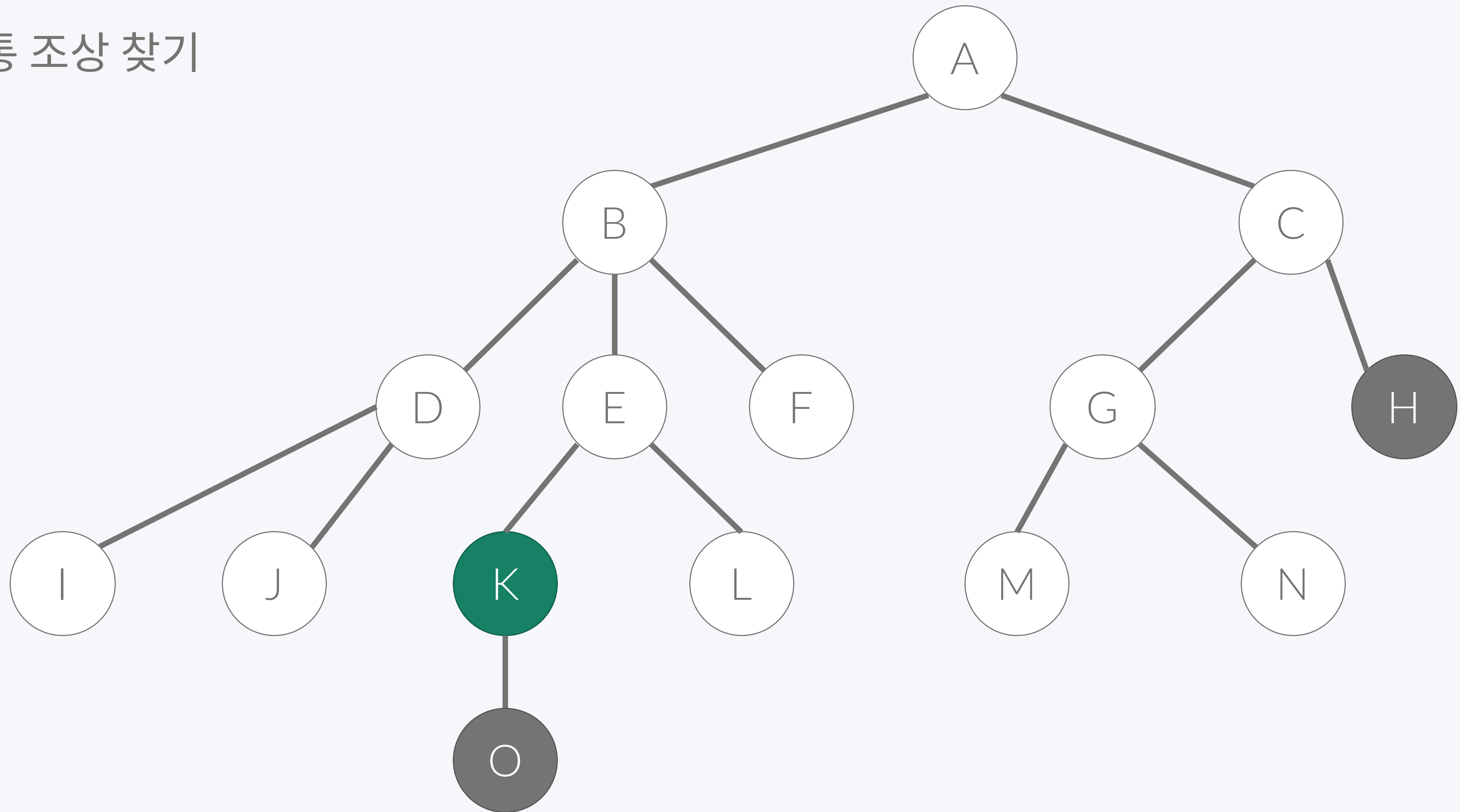


가장 가까운 공통 조상 찾기

15

LCA (Lowest Common Ancestor)

- 가장 가까운 공통 조상 찾기

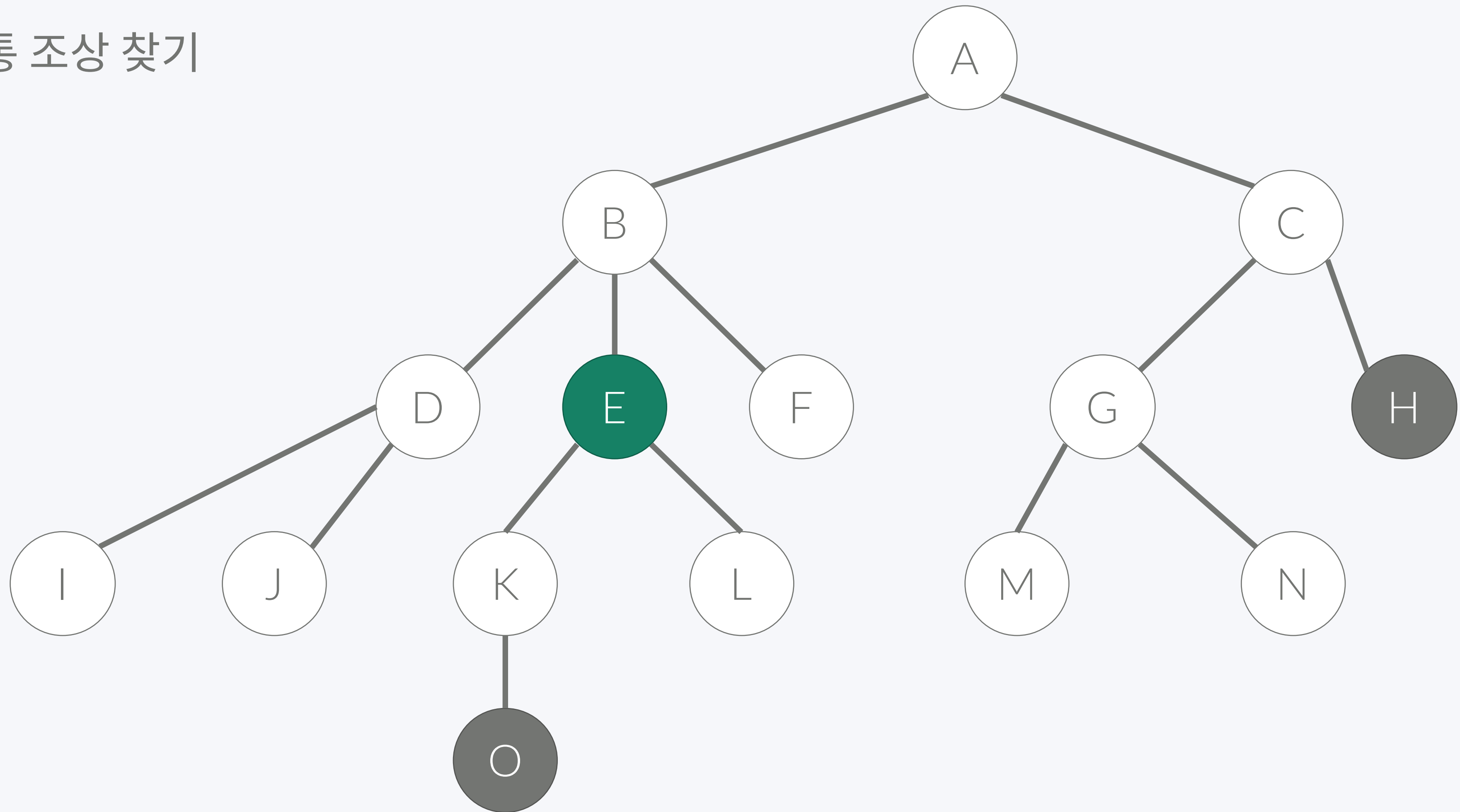


가장 가까운 공통 조상 찾기

16

LCA (Lowest Common Ancestor)

- 가장 가까운 공통 조상 찾기

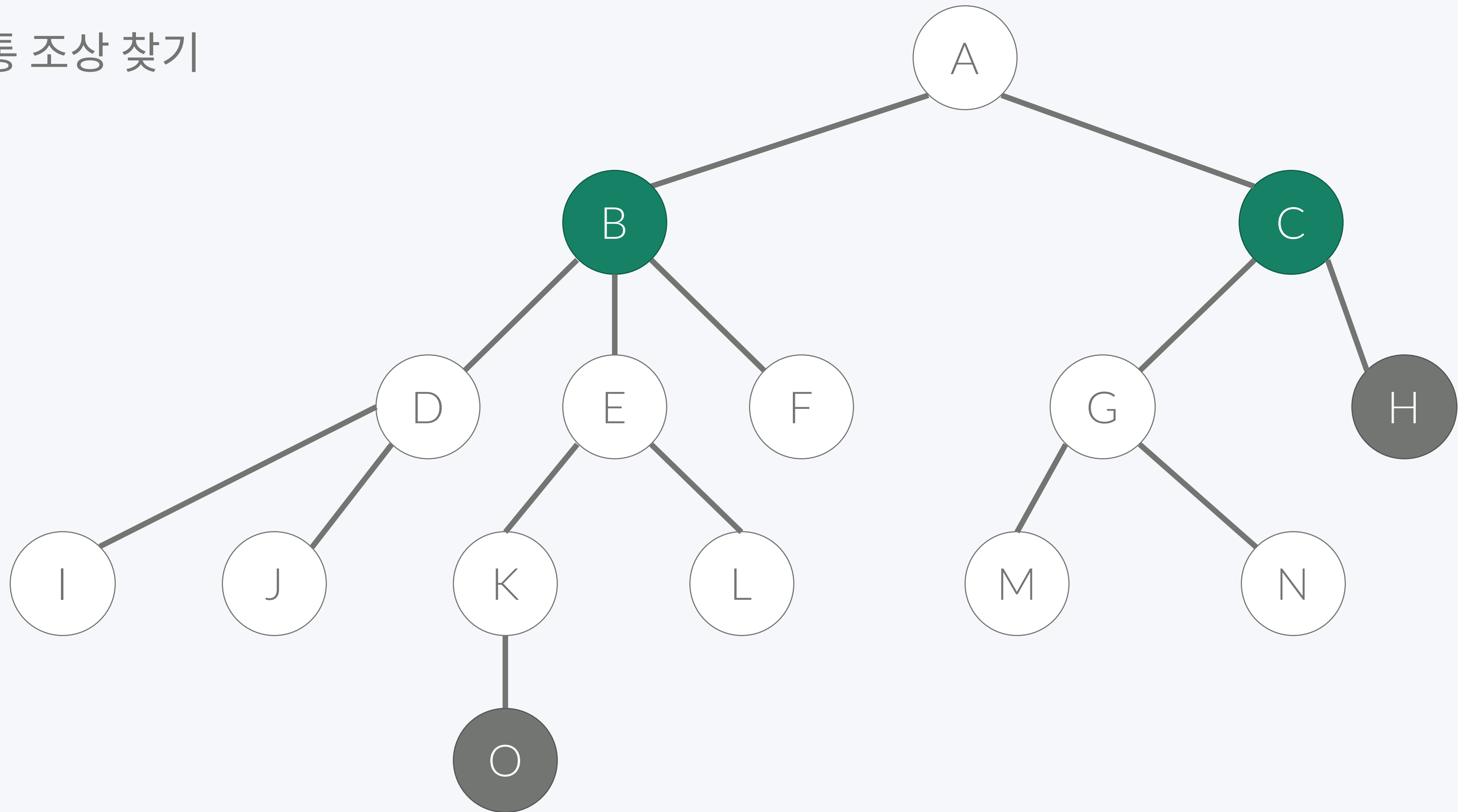


가장 가까운 공통 조상 찾기

17

LCA (Lowest Common Ancestor)

- 가장 가까운 공통 조상 찾기

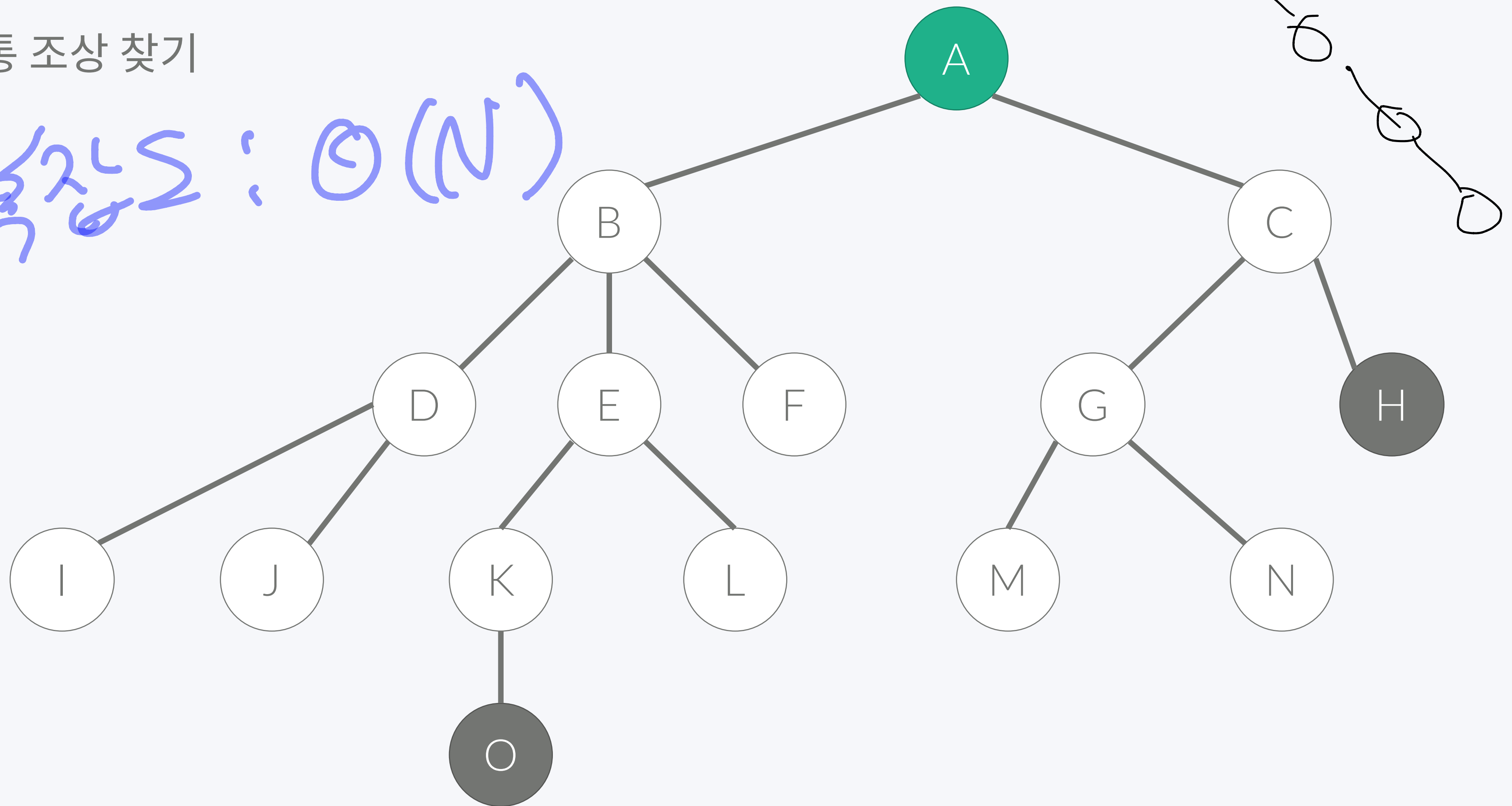


가장 가까운 공통 조상 찾기

LCA (Lowest Common Ancestor)

- 가장 가까운 공통 조상 찾기

시간 복잡도: $O(N)$



LCA

<https://www.acmicpc.net/problem/11437>

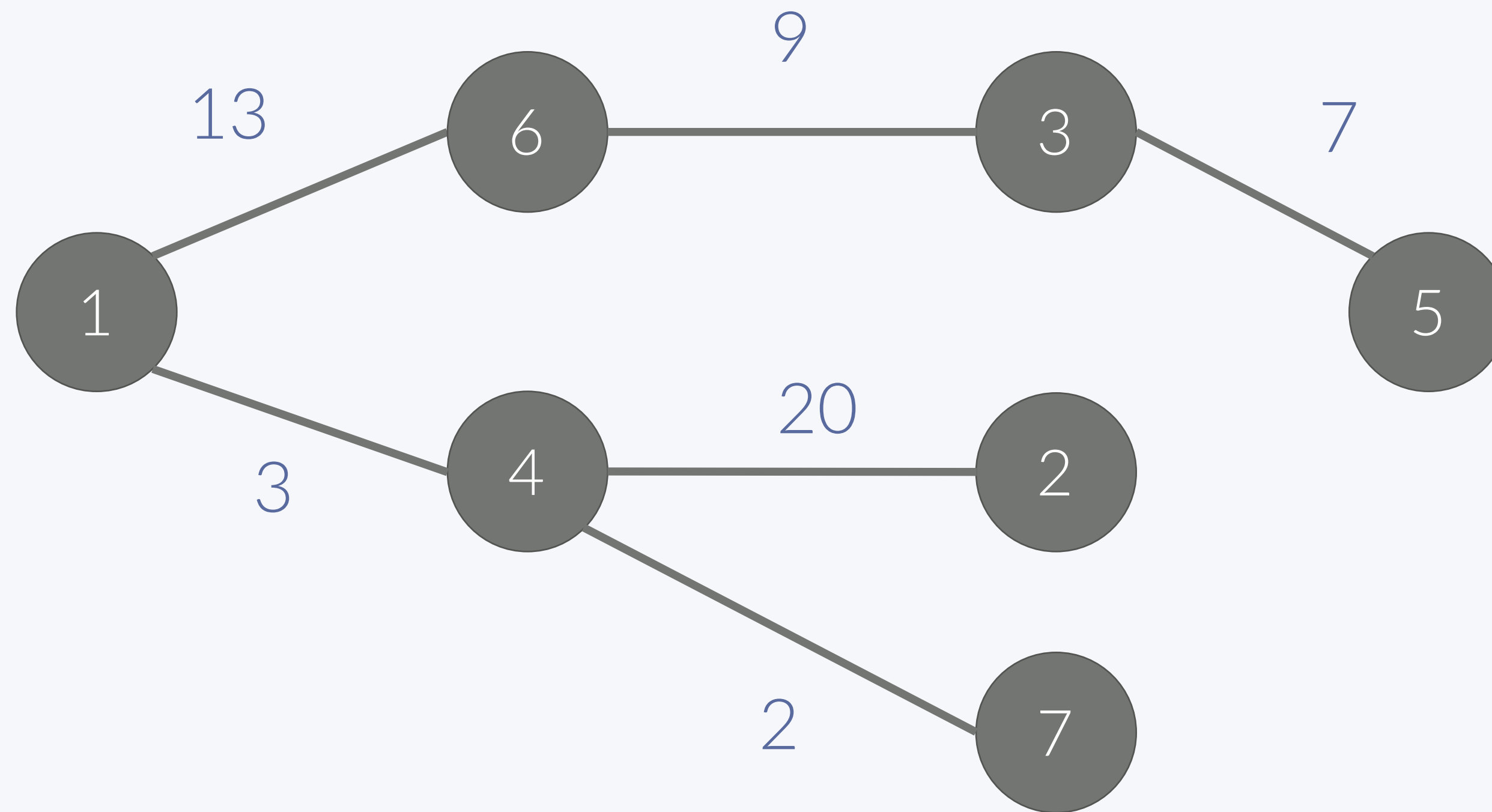
- C/C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/36771f645013977cfeb1>
- Java: <https://gist.github.com/Baekjoon/09b029f637354a4a3582>

정점들의 거리

20

<https://www.acmicpc.net/problem/1761>

- $N(2 \leq N \leq 40,000)$ 개의 정점으로 이루어진 트리가 주어지고 $M(M \leq 10,000)$ 개의 두 노드 쌍을 입력받을 때 두 노드 사이의 거리 구하기



정점들의 거리

<https://www.acmicpc.net/problem/1761>

- 트리에서는 모든 정점 쌍 사이의 경로가 1개만 존재하기 때문에
- 어떤 정점 x 에서 y 로 가는 경로가 곧 최단거리가 된다.
- 거리를 구하는데 필요한 시간: $O(N)$
- 총 쿼리의 개수: M 개
- 시간 복잡도: $O(MN)$

정점들의 거리

<https://www.acmicpc.net/problem/1761>

- C/C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/0a14ffd1c792c49e144e>
- C/C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/c59f726019554fe8a36ab670d9f47ba2>
- Java: <https://gist.github.com/Baekjoon/b2c4b1b29f518d5d4427>

가장 가까운 공통 조상 찾기

LCA (Lowest Common Ancestor)

- 이 방법은 최악의 경우에 시간복잡도가 $O(N)$ 이다.
- Dynamic Programming을 이용해서
- $O(\lg N)$ 만에 구할 수 있다.

$N \neq \lg N$

$P[i][j] =$ i 의 2^j 번째 조상
 $=$ i 의 2^{j-1} 번째 조상의

$P[P[i][j-1]][j-1]$ 2^{j-1} 번째 조상

가장 가까운 공통 조상 찾기

LCA (Lowest Common Ancestor)

- $P[i][j]$ = 노드 i 의 2^j 번째 조상
- $P[i][0] = \text{Parent}[i]$
- $P[i][j] = P[P[i][j-1]][j-1]$

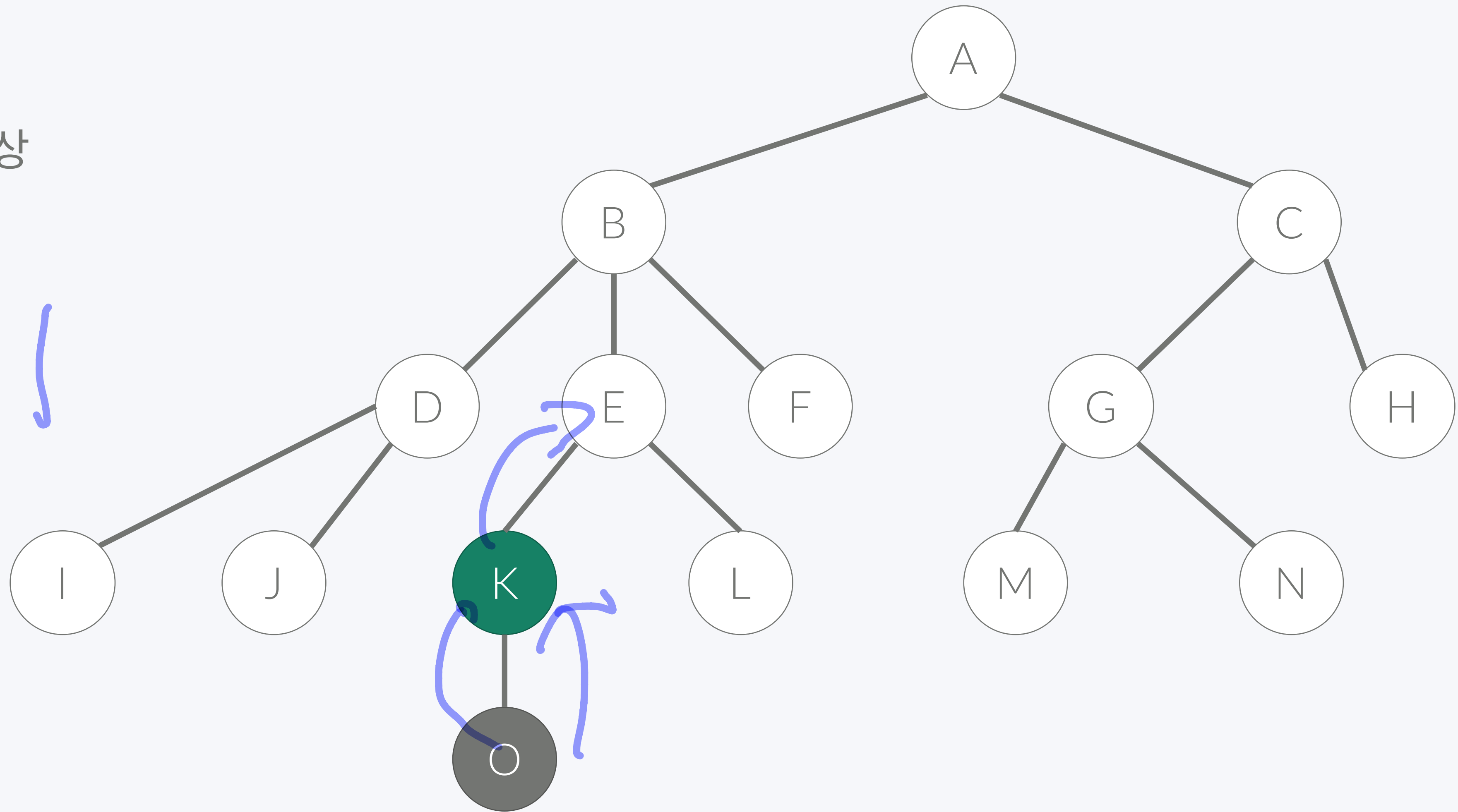
가장 가까운 공통 조상 찾기

25

LCA (Lowest Common Ancestor)

- $j = 0$
- $2^0 = 1$ 번째 조상

$2^0 = 1$
 2^1



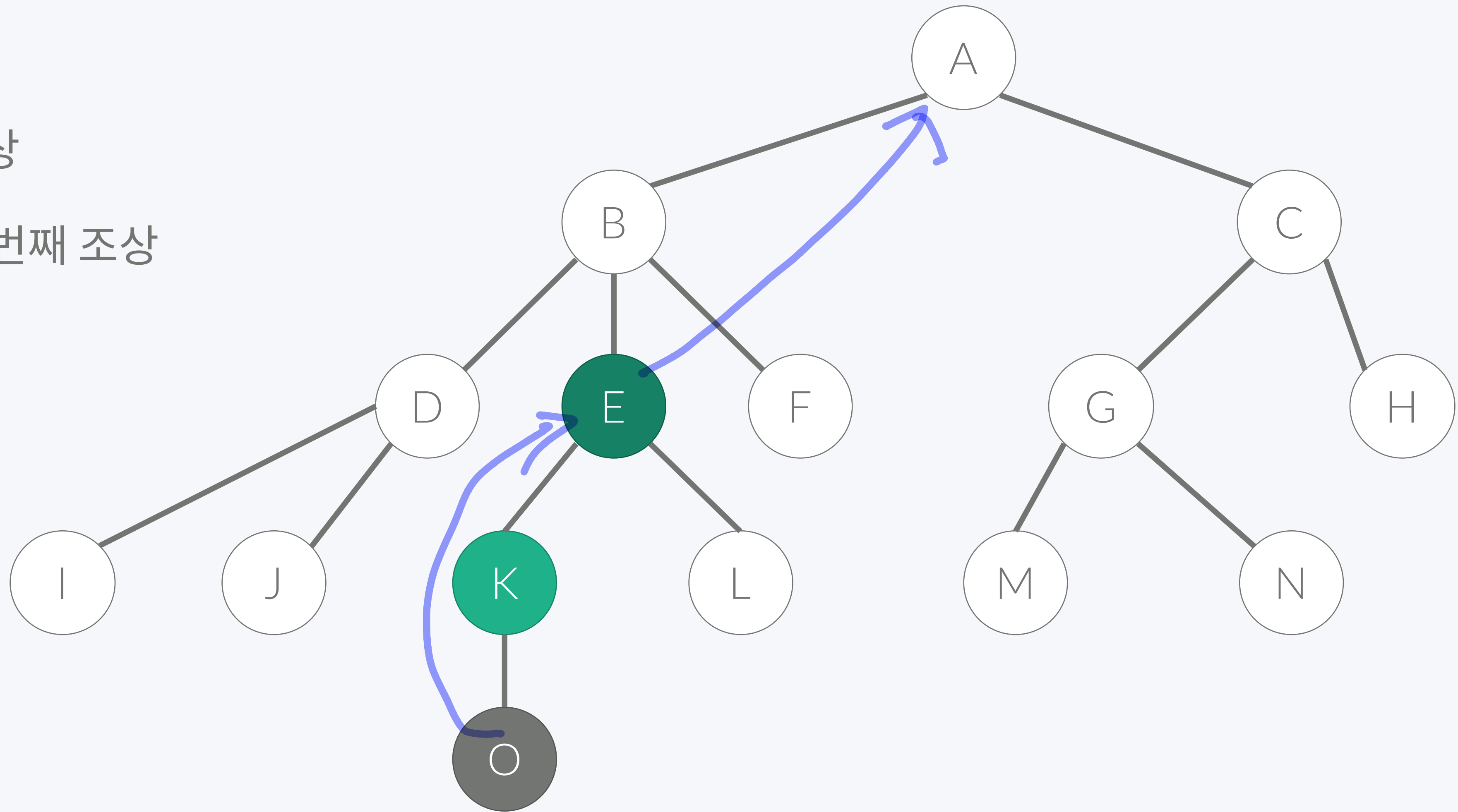
가장 가까운 공통 조상 찾기

26

LCA (Lowest Common Ancestor)

- $j = 1$
- $2^1 = 2$ 번째 조상
- 1번째 조상의 1번째 조상

2^2

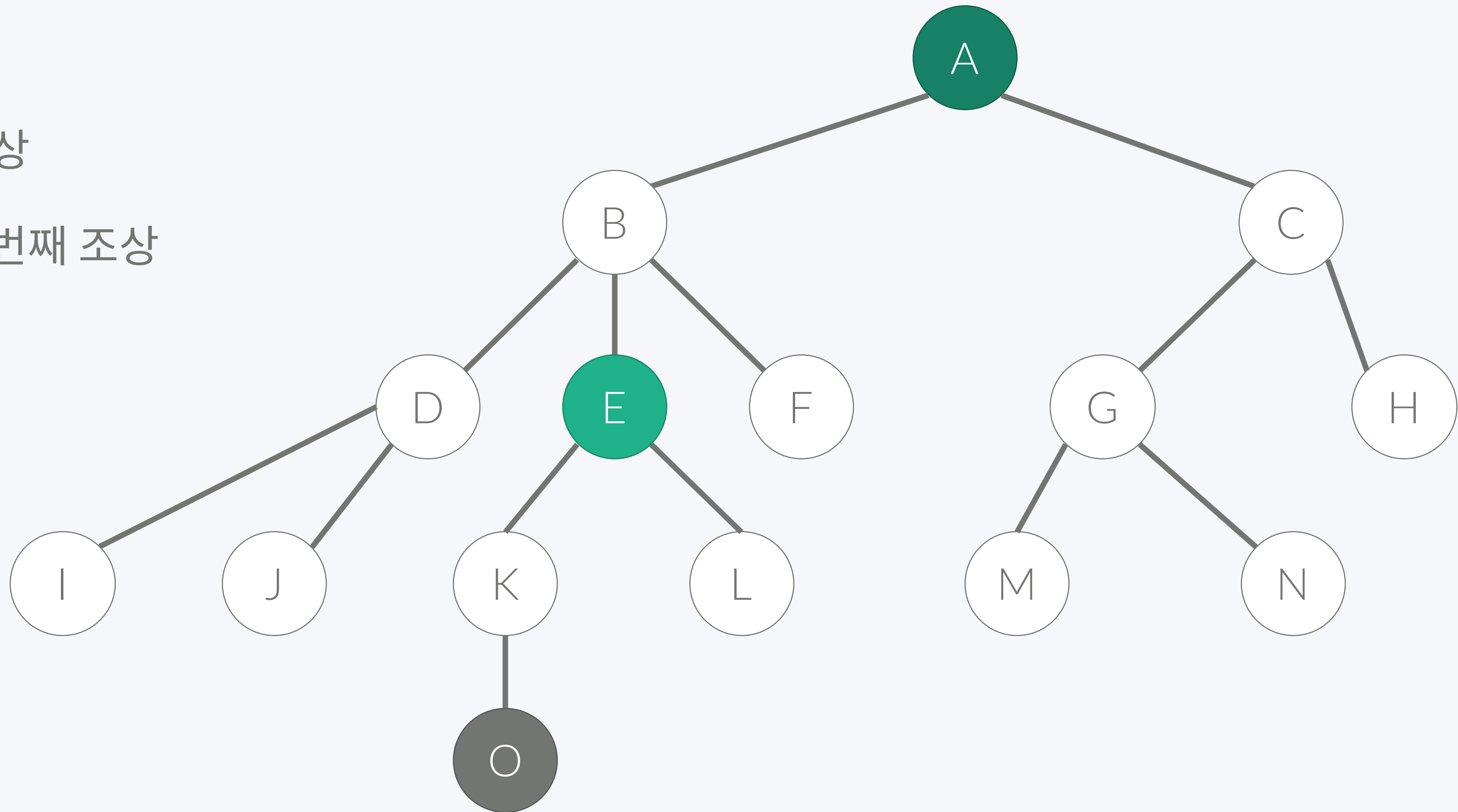


가장 가까운 공통 조상 찾기

27

LCA (Lowest Common Ancestor)

- $j = 2$
- $2^2 = 4$ 번째 조상
- 2번째 조상의 2번째 조상



가장 가까운 공통 조상 찾기

LCA (Lowest Common Ancestor)

```
(
  for (int i=1; i<=n; i++) {
    p[i][0] = parent[i];
  }
)
```

2의 2⁰번째 3¹등
2¹번째 3²등

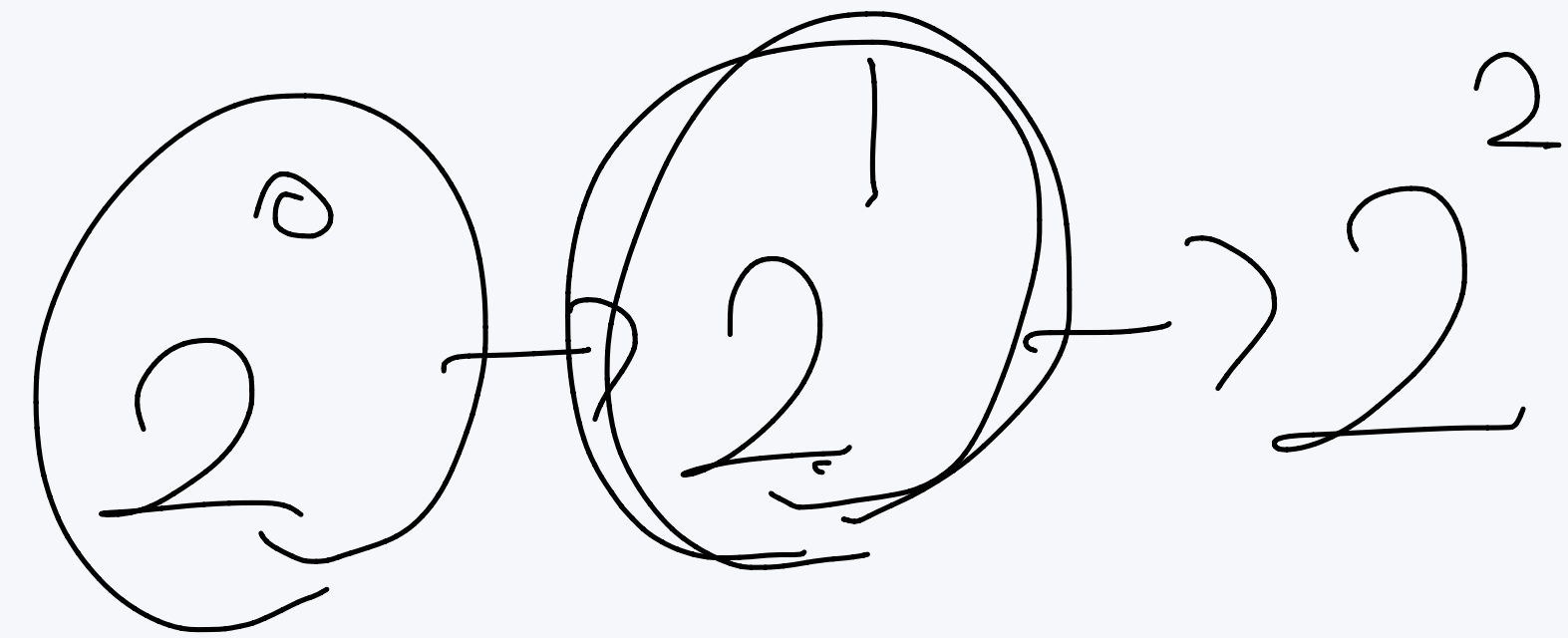
가장 가까운 공통 조상 찾기

LCA (Lowest Common Ancestor)

```

for (int j=1; (1<<j) < n; j++) {
    for (int i=1; i<=n; i++) {
        if (p[i][j-1] != 0) {
            p[i][j] = p[p[i][j-1]][j-1];
        }
    }
}

```



가장 가까운 공통 조상 찾기

LCA (Lowest Common Ancestor)

- x 와 y 의 LCA 구하기
- 두 노드의 레벨이 다르면
- 레벨이 같을 때까지 레벨이 큰 것을 2^k 칸 씩 위로 올린다
- 두 노드의 레벨이 같아졌으면
- 같은 노드가 되지 않을 때까지 2^k 칸씩 위로 올린다.
- 그 다음 마지막으로 1 칸 올린다.

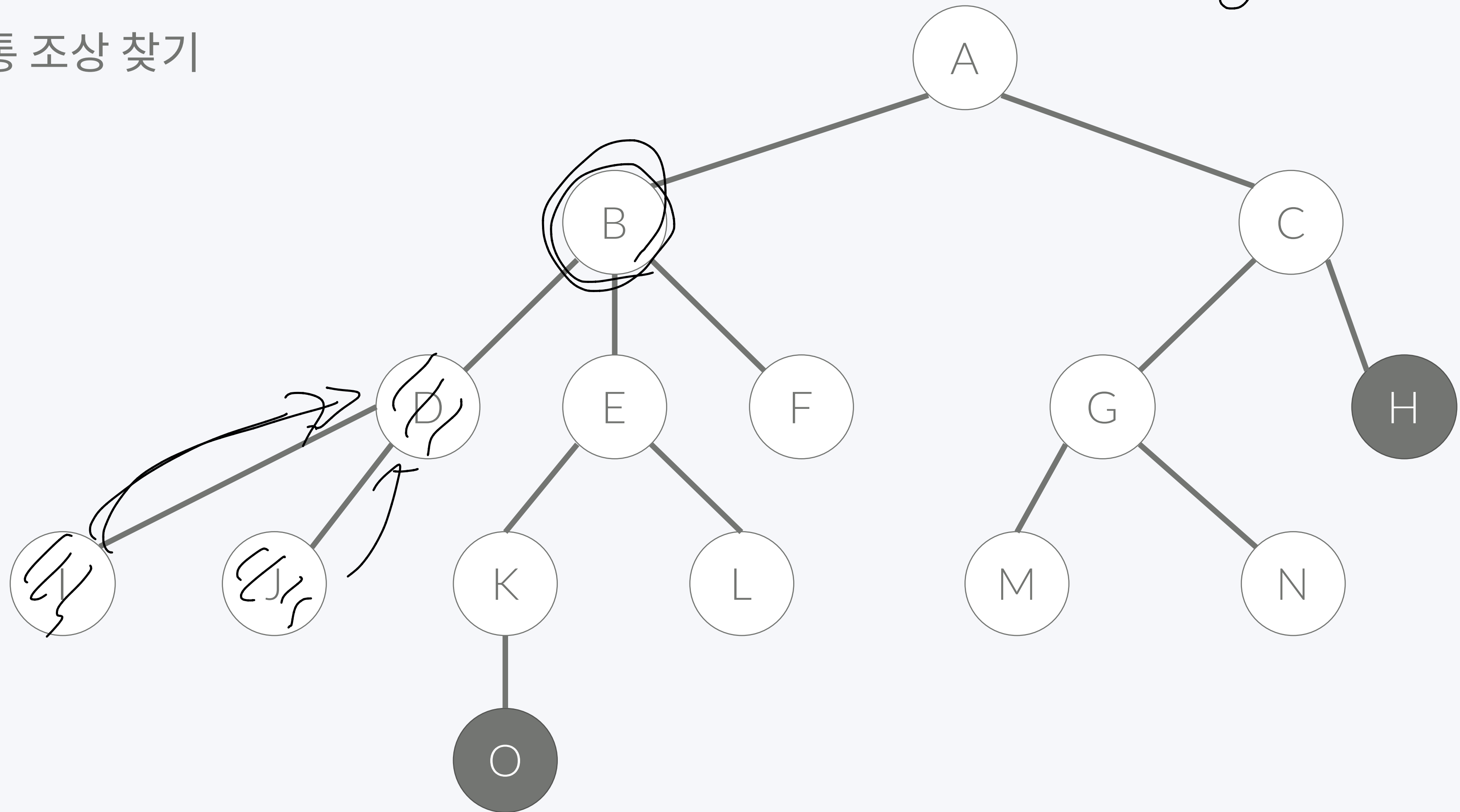
가장 가까운 공통 조상 찾기

LCA (Lowest Common Ancestor)

$O(\lg N)$

31

- 가장 가까운 공통 조상 찾기



~~2~~ 1

~~2~~ 2

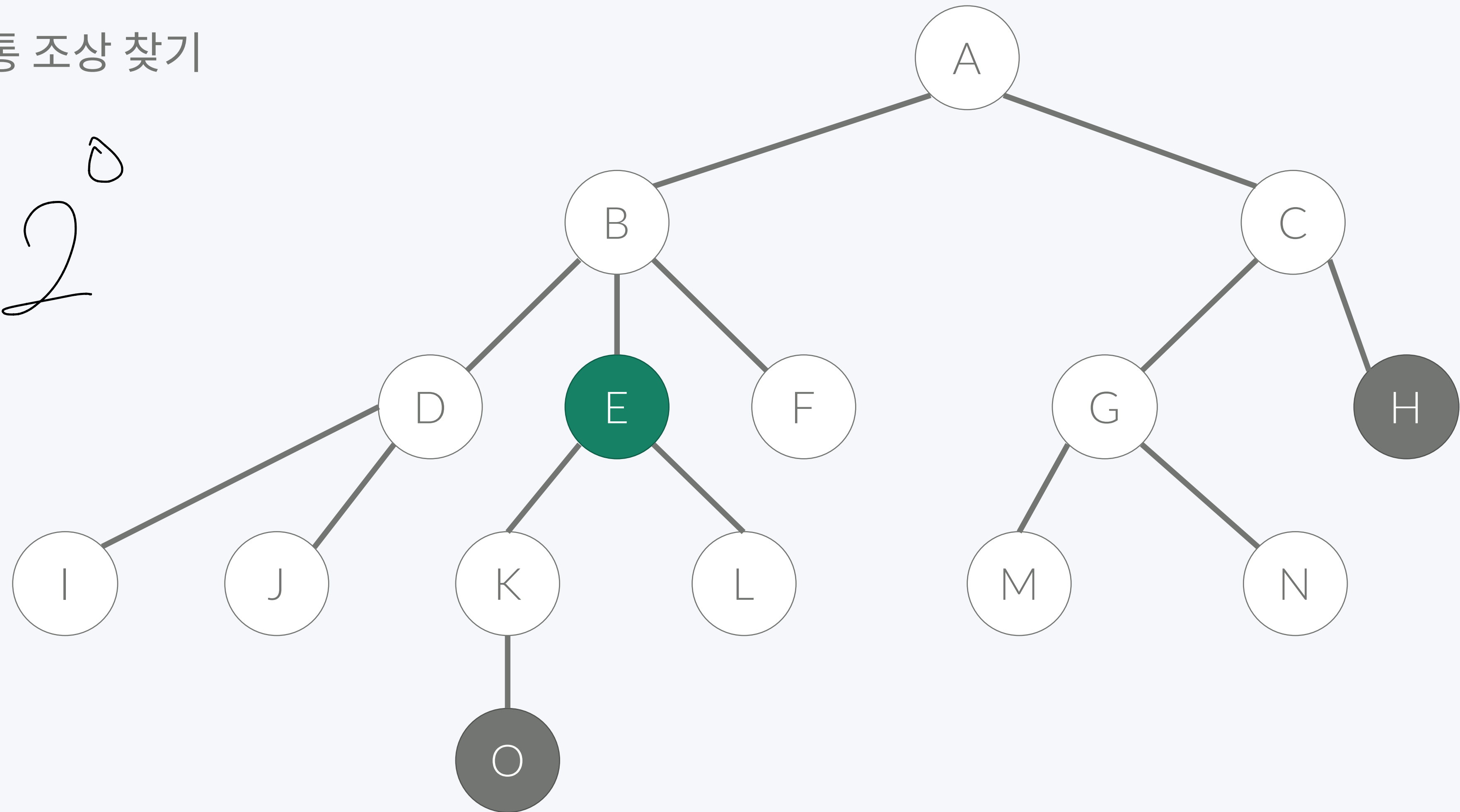
가장 가까운 공통 조상 찾기

32

LCA (Lowest Common Ancestor)

- 가장 가까운 공통 조상 찾기

~~2~~ ~~2~~ 2

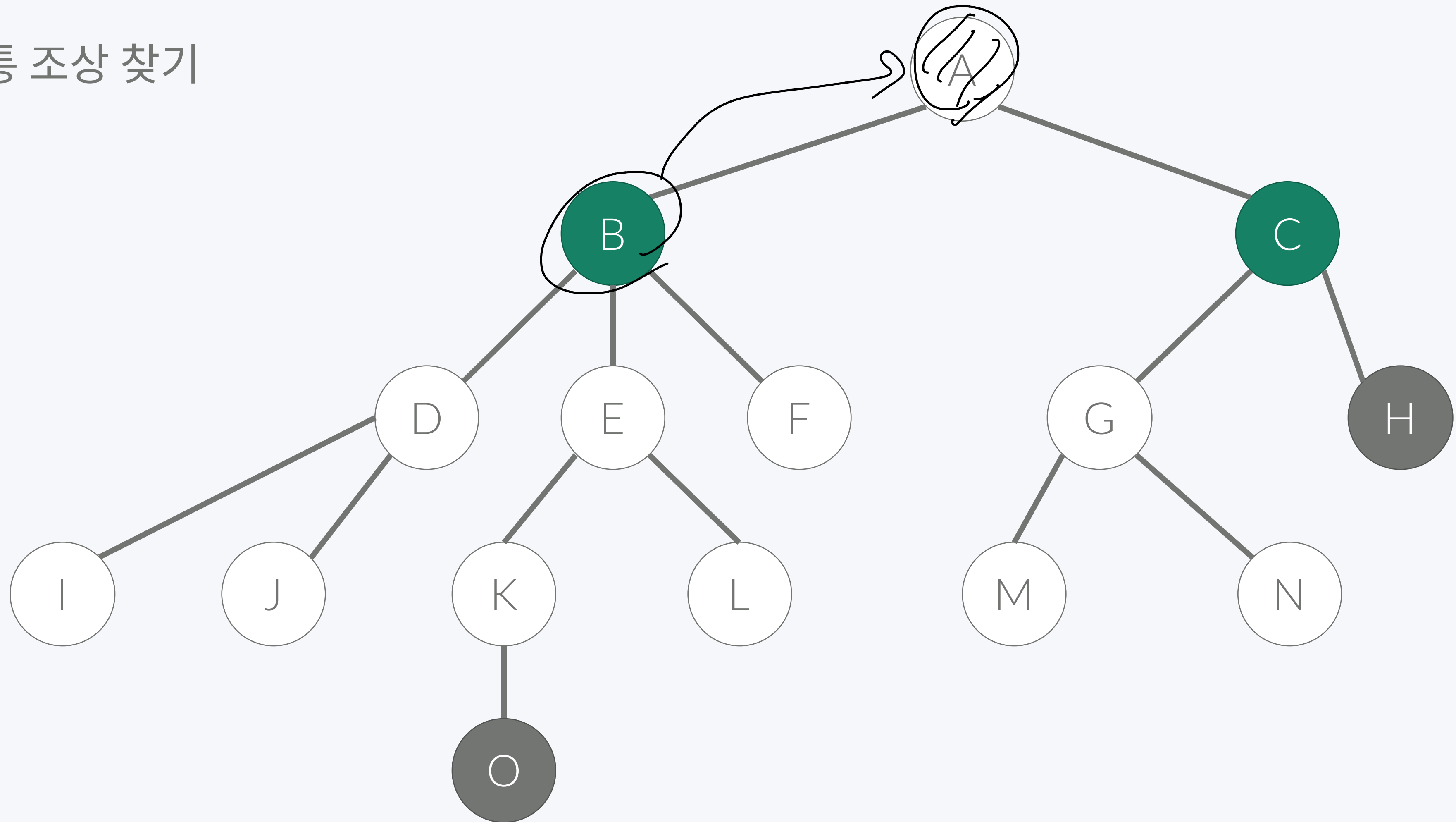


가장 가까운 공통 조상 찾기

33

LCA (Lowest Common Ancestor)

- 가장 가까운 공통 조상 찾기



LCA 2

<https://www.acmicpc.net/problem/11438>

- C/C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/16332082b9536bab2a03>
- Java: <https://gist.github.com/Baekjoon/808e457beae1abbbf3b8e>

	시간	메모리
<u>1차</u>	$O(N)$	$O(N)$
<u>2차</u>	$O(N \lg N)$	$O(\lg N)$
	$\times 1$	$\times M$

도로 네트워크

<https://www.acmicpc.net/problem/3176>

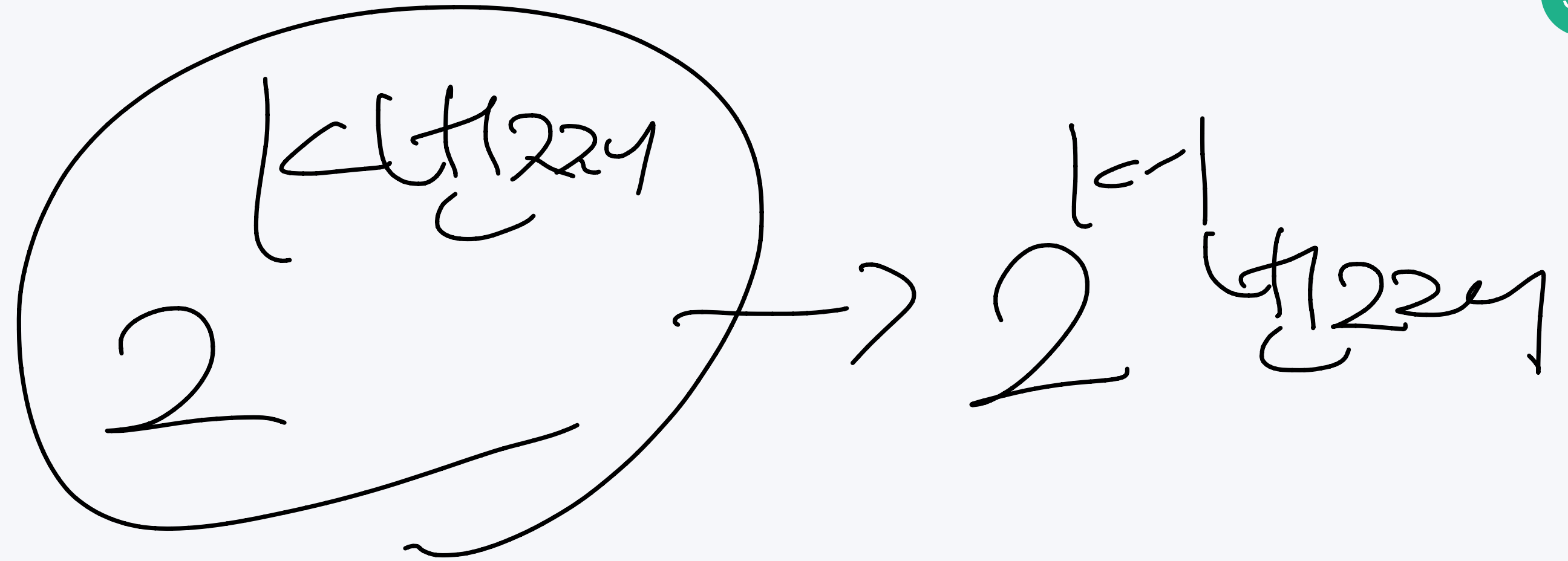
- N 개의 도시와 그 도시를 연결하는 $N-1$ 개의 도로로 이루어진 도로 네트워크가 있다.
- 모든 도시의 쌍에는 그 도시를 연결하는 유일한 경로가 있고, 각 도로의 길이는 입력으로 주어진다.
- 총 K 개의 도시 쌍이 주어진다. 이 때, 두 도시를 연결하는 경로 상에서 가장 짧은 도로의 길이와 가장 긴 도로의 길이를 구하는 프로그램을 작성하시오.

도로 네트워크

36

<https://www.acmicpc.net/problem/3176>

- LCA를 구하는 문제인데
- 배열을 2개 더 만들어야 한다.
- $P[i][j] = i$ 의 2^j 번째 parent
- $len_min[i][j] = i$ 의 2^j 번째 parent까지 올라가면서 만나는 모든 도로 중 가장 짧은 것의 길이
- $len_max[i][j] = i$ 의 2^j 번째 parent까지 올라가면서 만나는 모든 도로 중 가장 긴 것의 길이
- C/C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/4bf3caafe1bdd5fbb8b3>

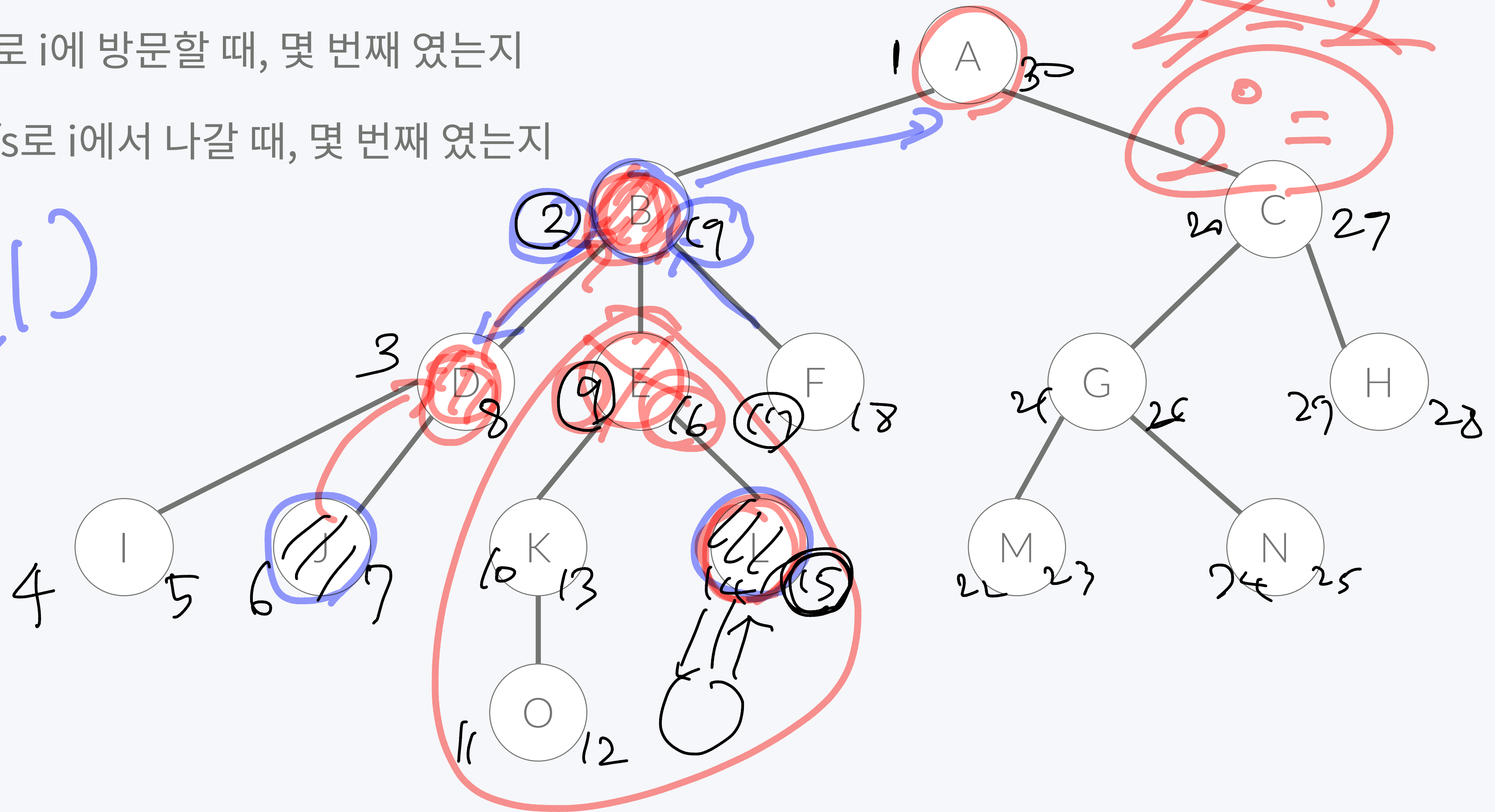


가장 가까운 공통 조상 찾기

LCA (Lowest Common Ancestor)

- $tin[i]$ = dfs로 i 에 방문할 때, 몇 번째였는지
- $tout[i]$ = dfs로 i 에서 나갈 때, 몇 번째였는지

① (1)



가장 가까운 공통 조상 찾기

LCA (Lowest Common Ancestor)

```
void dfs(int v, int parent) {
    tin[v] = ++timer;
    p[v][0] = parent;
    for (int i=1; i<=l; i++) {
        p[v][i] = p[p[v][i-1]][i-1];
    }
    for (int to : a[v]) {
        if (to != parent) {
            dfs(to, v);
        }
    }
    tout[v] = ++timer;
}
```

$O(N \log N)$



가장 가까운 공통 조상 찾기

LCA (Lowest Common Ancestor)

```
bool upper(int u, int v) {  
    return (tin[u] <= tin[v] && tout[u] >= tout[v]);  
}
```

가장 가까운 공통 조상 찾기

LCA (Lowest Common Ancestor)

```
int lca(int u, int v) {  
    if (upper(u, v)) return u;  
    if (upper(v, u)) return v;  
    for (int i=l; i>=0; i--) {  
        if (!upper(p[u][i], v)) {  
            u = p[u][i];  
        }  
    }  
    return p[u][0];  
}
```



LCA 2

<https://www.acmicpc.net/problem/11438>

- C/C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/5143d9de7ad109ef87ba4d788a619353>