Elibrando Albarracin Tumay
1118776045
Ingeniería Eléctrica
Señales y Sistemas

1. $x_1(t) = Ae^{-jn\omega_0 t}$; $x_2(t) = Be^{jm\omega_0 t}$; $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$; $A, B > 0$, $n, m \in \mathbb{Z}$

$$d^2(x_1, x_2) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt$$

$$|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_2)^* = |x_1|^2 + |x_2|^2 - x_1 x_2^* - x_1^* x_2$$

$$|x_1|^2 = A^2$$
$$|x_2|^2 = B^2$$
$$x_1 x_2^* = ABe^{-j(n+m)\omega_0 t}$$
$$x_1^* x_2 = ABe^{j(n+m)\omega_0 t}$$

$$|x_1 - x_2|^2 = A^2 + B^2 - AB(e^{-j(n+m)\omega_0 t} + e^{j(n+m)\omega_0 t})$$
$$= A^2 + B^2 - 2AB\cos((n+m)\omega_0 t)$$

Ortogonalidad de exponenciales

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos(K\omega_0 t)\,dt = \begin{cases} 1, & K = 0 \\ 0, & K \neq 0 \end{cases} \quad K = n+m$$

- Si $n+m \neq 0 \rightarrow$ Promedio del coseno es cero
- Si $n+m = 0 \rightarrow m = -n \rightarrow \cos(0) = 1$

$$d^2(x_1, x_2) = A^2 + B^2 - 2AB\delta_{n+m,0} \rightarrow \delta_{n+m,0} = 1 \text{ si } n+m = 0$$

Armónicos distintos $\rightarrow n+m \neq 0$; $d^2 = A^2 + B^2$

Frecuencias opuestas $\rightarrow n = -m$; $d^2 = (A-B)^2$

Si $n = m = 0$; $d^2 = (A-B)^2$

2.

$x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\,\text{sen}(3000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$

Verificar que la señal $x(t)$ sea una señal cuasiperiodica.

$\left.\begin{array}{l} \omega_1 = 1000\pi \\ \omega_2 = 3000\pi \\ \omega_3 = 11000\pi \end{array}\right\}$ $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1000\pi}{3000\pi} = \frac{1}{3}$, $\frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{1000\pi}{11000\pi} = \frac{1}{11}$

$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{3000\pi}{11000\pi} = \frac{3}{11}$

Como todas las combinaciones dan como resultado un número racional, la señal es cuasiperiodica.

Discretizamos la señal

$t \rightarrow nT_s = \frac{n}{F_s} \rightarrow x(t) \rightarrow x[n] \quad n \in \mathbb{Z}$ con $F_s = 5\,KHz$

Verificamos Nyquist con $F_s = 5\,KHz$

$\omega_{max} = 11000\pi \longrightarrow f_{max} = \frac{\omega_{max}}{2\pi} = \frac{11000\pi}{2\pi} = 5500\,Hz$

Así, la frecuencia de muestreo debe ser 2 veces la frecuencia máxima de mi señal cuasiperiodica.

F_s debe ser mayor a $2(f_{max}) = 2 * 5500\,Hz = 11000\,Hz$

$F_s \geq 11000 \longrightarrow$ Por lo tanto la frecuencia de muestreo dada en el ejercicio no es apta.

Para que la diagonalización sea apropiada vamos a cambiar la frecuencia de muestreo a $4 * F_{max} = 4(5500\,Hz) = 22000\,Hz$

Ahora vamos a calcular el periodo de la señal.

$\left.\begin{array}{l} \omega_1 = 1000\pi \\ \omega_2 = 3000\pi \\ \omega_3 = 11000\pi \end{array}\right\}$ $T_1 = \frac{2\pi}{1000\pi} = \frac{1}{500}$, $T_2 = \frac{2\pi}{3000\pi} = \frac{1}{1500}$, $T_3 = \frac{2\pi}{11000\pi} = \frac{1}{5500}$.

$T = KT_1 = rT_2 = \ell \cdot T_3$

$T = \frac{K\,1}{500} = \frac{r\,1}{1500} = \frac{\ell\,1}{5500}$ multiplicamos por (11000)

$T = \frac{1}{500}$

3.
$$C_n = \frac{1}{T}\int_{t_i}^{t_f} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt \longrightarrow x(t) = \sum_n C_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$x'(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt}\left\{ \sum_n C_n e^{jn\omega_0 t} \right\} = \sum_n C_n e^{jn\omega_0 t}\, jn\omega_0$$

$$x''(t) = \frac{d}{dt}\left\{ \sum_n C_n e^{jn\omega_0 t}(jn\omega_0) \right\} = \sum_n C_n e^{jn\omega_0 t}(jn\omega_0)^2$$

$$\tilde{C}_n = \frac{\langle x''(t)\, e^{jn\omega_0 t} \rangle}{\| e^{jn\omega_0 t} \|^2} = \int_{t_i}^{t_f} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt \quad ; \quad T = t_f - t_i$$

$$\tilde{C}_n = C_n (jn\omega_0)^2 = \frac{\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt}{T}$$

$$C_n = \frac{1}{(t_f - t_i)(jn\omega_0)^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{(t_f - t_i) n^2 \omega_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{n} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$$

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{n} a_n (-n\omega_0) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) + b_n (n\omega_0) \cos(n\omega_0 t)$$

$$x''(t) = \sum_{n=1}^{n} a_n (-n\omega_0)(n\omega_0) \cos(n\omega_0 t) + b_n (n\omega_0)(-n\omega_0) \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$$

$$\tilde{a}_n = \frac{2}{T}\int_{t_i}^{t_f} x''(t) \cos(n\omega_0 t)\, dt \quad ; \quad \tilde{b}_n = \frac{2}{T}\int_{t_i}^{t_f} x''(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\, dt$$

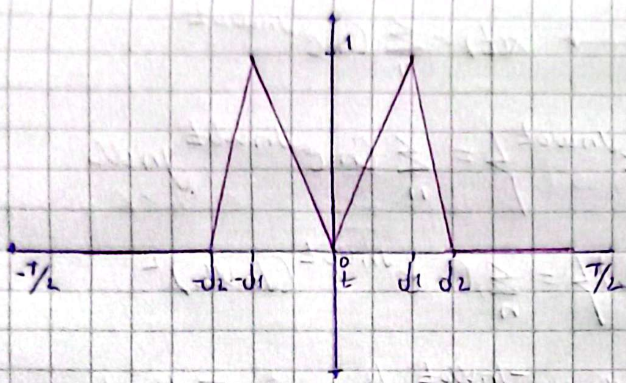
$$a_n(-n^2\omega_0^2) = \frac{2}{T}\int_{t_i}^{t_f} x''(t) \cos(n\omega_0 t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{-Tn^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t) \cos(n\omega_0 t)\, dt$$

$$b_n(-n^2\omega_0^2) = \frac{2}{T}\int_{t_i}^{t_f} x''(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{-Tn^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\, dt$$

4.



Periodo: $[-T/2, T/2]$

$x(t) = \emptyset$ fuera de $[-d_2, d_2]$

$$m_1 = \frac{A}{d_2-d_1}, \quad m_2 = \frac{-A}{d_1}, \quad m_3 = \frac{A}{d_1}, \quad m_4 = \frac{-A}{d_2-d_1}$$

$$J_{-d_2} = m_1 - \emptyset = \frac{A}{d_2-d_1}$$

$$J_{-d_1} = m_2 - m_1 = \frac{-A}{d_1} - \frac{A}{d_2-d_1}$$

$$J_{\emptyset} = m_3 - m_2 = \frac{2A}{d_1}$$

$$J_{d_1} = m_4 - m_3 = \frac{-A}{d_2-d_1} - \frac{A}{d_1}$$

$$J_{d_2} = \emptyset - m_4 = \frac{A}{d_2-d_1}$$

En un periodo.

$$x''(t) = \sum_K J_{t_K}\, \delta(t - t_K)$$

Coeficientes desde $x''(t)$.

$$x''(t) = \sum (jn\omega_0)^2 C_n e^{jn\omega_0 t} = -\sum n^2 \omega_0^2 C_n e^{jn\omega_0 t}$$

Por ortogonalidad

$$C_n'' = \frac{1}{T}\int_0^T x''(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt = -n^2\omega_0^2 C_n$$

$$C_n = \frac{-1}{n^2\omega_0^2 T} \sum_K J_{T_K} e^{-jn\omega_0 t_K}, \quad n \neq \emptyset$$

donde, $x''(t)$ es la suma de deltas.

Por simetría par

$$C_n = \frac{-2A}{n^2\omega_0^2 T}\left[\frac{\cos(n\omega_0 d_2)}{d_2-d_1} - \left(\frac{1}{d_2-d_1} + \frac{1}{d_1}\right)\right], \quad n \neq \emptyset$$

Para C_0 el promedio por periodo. El area en $[\emptyset, d_2]$ es $\frac{1}{2} A d_2$ por paridad es igual.

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, dt = \frac{A d_2}{T}$$