

Flot optique et vision

Emanuel Aldea <emanuel.aldea@u-psud.fr>
<http://hebergement.u-psud.fr/emi>

Vision robotique - Master 2 E3A

Analyse de mouvement - enjeux

Qui crée le mouvement ?

Analyse de mouvement - enjeux

Qui crée le mouvement ?

- ▶ Camera statique, **scène mobile** :

Analyse de mouvement - enjeux

Qui crée le mouvement ?

- ▶ Camera statique, **scène mobile** :
- ▶ Plutôt traitement d'images

Analyse de mouvement - enjeux

Qui crée le mouvement ?

- ▶ Camera statique, **scène mobile** :
 - ▶ Plutôt traitement d'images
 - ▶ Cameras de surveillance : trafic, espaces publics, zones à risque



Analyse de mouvement - enjeux

Qui crée le mouvement ?

- ▶ Camera statique, **scène mobile** :
 - ▶ Plutôt traitement d'images
 - ▶ Cameras de surveillance : trafic, espaces publics, zones à risque
 - ▶ Imagerie médicale : IRM cardiaque, imagerie des poumons

Analyse de mouvement - enjeux

Qui crée le mouvement ?

- ▶ Camera statique, **scène mobile** :
 - ▶ Plutôt traitement d'images
 - ▶ Cameras de surveillance : trafic, espaces publics, zones à risque
 - ▶ Imagerie médicale : IRM cardiaque, imagerie des poumons
 - ▶ Intérêt : détection d'objets mobiles, modélisation etc.

Analyse de mouvement - enjeux

Qui crée le mouvement ?

- ▶ Camera statique, **scène mobile** :
 - ▶ Plutôt traitement d'images
 - ▶ Caméras de surveillance : trafic, espaces publics, zones à risque
 - ▶ Imagerie médicale : IRM cardiaque, imagerie des poumons
 - ▶ Intérêt : détection d'objets mobiles, modélisation etc.
- ▶ Camera dynamique, scène statique :

Analyse de mouvement - enjeux

Qui crée le mouvement ?

- ▶ Camera statique, **scène mobile** :
 - ▶ Plutôt traitement d'images
 - ▶ Caméras de surveillance : trafic, espaces publics, zones à risque
 - ▶ Imagerie médicale : IRM cardiaque, imagerie des poumons
 - ▶ Intérêt : détection d'objets mobiles, modélisation etc.
- ▶ Camera dynamique, scène statique :
 - ▶ Plutôt vision robotique

Analyse de mouvement - enjeux

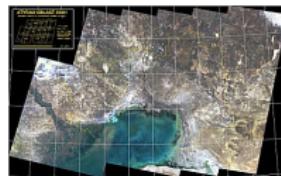
Qui crée le mouvement ?

- ▶ Camera statique, **scène mobile** :
 - ▶ Plutôt traitement d'images
 - ▶ Caméras de surveillance : trafic, espaces publics, zones à risque
 - ▶ Imagerie médicale : IRM cardiaque, imagerie des poumons
 - ▶ Intérêt : détection d'objets mobiles, modélisation etc.
- ▶ Camera dynamique, **scène statique** :
 - ▶ Plutôt vision robotique
 - ▶ Robot en mouvement : navigation, cartographie, assistance à la conduite

Analyse de mouvement - enjeux

Qui crée le mouvement ?

- ▶ Camera statique, **scène mobile** :
 - ▶ Plutôt traitement d'images
 - ▶ Caméras de surveillance : trafic, espaces publics, zones à risque
 - ▶ Imagerie médicale : IRM cardiaque, imagerie des poumons
 - ▶ Intérêt : détection d'objets mobiles, modélisation etc.
- ▶ Camera dynamique, **scène statique** :
 - ▶ Plutôt vision robotique
 - ▶ Robot en mouvement : navigation, cartographie, assistance à la conduite
 - ▶ Imagerie satellitaire



Analyse de mouvement - enjeux

Qui crée le mouvement ?

- ▶ Camera statique, **scène mobile** :
 - ▶ Plutôt traitement d'images
 - ▶ Caméras de surveillance : trafic, espaces publics, zones à risque
 - ▶ Imagerie médicale : IRM cardiaque, imagerie des poumons
 - ▶ Intérêt : détection d'objets mobiles, modélisation etc.
- ▶ Camera dynamique, **scène statique** :
 - ▶ Plutôt vision robotique
 - ▶ Robot en mouvement : navigation, cartographie, assistance à la conduite
 - ▶ Imagerie satellitaire
 - ▶ Intérêt : systèmes autonomes

Analyse de mouvement - enjeux

Qui crée le mouvement ?

- ▶ Camera statique, **scène mobile** :
 - ▶ Plutôt traitement d'images
 - ▶ Caméras de surveillance : trafic, espaces publics, zones à risque
 - ▶ Imagerie médicale : IRM cardiaque, imagerie des poumons
 - ▶ Intérêt : détection d'objets mobiles, modélisation etc.
- ▶ Camera dynamique, **scène statique** :
 - ▶ Plutôt vision robotique
 - ▶ Robot en mouvement : navigation, cartographie, assistance à la conduite
 - ▶ Imagerie satellitaire
 - ▶ Intérêt : systèmes autonomes
- ▶ Camera dynamique, **scène dynamique** :

Analyse de mouvement - enjeux

Qui crée le mouvement ?

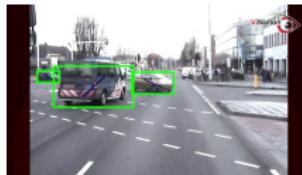
- ▶ Camera statique, **scène mobile** :
 - ▶ Plutôt traitement d'images
 - ▶ Cameras de surveillance : trafic, espaces publics, zones à risque
 - ▶ Imagerie médicale : IRM cardiaque, imagerie des poumons
 - ▶ Intérêt : détection d'objets mobiles, modélisation etc.
- ▶ Camera dynamique, **scène statique** :
 - ▶ Plutôt vision robotique
 - ▶ Robot en mouvement : navigation, cartographie, assistance à la conduite
 - ▶ Imagerie satellitaire
 - ▶ Intérêt : systèmes autonomes
- ▶ Camera dynamique, **scène dynamique** :
 - ▶ Surveillance avec des cameras actives



Analyse de mouvement - enjeux

Qui crée le mouvement ?

- ▶ Camera statique, **scène mobile** :
 - ▶ Plutôt traitement d'images
 - ▶ Caméras de surveillance : trafic, espaces publics, zones à risque
 - ▶ Imagerie médicale : IRM cardiaque, imagerie des poumons
 - ▶ Intérêt : détection d'objets mobiles, modélisation etc.
- ▶ Camera dynamique, **scène statique** :
 - ▶ Plutôt vision robotique
 - ▶ Robot en mouvement : navigation, cartographie, assistance à la conduite
 - ▶ Imagerie satellitaire
 - ▶ Intérêt : systèmes autonomes
- ▶ Camera dynamique, **scène dynamique** :
 - ▶ Surveillance avec des caméras actives
 - ▶ Robot en mouvement : trafic, planification temps réel



Analyse de mouvement - enjeux

Qui crée le mouvement ?

- ▶ Camera statique, **scène mobile** :
 - ▶ Plutôt traitement d'images
 - ▶ Cameras de surveillance : trafic, espaces publics, zones à risque
 - ▶ Imagerie médicale : IRM cardiaque, imagerie des poumons
 - ▶ Intérêt : détection d'objets mobiles, modélisation etc.
- ▶ Camera dynamique, **scène statique** :
 - ▶ Plutôt vision robotique
 - ▶ Robot en mouvement : navigation, cartographie, assistance à la conduite
 - ▶ Imagerie satellitaire
 - ▶ Intérêt : systèmes autonomes
- ▶ Camera dynamique, **scène dynamique** :
 - ▶ Surveillance avec des cameras actives
 - ▶ Robot en mouvement : trafic, planification temps réel
 - ▶ Imagerie médicale : endoscopie

Analyse de mouvement - enjeux

Objectif général : comprendre un phénomène qui a lieu en 3D, à partir d'une séquence vidéo (2D). Comment faire ?

1. Analyser deux images bien espacées en temps

Analyse de mouvement - enjeux

Objectif général : comprendre un phénomène qui a lieu en 3D, à partir d'une séquence vidéo (2D). Comment faire ?

1. Analyser deux images bien espacées en temps
 - ✓ Estimation 2D vers 3D **précise** (en connaissant le déplacement de la camera)

Analyse de mouvement - enjeux

Objectif général : comprendre un phénomène qui a lieu en 3D, à partir d'une séquence vidéo (2D). Comment faire ?

1. Analyser deux images bien espacées en temps

- ✓ Estimation 2D vers 3D **précise** (en connaissant le déplacement de la camera)
- ✓ Convient pour des changements de perspective importants

Analyse de mouvement - enjeux

Objectif général : comprendre un phénomène qui a lieu en 3D, à partir d'une séquence vidéo (2D). Comment faire ?

1. Analyser deux images bien espacées en temps

- ✓ Estimation 2D vers 3D **précise** (en connaissant le déplacement de la camera)
- ✓ Convient pour des changements de perspective importants
- ✗ Estimation du déplacement relatif des pixels **pas dense** (pour les points d'intérêt uniquement)

Analyse de mouvement - enjeux

Objectif général : comprendre un phénomène qui a lieu en 3D, à partir d'une séquence vidéo (2D). Comment faire ?

1. Analyser deux images bien espacées en temps
 - ✓ Estimation 2D vers 3D **précise** (en connaissant le déplacement de la camera)
 - ✓ Convient pour des changements de perspective importants
 - ✗ Estimation du déplacement relatif des pixels **pas dense** (pour les points d'intérêt uniquement)
2. Analyser deux images consécutives (différences très faibles)

Analyse de mouvement - enjeux

Objectif général : comprendre un phénomène qui a lieu en 3D, à partir d'une séquence vidéo (2D). Comment faire ?

1. Analyser deux images bien espacées en temps
 - ✓ Estimation 2D vers 3D **précise** (en connaissant le déplacement de la camera)
 - ✓ Convient pour des changements de perspective importants
 - ✗ Estimation du déplacement relatif des pixels **pas dense** (pour les points d'intérêt uniquement)
2. Analyser deux images consécutives (différences très faibles)
 - ✗ Estimation 2D vers 3D impossible (nécessite intégration temporelle)

Analyse de mouvement - enjeux

Objectif général : comprendre un phénomène qui a lieu en 3D, à partir d'une séquence vidéo (2D). Comment faire ?

1. Analyser deux images bien espacées en temps
 - ✓ Estimation 2D vers 3D **précise** (en connaissant le déplacement de la camera)
 - ✓ Convient pour des changements de perspective importants
 - ✗ Estimation du déplacement relatif des pixels **pas dense** (pour les points d'intérêt uniquement)
2. Analyser deux images consécutives (différences très faibles)
 - ✗ Estimation 2D vers 3D impossible (nécessite intégration temporelle)
 - ✗ Problèmes pour des changements de perspective importants

Analyse de mouvement - enjeux

Objectif général : comprendre un phénomène qui a lieu en 3D, à partir d'une séquence vidéo (2D). Comment faire ?

1. Analyser deux images bien espacées en temps
 - ✓ Estimation 2D vers 3D **précise** (en connaissant le déplacement de la camera)
 - ✓ Convient pour des changements de perspective importants
 - ✗ Estimation du déplacement relatif des pixels **pas dense** (pour les points d'intérêt uniquement)
2. Analyser deux images consécutives (différences très faibles)
 - ✗ Estimation 2D vers 3D impossible (nécessite intégration temporelle)
 - ✗ Problèmes pour des changements de perspective importants
 - ✓ Estimation du déplacement relatif **dense** (pour chaque pixel de l'image)

Analyse de mouvement - enjeux

Objectif général : comprendre un phénomène qui a lieu en 3D, à partir d'une séquence vidéo (2D). Comment faire ?

1. Analyser deux images bien espacées en temps

- ✓ Estimation 2D vers 3D **précise** (en connaissant le déplacement de la camera)
- ✓ Convient pour des changements de perspective importants
- ✗ Estimation du déplacement relatif des pixels **pas dense** (pour les points d'intérêt uniquement)

2. Analyser deux images consécutives (différences très faibles)

- ✗ Estimation 2D vers 3D impossible (nécessite intégration temporelle)
- ✗ Problèmes pour des changements de perspective importants
- ✓ Estimation du déplacement relatif **dense** (pour chaque pixel de l'image)

Définition du flot optique

Champ de mouvement apparent **local** qui associe à chaque pixel (x, y, t) de I_t un vecteur (f_x, f_y) de vitesse apparente dans le plan image, par rapport à l'image suivante I_{t+1} .

Analyse de mouvement - enjeux

Objectif général : comprendre un phénomène qui a lieu en 3D, à partir d'une séquence vidéo (2D). Comment faire ?

1. Analyser deux images bien espacées en temps

- ✓ Estimation 2D vers 3D **précise** (en connaissant le déplacement de la camera)
- ✓ Convient pour des changements de perspective importants
- ✗ Estimation du déplacement relatif des pixels **pas dense** (pour les points d'intérêt uniquement)

2. Analyser deux images consécutives (différences très faibles)

- ✗ Estimation 2D vers 3D impossible (nécessite intégration temporelle)
- ✗ Problèmes pour des changements de perspective importants
- ✓ Estimation du déplacement relatif **dense** (pour chaque pixel de l'image)

Définition du flot optique

Champ de mouvement apparent **local** qui associe à chaque pixel (x, y, t) de I_t un vecteur (f_x, f_y) de vitesse apparente dans le plan image, par rapport à l'image suivante I_{t+1} .

Le vecteur (f_x, f_y) représente la projection sur le plan image du vecteur vitesse 3D (V_x, V_y, V_z) des objets de la scène par rapport au centre de la camera.

Analyse de mouvement - enjeux

Objectif général : comprendre un phénomène qui a lieu en 3D, à partir d'une séquence vidéo (2D). Comment faire ?

1. Analyser deux images bien espacées en temps

- ✓ Estimation 2D vers 3D **précise** (en connaissant le déplacement de la camera)
- ✓ Convient pour des changements de perspective importants
- ✗ Estimation du déplacement relatif des pixels **pas dense** (pour les points d'intérêt uniquement)

2. Analyser deux images consécutives (différences très faibles)

- ✗ Estimation 2D vers 3D impossible (nécessite intégration temporelle)
- ✗ Problèmes pour des changements de perspective importants
- ✓ Estimation du déplacement relatif **dense** (pour chaque pixel de l'image)

Définition du flot optique

Champ de mouvement apparent **local** qui associe à chaque pixel (x, y, t) de I_t un vecteur (f_x, f_y) de vitesse apparente dans le plan image, par rapport à l'image suivante I_{t+1} .

Historiquement on note (f_x, f_y) par (u, v)

Analyse de mouvement - enjeux

Objectif général : comprendre un phénomène qui a lieu en 3D, à partir d'une séquence vidéo (2D). Comment faire ?

1. Analyser deux images bien espacées en temps

- ✓ Estimation 2D vers 3D **précise** (en connaissant le déplacement de la camera)
- ✓ Convient pour des changements de perspective importants
- ✗ Estimation du déplacement relatif des pixels **pas dense** (pour les points d'intérêt uniquement)

2. Analyser deux images consécutives (différences très faibles)

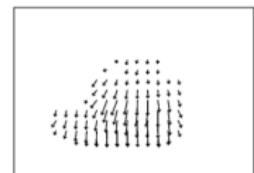
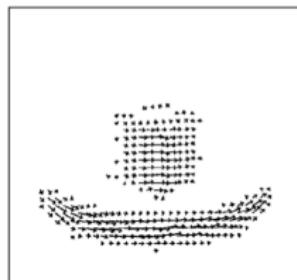
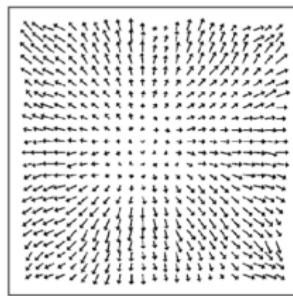
- ✗ Estimation 2D vers 3D impossible (nécessite intégration temporelle)
- ✗ Problèmes pour des changements de perspective importants
- ✓ Estimation du déplacement relatif **dense** (pour chaque pixel de l'image)

Définition du flot optique

Champ de mouvement apparent **local** qui associe à chaque pixel (x, y, t) de I_t un vecteur (f_x, f_y) de vitesse apparente dans le plan image, par rapport à l'image suivante I_{t+1} .

On calcule le flot (u, v) à partir des variations temporelles (petites) de la fonction $I(x, y, t)$.

Exemples de champs de mouvement



Exploitation du flot optique

En ordre croissant du niveau conceptuel :

- ▶ estimation du mouvement dominant

Exploitation du flot optique

En ordre croissant du niveau conceptuel :

- ▶ estimation du mouvement dominant
- ▶ détection de discontinuités (contours), et de singularités (foyer d'expansion)

Exploitation du flot optique

En ordre croissant du niveau conceptuel :

- ▶ estimation du mouvement dominant
- ▶ détection de discontinuités (contours), et de singularités (foyer d'expansion)
- ▶ temps avant collision

Exploitation du flot optique

En ordre croissant du niveau conceptuel :

- ▶ estimation du mouvement dominant
- ▶ détection de discontinuités (contours), et de singularités (foyer d'expansion)
- ▶ temps avant collision
- ▶ profondeur

Exploitation du flot optique

En ordre croissant du niveau conceptuel :

- ▶ estimation du mouvement dominant
- ▶ détection de discontinuités (contours), et de singularités (foyer d'expansion)
- ▶ temps avant collision
- ▶ profondeur
- ▶ mouvement propre

Exploitation du flot optique

En ordre croissant du niveau conceptuel :

- ▶ estimation du mouvement dominant
- ▶ détection de discontinuités (contours), et de singularités (foyer d'expansion)
- ▶ temps avant collision
- ▶ profondeur
- ▶ mouvement propre
- ▶ orientation des surfaces

Calcul du flot optique

Mais comment peut-on calculer le flot optique ?

L'hypothèse de persistance de l'intensité lumineuse

A deux instants très proches, et pour un mouvement faible, l'endroit respectif de la scène ne change pas d'intensité lumineuse :

$$I(x, y, t) = I(x + dx, y + dy, t + dt)$$

Calcul du flot optique

Mais comment peut-on calculer le flot optique ?

L'hypothèse de persistance de l'intensité lumineuse

A deux instants très proches, et pour un mouvement faible, l'endroit respectif de la scène ne change pas d'intensité lumineuse :

$$I(x, y, t) = I(x + dx, y + dy, t + dt)$$

Développement de Taylor à l'ordre 1 de I :

$$I(x, y, t) \approx I(x, y, t) + \frac{\partial I}{\partial x}dx + \frac{\partial I}{\partial y}dy + \frac{\partial I}{\partial t}dt$$

Calcul du flot optique

Mais comment peut-on calculer le flot optique ?

L'hypothèse de persistance de l'intensité lumineuse

A deux instants très proches, et pour un mouvement faible, l'endroit respectif de la scène ne change pas d'intensité lumineuse :

$$I(x, y, t) = I(x + dx, y + dy, t + dt)$$

Développement de Taylor à l'ordre 1 de I :

$$I(x, y, t) \approx I(x, y, t) + \frac{\partial I}{\partial x}dx + \frac{\partial I}{\partial y}dy + \frac{\partial I}{\partial t}dt$$

En simplifiant on obtient l'équation du flot optique :

$$I_x \textcolor{red}{u} + I_y \textcolor{red}{v} + I_t = 0$$

Calcul du flot optique

Mais comment peut-on calculer le flot optique ?

L'hypothèse de persistance de l'intensité lumineuse

A deux instants très proches, et pour un mouvement faible, l'endroit respectif de la scène ne change pas d'intensité lumineuse :

$$I(x, y, t) = I(x + dx, y + dy, t + dt)$$

Développement de Taylor à l'ordre 1 de I :

$$I(x, y, t) \approx I(x, y, t) + \frac{\partial I}{\partial x}dx + \frac{\partial I}{\partial y}dy + \frac{\partial I}{\partial t}dt$$

En simplifiant on obtient l'équation du flot optique :

$$I_x \textcolor{red}{u} + I_y \textcolor{red}{v} + I_t = 0$$

Problème : on peut déterminer I_x, I_y, I_t , mais il y a deux inconnues $\textcolor{red}{u}, \textcolor{red}{v}$ et une seule équation par pixel.

Calcul du flot optique

Le problème de l'estimation du flot optique est mal posé.

Calcul du flot optique

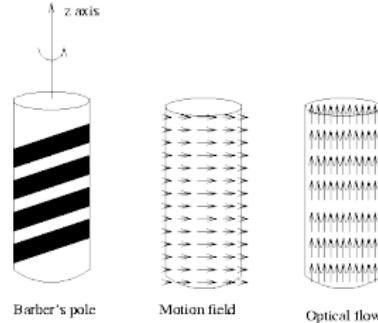
Le problème de l'estimation du flot optique est mal posé.

- ▶ problèmes importants dans les endroits homogènes

Calcul du flot optique

Le problème de l'estimation du flot optique est mal posé.

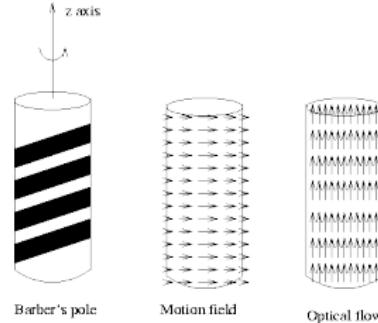
- ▶ problèmes importants dans les endroits homogènes
- ▶ moins souvent, des problèmes où le mouvement apparent ne correspond pas au mouvement réel



Calcul du flot optique

Le problème de l'estimation du flot optique est mal posé.

- ▶ problèmes importants dans les endroits homogènes
- ▶ moins souvent, des problèmes où le mouvement apparent ne correspond pas au mouvement réel



Solution : introduire des contraintes supplémentaires (**régulariser** la solution) pour réduire l'espace de recherche

L'algorithme de Lucas-Kanade

Idée

Une équation, deux inconnues \Rightarrow problème. Mais supposons que le flot est **régulier** (sa valeur ne change pas brutalement d'un pixel à ses voisins). On peut imposer alors que les inconnues u , v satisfassent également l'équation du flot pour tous les voisins d'un certain pixel.

L'algorithme de Lucas-Kanade

Idée

Une équation, deux inconnues \Rightarrow problème. Mais supposons que le flot est **régulier** (sa valeur ne change pas brutalement d'un pixel à ses voisins). On peut imposer alors que les inconnues u, v satisfassent également l'équation du flot pour tous les voisins d'un certain pixel.

Avant :

$$I_x u + I_y v = -I_t$$

L'algorithme de Lucas-Kanade

Idée

Une équation, deux inconnues \Rightarrow problème. Mais supposons que le flot est **régulier** (sa valeur ne change pas brutalement d'un pixel à ses voisins). On peut imposer alors que les inconnues u, v satisfassent également l'équation du flot pour tous les voisins d'un certain pixel.

Proposition de Lucas-Kanade :

$$\begin{bmatrix} I_{x1} & I_{y1} \\ \vdots & \vdots \\ I_{x9} & I_{y9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{t1} \\ \vdots \\ -I_{t9} \end{bmatrix}$$

L'algorithme de Lucas-Kanade

Idée

Une équation, deux inconnues \Rightarrow problème. Mais supposons que le flot est **régulier** (sa valeur ne change pas brutalement d'un pixel à ses voisins). On peut imposer alors que les inconnues u, v satisfassent également l'équation du flot pour tous les voisins d'un certain pixel.

Proposition de Lucas-Kanade :

$$\begin{bmatrix} I_{x1} & I_{y1} \\ \vdots & \vdots \\ I_{x9} & I_{y9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{t1} \\ \vdots \\ -I_{t9} \end{bmatrix}$$

Cela revient à résoudre pour chaque pixel un système de type :

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{l}_t$$

L'algorithme de Lucas-Kanade - résolution

On a $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{I}_t$, mais on peut l'écrire sous la forme $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{A}^T\mathbf{I}_t$, ce qui donne :

$$\mathbf{u} = \underbrace{(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T}_{\text{pseudo-inverse}} \mathbf{I}_t$$

L'algorithme de Lucas-Kanade - résolution

On a $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{I}_t$, mais on peut l'écrire sous la forme $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{A}^T\mathbf{I}_t$, ce qui donne :

$$\mathbf{u} = \underbrace{(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T}_{\text{pseudo-inverse}} \mathbf{I}_t$$

On peut montrer que cela est équivalent à trouver la solution au sens des moindres carrés :

$$\min \sum_{i=1}^9 (I_{xi}\mathbf{u} + I_{yi}\mathbf{v} + I_{ti})^2$$

L'algorithme de Lucas-Kanade - résolution

On a $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{I}_t$, mais on peut l'écrire sous la forme $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{A}^T\mathbf{I}_t$, ce qui donne :

$$\mathbf{u} = \underbrace{(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T}_{\text{pseudo-inverse}} \mathbf{I}_t$$

On peut montrer que cela est équivalent à trouver la solution au sens des moindres carrés :

$$\min \sum_{i=1}^9 (I_{xi}\mathbf{u} + I_{yi}\mathbf{v} + I_{ti})^2$$

qui nous amène au système suivant :

$$\begin{cases} \sum_i (I_{xi}\mathbf{u} + I_{yi}\mathbf{v} + I_{ti})I_{xi} = 0 \\ \sum_i (I_{xi}\mathbf{u} + I_{yi}\mathbf{v} + I_{ti})I_{yi} = 0 \end{cases}$$

L'algorithme de Lucas-Kanade - résolution

On a $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{I}_t$, mais on peut l'écrire sous la forme $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{A}^T\mathbf{I}_t$, ce qui donne :

$$\mathbf{u} = \underbrace{(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T}_{\text{pseudo-inverse}} \mathbf{I}_t$$

On peut montrer que cela est équivalent à trouver la solution au sens des moindres carrés :

$$\min \sum_{i=1}^9 (I_{xi}\mathbf{u} + I_{yi}\mathbf{v} + I_{ti})^2$$

$$\begin{bmatrix} \sum I_{xi}^2 & \sum I_{xi}I_{yi} \\ \sum I_{xi}I_{yi} & \sum I_{yi}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum I_{xi}I_{ti} \\ -\sum I_{yi}I_{ti} \end{bmatrix}$$

L'algorithme de Lucas-Kanade - résolution

On a $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{I}_t$, mais on peut l'écrire sous la forme $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{A}^T\mathbf{I}_t$, ce qui donne :

$$\mathbf{u} = \underbrace{(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T}_{\text{pseudo-inverse}} \mathbf{I}_t$$

On peut montrer que cela est équivalent à trouver la solution au sens des moindres carrés :

$$\min \sum_{i=1}^9 (I_{xi}\mathbf{u} + I_{yi}\mathbf{v} + I_{ti})^2$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum I_{xi}^2 & \sum I_{xi}I_{yi} \\ \sum I_{xi}I_{yi} & \sum I_{yi}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\sum I_{xi}I_{ti} \\ -\sum I_{yi}I_{ti} \end{bmatrix}$$

L'algorithme de Lucas-Kanade - limitations

Une méthode locale :

- ▶ une solution analytique, relativement simple
- ▶ un problème qui se parallélise bien
- ▶ difficultés majeures dans les zones homogènes
- ▶ difficultés pour les déplacements importants

L'algorithme de Horn-Schunck

Idée

Il faudrait chercher le champ inconnu dans une équation **globale**, une grosse minimisation qui pénalise les écarts par rapport à l'équation du flot optique, et aussi les variations fortes dans la solution du problème

L'algorithme de Horn-Schunck

Idée

Il faudrait chercher le champ inconnu dans une équation **globale**, une grosse minimisation qui pénalise les écarts par rapport à l'équation du flot optique, et aussi les variations fortes dans la solution du problème

Proposition de Horn-Schunck :

$$\min \int \int \underbrace{(I_x \mathbf{u} + I_y \mathbf{v} + I_t)^2}_{\text{attaché aux données}} + \lambda \underbrace{(\mathbf{u}_x^2 + \mathbf{u}_y^2 + \mathbf{v}_x^2 + \mathbf{v}_y^2)}_{\text{régularisation}} \, dxdy$$

L'algorithme de Horn-Schunck

Idée

Il faudrait chercher le champ inconnu dans une équation **globale**, une grosse minimisation qui pénalise les écarts par rapport à l'équation du flot optique, et aussi les variations fortes dans la solution du problème

Proposition de Horn-Schunck :

$$\min \int \int \underbrace{(I_x \mathbf{u} + I_y \mathbf{v} + I_t)^2}_{\text{attache aux données}} + \lambda \underbrace{(\mathbf{u}_x^2 + \mathbf{u}_y^2 + \mathbf{v}_x^2 + \mathbf{v}_y^2)}_{\text{régularisation}} \, dxdy$$

Les équations d'Euler-Lagrange donnent :

$$\begin{cases} 2(I_x \mathbf{u} + I_y \mathbf{v} + I_t)I_x + 2\lambda \left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right] = 0 \\ 2(I_x \mathbf{u} + I_y \mathbf{v} + I_t)I_y + 2\lambda \left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right] = 0 \end{cases}$$

L'algorithme de Horn-Schunck

Idée

Il faudrait chercher le champ inconnu dans une équation **globale**, une grosse minimisation qui pénalise les écarts par rapport à l'équation du flot optique, et aussi les variations fortes dans la solution du problème

Proposition de Horn-Schunck :

$$\min \int \int \underbrace{(I_x \mathbf{u} + I_y \mathbf{v} + I_t)^2}_{\text{attache aux données}} + \lambda \underbrace{(\mathbf{u}_x^2 + \mathbf{u}_y^2 + \mathbf{v}_x^2 + \mathbf{v}_y^2)}_{\text{régularisation}} \, dxdy$$

Les équations d'Euler-Lagrange donnent :

$$\begin{cases} (I_x \mathbf{u} + I_y \mathbf{v} + I_t) I_x + \lambda \nabla^2 \mathbf{u} = 0 \\ (I_x \mathbf{u} + I_y \mathbf{v} + I_t) I_y + \lambda \nabla^2 \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

L'algorithme de Horn-Schunck - résolution

On peut montrer facilement que $\nabla^2 \textcolor{red}{u} = \textcolor{red}{u}_{xx} + \textcolor{red}{u}_{yy} = u - \tilde{u}$

L'algorithme de Horn-Schunck - résolution

On peut montrer facilement que $\nabla^2 \textcolor{red}{u} = u_{xx} + u_{yy} = u - \tilde{u}$

Les équations d'Euler-Lagrange donnent :

$$\begin{cases} (I_x \textcolor{red}{u} + I_y \textcolor{red}{v} + I_t)I_x + \lambda(\textcolor{red}{u} - \tilde{u}) = 0 \\ (I_x \textcolor{red}{u} + I_y \textcolor{red}{v} + I_t)I_y + \lambda(\textcolor{red}{v} - \tilde{v}) = 0 \end{cases}$$

L'algorithme de Horn-Schunck - résolution

On peut montrer facilement que $\nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{u}_{xx} + \mathbf{u}_{yy} = \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}$

Les équations d'Euler-Lagrange donnent :

$$\begin{cases} (I_x \mathbf{u} + I_y \mathbf{v} + I_t) I_x + \lambda(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) = 0 \\ (I_x \mathbf{u} + I_y \mathbf{v} + I_t) I_y + \lambda(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}) = 0 \end{cases}$$

Schéma itératif de résolution (méthode de Gauss-Siedel) :

$$\begin{cases} u_k = \tilde{u}_{k-1} - I_x(I_x \tilde{u}_{k-1} + I_y \tilde{v}_{k-1} + I_t)/(I_x^2 + I_y^2 + \lambda) \\ v_k = \tilde{v}_{k-1} - I_y(I_x \tilde{u}_{k-1} + I_y \tilde{v}_{k-1} + I_t)/(I_x^2 + I_y^2 + \lambda) \end{cases}$$

L'algorithme de Horn-Schunck - résolution

On peut montrer facilement que $\nabla^2 \mathbf{u} = u_{xx} + u_{yy} = \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}$

Les équations d'Euler-Lagrange donnent :

$$\begin{cases} (I_x \mathbf{u} + I_y \mathbf{v} + I_t) I_x + \lambda(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) = 0 \\ (I_x \mathbf{u} + I_y \mathbf{v} + I_t) I_y + \lambda(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}) = 0 \end{cases}$$

Schéma itératif de résolution (méthode de Gauss-Siedel) :

$$\begin{cases} u_k = \tilde{u}_{k-1} - I_x(I_x \tilde{u}_{k-1} + I_y \tilde{v}_{k-1} + I_t)/(I_x^2 + I_y^2 + \lambda) \\ v_k = \tilde{v}_{k-1} - I_x(I_x \tilde{u}_{k-1} + I_y \tilde{v}_{k-1} + I_t)/(I_x^2 + I_y^2 + \lambda) \end{cases}$$

Fonctionnement de l'algorithme :

1. Initialiser les champs scalaires u_0, v_0 .
2. Appliquer le schéma itératif et calculer u_k, v_k à partir de u_{k-1}, v_{k-1} .
3. Vérifier un critère de convergence et s'arrêter en cas de convergence.

L'algorithme de Horn-Schunck - limitations

Une méthode locale :

- ▶ une solution itérative, mais globale
- ▶ capable de propager les contraintes sur les bords dans les zones homogènes
- ▶ difficultés majeures autour des discontinuités
- ▶ difficultés pour les déplacements importants

D'autres fonctionnelles proposées

Une grande diversité de minimisations de type attaché aux données + régularisation. Voici deux exemples :

L'algorithme de Zach

Variation totale et régularisation en norme L1 :

$$E = \int_{\Omega} |I(x + w) - I(x)| + \lambda |\nabla \mathbf{u}|$$

D'autres fonctionnelles proposées

Une grande diversité de minimisations de type attaché aux données + régularisation. Voici deux exemples :

L'algorithme de Zach

Variation totale et régularisation en norme L1 :

$$E = \int_{\Omega} |I(x + w) - I(x)| + \lambda |\nabla \mathbf{u}|$$

L'algorithme de Brox

Attaché aux données :

$$E_{data} = \int_{\Omega} |I(x + w) - I(x)| + \lambda |\nabla I(x + w) - \nabla I(x)|^2$$

Régularisation : $E_{smooth} = \int_{\Omega} |\nabla_3 u + \nabla_3 v|$

Énergie totale : $E = E_{data} + \alpha E_{smooth}$

Analyse multi-echelle

Niveau

