Traitement de l'image et du signal
Partie TI

Emanuel Aldea <emanuel.aldea@u-psud.fr>
http://hebergement.universite-paris-saclay.fr/emi/453

Master Electronique, énergie électrique, automatique 1ère année

Filtrage linéaire (cont'd)

Le Laplacien

- opérateur différentiel $\Delta : \mathrm{C}^k \rightarrow \mathrm{C}^{k-2}$:

$$\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f) = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f$$

- étroitement lié aux phénomènes de diffusion ; $\Delta f = 0$ associée à la stationnarité des distributions de température, tensions mécaniques, potentiel, écoulement
- signification : taux de variation moyen de $f(x)$ sur une sphère centrée en x quand la sphère varie
- si $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Filtrage linéaire (cont'd)

Le Laplacien

- dans l'espace image on peut écrire :

$$\Delta I = \nabla^2 I = \frac{\partial^2 I}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y_i^2} = I_{xx} + I_{yy}$$

- le masque qui correspond au calcul de I_{xx} est (pourquoi ?) :

$L_{xx} =$

1	−2	1

- en exploitant le masque de I_{yy} on remonte à :

$L =$

0	1	0
1	−4	1
0	1	0

- autres masques sont valides également (voir développement en série de Taylor)

Filtrage linéaire (cont'd)

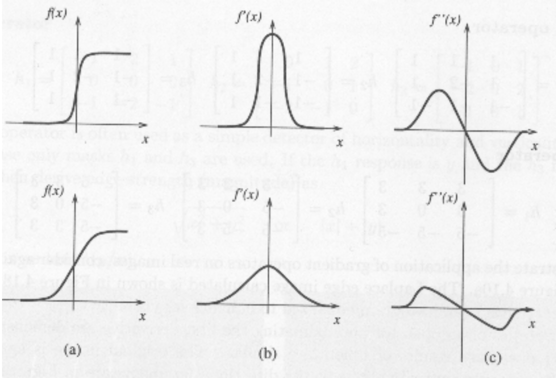


Figure – Laplacien 1D continu- passage par 0

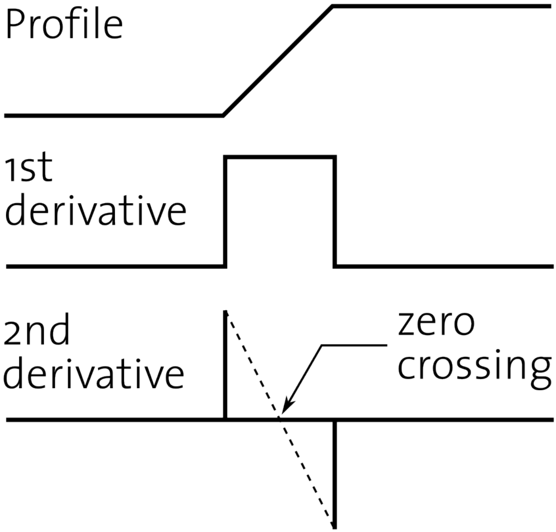
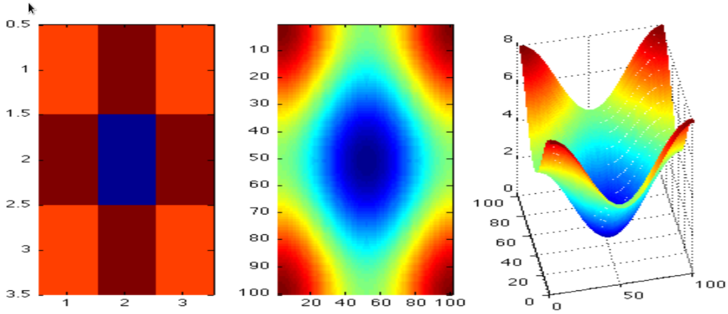


FIGURE – Laplacien 1D discret- passage par 0

Filtrage linéaire (cont'd)



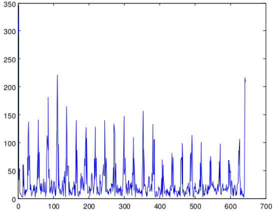
Détection des passages par 0 de la réponse

- calculer $\max(I_L)$ et $\min(I_L)$ dans une fenêtre 3×3 centrée dans le pixel (i, j)
- passage par 0 $\Leftrightarrow \max(I_L) > 0$ et $\min(I_L) < 0$ et $\max(I_L) - \min(I_L) > \mathit{seuil}$

Résultats

Image initiale

Sobel Magnitude

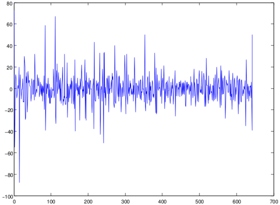


Ligne horizontale 40

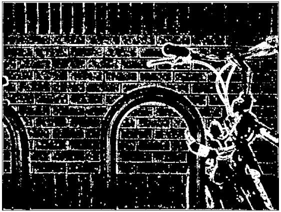
Résultats

Image initiale

Réponse Laplacien



Ligne horizontale 40



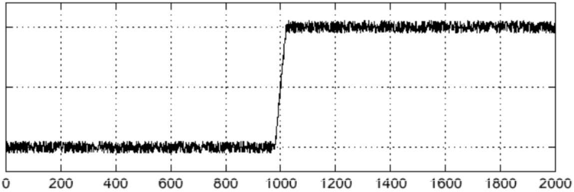
Détection passages

Conclusions

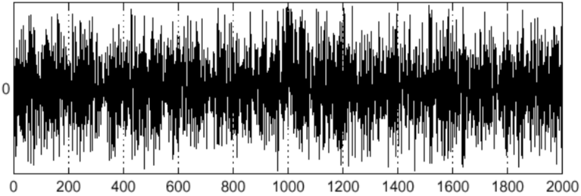
- Invariance en rotation
- Une seule convolution
- Sensible aux variations/bruit

Sensibilité au bruit

$f(x)$



$\frac{d}{dx}f(x)$



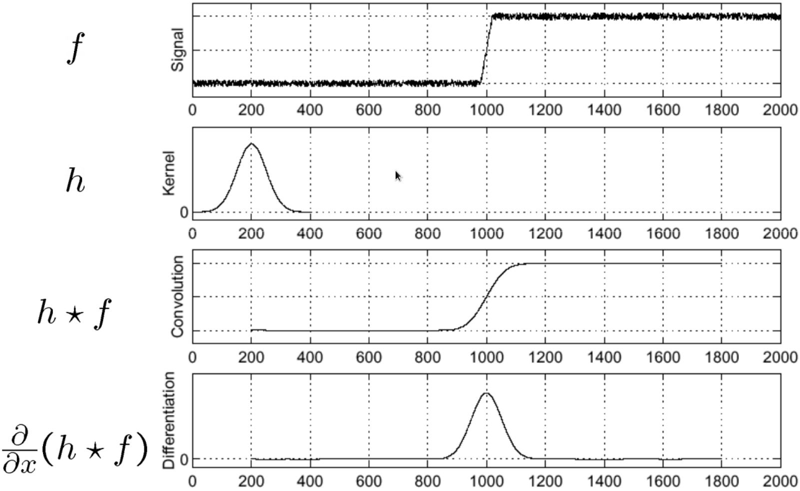
Pas de traitement - où se trouve le contour ?

L'estimation du gradient/Laplacien est très sensible au bruit.

Exercice :

Pour quoi ?

Sensibilité au bruit



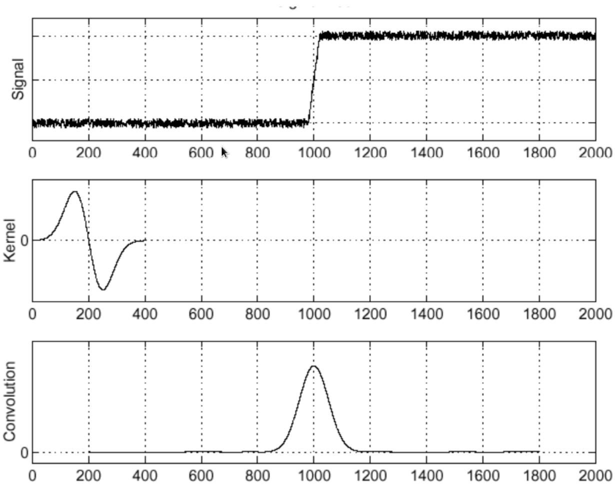
Filtrage Gaussien + gradient - où se trouve le contour ?

Sensibilité au bruit

$$f$$

$$\frac{\partial}{\partial x}h$$

$$(\frac{\partial}{\partial x}h) \star f$$



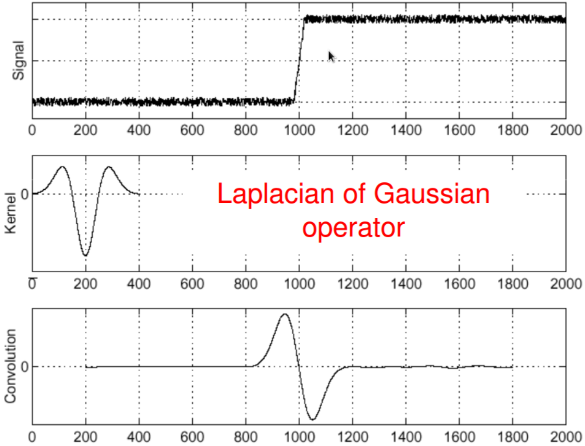
Filtrage Gaussien + gradient - en moins d'opérations

Sensibilité au bruit

$$f$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}h$$

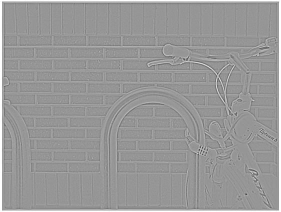
$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}h) \star f$$



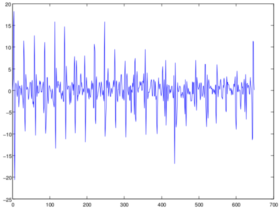
Filtrage Gaussien + Laplace (LoG) - passage en 0

Résultats

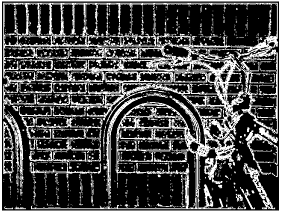
Image initiale



Réponse LoG

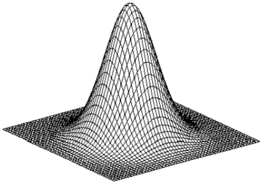


Ligne horizontale 40

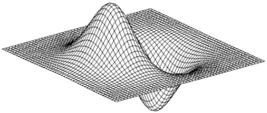


Détection passages

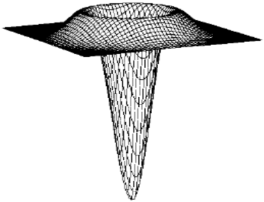
Conclusion



$h_\sigma(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$



$\frac{\partial}{\partial x} h_\sigma(x,y)$



$\nabla^2 h_\sigma(x,y)$

- Le lissage est essentiel, mais la taille du filtre dépend implicitement de l'échelle de l'information (détails) qu'on veut préserver
- Compromis robustesse au bruit vs. localisation précise des contours

Filtrage passe-bas non linéaire

- Inconvénient majeur des filtres passe-bas présentés : dégradation des contours
- Besoin de méthodes plus performantes qui préservent les fortes discontinuités
- Stratégie des filtres non-linéaires : diffusion et donc homogénéisation maximale loin des contours **et** diffusion minimale au niveau des contours

Diffusion anisotrope

Diffusion linéaire isotrope

L'application du filtre Gaussien déjà visité est équivalente au processus de diffusion isotrope suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}(d \nabla u)$$

$$u(x, y, 0) = I(x, y)$$

Rappel notion isotropie : flux $-d\nabla u$ parallèle au gradient ∇u

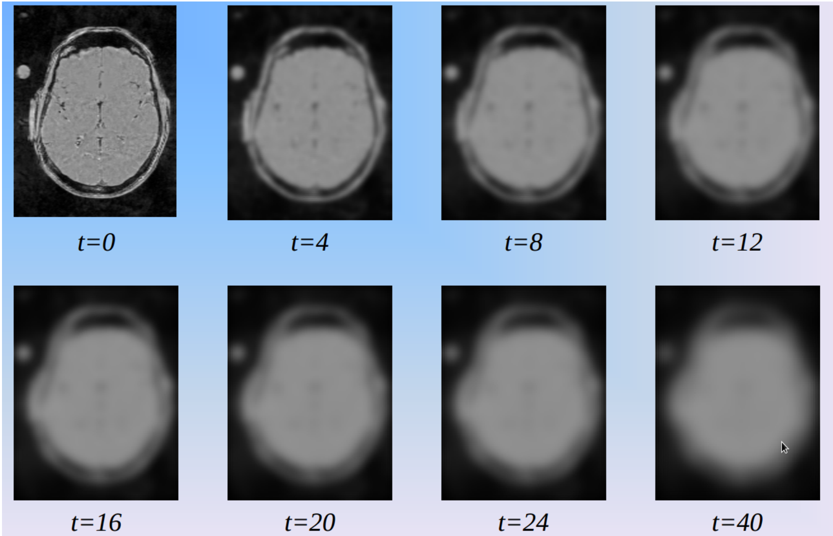
Exercice :

Quels sont les paramètres du filtre Gaussien qui génèrent $u(x, y, t)$?

Problème : d est un scalaire, la **diffusivité**

Idée : diffusivité proche de 0 au niveau des contours et proche de 1 dans les zones a homogénéiser

Diffusion anisotrope



Diffusion linéaire isotrope

Diffusion anisotrope

Modification diffusion non linéaire isotrope

La modification par rapport à la formule antérieure est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}(D(x, y)\nabla u)$$

$$u(x, y, 0) = I(x, y)$$

Appelée à tort anisotrope, car le flux est toujours parallèle au gradient

Choix de $D(x, y)$:

$$D(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{|\nabla u(x,y)|^2}{\lambda^2}}$$

où λ est le paramètre de contraste.

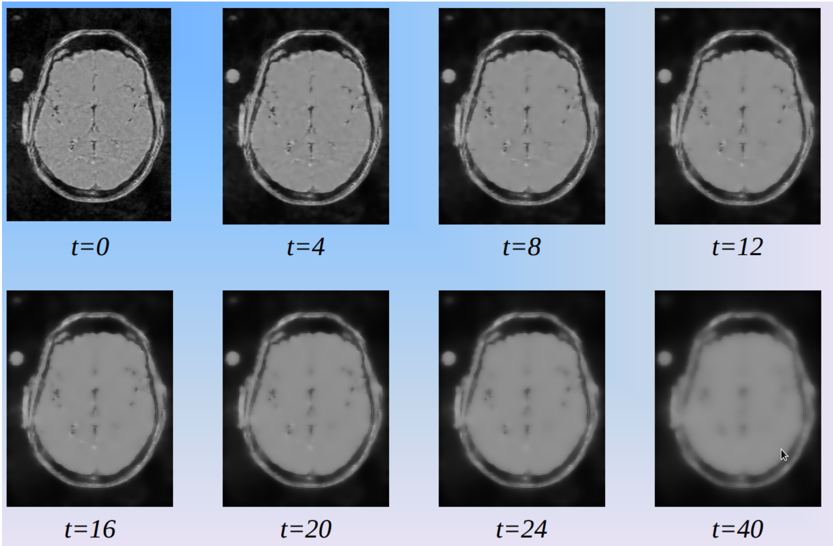
Exercice :

Trouvez la signification très importante de λ.

Un autre choix :

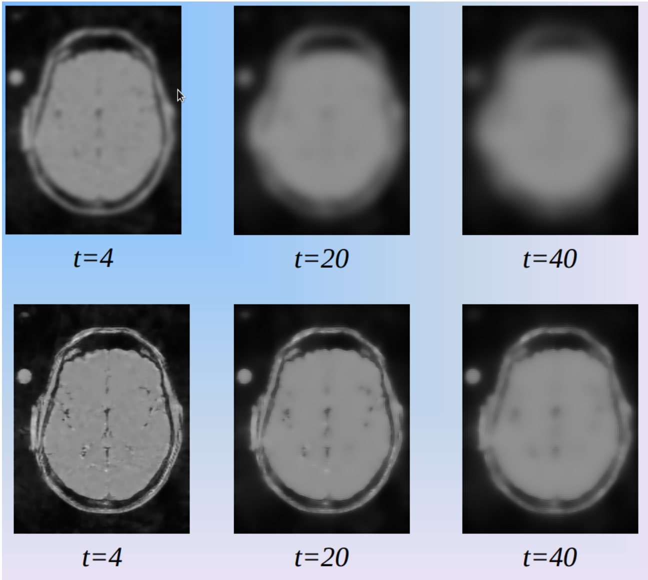
$$D(x, y) = e^{-\frac{|\nabla u(x,y)|}{\lambda^2}}$$

Diffusion anisotrope



Diffusion non-linéaire isotrope

Diffusion anisotrope



Comparaison diffusions linéaire isotrope - non-linéaire isotrope

Diffusion anisotrope

Modification finale

Diffusion **parallèle** aux contours :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(T(x,y)\nabla u)$$

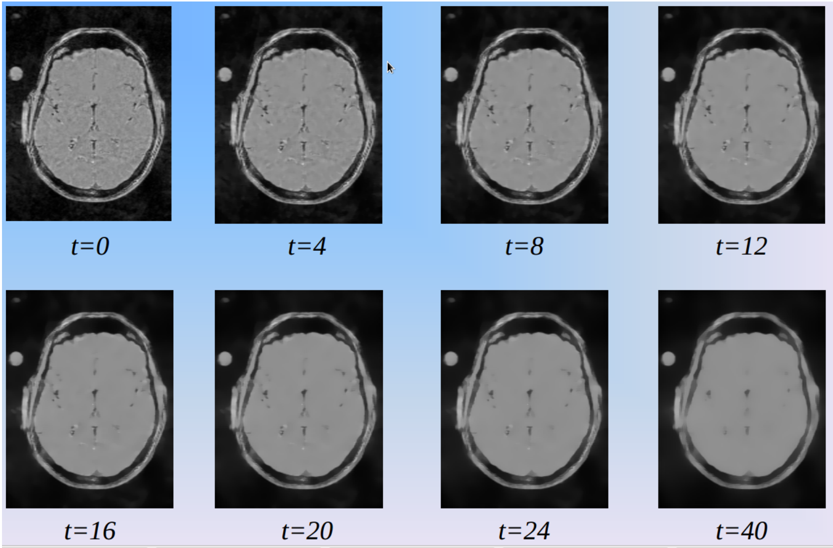
$$u(x,y,0) = I(x,y)$$

$T(x,y)$ - tenseur de diffusion :

- deux vecteurs propres perpendiculaires et deux valeurs propres
- les vecteurs propres indiquent les direction de diffusion
- les valeurs propres indiquent la diffusivité dans les directions respectives
- $v_{||} = \nabla u / |\nabla u|$ et $v_{\perp} = -v_{||,y} / |v_{||,x}$, $\lambda_1 = D(x,y)$, $\lambda_2 = 1$ et

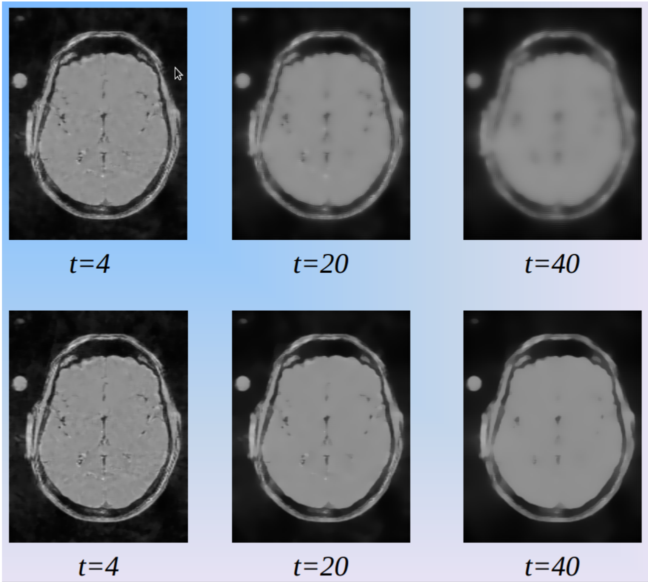
$$T = (v_{||} v_{\perp}) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot (v_{||} v_{\perp})^T$$

Diffusion anisotrope



Diffusion non-linéaire anisotrope

Diffusion anisotrope



Comparaison diffusions non-linéaires isotrope - anisotrope

Filtrage bilatéral

Idée de base

Le filtrage Gaussien peut être écrit comme :

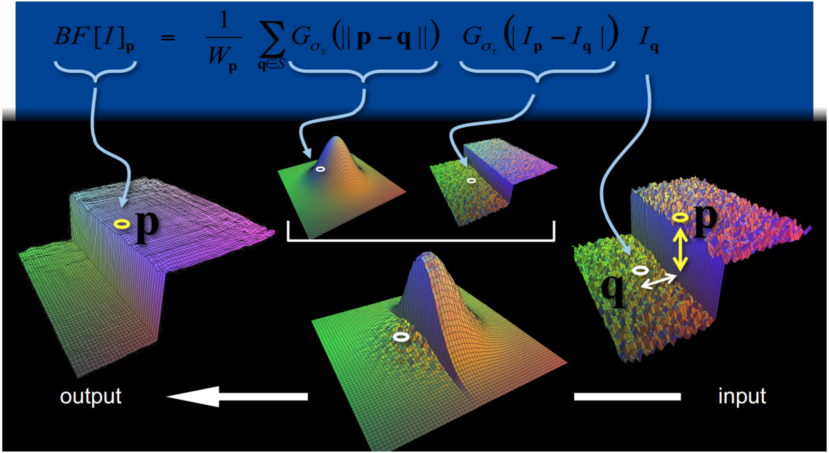
$$I_G(p) = \sum_{q \in S} I(q) \cdot G_{\sigma_s}(|p - q|)$$

Problème dû au fait que le poids G_{σ_s} ne dépend que de la distance entre p et q.
Solution fonction de pénalisation supplémentaire qui empêche les pixels de valeur très différente d'intervenir dans le filtrage :

$$BF(p) = \frac{1}{W} \sum_{q \in S} I(q) \cdot G_{\sigma_s}(|p - q|) \cdot G_{\sigma_r}(|I(p) - I(q)|)$$

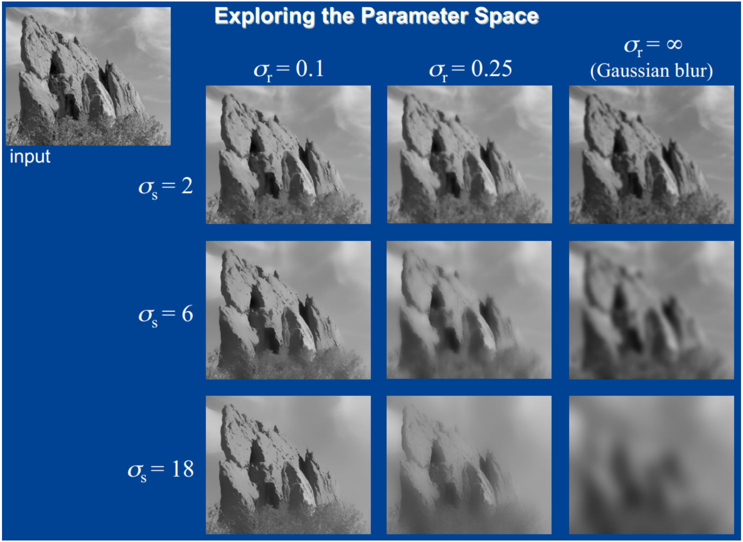
G_{σ_r} peut être une Gaussienne également.

Filtrage bilatéral



Fonctionnement

Filtrage bilatéral

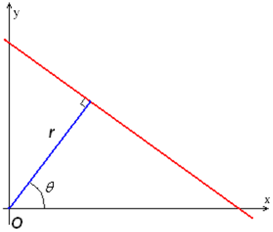


Espace des paramètres

Détection de droites

Paramétrisation

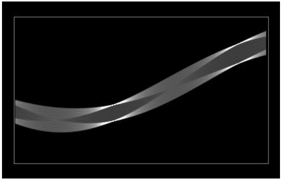
- comment le faire de manière simple ?
- combien de paramètres ?
- comment choisir la quantification ?
- $r \in [0, r_{max}], \theta \in [0, 2\pi]$
- pixel (x_0, y_0) associé à $r = x_0 \cos(\theta) + y_0 \sin(\theta)$

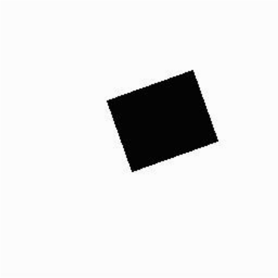


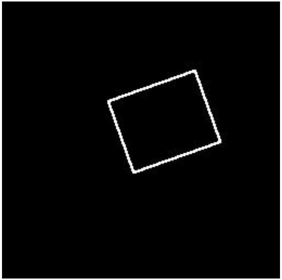
Détection de droites

Paramétrisation

- comment le faire de manière simple ?
- combien de paramètres ?
- comment choisir la quantification ?
- $r \in [0, r_{max}], \theta \in [0, 2\pi]$
- pixel (x_0, y_0) associé à $r = x_0 \cos(\theta) + y_0 \sin(\theta)$



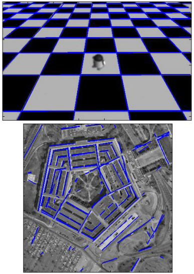




Détection de droites

Transformée de Hough : à retenir

- droite paramétrée par une paire (r, θ)
- (r, θ) - espace cumulatif
- les points situés sur les contours votent
- on peut utiliser le gradient local



Exercice :

Quel est l'accumulateur pour un cercle / une ellipse ?