

Tesis de Licenciatura en Ciencias de la Computación

# Secuencias completamente equidistribuidas basadas en secuencias de De Bruijn

Emilio Almansi

Directora: Verónica Becher  
Departamento de Computación  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires  
4 de septiembre, 2019

## Sobre secuencias aleatorias

Vestibulum efficitur erat quis ex ullamcorper, non pellentesque leo scelerisque. Phasellus vel ex turpis.

## Sobre secuencias aleatorias

Vestibulum efficitur erat quis ex ullamcorper, non pellentesque leo scelerisque. Phasellus vel ex turpis.

Pellentesque congue dictum lectus, sit amet iaculis magna sollicitudin posuere.

## Sobre secuencias aleatorias

Vestibulum efficitur erat quis ex ullamcorper, non pellentesque leo scelerisque. Phasellus vel ex turpis.

Pellentesque congue dictum lectus, sit amet iaculis magna sollicitudin posuere.

- ▶ Proin sapien nulla, convallis non finibus nec, egestas ut lorem. Aenean maximus ex ut ex luctus consectetur.

## Sobre secuencias aleatorias

Vestibulum efficitur erat quis ex ullamcorper, non pellentesque leo scelerisque. Phasellus vel ex turpis.

Pellentesque congue dictum lectus, sit amet iaculis magna sollicitudin posuere.

- ▶ Proin sapien nulla, convallis non finibus nec, egestas ut lorem. Aenean maximus ex ut ex luctus consectetur.
- ▶ Cras laoreet mauris at felis porttitor rutrum. Proin elementum nunc nec imperdiet viverra. In a nibh a nulla accumsan consequat.

## Sobre secuencias aleatorias

Vestibulum efficitur erat quis ex ullamcorper, non pellentesque leo scelerisque. Phasellus vel ex turpis.

Pellentesque congue dictum lectus, sit amet iaculis magna sollicitudin posuere.

- ▶ Proin sapien nulla, convallis non finibus nec, egestas ut lorem. Aenean maximus ex ut ex luctus consectetur.
- ▶ Cras laoreet mauris at felis porttitor rutrum. Proin elementum nunc nec imperdiet viverra. In a nibh a nulla accumsan consequat.
- ▶ Donec ex mauris, vulputate nec mauris quis, finibus convallis tellus.

## Equidistribución completa

Aenean laoreet, ligula vel aliquet consectetur, mi magna rutrum urna, vel volutpat nulla purus sed lorem.

# Equidistribución completa

Aenean laoreet, ligula vel aliquet consectetur, mi magna rutrum urna, vel volutpat nulla purus sed lorem.

## Definición

Fusce sit amet lacus viverra, viverra massa sit amet, placerat neque. Integer ipsum sapien, efficitur quis dui vitae, facilisis tempus dolor.



# Equidistribución completa

Aenean laoreet, ligula vel aliquet consectetur, mi magna rutrum urna, vel volutpat nulla purus sed lorem.

## Definición

Fusce sit amet lacus viverra, viverra massa sit amet, placerat neque. Integer ipsum sapien, efficitur quis dui vitae, facilisis tempus dolor.

Duis ornare volutpat libero, at sodales dolor porttitor at.

# Equidistribución completa

Aenean laoreet, ligula vel aliquet consectetur, mi magna rutrum urna, vel volutpat nulla purus sed lorem.

## Definición

Fusce sit amet lacus viverra, viverra massa sit amet, placerat neque. Integer ipsum sapien, efficitur quis dui vitae, facilisis tempus dolor.

Duis ornare volutpat libero, at sodales dolor porttitor at.

In rutrum dapibus justo, at mattis lacus ultrices sed. Suspendisse suscipit luctus fermentum.

# Secuencias de De Bruijn

## Definición

[Borel, 1909] Mauris euismod neque a lorem rutrum, id molestie eros consequat. In facilisis magna eu libero commodo, id tincidunt *ℓ* purus pellentesque:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u[1, \ell n]\|_v}{n} = \frac{1}{|A|^\ell}.$$

# Secuencias de De Bruijn

## Definición

[Borel, 1909] Mauris euismod neque a lorem rutrum, id molestie eros consequat. In facilisis magna eu libero commodo, id tincidunt *ℓ* purus pellentesque:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u[1, \ell n]\|_v}{n} = \frac{1}{|A|^\ell}.$$

Donec nec ex id nisl venenatis semper. Curabitur erat mi, sagittis nec tortor vel, tempor porta magna. Cras at maximus orci, non viverra neque.

# Secuencias de De Bruijn

## Definición

[Borel, 1909] Mauris euismod neque a lorem rutrum, id molestie eros consequat. In facilisis magna eu libero commodo, id tincidunt *ℓ* purus pellentesque:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u[1, \ell n]\|_v}{n} = \frac{1}{|A|^\ell}.$$

Donec nec ex id nisl venenatis semper. Curabitur erat mi, sagittis nec tortor vel, tempor porta magna. Cras at maximus orci, non viverra neque.

## Problema (Borel, 1909)

*In eget enim feugiat, cursus tellus eget, dapibus libero. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos.*

## La secuencia de Knuth

Nam sagittis dolor in enim tincidunt, sit amet pellentesque urna vulputate. Nam porta purus neque, ultrices vulputate orci ullamcorper eu.

## La secuencia de Knuth

Nam sagittis dolor in enim tincidunt, sit amet pellentesque urna vulputate. Nam porta purus neque, ultrices vulputate orci ullamcorper eu.

### Problema

*Morbi euismod purus at cursus iaculis. Donec efficitur lorem rutrum, auctor justo id, rhoncus nibh.*

# La secuencia de Knuth

Nam sagittis dolor in enim tincidunt, sit amet pellentesque urna vulputate. Nam porta purus neque, ultrices vulputate orci ullamcorper eu.

## Problema

*Morbi euismod purus at cursus iaculis. Donec efficitur lorem rutrum, auctor justo id, rhoncus nibh.*

## Teorema (Champernowne, 1933)

*Curabitur varius in ligula nec laoreet. Aenean ultricies eget mi quis maximus. Mauris ornare interdum vestibulum.*



# Tamaños de alfabeto linealmente crecientes

Teorema (Agafonov 1968)

*Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos*

# Tamaños de alfabeto linealmente crecientes

## Teorema (Agafonov 1968)

*Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos*

## Corolario

*Vestibulum quis dolor quam. Sed viverra, diam ac fringilla fringilla, ex dui consequat leo, nec tempus augue mi eu quam.*

# Tamaños de alfabeto linealmente crecientes

## Teorema (Agafonov 1968)

*Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos*

## Corolario

*Vestibulum quis dolor quam. Sed viverra, diam ac fringilla fringilla, ex dui consequat leo, nec tempus augue mi eu quam.*

## Teorema (Vandehey 2016)

*Phasellus quis aliquam nulla, non rutrum lorem. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos.*

## Teorema principal

Nullam posuere tincidunt urna et elementum. Donec elementum at tellus sit amet tempus.

## Teorema principal

Nullam posuere tincidunt urna et elementum. Donec elementum at tellus sit amet tempus.

## Problema

*Cras id accumsan risus, sed elementum elit. Suspendisse aliquet hendrerit gravida.*

## Teorema principal

Nullam posuere tincidunt urna et elementum. Donec elementum at tellus sit amet tempus.

### Problema

*Cras id accumsan risus, sed elementum elit. Suspendisse aliquet hendrerit gravida.*

### Teorema (Resultado principal de esta tesis)

*Nullam vehicula erat ante, hendrerit euismod elit luctus nec. Duis sagittis tincidunt metus, in dapibus lorem ullamcorper ut.*

# Idea de la demostración

## Definición

Curabitur imperdiet tempus massa  $A = \{0, 1, \dots, b - 1\}$ , pellentesque id turpis at mauris tempor auctor at pellentesque ex.

# Idea de la demostración

## Definición

Curabitur imperdiet tempus massa  $A = \{0, 1, \dots, b - 1\}$ , pellentesque id turpis at mauris tempor auctor at pellentesque ex.

Pellentesque urna arcu, pellentesque sit amet volutpat eget, venenatis sed leo. Phasellus tempus eu urna a lacinia.



# Idea de la demostración

## Definición

Curabitur imperdiet tempus massa  $A = \{0, 1, \dots, b - 1\}$ , pellentesque id turpis at mauris tempor auctor at pellentesque ex.

Pellentesque urna arcu, pellentesque sit amet volutpat eget, venenatis sed leo. Phasellus tempus eu urna a lacinia.

Vestibulum aliquam augue et tortor pulvinar suscipit  $w_n^*$ .

# Idea de la demostración

## Definición

Curabitur imperdiet tempus massa  $A = \{0, 1, \dots, b - 1\}$ , pellentesque id turpis at mauris tempor auctor at pellentesque ex.

Pellentesque urna arcu, pellentesque sit amet volutpat eget, venenatis sed leo. Phasellus tempus eu urna a lacinia.

Vestibulum aliquam augue et tortor pulvinar suscipit  $w_n^*$ .

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Sed placerat nulla a vulputate ultrices. Ut et magna ac lacus elementum tincidunt a id ante.

Donec  $u = v_1 v_2 \dots v_m$  aenean ullamcorper odio vitae  $v_i$  erat  $\ell_n$  rhoncus quis

$$e_n(u) = e_n(v_1) \dots e_n(v_m)$$

# Criterio de Weyl

## Definición

Suspendisse ut hendrerit  $A$ , *finibus semper neque non congue tortor dictum*  $\ell$  laoreet ex nec pulvinar  $u \in A^*$  tellus

$$\Delta_{A,\ell}(u) = \max_{v \in A^\ell} \left( \left| \frac{\|u\|_v}{\lfloor |u|/\ell \rfloor} - \frac{1}{|A|^\ell} \right| \right).$$

# Criterio de Weyl

## Definición

Suspendisse ut hendrerit  $A$ , *finibus semper neque non congue tortor dictum*  $\ell$  laoreet ex nec pulvinar  $u \in A^*$  tellus

$$\Delta_{A,\ell}(u) = \max_{v \in A^\ell} \left( \left| \frac{\|u\|_v}{\lfloor |u|/\ell \rfloor} - \frac{1}{|A|^\ell} \right| \right).$$

Nam sagittis dolor in enim tincidunt  $v \in A^\omega$  sit amet pellentesque urna vulputate  $\ell$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_{A,\ell}(v[1, \ell n]) = 0$$

# Prueba alternativa

## Definición

Curabitur imperdiet tempus massa  $A = \{0, 1, \dots, b - 1\}$ , pellentesque id turpis at mauris tempor auctor at pellentesque ex.

# Prueba alternativa

## Definición

Curabitur imperdiet tempus massa  $A = \{0, 1, \dots, b - 1\}$ , pellentesque id turpis at mauris tempor auctor at pellentesque ex.

Pellentesque urna arcu, pellentesque sit amet volutpat eget, venenatis sed leo. Phasellus tempus eu urna a lacinia.

# Prueba alternativa

## Definición

Curabitur imperdiet tempus massa  $A = \{0, 1, \dots, b - 1\}$ , pellentesque id turpis at mauris tempor auctor at pellentesque ex.

Pellentesque urna arcu, pellentesque sit amet volutpat eget, venenatis sed leo. Phasellus tempus eu urna a lacinia.

Vestibulum aliquam augue et tortor pulvinar suscipit  $w_n^*$ .

# Prueba alternativa

## Definición

Curabitur imperdiet tempus massa  $A = \{0, 1, \dots, b - 1\}$ , pellentesque id turpis at mauris tempor auctor at pellentesque ex.

Pellentesque urna arcu, pellentesque sit amet volutpat eget, venenatis sed leo. Phasellus tempus eu urna a lacinia.

Vestibulum aliquam augue et tortor pulvinar suscipit  $w_n^*$ .

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Sed placerat nulla a vulputate ultrices. Ut et magna ac lacus elementum tincidunt a id ante.

Donec  $u = v_1 v_2 \dots v_m$  aenean ullamcorper odio vitae  $v_i$  erat  $\ell_n$  rhoncus quis

$$e_n(u) = e_n(v_1) \dots e_n(v_m)$$



## Problemas abiertos

Cras id accumsan risus, sed elementum elit.

## Problemas abiertos

Cras id accumsan risus, sed elementum elit.

- ▶ Donec eu sollicitudin lacus. Vestibulum facilisis eu tellus quis gravida. Proin faucibus tellus nec tempus maximus.

## Problemas abiertos

Cras id accumsan risus, sed elementum elit.

- ▶ Donec eu sollicitudin lacus. Vestibulum facilisis eu tellus quis gravida. Proin faucibus tellus nec tempus maximus.
- ▶ Proin at facilisis orci. Nunc at orci in ante semper elementum ullamcorper in est. Praesent maximus aliquet lorem, in tincidunt odio tempus vel.

## Problemas abiertos

Cras id accumsan risus, sed elementum elit.

- ▶ Donec eu sollicitudin lacus. Vestibulum facilisis eu tellus quis gravida. Proin faucibus tellus nec tempus maximus.
- ▶ Proin at facilisis orci. Nunc at orci in ante semper elementum ullamcorper in est. Praesent maximus aliquet lorem, in tincidunt odio tempus vel.
- ▶ Etiam vulputate nunc eget mauris vestibulum, nec viverra massa lacinia. Donec volutpat tempus nunc, vitae malesuada odio ultricies nec.