Universitetet i Oslo

Svingninger og bølger

FYS2130

# Oblig 1

*Forfatter:*
Eirik Lund

*Studentkode:*
eaflund

29. januar 2017

## 1 :

For at en kraft skal kunne danne svingninger så må den oscillere, eks i et fjærsystem kan vi observere energibevaring, hvor oscilleringene viser hvordan systemet veksler mellom potensiell energi og kinetisk energi.

Konkluderende kan vi si at svingninger oppstår når en eller flere krefter prøver å føre systemet til sin likevekt.

## 2 :

Vi vet fra Newtons lov om gravitasjon :

$\overrightarrow{F_G} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{r}$ at $F_{mne} < F_{jorden}$

Men for dette systemet så vil fjærkraften kansellerer tyngdekraften, så forskjellen mellom jord og måne vil være hvor langt fjæren strekkes,$\Delta L$.

Oscilleringene skjer i vertikalretning og er avhengig av vinkelfrekvensen $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Videre har vi at perioden er som følgende: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ Perioden avhenger av konstanter som er likt både på jord og måne, derfor kan vi si at for dette systemet så er perioden lik.

## 3 :

For en pendel så er kraften som trekker pendelen mot likevektspunktet er:

$F_\theta = -mgsin(\theta)$
Det er også intuitivt at tyngdekraften inngår for vinkelutslaget.

Vi har videre etter å ha løst differensialligningen: $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

Perioden : $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Siden $g_{jorden} > g_{mnen}$ så vil perioden på jorden være mindre enn perioden til månen.

## 4 :

Vi har flere situasjoner som kan ødelegge for en harmonisk bevegelse.
Friksjonskraft, for eksempel friksjon i luften vil gi dempede svingninger.
Deformeringer i fjæren over tid vil påvirke svingebevegelsen.
Ulike seismiske utslag vil også påvirke svingebevegelsen.

Vi skiller i hovedsak mellom 3 ulike: kritiske, underkritiske og overkritiske - dempninger

# 5 :

Vi antar N2L er gjeldende og at fjæren følger Hookes-lov:
$F_H = -kx$ i vårt tilfelle, $F_H = -k\Delta L \rightarrow F_H = -k(L_1 - L_0)$

N2L : $F = ma \rightarrow F = -mg$
Da har vi at : $F(t) = k(L_1 - L_0) = mg \rightarrow F(t) = k(L(t) - L_1)$

$\Delta L = -z(t)$, da har vi videre at $m\ddot{z}(t) = -kz(t)$

Vi prøver formen $z = Ae^{\alpha t}$.

$\dot{z} = A\alpha e^{\alpha t}$

$\ddot{z} = A\alpha^2 e^{\alpha t}$

Innsatt i differensialligningen : $A\alpha^2 e^{\alpha t} = -\frac{k}{m} Ae^{\alpha t}$

$\alpha^2 = -\frac{k}{m} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Innsatt i generell løsning:

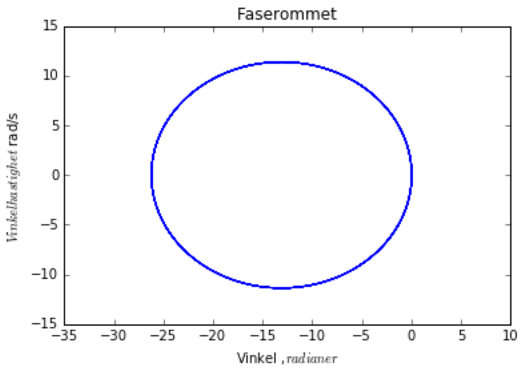
$z(t) = Bsin(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + Ccos(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$

Hvor B og C er konstanter.

Nedenfor finner du koden for programmet oppg9.py som plotter faserommet, samt bevegelsen over tid.

Jeg valgte 60 sekunder som lengde for tiden.

Vi får følgende plot for faserommet:




Fasoren roterer med vinkelfrekvensen $\omega$ og fase, vi ser på plottet at vi får plot på $2\pi$.

Koden for oppg9.py:

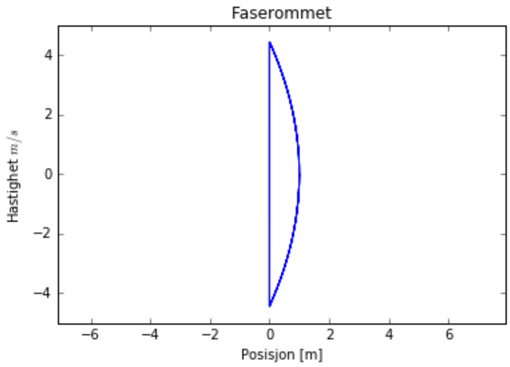
```python
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Thu Jan 19 21:58:29 2017

@author: ealun
"""
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
#Constants

m = 2.0
k = 1.5 #N/m
v0 = 1.0 #m/s
g = 9.81 #G
dt = 0.00001

def system(time):
    time = time
    n = int(round(time/dt))
    t = np.zeros(n,float)
    y = np.zeros(n,float)
    v = np.zeros(n,float)

    y[0] = 0.0
    v[0] = v0

    for i in xrange(n-1): #Euler-cromer integration method

        F = -k*y[i] - m*g
        a = F/m

        v[i+1] = v[i] + a*dt
        y[i+1] = y[i] + v[i+1]*dt
        t[i+1] = t[i] + dt

    return y,v,t

def plotter(y,v,t):

    fase = plt.plot(y,v)
    plt.xlabel("Vinkel ,$radianer$"), plt.ylabel("$Vinkelhastighet$ rad/s")
    plt.title("Faserommet")
    plt.axis('equal')
    plt.legend()
    plt.show()

    bevegelse = plt.plot(t,y)
    plt.hold('on')
    plt.xlabel('$Tid, s$'), plt.ylabel('$Lengde, m$')
    plt.title('Bevegelse')
    plt.axis('equal')
    plt.legend()
    plt.show()

    return fase,bevegelse
```

```
if __name__ == '__main__':
    y,v,t = system(60)
    fase, bevegelse = plotter(y,v,t)
```

# 6 :

$v(t) = gt$ eller : $\ddot{x(t)} = gt$
Vi finner løsningen for bevegelsen ved å integrere over dx.

$\int gtdx = \frac{-gt^2}{2} + C$ hvor C er initialhøyden.




Vi ser at faserommet får en halv elliptisk form, noe vi ville få ved en kvadrert cosinus ettersom den returnerer kun positive verdier for posisjonen.

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Fri Jan 20 20:01:07 2017

@author: ealun
"""
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#t_max = 20 #program timeout
g = -9.81 #aceleration of gravity
dt = 0.0001 #increase of time for each iteration
D = 0 #friction with air

def system(time):

    n = int(round(time/dt))
    x = np.zeros(n,float)
    v = np.zeros(n,float)
    a = np.zeros(n,float)
    t = np.zeros(n,float)

    x[0] = 1.0 #Meter
    v[0] = 0.0

    for i in xrange(n-1):
```

```python
        a[i] = g - D*v[i]*abs(v[i])
        v[i+1] = v[i] +a[i]*dt
        x[i+1] = x[i] +v[i+1]*dt


        if (x[i+1] < 0.0):
            v[i+1] = -v[i+1]

        t[i+1] = t[i] +dt

    return x,v,t


def plotter(x,v,t):

    fase = plt.plot(x,v)
    plt.hold('on')
    plt.xlabel("Posisjon [m]"), plt.ylabel("Hastighet $m/s$")
    plt.title("Faserommet")
    plt.axis('equal')
    plt.legend()
    plt.show()

    bevegelse = plt.plot(t,x)
    plt.hold('on')
    plt.xlabel('$Tid, s$'), plt.ylabel('$Hoyde, m$')
    plt.title('Bevegelse')
    plt.axis('equal')
    plt.legend()
    plt.show()

    return fase, bevegelse




if __name__ == '__main__':
    x,v,t = system(3.5)
    fase, bevegelse = plotter(x,v,t)
```

## 7 :

Antar ingen dempninger på bevegelsen

Svingetiden er det samme som perioden.

Starter med å løse for fjærkonstanten:

$F_{Hook} = F_{N2L} \rightarrow k(L_1 - L_0) = mg$

$k = \dfrac{mg}{(L_1 - L_0)} = 5,45\dfrac{kgm^2}{s^2}$

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 0,8511s$

Finner analytisk løsning for bevegelsen:

Siden massen og fjærkonstanten $> 0$ så vil vi få reelle løsninger.

Vi ønsker : $Z(t) = Acos(\omega_0 t + \phi)$

Amplituden er maksimalverdien til funksjonen, dvs $A = (L_2 - L_1) = 8cm$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{218}{4}}$

Finner fasen $\omega$

$z(t) = 0.08cos(\dfrac{\sqrt{218}}{2}t + \phi)$

Jeg har orientert aksene slik at positiv retning er vertikalt opp. Ved å dra systemet ned får vi da en faseendring på $\pi$

$z(t) = 0.08cos(\dfrac{k}{m}t + \pi)$

$L_0 = 30cm$ , $L_1 = 48cm$ og $L_2 = 56cm$

$F_{max} = (L_2 - L_0)k = 141.7N$

$F_{min} = 10k = 54.5N$

## 8 :

N2L: $\sum F = ma$ , vi har fått at $f = \dfrac{4}{10}$ Hz og $x_1 = 2.4cm$

$\omega = f \cdot 2\pi$

$ma = -mg - kx_1$ , $a = -g - \dfrac{k}{m}x_1$

Setter inn omega : $a = -g - \omega^2 x_1$

$a = -g - (f2\pi)^2 x_1 = -9.96\dfrac{m}{s^2}$

Energi bevaring:

$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\ddot{x}^2$

$A = \sqrt{x^2 + \omega^{-2}\ddot{x}^2} = 6.36cm$
Vi finner $\phi$:

$x_1 = Acos(\frac{8\pi}{5} + \phi)$

$arccos(\frac{x_1}{A}) - \frac{8\pi}{5} = \phi = -3.84$

$z(t) = 0.0636cos(\frac{4\pi}{5}t - 3.84)$

# 9 :

Oppgitt info $E_k = \frac{1}{2}E_p$

$E_{tot} = E_k + E_p = \frac{1}{2}E_p + E_p = \frac{3}{2}E_p$

$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{3}{2}kx^2$

$x = \sqrt{\frac{3}{2}}A$ som er utslaget ved kinetiske er lik halvparten av potensielle energien.

# 10 :

**a)** $z(t) = Acos(\omega t + \phi)$ A = 1.2m og $\omega = 6\pi$ og $\phi = \frac{\pi}{6}$

Overgang 1:

$z(t) = A(cos[\omega t]cos(\phi) - sin[\omega t]sin(\phi))$

$z(t) = [Acos(\phi)]cos(\omega t) + [-Asin(\phi]sin(\omega t)$

$B = Acos(\phi) = \frac{3\sqrt{3}}{5}$ og $C = -Asin(\phi) = \frac{3}{5}$

Dette gjelder hvis: $A = \sqrt{B^2 + C^2} = A$ Noe det gjør.

$z(t) = \frac{3\sqrt{3}}{5}cos(6\pi t) + \frac{3}{5}sin(6\pi t)$

**b)** $z(t) = Acos(\omega t + \phi)$ A = 1.2m og $\omega = 6\pi$ og $\phi = \frac{\pi}{6}$

$e^{i\alpha} = cos(\alpha) + isin(\alpha)$

$\mathbb{R}(Ee^{i(\omega t + \phi)}) = \mathbb{R}(A \cdot (cos(\omega t + \phi) + isin(\omega t + \phi))) = Acos(\omega t + \phi)$
Da følger det at $E = A$

$$z(t) = Acos(\omega t + \phi) = Ae^{i(\omega t + \phi)} = \frac{6}{5}e^{i(6\pi t + \frac{\pi}{6})}$$

## 11 :

Omform til likning 2.1:

$$y(t) = \mathbb{R}[(-5.8 + 2.2i)e^{i\omega t}]$$

$$D = D_{re} + iD_{im} = -5.8 + i2.2$$

$$\mathbb{R}[D_{re}cos(\omega t) + iD_{re}sin(\omega t) + iD_{im}cos(\omega t) + i^2 D_{im}sin(\omega t)] = D_{re}cos(\omega t) - D_{im}sin(\omega t)$$

$$z(t) = -5.8cos(\omega t) + 2.2sin(\omega t)$$

## 12 :

$E_{tot} = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$

Siden pendel, har vi at $h = lcos(\theta)$

Videre kan vi omskrive $v = \ddot{x}$ eller vinkelen som funksjon av tiden er en og samme i denne situasjonen. $v = L\frac{\partial \theta}{\partial t}$

$$E = \frac{1}{2}m(L\ddot{\theta}^2) + mgLcos(\theta)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = mL^2\ddot{\theta} \cdot \ddot{\vec{\theta}} - mgLsin(\theta) \cdot \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = mL\ddot{\theta}(L\ddot{\vec{\theta}} - gsin(\theta))$$

N2L : $a = L\ddot{\vec{\theta}} = -gsin(\theta)$

$$\sum F = F + F_f = -mgsin(\theta) - bv$$

Innsatt: $\frac{\partial E}{\partial \theta} = mv(gsin(\theta) - \frac{b}{m} - gsin(\theta)) = -bv$