Oblig 1
Eirik Lund
Brukernavn: eaflund
Fagkode: FYS 1120

1 A):
1) Finn gradient til følgende funksjon $\vec{f}(x,y,x) = x^2y$
Løsning:
$\nabla\vec{f} = (\frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial f_j}{\partial y}, \frac{\partial f_k}{\partial z}) = (2xy, x^2, 0)$

2 Finn gradient til følgende funksjon $\vec{g}(x,y,x) = xyz$
Løsning:
$\nabla\vec{g} = (\frac{\partial g_i}{\partial x}, \frac{\partial g_j}{\partial y}, \frac{\partial g_k}{\partial z}) = (yz, xz, xy)$

3
Finn gradient til følgende funksjon $\vec{h}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r}e^{r^2}$
Løsning:
I kulekoordinater så har vi følgende komponenter:
$x = rcos\theta cos\phi \ y = rsin\theta sin\phi \ z = rcos\phi$
$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ved innsetting for x,y og z får vi at $r = \sqrt{r^2}$
Vi antar at radius har en positiv verdi, $r \in [0, r]$ så blir $r = r$
Hele uttrykket vil kun partiellderiveres med hensyn på r.
$\nabla\vec{h} = \dfrac{2re^{r^2}r - e^{r^2}}{r^2}\vec{e_r}$
$\nabla h = \dfrac{e^{r^2}(2r^2-1)}{r^2}\vec{e_r}$

b Divergens og curl
1)
$\vec{U}(x,y,z) = (2xy, x^2, 0)$
$\nabla \cdot U = (\dfrac{\partial_i U_i}{\partial x}, \dfrac{\partial_j U_j}{\partial y}, \dfrac{\partial_k U_k}{\partial z}) = 2y$

Siden ∇ prikkes med $\vec{U}$ så blir dette en skalar størrelse og derfor ikke lenger med enhetsvektorer.
$(\nabla \times \vec{U}) =$
$\vec{i}(\dfrac{\partial 0}{\partial y} - \dfrac{\partial x^2}{\partial z})$
$\vec{j}(\dfrac{\partial 0}{\partial x} - \dfrac{\partial 2xy}{\partial z})$
$\vec{k}(\dfrac{\partial x^2}{\partial x} - \dfrac{\partial 2xy}{\partial y})$
Eneste bidraget er fra $\vec{k}(2x - 2x) = 0$
$(\nabla \times \vec{U}) = 0\vec{k}$

2

$\vec{v}(x,y,x) = (e^{yz}, ln(xy), z)$
$\nabla \cdot \vec{v} = 0 + \dfrac{\partial ln(xy}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial z} = \dfrac{1}{y} + 1$

$(\nabla \times \vec{v}) =$
$\vec{i}(\dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{\partial ln(xy)}{\partial z})$
$\vec{j}(\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial e^{yz}}{\partial z})$
$\vec{k}(\dfrac{\partial ln(xy)}{\partial x} - \dfrac{\partial e^{yz}}{\partial y})$
$(\nabla \times \vec{v}) = (0, ye^{yz}, \dfrac{1}{x} - ze^{yz})$

3
$\vec{w}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$
$\nabla \cdot \vec{w} = 0$
$(\nabla \times \vec{w}) = (0, y - x, 0)$

4
$\vec{a}(x,y,z) = y^2z, -z^2sin(y) + 2xyz, 2zcos(y) + y^2x$
$\nabla \cdot \vec{a} = cos(y)(2 - z^2) + 2xz$
$(\nabla \times \vec{a}) = (-2zsin(y) + 2yx + 2zsin(y) - 2yx, y^2 - y^2, 2yz - 2yz) = 0$

c
Et felt er konservativt hvis følgende punkter blir oppfylt:
- Sirkulasjons er lik 0 for vilkårlig lukket kurve $\oint_\lambda \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0$
- Integralet avhenger kun av endepunkter, ikke valg av vei.
- Divergens og virvling er null.
- At det finnes et potensial $\vec{F} = -\nabla\phi$ feks et tyngdepotensial.
- Hvis 2-dimensjonalt og divergensfritt, så eksisterer det en strømfunksjon $\psi(x,y)$

Er tyngdekraften konservativ ?:

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

$$\vec{g} = -g\vec{k}$$

$$\vec{r}_\theta = x0\vec{i} + y0\vec{j} + z0\vec{k}$$

$$\oint_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\lambda} -mg\vec{k} \cdot d\vec{r}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$\vec{k} \cdot d\vec{r} = \vec{k} \cdot \vec{k}dz = dz$$

$$\oint_{\lambda} -mgdz = 0$$

Tyngdefeltet varierer i forhold til radius til jorden, men vi integrerer over lukket kurve så er feltet konservativt.

I oppgave b) så er $\vec{W}$ konservativ fordi $\nabla \cdot \vec{W} = 0$ Siden divergensen er null skal vi kunne klare å konstruere et potensial $\vec{g}(x, y, z)$

Videre er oppgave i) og iv) i b) konservative pga virvlingen er null.

$$\nabla \vec{g}(x, y, z) = \vec{W}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = yz, \int yzdx = xyz + C$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = yz, \int xzdy = xyz + C$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = yz, \int xydz = xyz + C$$

$\vec{g}(x, y, z) = xyz$ som er vårt potensiale. Derfor er $\vec{W}$ konservativ.

d

1)

$$\vec{j}(x,y,z) = x^2 + xy + yz^2$$

$$\nabla^2\vec{j} = (\frac{\partial}{\partial x}\cdot(\frac{\partial j_i}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}\cdot(\frac{\partial j_j}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}\cdot(\frac{\partial j_k}{\partial z})) = 2 + 0 + 2y = 2(y+1)$$

2)

$\nabla^2\vec{h}(r,\theta,\phi) = \nabla\cdot\nabla\vec{h}$

$\nabla\cdot\nabla\vec{h} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial h}{\partial r}) = \frac{e^{r^2}}{r}(4r^2+2)$

2

Vis følgende ident : $(\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

Vi angir hver komponent med enhetsvektorer:

$\vec{A} = A_{\vec{i}} + A_{\vec{j}} + A_{\vec{k}}$

$\vec{B} = B_{\vec{i}} + B_{\vec{j}} + B_{\vec{k}}$

$\vec{C} = C_{\vec{i}} + C_{\vec{j}} + C_{\vec{k}}$

Vi tar først kryssproduktet av $(\vec{B} \times \vec{C})$ og så krysser dette med A.

Jeg velger å droppe vektornotasjon på hovedkomponentene A,B og C.

$(B \times C)$:

$\vec{i}(B_{\vec{j}}C_k - C_{\vec{j}}B_{\vec{k}})$

$\vec{j}(B_{\vec{i}}C_{\vec{k}} - C_{\vec{i}}B_{\vec{k}})$

$\vec{k}(B_{\vec{i}}C_{\vec{j}} - C_{\vec{i}}B_{\vec{j}})$

Ved å krysse $\vec{A} \times (B \times C)$ får vi følgende:

$\vec{i} : A_{\vec{j}}(B_{\vec{i}}C_{\vec{j}} - C_{\vec{i}}B_{\vec{j}}) - A_{\vec{k}}(B_{\vec{i}}C_{\vec{k}} - C_{\vec{i}}B_{\vec{k}})$

$\vec{j} : A_{\vec{i}}(B_{\vec{i}}C_{\vec{j}} - C_{\vec{i}}B_{\vec{j}}) - A_{\vec{k}}(B_{\vec{j}}C_{\vec{k}} - C_{\vec{j}}B_{\vec{k}})$

$\vec{k} : A_{\vec{i}}(B_{\vec{i}}C_{\vec{k}} - C_{\vec{i}}B_{\vec{k}}) - A_{\vec{j}}(B_{\vec{j}}C_{\vec{k}} - C_{\vec{j}}B_{\vec{k}})$

Vi sorterer ved like enhetsvektorer:

$\vec{i} : B_{\vec{i}}(A_{\vec{j}}C_{\vec{j}} + A_{\vec{k}}C_{\vec{k}}) - C_i(A_{\vec{j}}B_{\vec{j}}) + A_{\vec{k}}B_{\vec{k}}$

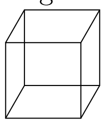
Tilsvarende får vi for enhetsvektorene $\vec{j}$ og $\vec{k}$. Vi adderer:

$B_{\vec{i}}(A_{\vec{i}}C_{\vec{i}} + A_{\vec{j}}C_{\vec{j}} + A_{\vec{k}}C_{\vec{k}}) - C_{\vec{i}}(A_{\vec{i}}B_{\vec{i}} + A_{\vec{j}}B_{\vec{j}} + A_{\vec{k}}B_{\vec{k}})$
$B_{\vec{j}}(A_{\vec{i}}C_{\vec{i}} + A_{\vec{j}}C_{\vec{j}} + A_{\vec{k}}C_{\vec{k}}) - C_{\vec{j}}(A_{\vec{i}}B_{\vec{i}} + A_{\vec{j}}B_{\vec{j}} + A_{\vec{k}}B_{\vec{k}})$
$B_{\vec{k}}(A_{\vec{i}}C_{\vec{i}} + A_{\vec{j}}C_{\vec{j}} + A_{\vec{k}}C_{\vec{k}}) - C_{\vec{k}}(A_{\vec{i}}B_{\vec{i}} + A_{\vec{j}}B_{\vec{j}} + A_{\vec{k}}B_{\vec{k}})$

Kombinert for alle enhetsvektorene får vi :

$(A \times (B \times C)) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$

3
Regn ut fluksen av kuben $x, y, z \in [0,1]$



$\iiint_A \vec{V} \cdot \vec{n} dA$, hvor $\vec{V}(x,y,z) = (y, x, z-x)$
Sideflate, jeg har i forkant justert for symmetri.
x = 1 , $\vec{n} = \vec{i}$, $\vec{V}(0 \cdot y) \cdot \vec{i} = 0$, $\int \vec{V} \cdot \vec{n} dA = 0$
y = 1 , $\vec{n} = \vec{j}$, $\vec{V}(0 \cdot x) \cdot \vec{j} = 0$, $\int \vec{V} \cdot \vec{n} dA = 0$
z = 1 , $\vec{n} = \vec{k}$, $\vec{V}(1-0)_{\vec{k}} \cdot \vec{k} = z$, $\int \vec{V} \cdot dz = 1$
x = 0 , $\vec{n} = \vec{-i}$, $\vec{V}(0 \cdot y) \cdot \vec{i} = 0$, $\int \vec{V} \cdot \vec{n} dA = 0$
y = 0 , $\vec{n} = \vec{-j}$, $\vec{V}(0 \cdot x) \cdot \vec{j} = 0$, $\int \vec{V} \cdot \vec{n} dA = 0$
z = 0 , $\vec{n} = \vec{-k}$, $\vec{V}(0-0)_{\vec{k}} \cdot \vec{k} = 0$, $\int \vec{V} \cdot \vec{n} dA = 0$
$\iiint \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \iint \vec{V} \cdot 1 dxdy$ for $x, y \in [0,1]$
$\iint \vec{V} \cdot 1 dxdy = 1$

b)
Bruker Gauss: $\iiint \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \int_\tau (\nabla \cdot \vec{V}) d\vec{\tau}$
Divergensen: $\nabla \cdot \vec{V} = 0 + 0 + 1 = 1$
Integralet blir følgende: $\int_\tau 1 \cdot d\tau = \iiint_\tau 1 \cdot dxdydz = 1$

4

$\vec{W}(x,y,z) = (2x-y)_{\vec{i}} - y^2_{\vec{j}} - y^2_{\vec{k}}$

a) Divergensen:

$\nabla \cdot \vec{W} = 2 - 2y - y^2$

b) Virvlingen:

$\nabla \times \vec{W} = -2yz\vec{i} + \vec{k}$

c) Parametriser.

Innfører nye koordinater for x,y og z ettersom vi er på en sirkelskive.

$x = cost\ y = sint\ z = 1$

$t \in [0, 2\pi]\ r = \in [0, 1]$

$\Gamma(t) = cost_{\vec{i}} + sint_{\vec{j}} + 1_{\vec{k}}$

$\dfrac{d}{dt}\Gamma(t) = d\vec{r} = -sint_{\vec{i}} + cost_{\vec{j}}$

d) Finn sirkulasjonen

$\vec{W}(\Gamma) = (2cost - sint)\vec{i} - sin^2t\vec{j} - sin^2t\vec{k}$

$\vec{W}(\Gamma) \cdot \dfrac{d\Gamma}{dt} = (2cost - sint)(-sint) - sin^2t(cost)$

$\vec{W}(\Gamma) \cdot \dfrac{d\Gamma}{dt} = -3costsin^2t + sin^2t$

$\oint_C \vec{W}(\Gamma) \cdot d\vec{\Gamma} = [\frac{1}{4}(t - 4sin^3t - sin(2t))]$ for $t \in [0, 2\pi] = \pi$

Brukte reduksjonsformel for integrasjon.

e) Bruk Stokes teorem.
Fra b) har vi at virvlingen er $-2y_{\vec{i}} + 1_{\vec{k}}$.
Vi finner $\vec{n}$ ved å krysse $(\frac{\partial \Gamma}{\partial r} \times \frac{\partial \Gamma}{\partial t}) = r\vec{k}$
Stokes integral:
$\oint_\Gamma (\nabla \times \vec{W}) \cdot (\frac{\partial \Gamma}{\partial r} \times \frac{\partial \Gamma}{\partial t})$
$\oint_\Gamma (-2yz_{\vec{i}} + 1_{\vec{k}}) \cdot r_{\vec{k}} drdt =$
$\int\int rdrdt = 2\pi \int rdr = \pi$