Universidad de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Estadística — Profesor: Eloy Alvarado

Ejercicios Clase, Variables Aleatorias Bivariadas

1. La función de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias discretas X, Y está dada por $f(x,y) = c(2x+y)$, donde x, y pueden tomar todos los valores enteros tales que $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$, y $f(x,y) = 0$ de otra forma.

    a) Hallar el valor de la constante c.
    b) Hallar $\mathbb{P}(X = 2, Y = 1)$
    c) Hallar $\mathbb{P}(X \geq 1, Y \leq 2)$

2. Hallar las funciones de probabilidad marginal:

    a) de X
    b) de Y

    Para las variables aleatorias del problema anterior.

3. Muestre que las variables aleatorias X, Y del problema 1 son dependientes.

4. La función de densidad conjunto de dos variables aleatorias continuas X, Y es

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy & 0 < x < 4, 1 < y < 5 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

    a) Hallar el valor de la constante c
    b) Hallar $\mathbb{P}(1 < X < 2, 2 < Y < 3)$
    c) Hallar $\mathbb{P}(X \geq 3, Y \leq 2)$

5. Hallar las funciones de distribución marginal:

    a) de X
    b) de Y

    Para las variables aleatorias del problema anterior.

6. Sean X, Y dos variables aleatorias continuas con una función de densidad de probabilidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} 3x(1-xy) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

    a) Obtener las distribuciones de densidad marginal para X e Y.
    b) Obtener la distribución de densidad acumulada de X e Y.

7. Sean X, Y dos variables aleatorias con una función de densidad conjunta de probabilidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+y)\exp(-x) & x \geq 0, 0 < y \leq 1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

    Obtener la covarianza y el coeficiente de correlación de X y de Y.
    Ayuda: Recordar que

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx; \qquad \Gamma(n) = (n-1)! \quad n \in \mathbb{N}$$

8. Sean X, Y los niveles de concentración en ppm de dos contaminantes en una determinada porción de un tanque de agua. Si la función de densidad conjunta de probabilidad está dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)/8000 & 0 < x, y < 20 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Si el nivel de concentración observado de Y es de 10 ppm, obtener la probabilidad de que el nivel de concentración de X sea, a lo más, 14 ppm. Obtener la media y la varianza condicional de X para $Y = 10$ ppm.

9. Hallar:

    a) $f(y|2)$
    b) $\mathbb{P}(Y = 1 | X = 2)$

    Para la distribución del problema (1).

10. Si X, Y tienen la función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3}{4} + xy & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Hallar:

a) $f(y|x)$
b) $\mathbb{P}\left(Y > \frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2} < X < \frac{1}{2} + dx\right)$