Nombre: ____

Prueba # 2 LFIS 325 - Estadística para Ciencias Físicas

1. (20 puntos) El departamento de educación física, deportes y recreación de la Universidad de Valparaíso está interesado en saber la condición física de los estudiantes de la universidad, por lo que cada 3 años realiza un estudio del peso de los estudiantes. Se sabe que los pesos de los estudiantes de la UV se distribuyen de forma normal con media 70 kg y desviación típica 6 kg.
   (a) (2 puntos) Defina la variable aleatoria en estudio.
   (b) (7 puntos) ¿Qué porcentaje de alumnos tiene un peso mayor a $77,6$ kg?
   (c) (13 puntos) Con el fin de promover la actividad deportiva dentro de la universidad, la **DIDER** ofrecerá un curso de acondicionamiento físico de forma gratuita con un cupo máximo de 30 personas. ¿Cuál es la probabilidad que más de 5 personas con peso mayor a $77,6$ kg asistan al curso?. Asuma que todos los cupos del curso fueron solicitados.

Solución:

a) X : { Peso de los estudiantes de la Universidad de Valparaíso en kg}. $X \sim N(70, 6^2)$

b) $\mathbb{P}(X > 77{,}6) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 77{,}6) = 1 - \mathbb{P}(Z < 1{,}267) \approx 1 - 0{,}89742 \approx 0{,}1025$

c) Y : { Número de personas con peso mayor a 77,6 kg de 30 personas }. $Y \sim Bin(30, 0{,}1025)$
$\mathbb{P}(Y > 5) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 5) \approx 1 - 0{,}9268 \approx 0{,}0732$

2. (20 puntos) Se sabe que el tiempo de reacción de un humano, en segundos, se puede modelar mediante una distribución normal. Un psicólogo estima que la desviación estándar del tiempo de reacción es 0,05 $[s]$. En un estudio posterior, se toma una muestra aleatoria de 25 personas, la cual resulta tener un tiempo medio de reacción de 0,5 $[s]$.
   (a) (6 puntos) Construya un intervalo de confianza del 95 % para el tiempo medio de reacción humano.
   (b) (6 puntos) ¿Con que nivel de confianza podemos afirmar que el tiempo medio de reacción está entre $0{,}5 \pm 0{,}03$ $[s]$?
   (c) (8 puntos) ¿Es posible suponer que el tiempo medio de reacción difiere de 0,55 $[s]$?. Utilice una confianza del 95 %. Utilice: $-t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{\alpha/2}(n-1)$

Solución:
X : {Tiempo de reacción humano en $[s]$}.

a) El intervalo de confianza estará dado por:

$$IC(\mu)_{(1-\alpha)100\,\%} = \left[\overline{X} \pm t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

Así, reemplazando con los datos dados por enunciado: $s = 0{,}05$ $[s]$, $n = 25$, $\overline{X} = 0{,}5$ $[s]$, el intervalo de confianza pedido es:

$$IC(\mu)_{(1-\alpha)100\,\%} = [0{,}5 \pm 2{,}064 * 0{,}01] = [0{,}47936; 0{,}52064]$$

b) El intervalo dado es: $[0{,}47; 0{,}53]$, por lo que se tiene que:

$$0{,}53 - 0{,}47 = 2 * t_{1-\alpha/2}n - 1)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Luego, reemplazando con los datos dados por enunciado, se tiene que $3 \approx t_{1-\alpha/2}(24)$. Buscando el valor más cercano en la tabla de probabilidad t-student se tiene que:

$$0{,}998 = 1 - \alpha/2 \Rightarrow \alpha = 0{,}004$$

Por lo que el nivel de confianza pedido es 99,6 %

c) Planteando las hipótesis:

$$H_0 : \mu = 0{,}55 \qquad H_1 : \mu \neq 0{,}55$$

Nuestro estadístico de prueba está dado por: $t = \dfrac{0{,}5 - 0{,}55}{0{,}05/\sqrt{25}} = -5$, y rechazaremos la hipótesis nula si $t \leq t_{\alpha/2}(n-1)$ o $t \geq t_{1-\alpha/2}(n-1)$. Luego como $t_{0,975}(24) = 2{,}064 \Rightarrow t_{0,025}(24) = -2{,}064$. Así, dado que $t \leq -2{,}064$, rechazamos nuestra hipótesis nula.

3. (10 puntos) En el pasado, la desviación estándar del peso de cierto tipo de cajas fue de 7 gramos. Una muestra aleatoria de 20 cajas mostró una desviación estándar de 9 gramos. El encargado de control de calidad de la empresa que produce este tipo de cajas, sospecha que la varianza del peso ha aumentado significativamente. ¿Existe evidencia estadística suficiente para corroborar esta sospecha con un 95 % de confianza?

Solución:
Planteando las hipótesis:

$$H_0 : \sigma^2 \leq 49 \qquad H_1 : \sigma^2 > 49$$

El valor de nuestro estístico de prueba es: $\chi^2 = \dfrac{19 * 9^2}{7^2} \approx 31{,}4$. Rechazaremos nuestra hipótesis nula si $\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha,n-1}$, en donde utilizando $\alpha = 0{,}05$ nuestro cuantil estará dado por 30,14. Así, dado que $\chi^2 \geq 30{,}14$. Rechazamos nuestra hipótesis nula, y podemos afirmar con un 95 % de confianza que la varianza del peso de las cajas ha aumentado.

4. (10 puntos) Considere dos variables aleatoria X, Y con distribución de masa de probabilidad conjunta dada por:

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 1$	1/12	1/24	1/24
$X = 2$	1/6	1/12	1/8
$X = 3$	1/4	1/8	1/12

(a) (4 puntos) Calcule $\mathbb{P}(X \leq 2, Y \leq 4)$

(b) (3 puntos) Encuentre la función de cuantía marginal $P_X(x)$.

(c) (3 puntos) Calcule $\mathbb{P}(Y = 2|X = 1)$

Solución:

a)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq 2, Y \leq 4) &= P_{XY}(1,2) + P_{XY}(1,4) + P_{XY}(2,2) + P_{XY}(2,4) \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

b)

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x = 1 \\ \frac{3}{8} & x = 2 \\ \frac{11}{24} & x = 3 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

c)

$$\begin{aligned}P(Y = 2 | X = 1) &= \frac{P(X = 1, Y = 2)}{P(X = 1)} \\ &= \frac{P_{XY}(1,2)}{P_X(1)} \\ &= \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Problema	Puntos	Resultado
1	20	
2	20	
3	10	
4	10	
Total:	60	