Nombre: ____

Prueba #3 LFIS 325 - Estadística para Ciencias Físicas

1. (10 puntos) Considere la función:

$$f(x) \begin{cases} \dfrac{c}{(1+2x)^3} & \text{si } 0 \leq x \leq \infty \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   (a) (5 puntos) Encuentre el valor de la constante c para que $f(x)$ sea una función de densidad.

   (b) (5 puntos) Obtenga la función de distribución $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

Solución: Para encontrar el valor de la constante c, notamos que $\int_0^\infty f(x) = 1$. Así,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x) &= c \int_0^\infty \frac{1}{(1+2x)^3} dx \qquad (u = 2x+1) \\ &= \frac{c}{2} \int_1^\infty \frac{1}{u^3} du \\ &= \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{c}{4u^2} \Big|_{u=1}^{b} \right) \\ &= \frac{c}{4} \end{aligned}$$

Así, $c = 4$. Luego, para obtener la función de distribución, usando su definición se tiene:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{4}{(1+2t)^3} dt = \int_0^x \frac{4}{(1+2t)^3} dt \\ &= \left(-\frac{1}{(1+2t)^2} \Big|_{t=0}^{x} \right) \\ &= -\frac{1}{(1+2x)^2} + 1 \\ &= \frac{4x(x+1)}{(2x+1)^2} \quad \text{si } 0 \leq x \leq \infty \end{aligned}$$

2. (20 puntos) El diámetro de cierto eje mecánico, medido en centímetros, se distribuye $N(2{,}79; 0{,}01^2)$. Un inspector de calidad establece que si las medidas del diámetro están en el rango $[2{,}74; 2{,}8]$ entonces se consideran en buen estado.

   (a) (2 puntos) Defina la variable aleatoria en estudio.

   (b) (8 puntos) Si se producen 1000 ejes. ¿Cuántos ejes se espera sean defectuosos?.

   (c) (10 puntos) Diariamente, el inspector de calidad examina 10 ejes, y si encuentra que 3 o más ejes no cumplen con las especificaciones para ser considerados en buen estado, entonces recomendará una inspección a mayor escala. ¿Cuál es la probabilidad de que no se recomiende una inspección a mayor escala?.

Solución: Sea X la variable en estudio, entonces:

$$X : \{ \text{ Diámetro de cierto eje mecánico en centímetros } \}, X \sim N(2{,}79; 0{,}01^2)$$

Para obtener el número esperado de ejes defectuosos, primero notamos que si:

$$2{,}74 < X < 2{,}8$$

Entonces el eje se considerará en buen estado. Por lo que la probabilidad que un eje esté defectuoso está dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq 2{,}74) + \mathbb{P}(X \geq 2{,}8) &= \mathbb{P}\left(\frac{X - 2{,}79}{0{,}01} \leq \frac{2{,}74 - 2{,}79}{0{,}01}\right) + \mathbb{P}\left(\frac{X - 2{,}79}{0{,}01} \geq \frac{2{,}8 - 2{,}79}{0{,}01}\right) \\
&= \mathbb{P}(Z \leq -5) + \mathbb{P}(Z \geq 1) \\
&= \mathbb{P}(Z \geq 1) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Z \leq 1) \\
&= 1 - 0{,}8413 \\
&= 0{,}1587
\end{aligned}$$

Luego, la cantidad de ejes que se esperan sean defectuoso es:

$$1000 * 0{,}1587 = 158{,}7 \approx 159$$

Finalmente, para obtener la probabilidad de que no se recomiende una inspección a mayor escala. Notamos que si definimos la variable aleatoria Y, como:

$$Y : \{ \text{ Cantidad de ejes en buen estado de una muestra de tamaño 10 } \}$$

Entonces, $Y \sim Bin(10; 0{,}1587)$. Luego, no se recomendará una inspección a mayor escala si $Y \leq 2$. Por lo que basta encontrar:

$$\mathbb{P}(Y \leq 2) = 0{,}8202$$

El cual puede ser fácilmente obtenido al utilizar la tabla de probabilidad binomial ($p \approx 0{,}15$)

3. (20 puntos) La cantidad promedio que se coloca en un recipiente es de 20 gr. Se escogen 25 recipientes al azar y si el peso promedio es menor a 19.8 gr o mayor a 20.2 gr se considera *fuera de control*. El proceso se puede aproximar como una distribución normal con una desviación estándar de 0,5 gr.
   (a) (10 puntos) Calcule el nivel de confianza del intervalo para que el proceso se encuentre *bajo control*.
   Un operario saca las 25 muestras y calcula un promedio de 20,1 gr y la desviación estándar 0,7 gr.
   (b) (5 puntos) Asuma que la media poblacional es desconocida. ¿Existe evidencia estadística para afirmar que la media es mayor a 20 gr con un 95 % de confianza?
   (c) (5 puntos) Con un 95 % de confianza ¿Ha aumentado la variabilidad del proceso?

Solución: Por enunciado podemos definir:

$$X : \{\text{Peso de contenido en recipiente medido en gramos}\}$$

Con distribución $X \sim N(20, 0{,}5^2)$. El intervalo de confianza es el siguiente:

$$IC = [19{,}8; 20{,}2] = 20 \pm Z_{1-\alpha/2}\frac{0{,}5}{\sqrt{25}}$$

Despejando tenemos:

$$Z_{1-\alpha/2} = 2$$

Por lo tanto, $\alpha \approx 0{,}045$.

Para determinar si el promedio ha aumentado de valor procedemos a realizar el siguiente test de hipótesis:

$$H_0 : \mu \leq 20 \qquad H_1 : \mu > 20$$

El estadístico calculado $Z = \dfrac{20{,}1 - 20}{0{,}5/\sqrt{25}} = 1$

Se rechaza H_0 si $Z > Z_{1-\alpha} = 1{,}65$. Por lo tanto, no hay evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula.

Luego, para verifica si ha aumentado la variabilidad, realizamos el siguiente test de hipótesis:

$$H_0 : \sigma \leq 0{,}5 \qquad H_1 : \sigma > 0{,}5$$

El estadístico calculado es $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{0{,}5^2} = 47{,}04$

Se rechaza H_0 si $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha/2,n-1} = 39{,}36$. Por lo tanto existe evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula de que la varianza es igual o menor que 0,5.

4. (10 puntos) Sean X e Y dos variables que representan el nivel de ruido en una habitación y la distribución conjunta se define como

$$f(x,y) \begin{cases} xy \exp\left(-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\right) & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 0 \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) (5 puntos) Demuestre la independencia de X e Y.

(b) (5 puntos) Calcular $P(X < 1, Y < 1)$.

Solución:

Calculamos las densidades marginales

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$f_X(x) = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

De manera similar

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

$$f_Y(y) = y \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

De la definición de independencia sabemos que, se cumple:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$$

Por lo que tenemos la siguiente relación:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{xy\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)}{y\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)} = x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Así, X e Y son independinetes.

Luego, para el cálculo de $P(X<1, Y<1)$ debemos resolver la siguiente integral,

$$P(X<1, Y<1) = \int_0^1 \int_0^1 f(u,v)dudv$$

$$P(X<1, Y<1) = \int_0^1 u\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du \int_0^1 v\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)dv \approx 0{,}155$$

Problema	Puntos	Resultado
1	10	
2	20	
3	20	
4	10	
Total:	60	