

Ejercicios Variables Aleatorias

1. Sea X una variable aleatoria discreta que tiene la siguiente función de cuantía:

$$P_X(1) = \frac{1}{2} \quad P_X(2) = \frac{1}{4} \quad P_X(3) = \frac{1}{8} \quad P_X(4) = \frac{1}{8}$$

- (a) Encontrar y graficar la función de distribución acumulada $F_X(x)$ de la variable aleatoria X .

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 1 \\ 1/2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 3/4 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 7/8 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

- (b) Encontrar $P(X \leq 1)$, $P(1 < X \leq 3)$, $P(1 \leq X \leq 3)$

$$P(X \leq 1) = 1/2$$

$$P(1 < X \leq 3) = 3/8$$

$$P(1 \leq X \leq 3) = 7/8$$

2. (a) Verificar que la función $p(x)$ definida por:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^x & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Podemos apoyarnos en la siguiente fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1/4}{1 - 1/4} = 1/3$$

Sustituyendo obtenemos el resultado deseado.

- (b) Encontrar $P(X = 2)$, $P(X \leq 2)$, $P(X \geq 1)$

$$P(X = 2) = 3/64$$

$$P(X \leq 2) = 51/64$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 3/4$$

3. Consideramos el lanzamiento de una moneda repetidamente. Sea X la variable aleatoria que denota el número de lanzamientos requeridos hasta que aparezca la primera cara.

- (a) Encontrar y Graficar la función de cuantía $P_X(x)$ y la función de distribución $F_X(x)$ de X .
Notar que se da la siguiente secuencia.

$$\{c, sc, ssc, sssc, ssssc, \dots\}$$

La cual corresponde a una distribución geométrica

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, k = 1, 2, \dots$$

- (b) Encontrar $P(1 < X \leq 4)$, $P(X > 4)$.

$$P(1 < X \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0.5^2 + 0.5^3 + 0.5^4$$

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 0.5 + 0.5^2 + 0.5^3 + 0.5^4$$

4. Considerar la variable aleatoria discreta X cuya función de cuantía está dada por:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = -1, 0, 1 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

- (a) Graficar $p_X(x)$ y encontrar la esperanza y varianza de X .

$$E[X] = \frac{1}{3}(-1) + \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{3}(1) = 0$$

$$E[X^2] = \frac{1}{3}(1) + \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{3}(1) = 2/3$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 2/3$$

- (b) Repetir (a) si la función de cuantía está dada por:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = -2, 0, 2 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{1}{3}(-2) + \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{3}(2) = 0$$

$$E[X^2] = \frac{1}{3}(4) + \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{3}(4) = 8/3$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 8/3$$

5. Sea X la variable aleatoria que denota el resultado del lanzamiento de un dado justo. Encontrar la esperanza y varianza de X .

$$E[X] = \frac{1}{6} * 1 + \frac{1}{6} * 2 + \frac{1}{6} * 3 + \frac{1}{6} * 4 + \frac{1}{6} * 5 + \frac{1}{6} * 6 = 21/6$$

$$E[X^2] = \frac{1}{6} * 1 + \frac{1}{6} * 4 + \frac{1}{6} * 9 + \frac{1}{6} * 16 + \frac{1}{6} * 25 + \frac{1}{6} * 36 = 91/6$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 \approx 2.91$$

6. Considere que una variable X toma los valores: $-3, -1, 2, 5$ con las probabilidades respectivas:

$$\frac{2k-3}{10}, \frac{k-2}{10}, \frac{k-1}{10}, \frac{k+1}{10}$$

- a) Determine la distribución de probabilidad de X .

Sabemos que

$$\frac{2k-3}{10} + \frac{k-2}{10} + \frac{k-1}{10} + \frac{k+1}{10} = 1$$

Por lo tanto $k = 3$

- b) Encuentre el valor esperado de X .

$$E[X] = 14/10$$

- c) Encuentre la varianza de X .

$$Var(X) = 136/10$$

7. Suponga que una variable aleatoria X tiene una distribución probabilística discreta dada por la siguiente función:

$$\mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} Cx^2, & \text{si } x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

- a) Encuentre el valor de la constante C , de forma que $\mathbb{P}(X)$ sea una función de cuantía para la variable aleatoria X .

Sabemos que

$$c + 4c + 9c + 16c + 25c = 1$$

Por lo tanto $C = 1/55$

- b) Determine el valor de probabilidad de las siguientes expresiones:

(i) $\mathbb{P}(X = 5) = 22/55$

(ii) $\mathbb{P}(X > 2) = (9 + 16 + 25)/55$

(iii) $\mathbb{P}(X \geq 2) = (4 + 9 + 16 + 25)/55$

(iv) $\mathbb{P}(X \geq 3) = \mathbb{P}(X > 2)$

(v) $\mathbb{P}(1 < X \leq 5) = \mathbb{P}(X \geq 2)$

8. Se enumeran cartas del uno al cinco. Se sacan dos cartas al azar sin reposición. Sea X la suma de los números obtenidos.

- a) Encuentre la distribución de probabilidad de X .

Las posibles resultados de este fenómeno son

$$3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

Las probabilidades asociadas a cada resultado son

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}$$

- b) Encuentre la esperanza de X .

$$E[X] = 57/10$$

- c) Encuentre la varianza de X .

$$Var(X) = 61$$

9. Un jugador lanza dos monedas equilibradas, el jugador gana dos pesos si ocurren dos caras y un peso si ocurre una cara. Por otra parte el jugador pierde 3 pesos si no ocurren caras. Encuentre el valor esperado de la ganancia del jugador. ¿Es el juego justo? (el juego es justo si no pierde dinero, favorable si gana dinero o desfavorable si pierde dinero).

Los posibles resultados del experimentos son $\{cc, cs, sc, ss\}$ y el valor del resultado es $\{2, 1, 1, -3\}$

El valor esperado es

$$E[X] = 2 * \frac{1}{4} + 1 * \frac{1}{2} + (-3) * \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

El resultado indica que no es un juego justo.