Universidad de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Estadística   Profesor: Eloy Alvarado

Ejercicios Clase, Variables Aleatorias Bivariadas

1. La función de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias discretas X, Y está dada por $f(x,y) = c(2x+y)$, donde x, y pueden tomar todos los valores enteros tales que $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$, y $f(x,y) = 0$ de otra forma.

    a) Hallar el valor de la constante c.

    $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$$
    $$\int_{0}^{3}\int_{0}^{2} c(2x+y)dxdy = 1$$

    Lo anterior implica que $c = 1/21$

    b) Hallar $\mathbb{P}(X = 2, Y = 1)$
    De la definición tenemos que resolver lo siguiente

    $$\int_{1}^{1}\int_{2}^{2} 1/21(2x+y)dxdy$$

    Sin embargo, al ser variables contínuas, la integral en un punto es 0. Por lo tanto $\mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = 0$.

    c) Hallar $\mathbb{P}(X \geq 1, Y \leq 2)$
    De la definición tenemos que resolver lo siguiente

    $$\int_{0}^{2}\int_{1}^{2} 1/21(2x+y)dxdy$$
    $$\mathbb{P}(X \geq 1, Y \leq 2) = 8/21$$

2. Hallar las funciones de probabilidad marginal: Para las variables aleatorias del problema anterior.

    a) de X

    $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 1/21(2x+y)dy$$
    $$f_X(x) = 1/21(6x+9/2)$$

    b) de Y

    $$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} 1/21(2x+y)dx$$
    $$f_Y(y) = 1/21(2y+4)$$

3. Muestre que las variables aleatorias X, Y del problema 1 son dependientes.

    La definición de independencia implica que:

    $$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$$

    Sin embargo, al desarrollar la expresión obtenemos

    $$f(x|y) = \frac{1/21(2x+y)}{1/21(2y+4)} \neq 1/21(6x+9/2)$$

4. La función de densidad conjunto de dos variables aleatorias continuas X, Y es

    $$f(x,y) = \begin{cases} cxy & 0 < x < 4, 1 < y < 5 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

a) Hallar el valor de la constante c

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

$$\int_{1}^{5}\int_{0}^{4} c(xy)dxdy = 1$$

Lo anterior implica que $c = 1/96$

b) Hallar $\mathbb{P}(1 < X < 2, 2 < Y < 3)$

$$\int_{2}^{3}\int_{1}^{2} 1/96(xy)dxdy = \frac{1}{96} * \frac{15}{4}$$

c) Hallar $\mathbb{P}(X \geq 3, Y \leq 2)$

$$\int_{1}^{2}\int_{3}^{4} 1/96(xy)dxdy = \frac{1}{96} * \frac{21}{4}$$

5. Hallar las funciones de distribución marginal: Para las variables aleatorias del problema anterior.

a) de X

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 1/96(xy)dy$$

$$f_X(x) = 1/96(24x/2) = x/8$$

b) de Y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} 1/96(xy)dx$$

$$f_Y(y) = 1/96(8y) = y/12$$

6. Sean X, Y dos variables aleatorias continuas con una función de densidad de probabilidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} 3x(1-xy) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

a) Obtener las distribuciones de densidad marginal para X e Y.

$$f_X(x) = \int_{0}^{1} 3x(1-xy)dy$$

$$f_X(x) = 3x - 3x^2/2$$

$$f_Y(y) = \int_{0}^{1} 3x(1-xy)dx$$

$$f_Y(y) = 3/2 - y$$

b) Obtener la distribución de densidad acumulada de X e Y.

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} 3u(1-uv)dudv$$

$$F(x,y) = \frac{3xy}{2} - \frac{x^3y^2}{2}$$

7. Sean X, Y dos variables aleatorias con una función de densidad conjunta de probabilidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+y)\exp(-x) & x \geq 0, 0 < y \leq 1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Obtener la covarianza y el coeficiente de correlación de X y de Y.
Ayuda: Recordar que

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx; \qquad \Gamma(n) = (n-1)! \quad n \in \mathbb{N}$$

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{2}{3}(x+y)\exp(-x)dy$$

$$f_X(x) = \frac{e^{-x}}{3}(2x+1)$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \frac{2}{3}\Gamma(3) + \frac{1}{3}\Gamma(2)$$

$$f_Y(y) = \int_0^\infty \frac{2}{3}(x+y)\exp(-x)dx$$

$$f_Y(y) = \frac{2}{3}(y+1)$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)dy = 10/18$$

8. Sean X, Y los niveles de concentración en ppm de dos contaminantes en una determinada porción de un tanque de agua. Si la función de densidad conjunta de probabilidad está dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)/8000 & 0 < x, y < 20 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Si el nivel de concentración observado de Y es de 10 ppm, obtener la probabilidad de que el nivel de concentración de X sea, a lo más, 14 ppm. Obtener la media y la varianza condicional de X para $Y = 10$ ppm.

$$f(x|Y=10)\frac{1}{800}(x+10)$$
$$\mathbb{P}(X < 14|Y=10) = \int_0^{14} f(x|Y=10) = \int_0^{14} \frac{1}{800}(x+10)$$
$$\mathbb{P}(X < 14|Y=10) = 238/800$$

La esperanza condicional:

$$E[X|Y=10] = \int_0^{20} xf(x|Y=10) = 10/3 + 5/2$$

El segundo momento:

$$E[X^2|Y=10] = \int_0^{20} x^2 f(x|Y=10) = 50 + 100/3$$

La varianza condicionale es:

$$Var(X|Y=10) = E[X^2|Y=10] - (E[X|Y=10])^2 \approx 49{,}3$$

9. Hallar para la distribución del problema (8).

   a) $f(y|2)$

   $$f(y|X=2)\frac{1}{800}(2+y)$$

   b) $\mathbb{P}(Y=1|X=2)$
   De la definición tenemos que resolver lo siguiente

   $$\int_1^1 \frac{1}{800}(2+y)dy$$

   Sin embargo, al ser variables contínuas, la integral en un punto es 0. Por lo tanto $\mathbb{P}(Y=1|X=2) = 0$.

10. Si X, Y tienen la función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4} + xy & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Hallar:

   a) $f(y|x)$

   $$f_X(x) = \int_0^1 (3/4 + xy)dy$$
   $$f_X(x) = 3/4 + x/2$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 (3/4 + xy)dx$$
$$f_Y(y) = 3/4 + y/2$$

$$f(y|x) = \frac{f(y,x)}{f_X(x)} = \frac{3+4xy}{3+2x}$$

b) $\mathbb{P}\left(Y > \frac{1}{4}\middle| \frac{1}{2} < X < \frac{1}{2} + dx\right)$

$$\mathbb{P}\left(Y > \frac{1}{4}\middle| \frac{1}{2} < X < \frac{1}{2} + dx\right) = \frac{\int_{0,25}^{1}\int_{0,5}^{0,5+d}(3/4xy)dxdy}{\int_{0,5}^{0,5+d}(3/4 + x/2)dx}$$

Notar que al realizar la integral aparecerán términos de d^2. Si d es pequeño, podemos aproximar $d^2 \approx 0$, lo que simplifica las cuentas. El resultado es:

$$\mathbb{P}\left(Y > \frac{1}{4}\middle| \frac{1}{2} < X < \frac{1}{2} + dx\right) = 51/64$$