Universidad de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Estadística
Profesor: Eloy Alvarado

Ejercicios Clase, Variables Aleatorias Continuas

1. Una variable aleatoria X tiene función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^2+1}, & -\infty < x < \infty \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

   (a) Hallar el valor de la constante c.

   (b) Hallar la probabilidad de que X^2 esté entre $\dfrac{1}{3}$ y 1.
   Revisar pdf p.96

2. La función de distribución para una variable aleatoria X es:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

   (a) Hallar la función de densidad.

$$f(x) = F'(x) = e^{-2x}$$

   (b) Hallar la probabilidad de que $X > 2$.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0.982$$

   (c) Hallar la probabilidad de que $-3 < X \leq 4$.

$$P(-3 \leq X \geq 4) = P(0 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4) = 0.999$$

3. Una persona jugando a los dardos encuentra que la probabilidad de que el dardo caiga entre r y $r + dr$ es:

$$\mathrm{P}(r \leq R \leq r + dr) = c[1 - (\frac{r}{a})^2]dr$$

   Aquí, R es la distancia del impacto desde el centro del objetivo, c es una constante y a es el radio del objetivo. Hallar la probabilidad de pegar en el blanco, que se supone tiene radio b. Suponer que siempre se hace impacto en el objetivo.

$$P[X \leq b] = \int_0^b c[1 - r^2/a^2]dr = c\left[b - \frac{b^3}{3a^2}\right]$$

4. Una variable aleatoria X tiene función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & 1 \leq x \leq 2 \\ cx, & 2 < x < 3 \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

   (a) Hallar la constante c.
   (b) Hallar $P(X > 2)$
   (c) Hallar $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2})$
   (d) Hallar $E(X)$, $V(X)$
   (e) Se define una variable aleatoria $Y = 3X + 2$. Encontrar $E(Y)$, $V(Y)$

5. Supóngase que cierta pieza metálica se romperá después de sufrir dos ciclos de esfuerzo. Si estos ciclos ocurren de manera independiente a una frecuencia promedio de dos por cada 100 horas, obtener la probabilidad de que el intervalo de tiempo se encuentre hasta que ocurre el segundo ciclo:

a) dentro de una desviación estándar del tiempo promedio.
El evento de la ocurrencia de los 2 ciclos de esfuerzo lo definimos por la variable aleatoria X, por lo tanto

$$P[X \leq 50]$$

Con una media y desviación estándar de

$$E[X] = 50$$
$$(Var[X])^{0.5} = 50$$

Esta información la utilizamos para definir la variable aleatoria de conteo (Poisson) que está relacionada.

$$N_{50} = Y = Poisson(\frac{1}{50} * 50)$$
$$N_{50} = Y = Poisson(1)$$

Ahora
$$1 - P(Y = 1) - P(Y = 0) = 0.2642$$

b) a más de dos desviaciones estándar por encima de la media.

$$P[X \geq 150] = 1 - P[X \leq 150]$$

De manera similar al punto anterior definmos

$$N_{150} = Y = Poisson(\frac{1}{50} * 150)$$
$$N_{150} = Y = Poisson(3)$$

Ahora
$$1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) - P(Y = 2) = 0.577$$

6. En cierta ciudad el consumo diario de energía eléctrica, en millones de kilovatios por hora, puede considerarse como una variable aleatoria con distribución Gamma de parámetros: $\alpha = 3$ y $\lambda = 0.5$. La planta de energía de esta ciudad tiene una capacidad diaria de 10 millones de KW / hora. ¿ Cuál es la probabilidad de que este abastecimiento sea:

   a) Insuficiente en un día cualquiera.

   $$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10)$$

   b) Se consuman entre 3 y 8 millones de KW/hora.

   c) Encuentre el consumo esperado en un día cualquiera.

7. **(Propuesto)** La edad a la que un hombre contrae matrimonio por primera vez es una variable aleatoria con distribución Gamma. Si la edad promedio es de 30 años y lo más común es que el hombre se case a los 23 años, encontrar los valores de los parámetros α y λ, para esta distribución.

8. Supongo que un sistema contiene cierto tipo de componente cuyo tiempo de falla en años está dado por la variable aleatoria T, distribuida exponencialmente con tiempo promedio de falla $\beta = 5$ ($\beta = \frac{1}{\lambda}$). Si 5 de estos componentes se instalan en diferentes sistemas. ¿ Cuál es la probabilidad de que al menos 2 continúen funcionando después de 8 años?.

9. Se ha comprobado que el tiempo de vida de cierto tipo de marcapasos sigue una distribución exponencial con media de 16 años. ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona a la que se le ha implantado este marcapasos se le deba reimplantar otro antes de 20 años? Si el marcapasos lleva funcionando correctamente 5 años en un paciente, ¿Cuál es la probabilidad de que haya que cambiarlo antes de 25% años?