[60] En un determinado municipio se desea estudiar el cambio relativa en el valor actual de los bienes inmuebles en los últimos dos años. Se selecciona una muestra aleatoria de tamaño $n = 20$ inmuebles de entre los $N = 1000$ totales. De los registros oficiales, se obtiene el valor registrado actual para este año (X) y el valor correspondiente de hace dos años (Y), de cada una de las $n = 20$ casas incluidas en la muestra. Usando la siguiente información:

Casa	Valor hace 2 años	Valor actual
-	y_i	x_i
1	6.7	7.1
2	8.2	8.4
3	7.9	8.2
4	6.4	6.9
5	8.3	8.4
6	7.2	7.9
7	6	6.5
8	7.4	7.6
9	8.1	8.9
10	9.3	9.9
11	8.2	9.1
12	6.8	7.3
13	7.4	7.8
14	7.5	8.3
15	8.3	8.9
16	9.1	9.6
17	8.6	8.7
18	7.9	8.8
19	6.3	7
20	8.9	9.4
Total	154.5	165.7

(a) (20 puntos) Estimar R, el cambio relativo en el valor actual para los $N = 1000$ inmuebles del municipio.

(b) (20 puntos) Obtenga una cota para el error de estimación del cambio relativo en el valor actual de los inmuebles.

(c) (20 puntos) Es de especial interés el precio medio de los inmuebles en el municipio en la actualidad. Cuantifique porcentualmente la ganancia en precisión al utilizar una estimación indirecta adecuada con respecto a la estimación directa usada bajo un muestreo aleatorio simple.

Solución: El cambio relativo R en el valor actual puede ser estimado mediante un estimador de razón, así:

$$\hat{R} = \frac{\hat{X}}{\hat{Y}} = \frac{\overline{x}}{\overline{y}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i} = \frac{165{,}7}{154{,}5} = 1{,}07$$

Luego, para obtener una cota para el error de estimación debemos obtener $\widehat{\mathbb{V}(\hat{R})}$:

$$\widehat{\mathbb{V}(\hat{R})} = \frac{(1 - \frac{n}{N})}{n(n-1)\overline{Y}^2} \left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \hat{R}^2 \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - 2\hat{R} \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \right] \approx 0{,}00005$$

Así, nuestra cota para el error de estimación estará dado por: $2 * \sqrt{\widehat{\mathbb{V}(\hat{R})}} = 2 * \sqrt{0{,}00005} \approx 0{,}01490065$

Finalmente, obtenemos la estimación de la media poblacional utilizando una estimación indirecta de razón:

$$\hat{\overline{X}} = \hat{R} * \overline{Y} = 8{,}26575$$

y su varianza asociada:

$$\widehat{\mathbb{V}(\hat{\overline{X}})} = \overline{Y}^2 * \widehat{\mathbb{V}(\hat{R})} = (7{,}725)^2 * 0{,}00005 \approx 0{,}003312437$$

Y contrastamos con la estimación directa de la media poblacional bajo un muestreo aleatorio simple:

$$\widehat{\mathbb{V}(\overline{X})} = \left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{s^2}{n} = 0{,}04488787$$

Por lo que, la **ganancia porcentual** corresponde a un 92,62064 % con respecto a la obtenida bajo una estimación directa.