[30] Sea X una matriz normal de datos de tamaño $n \times p$ con files $x \sim N(0, \Sigma)$. Sea $Y = X^T C X$ donde X es una matriz simétrica.

(a) (10 puntos) Mostrar que $Y \sim \sum_{i=1}^{n} \lambda_i W_p(\Sigma, 1)$ donde $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ son los autovalores de C.

(b) (10 puntos) Utilizando el resultado anterior mostrar que $Y \sim W_p(\Sigma, r)$ si C es idempotente. $(r = rk(C) = tr(C))$

(c) (10 puntos) Utilizando el resultado anterior mostrar que $nS \sim W_p(\Sigma, n-1)$, donde S es la matriz de varianza-covarianza muestral.

Solución: Por teorema de descomposición espectral *(Teo. A.6.4, Mardia)*, se puede reescribir C como:

$$C = \Gamma \Lambda \Gamma^T = \sum \lambda_i \gamma_{(i)} \gamma_{(i)}^T$$

donde Λ es una matrix diagonal de autovalores de C Y Γ es una matriz ortogonal con columnas de autovectores estandarizados. Luego,

$$\begin{aligned}
X^T C X &= X^T \sum \lambda_i \gamma_{(i)} \gamma_{(i)}^T X \\
&= \sum \lambda_i X^T \gamma_{(i)} \gamma_{(i)}^T X \\
&= \sum \lambda_i y_i y_i^T
\end{aligned}$$

en donde $Y_i = X^T \gamma_i$. Luego $Y = \Gamma^T X I$, y por teorema *(Teo. 3.3.2, Mardia)* se tiene que $Y \sim N_p(0, \Sigma)$. Sigue entonces que, por construcción: $YY^T \sim W_p(\Sigma, m)$ en donde en particular $m = 1$ ya que los elementos de Y son variables aleatorias i.i.d $N_1(0, \sigma^2)$, por lo que se tiene:

$$\sum \lambda_i y_i y_i^T \sim \sum \lambda_i W_p(\Sigma, 1)$$

por pregunta 1a, sabemos que $YY^T \sim W_p(\Sigma, 1)$. Como C es idempotente se tiene que $\lambda_i = \{0, 1\}$ y $rk(c) = tr(C) = r$. Luego, $Y \sim \sum^{r} \lambda_i W_p(\Sigma, 1) = \sum W_p(\Sigma, r)$

Por pregunta 1b se tiene: $nS = X^T H X \sim W_p(\Sigma, r)$ con $r = tr(H) = rk(H)$. Sigue entonces:

$$\begin{aligned}
tr(H) &= tr\left(I - \frac{11^T}{n}\right) \\
&= tr(I) - \frac{tr(11^T)}{n} \\
&= n - 1
\end{aligned}$$