

[15] Una muestra aleatoria simple de tamaño 3 fue obtenida desde una población de tamaño N **con reemplazo**. Como estimador de la media poblacional utilizaremos \bar{y} , la media no ponderada sobre las diferentes unidades en la muestra. Muestre que la varianza promedio de \bar{y} es:

$$\frac{(2N-1)(N-1)}{6N^2} s_y^2$$

Ayuda: Notar que la muestra obtenida puede contener 1, 2 o 3 unidades diferentes.

Solución: Sean P_1, P_2 y P_3 las probabilidades de que la muestra contenga 1, 2 y 3 unidades diferentes, respectivamente. Entonces:

$$\begin{aligned} P_1 &= \sum_{r=1}^N \mathbb{P}(\text{Seleccionar la } r\text{-ésima unidad en las 3 selecciones}) \\ &= N \frac{1}{N} \frac{1}{N} \frac{1}{N} = \frac{1}{N^2} \\ P_2 &= \sum_{r=1}^N \mathbb{P}(\{r\text{-ésima, otra, otra}\}) + \sum_{r=1}^N \mathbb{P}(\{\text{otra, } r\text{-ésima, otra}\}) + \sum_{r=1}^N \mathbb{P}(\{\text{otra, otra, } r\text{-ésima}\}) \\ &= N \frac{1}{N} \frac{N-1}{N} \frac{N-1}{N} + N \frac{1}{N} \frac{N-1}{N} \frac{N-1}{N} + N \frac{1}{N} \frac{N-1}{N} \frac{N-1}{N} \\ &= \frac{3(N-1)}{N^2} \\ P_3 &= \sum_{r=1}^N \mathbb{P}(\{r\text{-ésima, otra diferente de la } r\text{-ésima, otra diferente a las anteriores}\}) \\ &= \frac{N(N-1)(N-2)}{N^3} \\ &= \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} \end{aligned}$$

Luego, sabemos que la varianza de una media muestral basada en n unidades diferentes está dada por:

$$\left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{s_y^2}{n} = \frac{N-n}{Nn} s_y^2$$

Así, la varianza promedio estará dada por:

$$\left(\frac{N-1}{N} s_y^2\right) \frac{1}{N^2} + \left(\frac{N-2}{2N} s_y^2\right) \frac{3(N-1)}{N^2} + \left(\frac{N-3}{3N} s_y^2\right) \frac{(N-1)(N-2)}{N^3} = \frac{(2N-1)(N-1)}{6N^2} s_y^2$$