[15] Sean X e Y dos variables que representan el nivel de ruido en una habitación y la distribución conjunta se define como

$$f(x,y)\begin{cases} xy\exp\left(-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\right) & \text{si } x>0, y>0 \\ 0 \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) (8 puntos) Demuestre la independencia de X e Y.

(b) (7 puntos) Calcular $P(X<1, Y<1)$.

Solución:

Calculamos las densidades marginales

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$f_X(x) = x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

De manera similar

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

$$f_Y(y) = y\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

De la definición de independencia sabemos que, se cumple:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$$

Por lo que tenemos la siguiente relación:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{xy\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)}{y\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)} = x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Así, X e Y son independinetes.

Luego, para el cálculo de $P(X<1, Y<1)$ debemos resolver la siguiente integral,

$$P(X<1, Y<1) = \int_0^1\int_0^1 f(u,v)dudv$$

$$P(X<1, Y<1) = \int_0^1 u\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du\int_0^1 v\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)dv \approx 0{,}155$$