[10] Si denotamos por $\pi_k$ la probabilidad de inclusión de la observación $k-$ésima, $N$ como el tamaño poblacional y $n$ como el tamaño de muestra fijo. Muestre que:

$$\sum_{k \in U} \pi_k = n$$

**Solución:** Consideremos:

$$I_k = \begin{cases} 1 \text{ si } k \in \mathcal{S} \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Por lo que la variable $I_k$ tiene distribución Bernoulli, $B(1, \pi_k)$. Así,

$$\mathbb{E}(I_k) = \pi_k \qquad \mathbb{V}(I_k) = \pi_k(1 - \pi_k)$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k \in \mathcal{U}} I_k = n \qquad \text{(por definición de } n\text{)}$$

En donde $\mathcal{U}$ hace referencia a la población, luego:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k \in \mathcal{U}} I_k\right) = \mathbb{E}(n) = n$$

Finalmente,

$$\sum_{k \in \mathcal{U}} \pi_k = \sum_{k \in \mathcal{U}} \mathbb{E}(I_k) = n$$