[25] El diámetro de cierto eje mecánico, medido en centímetros, se distribuye $N(2{,}79; 0{,}01^2)$. Un inspector de calidad establece que si las medidas del diámetro están en el rango $[2{,}74; 2{,}8]$ entonces se consideran en buen estado.

(a) (5 puntos) Defina la variable aleatoria en estudio.

(b) (10 puntos) Si se producen 1000 ejes. ¿Cuántos ejes se espera sean defectuosos?.

(c) (10 puntos) Diariamente, el inspector de calidad examina 10 ejes, y si encuentra que 3 o más ejes no cumplen con las especificaciones para ser considerados en buen estado, entonces recomendará una inspección a mayor escala. ¿Cuál es la probabilidad de que no se recomiende una inspección a mayor escala?.

Solución: Sea X la variable en estudio, entonces:

$$X : \{ \text{ Diámetro de cierto eje mecánico en centímetros } \}, X \sim N(2{,}79; 0{,}01^2)$$

Para obtener el número esperado de ejes defectuosos, primero notamos que si:

$$2{,}74 < X < 2{,}8$$

Entonces el eje se considerará en buen estado. Por lo que la probabilidad que un eje esté defectuoso está dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq 2{,}74) + \mathbb{P}(X \geq 2{,}8) &= \mathbb{P}\left(\frac{X - 2{,}79}{0{,}01} \leq \frac{2{,}74 - 2{,}79}{0{,}01}\right) + \mathbb{P}\left(\frac{X - 2{,}79}{0{,}01} \geq \frac{2{,}8 - 2{,}79}{0{,}01}\right) \\
&= \mathbb{P}(Z \leq -5) + \mathbb{P}(Z \geq 1) \\
&= \mathbb{P}(Z \geq 1) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Z \leq 1) \\
&= 1 - 0{,}8413 \\
&= 0{,}1587
\end{aligned}$$

Luego, la cantidad de ejes que se esperan sean defectuoso es:

$$1000 * 0{,}1587 = 158{,}7 \approx 159$$

Finalmente, para obtener la probabilidad de que no se recomiende una inspección a mayor escala. Notamos que si definimos la variable aleatoria Y, como:

$$Y : \{ \text{ Cantidad de ejes en buen estado de una muestra de tamaño 10 } \}$$

Entonces, $Y \sim Bin(10; 0{,}1587)$. Luego, no se recomendará una inspección a mayor escala si $Y \leq 2$. Por lo que basta encontrar:

$$\mathbb{P}(Y \leq 2) = 0{,}8202$$

El cual puede ser fácilmente obtenido al utilizar la tabla de probabilidad binomial ($p \approx 0{,}15$)