[10] Muestre que bajo un muestreo aleatorio simple se tiene que $\mathbb{V}(\overline{y}) = \left(1 - \frac{n}{N}\right)\frac{S^2}{n}$

Solución:

$$n(\overline{y} - \overline{Y}) = (y_1 - \overline{Y}) + (y_2 - \overline{Y}) + \cdots + (y_n - \overline{Y})$$

Luego, debido a que cada unidad muestral aparece el mismo número de veces en las muestras posible, entonces:
$\mathbb{E}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$ debe ser un múltiplo de $y_1 + y_2 + \cdots + y_N$. Este múltiplo es n/N debido a que la expresión de la izquierda tiene n términos y la de la derecha tiene N términos. Así,

$$E\left[(y_1 - \overline{Y})^2 + \cdots + (y_n - \overline{Y})^2\right] = \frac{n}{N}\left[(y_1 - \overline{Y})^2 + \cdots + (y_N - \overline{Y})^2\right]$$

y además,

$$\begin{aligned} &E\left[(y_1 - \overline{Y})(y_2 - \overline{Y}) + (y_1 - \overline{Y})(y_3 - \overline{Y}) + \cdots + (y_{n-1} - \overline{Y})(y_n - \overline{Y})\right] \\ &= \frac{n(n-1)}{N(N-1)}\left\{(y_1 - \overline{Y})(y_2 - \overline{Y}) + (y_1 - \overline{Y})(y_3 - \overline{Y}) + \cdots + (y_{N-1} - \overline{Y})(y_N - \overline{Y})\right\} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} n^2\mathbb{E}\left[(\overline{y} - \overline{Y})^2\right] = \frac{n}{N}\Bigg\{&(y_1 - \overline{Y})^2 + \cdots + (y_N - \overline{Y})^2 + \frac{2(n-1)}{N-1} \\ &\left[(y_1 - \overline{Y})(y_2 - \overline{Y}) + (y_1 - \overline{Y})(y_3 - \overline{Y}) + \cdots + (y_{N-1} - \overline{Y})(y_N - \overline{Y})\right]\Bigg\} \end{aligned}$$

Completando el cuadrado, se tiene:

$$\begin{aligned} n^2\mathbb{E}\left[(\overline{y} - \overline{Y})^2\right] = \frac{n}{N}\Bigg\{&\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)\left[(y_1 - \overline{Y})^2 + \cdots + (y_N - \overline{Y})^2\right] \\ &+ \frac{n-1}{N-1}\left[(y_1 - \overline{Y}) + \cdots + (y_N - \overline{Y})\right]^2\Bigg\} \end{aligned}$$

En donde el segundo término desaparece, pues la suma de los y_i es igual a $N\overline{Y}$. Dividiendo por n^2, se tiene:

$$\mathbb{V}(\overline{y}) = \mathbb{E}[(\overline{y} - \overline{Y})^2] = \frac{N-n}{nN(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{Y})^2 = \left(1 - \frac{n}{N}\right)\frac{S^2}{n}$$