

[15] Sean X e Y dos variables que representan el nivel de ruido en una habitación y la distribución conjunta se define como

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- (a) (8 puntos) Demuestre la independencia de X e Y .
(b) (7 puntos) Calcular $P(X < 1, Y < 1)$.

Solución:

Calculamos las densidades marginales

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

$$f_X(x) = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

De manera similar

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

$$f_Y(y) = y \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

De la definición de independencia sabemos que, se cumple:

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$$

Por lo que tenemos la siguiente relación:

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{xy \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right)}{y \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)} = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Así, X e Y son independientes.

Luego, para el cálculo de $P(X < 1, Y < 1)$ debemos resolver la siguiente integral,

$$P(X < 1, Y < 1) = \int_0^1 \int_0^1 f(u, v) du dv$$

$$P(X < 1, Y < 1) = \int_0^1 u \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \int_0^1 v \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv \approx 0,155$$