

[10] Compare las varianzas de los estimadores del total poblacional bajo una estimación directa y de razón. Obtenga un condición para cuando el estimador de razón es estrictamente mejor que el estimador directo.

Solución:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\widehat{Y}) - \mathbb{V}(\widehat{Y}_R) &\approx N^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{S_y^2}{n} - N^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{1}{n} (S_y^2 + R^2 S_x^2 - 2RS_{xy}) \\ &= N^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{1}{n} (2RS_{xy} - R^2 S_x^2)\end{aligned}$$

Si bien, la expresión de la varianza del estimador de razón es una aproximación, podemos aseverar que, en general, el estimador de razón es mejor que el estimador directo cuando:

$$2RS_{xy} - R^2 S_x^2 > 0$$

del cual se tienen dos casos

$$B > \frac{R}{2} \text{ si } R > 0 \text{ y } B < \frac{R}{2} \text{ si } R < 0$$

en donde $B = \frac{S_{xy}}{S_x^2}$. En el caso donde X e Y son positivos, la desigualdad $B > R/2$ implica que:

$$A < \frac{Y}{2N}$$

donde $A = \frac{Y}{N} - B\frac{X}{N}$ es la ordenada en el origen de una recta de regresión. Por lo que, el estimador de razón es mejor que el estimador directo si el intercepto A no está tan lejano a cero.