[15] Suponga que un día despierta con fuerte dolor de cabeza, síntoma que atribuye a una gripe común.

Revisando reportes de organismos de salud, indican que el 80 % de las personas con gripe común presentan dolor de cabeza como uno de sus síntomas.

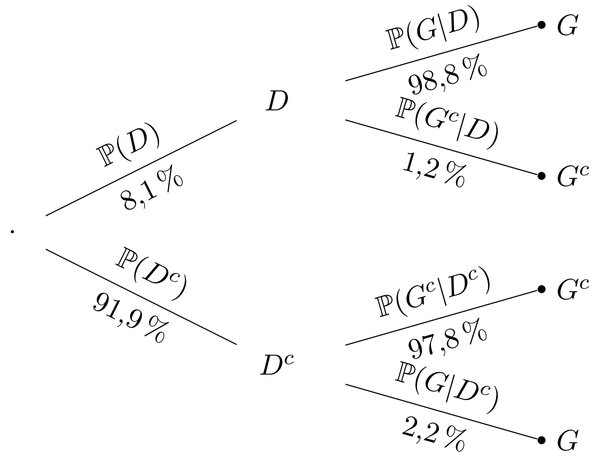
Otra información relevante es que la prevalencia de la gripe común es de un 10 %. Además que la afección del dolor de cabeza es de un 8,1 % en la población.

(a) (5 puntos) Defina sucesos e identique las probabilidades.

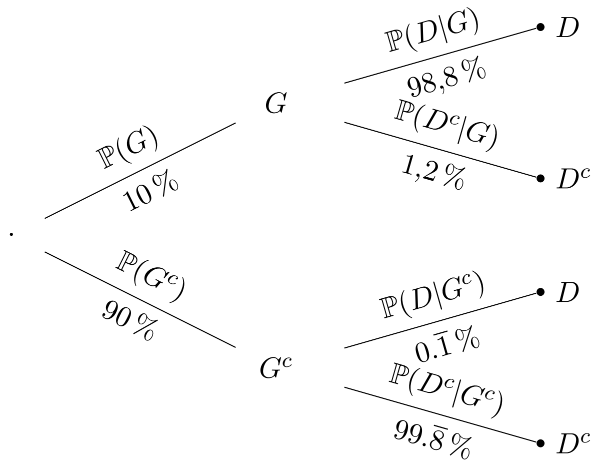
(b) (5 puntos) Determine la probabilidad de tener gripe común dado que sufre de dolor de cabeza.

(c) (5 puntos) Determine la probabilidad de no tener gripe dado que no sufre de dolor de cabeza.

Solución: Sintetizando la información del enunciado tenemos



Alternativamente, se puede establecer el diagrama de árbol alternando los eventos, esto es:



Podemos definir los eventos del siguiente modo:

D: { La persona que presenta dolor de cabeza. }

G: { La persona que presenta gripe común. }

Las probabilidades asociadas son:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D) &= 0{,}081 \\
\mathbb{P}(D^c) &= 1 - 0{,}081 = 0{,}919 \\
\mathbb{P}(G) &= 0{,}1 \\
\mathbb{P}(G^c) &= 1 - 0{,}1 = 0{,}9 \\
\mathbb{P}(D|G) &= 0{,}8 \\
\mathbb{P}(D^c|G) &= 0{,}2
\end{aligned}$$

Por la definición del teorema de Bayes y la información que podemos obtener del enunciado, tenemos que:

$$\mathbb{P}(G|D) = \frac{\mathbb{P}(D|G)\mathbb{P}(G)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{0{,}8 * 0{,}1}{0{,}081} = 0{,}988$$

y,

$$\mathbb{P}(G^c|D) = 1 - \mathbb{P}(G|D) = 0{,}012$$

Además sabemos que:

$$\mathbb{P}(G^c) = \mathbb{P}(G^c|D)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(G^c|D^c)\mathbb{P}(D^c)$$

Así,

$$0{,}9 = 0{,}012 * 0{,}081 + \mathbb{P}(G^c|D^c) * 0{,}919$$

Finalmente,

$$\mathbb{P}(G^c|D^c) = (0{,}9 - 0{,}012 * 0{,}081)/0{,}919 = 0{,}978$$