

[10] Compare las varianzas de los estimadores del total poblacional bajo una estimación directa y de diferencia. Obtenga una condición para cuando el estimador de diferencia es estrictamente mejor que el estimador directo.

Solución: Para comparar las varianzas pedidas, simplemente restamos y analizamos:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\hat{Y}) - \mathbb{V}(\hat{Y}_D) &= N^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{1}{n} S_y^2 - N^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{1}{n} (S_y^2 + S_x^2 - 2S_{xy}) \\ &= N^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{1}{n} (2S_{xy} - S_x^2)\end{aligned}$$

Así, el estimador de diferencia es estrictamente mejor que el estimador directo cuando:

$$2S_{xy} - S_x^2 > 0$$

lo cual puede ser reescrito como:

$$B > \frac{1}{2}$$

en donde B representa la pendiente en el estimador de regresión. (o equivalentemente $\frac{S_{xy}}{S_x^2}$)