

[10] Muestre que bajo un muestreo aleatorio simple se tiene que $\mathbb{V}(\bar{y}) = \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{S^2}{n}$

Solución:

$$n(\bar{y} - \bar{Y}) = (y_1 - \bar{Y}) + (y_2 - \bar{Y}) + \cdots + (y_n - \bar{Y})$$

Luego, debido a que cada unidad muestral aparece el mismo número de veces en las muestras posible, entonces:

$\mathbb{E}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$ debe ser un múltiplo de $y_1 + y_2 + \cdots + y_N$. Este múltiplo es n/N debido a que la expresión de la izquierda tiene n términos y la de la derecha tiene N términos. Así,

$$E[(y_1 - \bar{Y})^2 + \cdots + (y_n - \bar{Y})^2] = \frac{n}{N} [(y_1 - \bar{Y})^2 + \cdots + (y_N - \bar{Y})^2]$$

y además,

$$\begin{aligned} E[(y_1 - \bar{Y})(y_2 - \bar{Y}) + (y_1 - \bar{Y})(y_3 - \bar{Y}) + \cdots + (y_{n-1} - \bar{Y})(y_n - \bar{Y})] \\ = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \left\{ (y_1 - \bar{Y})(y_2 - \bar{Y}) + (y_1 - \bar{Y})(y_3 - \bar{Y}) + \cdots + (y_{N-1} - \bar{Y})(y_N - \bar{Y}) \right\} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} n^2 \mathbb{E}[(\bar{y} - \bar{Y})^2] = \frac{n}{N} \left\{ (y_1 - \bar{Y})^2 + \cdots + (y_N - \bar{Y})^2 + \frac{2(n-1)}{N-1} \right. \\ \left. [(y_1 - \bar{Y})(y_2 - \bar{Y}) + (y_1 - \bar{Y})(y_3 - \bar{Y}) + \cdots + (y_{N-1} - \bar{Y})(y_N - \bar{Y})] \right\} \end{aligned}$$

Completando el cuadrado, se tiene:

$$\begin{aligned} n^2 \mathbb{E}[(\bar{y} - \bar{Y})^2] = \frac{n}{N} \left\{ \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right) [(y_1 - \bar{Y})^2 + \cdots + (y_N - \bar{Y})^2] \right. \\ \left. + \frac{n-1}{N-1} [(y_1 - \bar{Y}) + \cdots + (y_N - \bar{Y})]^2 \right\} \end{aligned}$$

En donde el segundo término desaparece, pues la suma de los y_i es igual a $N\bar{Y}$. Dividiendo por n^2 , se tiene:

$$\mathbb{V}(\bar{y}) = \mathbb{E}[(\bar{y} - \bar{Y})^2] = \frac{N-n}{nN(N-1)} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 = \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{S^2}{n}$$