

[10] Considere la función:

$$f(x) \begin{cases} \frac{c}{(1+2x)^3} & \text{si } 0 \leq x < \infty \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- (a) (5 puntos) Encuentre el valor de la constante c para que $f(x)$ sea una función de densidad.
- (b) (5 puntos) Obtenga la función de distribución $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

Solución: Para encontrar el valor de la constante c , notamos que $\int_0^\infty f(x) = 1$. Así,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x) &= c \int_0^\infty \frac{1}{(1+2x)^3} dx \quad (u = 2x + 1) \\ &= \frac{c}{2} \int_1^\infty \frac{1}{u^3} du \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{c}{4u^2} \Big|_{u=1}^b \right) \\ &= \frac{c}{4} \end{aligned}$$

Así, $c = 4$. Luego, para obtener la función de distribución, usando su definición se tiene:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{4}{(1+2t)^3} dt = \int_0^x \frac{4}{(1+2t)^3} dt \\ &= \left(-\frac{1}{(1+2t)^2} \Big|_{t=0}^x \right) \\ &= -\frac{1}{(1+2x)^2} + 1 \\ &= \frac{4x(x+1)}{(2x+1)^2} \quad \text{si } 0 \leq x < \infty \end{aligned}$$