[15] Una muestra aleatoria simple de tamaño 3 fue obtenida desde una población de tamaño N **con reemplazo**. Como estimador de la media poblacional utilizaremos $\overline{y}$, la media no ponderada sobre las diferentes unidades en la muestra. Muestre que la varianza promedio de $\overline{y}$ es:

$$\frac{(2N-1)(N-1)}{6N^2}s_y^2$$

Ayuda: Notar que la muestra obtenida puede contener 1,2 o 3 unidades diferentes.

Solución: Sean P_1, P_2 y P_3 las probabilidades de que la muestra contenga 1,2 y 3 unidades diferentes, respectivamente. Entonces:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \sum_{r=1}^{N} \mathbb{P}(\text{Seleccionar la r-ésima unidad en las 3 selecciones}) \\
&= N\frac{1}{N}\frac{1}{N}\frac{1}{N} = \frac{1}{N^2} \\
P_2 &= \sum_{r=1}^{N} \mathbb{P}(\{\text{r-ésima,otra,otra}\}) + \sum_{r=1}^{N} \mathbb{P}(\{\text{otra,r-ésima,otra}\}) + \sum_{r=1}^{N} \mathbb{P}(\{\text{otra,otra,r-ésima}\}) \\
&= N\frac{1}{N}\frac{N-1}{N}\frac{N-1}{N} + N\frac{1}{N}\frac{N-1}{N}\frac{N-1}{N} + N\frac{1}{N}\frac{N-1}{N}\frac{N-1}{N} \\
&= \frac{3(N-1)}{N^2} \\
P_3 &= \sum_{r=1}^{N} \mathbb{P}(\{\text{r-ésima, otra diferente de la r-ésima, otra diferente a las anteriores}\}) \\
&= \frac{N(N-1)(N-2)}{N^3} \\
&= \frac{(N-1)(N-2)}{N^2}
\end{aligned}$$

Luego, sabemos que la varianza de un media muestral basada en n unidades diferentes está dada por:

$$\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{s_y^2}{n} = \frac{N-n}{Nn}s_y^2$$

Así, la varianza promedio estará dada por:

$$\left(\frac{N-1}{N}s_y^2\right)\frac{1}{N^2} + \left(\frac{N-2}{2N}s_y^2\right)\frac{3(N-1)}{N^2} + \left(\frac{N-3}{3N}s_y^2\right)\frac{(N-1)(N-2)}{N^3} = \frac{(2N-1)(N-1)}{6N^2}s_y^2$$