

[60] En un determinado municipio se desea estudiar el cambio relativa en el valor actual de los bienes inmuebles en los últimos dos años. Se selecciona una muestra aleatoria de tamaño $n = 20$ inmuebles de entre los $N = 1000$ totales. De los registros oficiales, se obtiene el valor registrado actual para este año (X) y el valor correspondiente de hace dos años (Y), de cada una de las $n = 20$ casas incluidas en la muestra. Usando la siguiente información:

Casa	Valor hace 2 años	Valor actual
-	y_i	x_i
1	6.7	7.1
2	8.2	8.4
3	7.9	8.2
4	6.4	6.9
5	8.3	8.4
6	7.2	7.9
7	6	6.5
8	7.4	7.6
9	8.1	8.9
10	9.3	9.9
11	8.2	9.1
12	6.8	7.3
13	7.4	7.8
14	7.5	8.3
15	8.3	8.9
16	9.1	9.6
17	8.6	8.7
18	7.9	8.8
19	6.3	7
20	8.9	9.4
Total	154.5	165.7

- (a) (20 puntos) Estimar R , el cambio relativo en el valor actual para los $N = 1000$ inmuebles del municipio.
- (b) (20 puntos) Obtenga una cota para el error de estimación del cambio relativo en el valor actual de los inmuebles.
- (c) (20 puntos) Es de especial interés el precio medio de los inmuebles en el municipio en la actualidad. Cuantifique porcentualmente la ganancia en precisión al utilizar una estimación indirecta adecuada con respecto a la estimación directa usada bajo un muestreo aleatorio simple.

Solución: El cambio relativo R en el valor actual puede ser estimado mediante un estimador de razón, así:

$$\hat{R} = \frac{\hat{X}}{\hat{Y}} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n y_i} = \frac{165,7}{154,5} = 1,07$$

Luego, para obtener una cota para el error de estimación debemos obtener $\widehat{\mathbb{V}(\hat{R})}$:

$$\widehat{\mathbb{V}(\hat{R})} = \frac{(1 - \frac{n}{N})}{n(n-1)\bar{Y}^2} \left[\sum_{i=1}^n X_i^2 + \hat{R}^2 \sum_{i=1}^n Y_i^2 - 2\hat{R} \sum_{i=1}^n X_i Y_i \right] \approx 0,00005$$

Así, nuestra cota para el error de estimación estará dado por: $2 * \sqrt{\widehat{\mathbb{V}(\hat{R})}} = 2 * \sqrt{0,00005} \approx 0,01490065$

Finalmente, obtenemos la estimación de la media poblacional utilizando una estimación indirecta de razón:

$$\hat{\bar{X}} = \hat{R} * \bar{Y} = 8,26575$$

y su varianza asociada:

$$\widehat{\mathbb{V}(\hat{\bar{X}})} = \bar{Y}^2 * \widehat{\mathbb{V}(\hat{R})} = (7,725)^2 * 0,00005 \approx 0,003312437$$

Y contrastamos con la estimación directa de la media poblacional bajo un muestreo aleatorio simple:

$$\widehat{\mathbb{V}(\bar{X})} = \left(\frac{N-n}{N} \right) \frac{s^2}{n} = 0,04488787$$

Por lo que, la **ganancia porcentual** corresponde a un 92,62064 % con respecto a la obtenida bajo una estimación directa.