Politechnika
Warszawska

Informatyka II

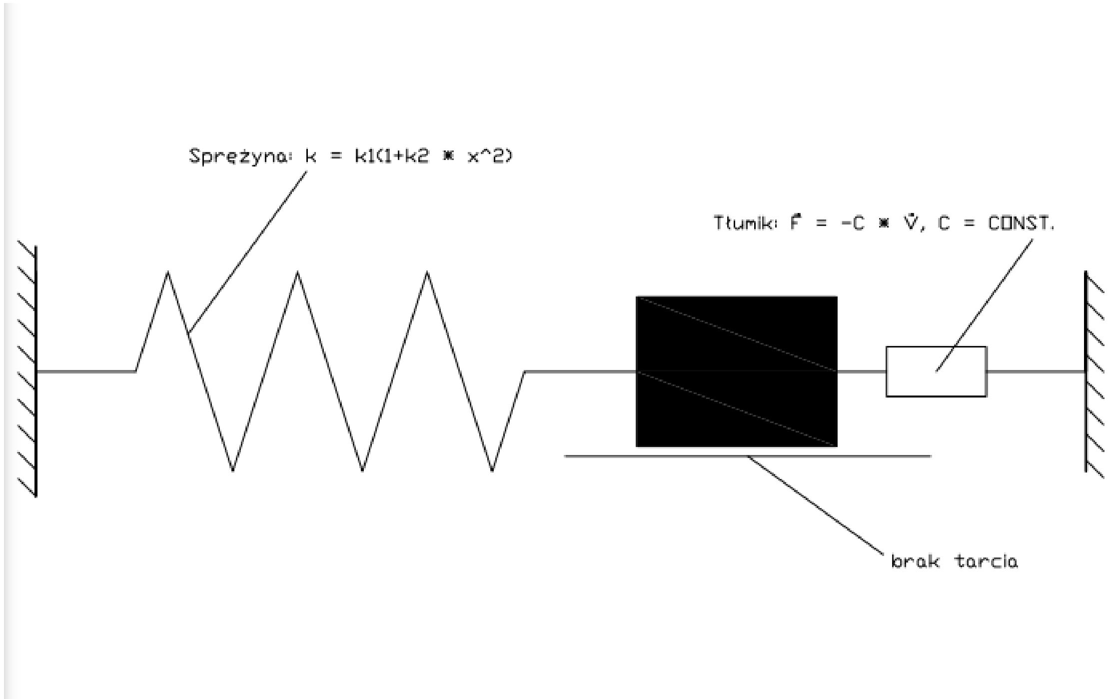
Układ ze sprężyną o nieliniowej charakterystyce i tłumikiem

Marcin Kurkowicz 333565

Prowadzący: Dr hab. inż. Tomasz Wacławczyk

Data oddania: **16.06.2024 r.**

1 Opis problemu



Charakterystyka nieliniowa sprężyny: $k = k_1(1 + k_2x^2)$

2 Równania ruchu i energii

Siła wywierana na masę przez sprężynę:

$$F_s = -kx = -k_1(1 + k_2x^2)x$$

Siła wywierana na masę przez tłumik:

$$F_t = -c\dot{x}$$

Równanie ruchu(na podstawie II zasady dynamiki Newtona):

$$m\ddot{x} = F_s + F_t = -k_1(1 + k_2x^2)x - c\dot{x}$$

Otrzymujemy równanie drugiego stopnia możliwe do przekształcenia na układ równań pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \frac{1}{m}\left(-k_1(1 + k_2x^2)x - cy\right) \end{cases} \tag{1}$$

Energia kinetyczna:

$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

Energia potencjalna sprężyny:

$$E_p = \int k_1(1 + k_2x^2)x \cdot dx = \int \left(k_1x + k_1k_2x^3\right) dx = \frac{k_1x^2}{2} + \frac{k_1k_2x^4}{4}$$

Całkowita energia mechaniczna:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k_1 x^2}{2} + \frac{k_1 k_2 x^4}{4}$$

Równanie opisujące ruch oscylatora harmonicznego przyjmuje postać równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + k_1 x = 0 \tag{2}$$

Jeżeli wprowadzimy nową stałą czasową $\tau = \frac{m}{c}$ oraz oznaczymy częstość własną $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$, to równanie przyjmuje postać:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3}$$

Korzystając z metody uzmienniania stałych otrzymujemy:

$$x(t) = Ae^{-ct}\cos(\omega t) \tag{4}$$

Teraz wyznaczymy A dla warunków początkowych $x(0) = 1 \wedge \dot{x}(0) = 1$:

$$x(0) = Ae^0\cos(0) = A \cdot 1 \cdot 1 = A$$

Z warunku początkowego $x(0) = 1$ mamy:

$$A = 1$$

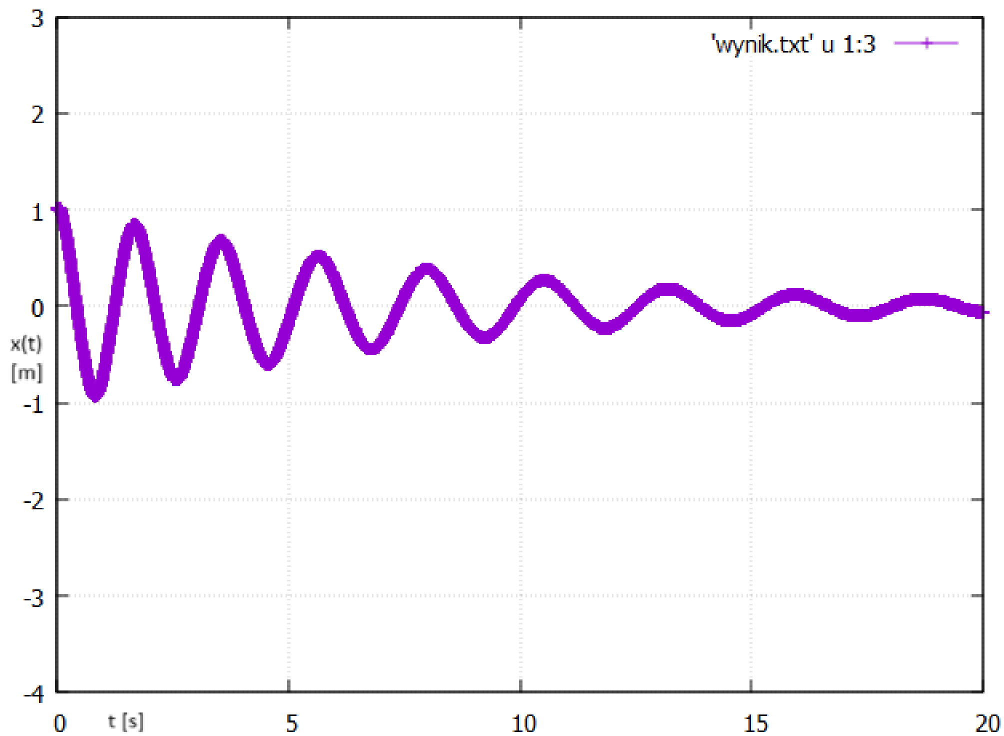
3 Metoda Obliczeniowa

Układ równań został scałkowany przy pomocy metody Runge-Kutta 4-tego rzędu. Czas całkowania: $20s$. Krok całkowania: $\frac{20s}{20000}$.

4 Wyniki

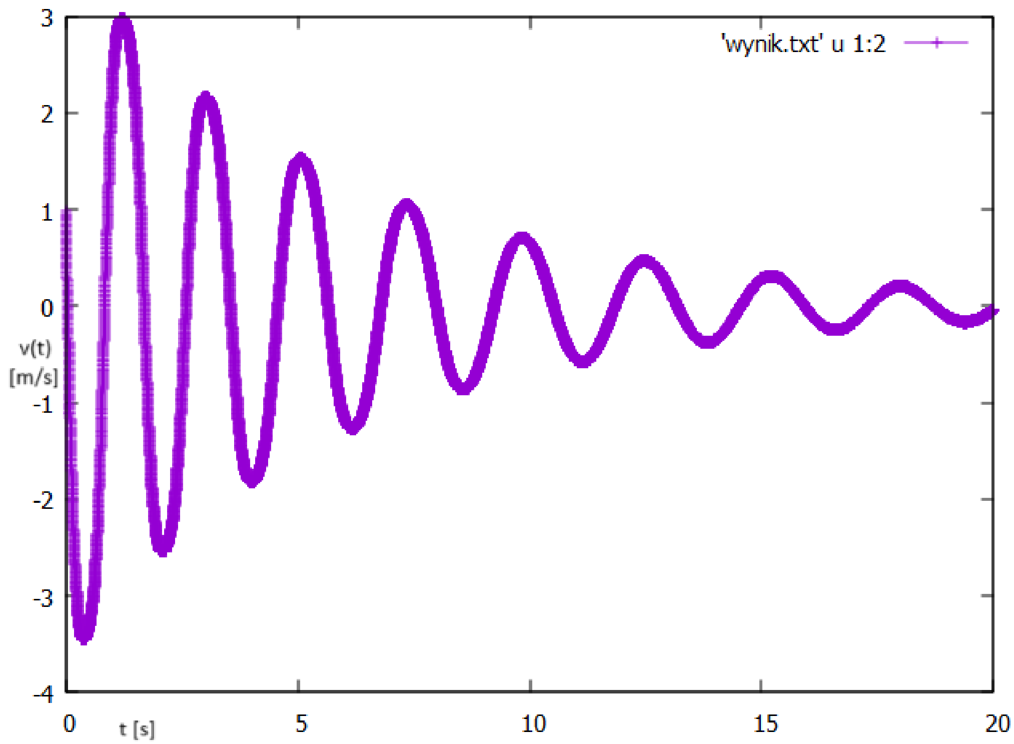
Symulacja została przeprowadzona dla $k_1 = 5 \quad k_2 = 3 \quad c = 0.3 \quad m = 1$. Warunki początkowe przyjmujemy jako $x(0) = 1 \wedge \dot{x}(0) = 1$

Dla sprężyny z takimi parametrami możemy zaobserwować wykładniczy spadek. Częstotliwość zmienia się wraz z maksymalnym wychyleniem, czego efektem są zwiększające się odstępy pomiędzy przejściami przez punkt równowagi.



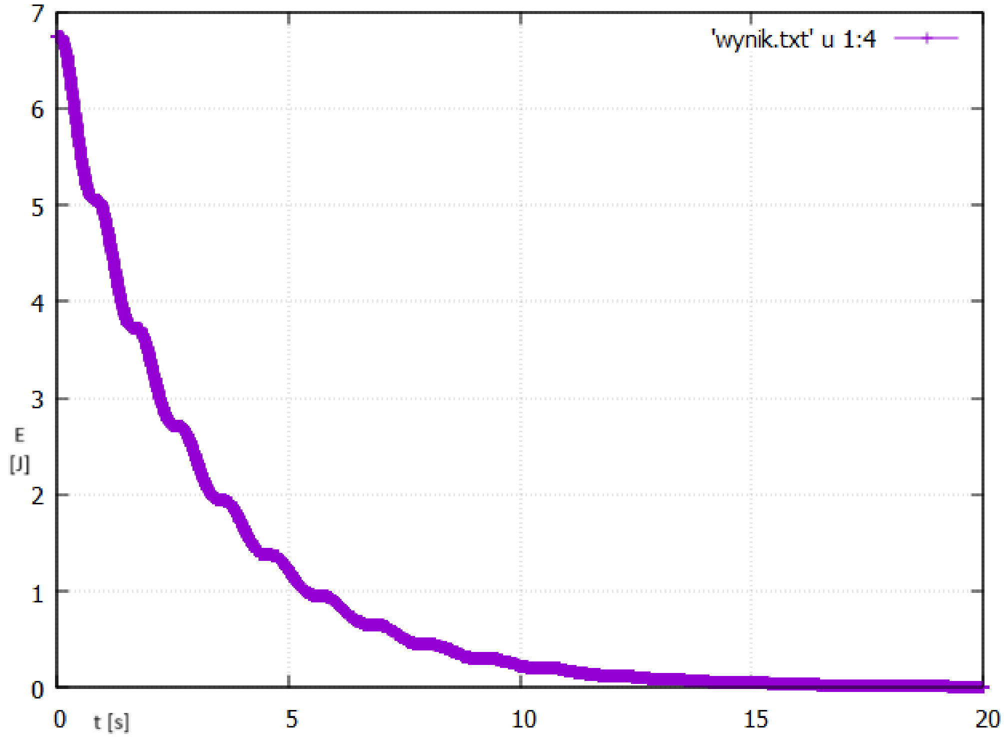
Wykres 1: x(t)

Na wykresie prędkości od czasu możemy zaobserować, że prędkość osiąga maksima oraz minima w punktach zerowych wykresy położenia od czasu.



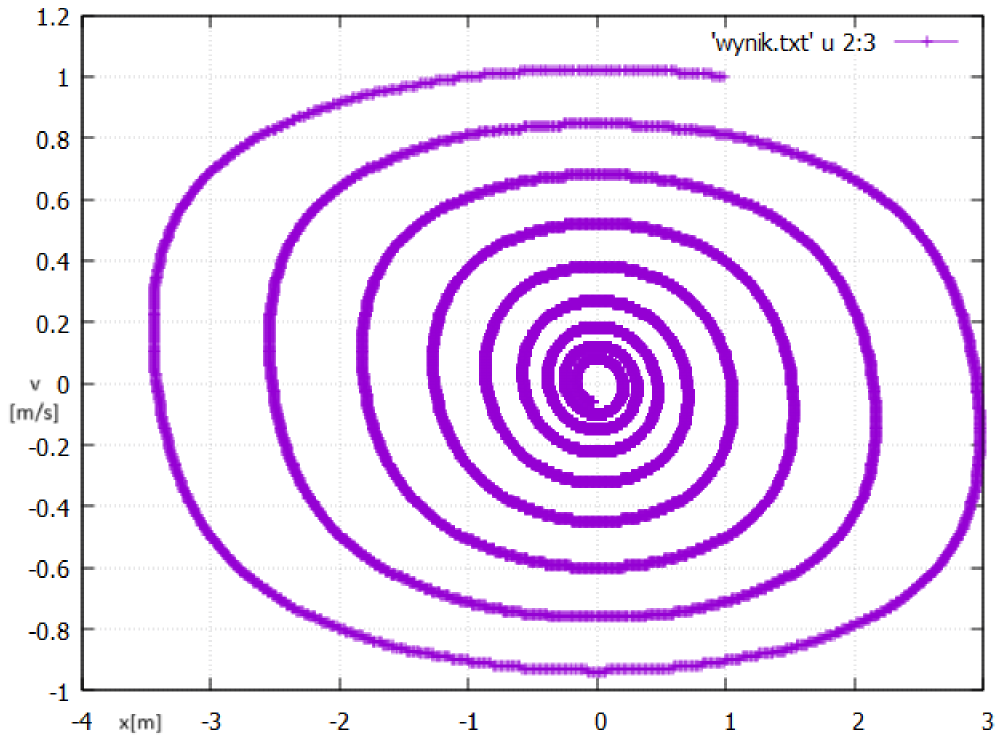
Wykres 2: v(t)

Ze względu na zastosowanie tłumika, w układzie energia spada w przybliżeniu wykładniczo w zależności od czasu. Widać wyraźne spadki w ekstremach prędkości:



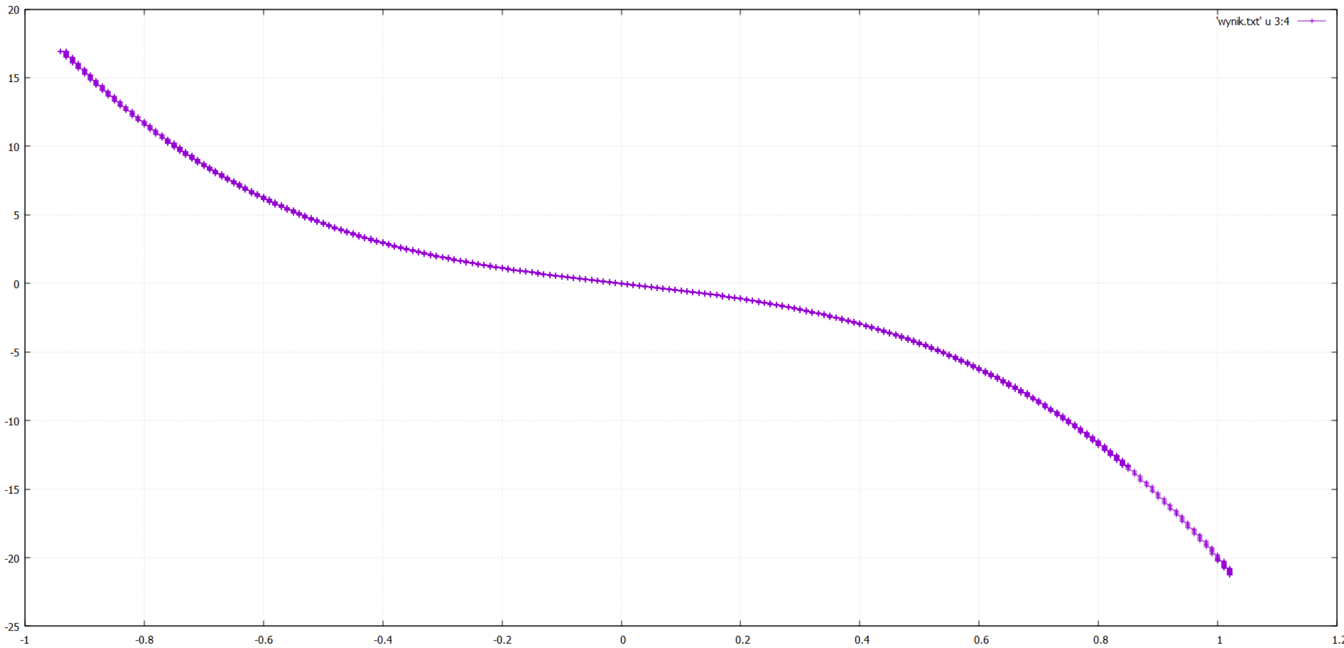
Wykres 3: E[J]

W przestrzeni fazowej możemy zauważyć trajektorię przyjmującą spiralny kształt, schodzący do zera.



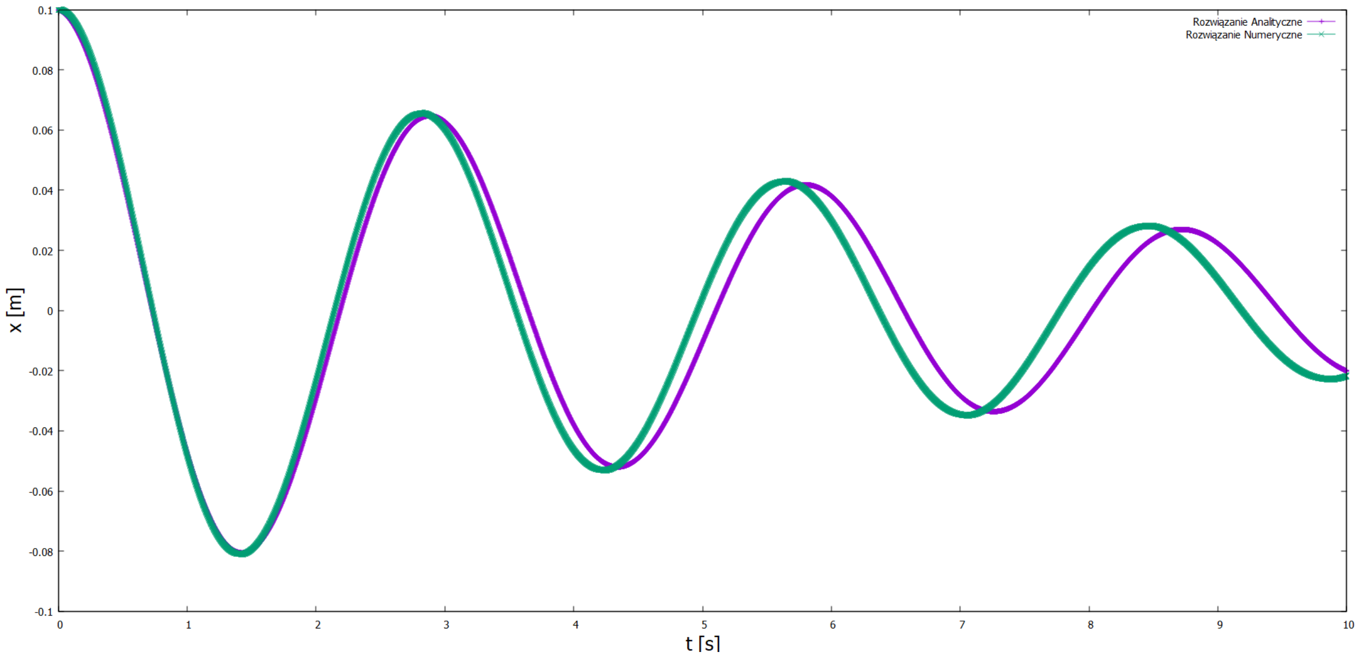
Wykres 4: v[m/s],x[m]

Wykres przedstawiający nieliniową charakterystykę sprężyny



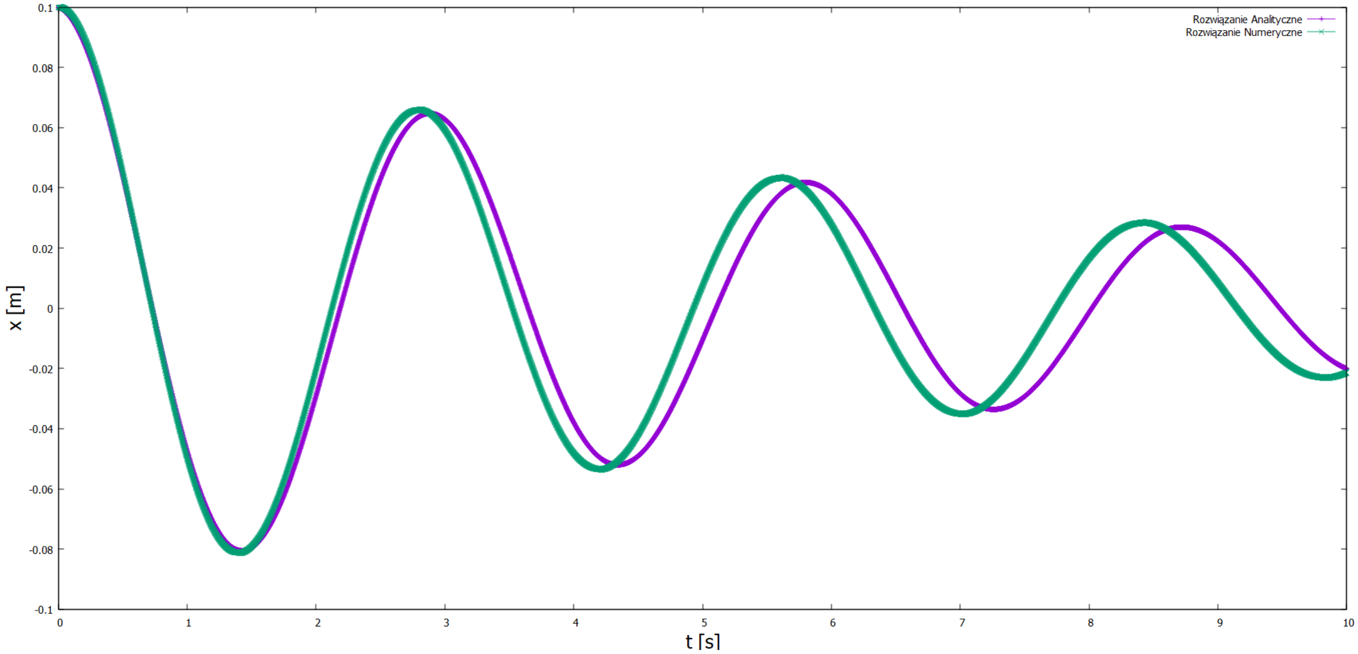
Wykres 5: F[N],x[m]

Porównanie rozwiązania analitycznego i numerycznego(rozwiązanie numeryczne dla sprężyny nieliniowej)



Wykres 6: x(t) [m]

Porównanie rozwiązania analitycznego i numerycznego(rozwiązanie numeryczne dla sprężyny liniowej)



Wykres 7: x(t) [m]