#### Software Verification

Borsetto Riccardo

Univerisità degli Studi di Padova

5th December 2022

#### Join

V	上	< 0	= 0	> 0	<u>≤</u> 0	<b>=</b> 0	≥ 0	Т
1	上							
< 0	< 0	< 0						
= 0	= 0	<b>≤</b> 0	= 0					
> 0	> 0	≥ 0	≥ 0	> 0				
<u>≤ 0</u>	≤ 0	≤ 0	≤ 0	Т	≤ 0			
<b>=</b> 0	<i>≠</i> 0	<i>≠</i> 0	Т	<i>≠</i> 0	Т	<i>≠</i> 0		
≥ 0	≥ 0	Т	≥ 0	≥ 0	Т	Т	≥ 0	
Т	Т	Т	Т	Т	Т	Т	Т	Т

#### Addition

+	$\perp$	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>=</b> 0	≥ 0	Т
上	$\vdash$							
< 0	$\perp$	< 0						
= 0	$\perp$	< 0	= 0					
> 0	$\perp$	Т	> 0	> 0				
<u>≤</u> 0	$\perp$	< 0	≤ 0	Т	≤ 0			
<i>≠</i> 0	$\perp$	Т	<i>≠</i> 0	Т	Т	Т		
≥ 0	$\perp$	Т	≥ 0	> 0	Т	Т	≥ 0	
Т		Т	Т	Т	Т	Т	Т	Т

### Subtraction

_	$\perp$	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>=</b> 0	≥ 0	Т
上	$\vdash$	$\perp$	$\perp$	上	$\perp$	上		$\perp$
< 0	$\perp$	Т	> 0	> 0	Τ	Т	> 0	T
= 0	$\perp$	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>≠</b> 0	≥ 0	T
> 0	$\perp$	< 0	< 0	Т	< 0	Т	Т	T
<u>≤</u> 0	$\perp$	Т	≥ 0	> 0	Т	Т	≥ 0	T
<i>≠</i> 0	$\perp$	Т	<i>≠</i> 0	Т	Τ	Т	Т	T
≥ 0	工	< 0	<b>≤</b> 0	Т	<b>≤</b> 0	Т	Т	T
Т		Т	Т	Т	Т	Т	Т	Т

## Multiplication

*	1	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>=</b> 0	≥ 0	Т
1	上							
< 0	T	> 0						
= 0	1	= 0	= 0					
> 0	1	< 0	= 0	> 0				
<u>≤</u> 0		≥ 0	= 0	≤ 0	≥ 0			
<i>≠</i> 0	T	<i>≠</i> 0	= 0	<i>≠</i> 0	Т	<i>≠</i> 0		
≥ 0		≤ 0	= 0	≥ 0	<b>≤</b> 0	Т	≥ 0	
Т	1	Т	= 0	Т	Т	Т	Т	Т

#### Division

/	$\perp$	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>=</b> 0	≥ 0	Т
上	$\vdash$	$\perp$	上	上	上	上		1
< 0	$\perp$	> 0	= 0	< 0	≥ 0	<i>≠</i> 0	≤ 0	Т
= 0	$\perp$		T			T	T	1
> 0	$\perp$	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>≠</b> 0	≥ 0	Т
<u>≤</u> 0	$\perp$	> 0	= 0	< 0	≥ 0	<b>≠</b> 0	≤ 0	Т
<i>≠</i> 0	$\perp$	<i>≠</i> 0	= 0	<i>≠</i> 0	Т	<i>≠</i> 0	Т	Т
≥ 0	$\perp$	< 0	= 0	> 0	≤ 0	<i>≠</i> 0	≥ 0	Т
Т		<i>≠</i> 0	= 0	<i>≠</i> 0	Т	<i>≠</i> 0	Т	Т

$e_1=e_2$	T	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>=</b> 0	≥ 0	Т
< 0		s <sup>#</sup>						
= 0	1	1	s <sup>#</sup>					
> 0	上	T	T	s <sup>#</sup>				
<b>≤</b> 0		s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>		s <sup>#</sup>			
<i>≠</i> 0		s <sup>#</sup>		s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>		
≥ 0	上	1	s <sup>#</sup>					
Т	1	s <sup>#</sup>						

x = e	Τ	< 0	= 0	> 0	≤ 0	<b>≠</b> 0	≥ 0	Т
$\perp$	T	1	Τ	Τ	1			
< 0	T	s#	Τ	Τ	$s^{\#}[x\mapsto <0]$	$s^{\#}[x \mapsto < 0]$	1	$s^{\#}[x\mapsto <0]$
= 0	$\perp$	$\perp$	s <sup>#</sup>	$\perp$	$s^{\#}[x \mapsto = 0]$	Τ	$s^{\#}[x \mapsto = 0]$	$s^{\#}[x\mapsto=0]$
> 0	$\perp$	$\perp$	1	s <sup>#</sup>	1	$s^{\#}[x\mapsto>0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$
≤ 0	$\perp$	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	1	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x\mapsto <0]$	$s^{\#}[x \mapsto = 0]$	$s^{\#}[x\mapsto\leq 0]$
$\neq 0$	$\perp$	s <sup>#</sup>	1	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x\mapsto <0]$	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x\mapsto\neq 0]$
≥ 0	$\perp$	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x \mapsto = 0]$	$s^{\#}[x\mapsto>0]$	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x\mapsto\geq 0]$
Т	$\perp$	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>

$e_1 \neq e_2$	T	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>=</b> 0	≥ 0	Т
< 0		s <sup>#</sup>						
= 0	1	s <sup>#</sup>	T					
> 0	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>				
<b>≤</b> 0	L	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>			
<i>≠</i> 0	T	s <sup>#</sup>						
≥ 0	L	s <sup>#</sup>						
Т		s <sup>#</sup>						

$x \neq e$	1	< 0	= 0	> 0	<u>≤</u> 0	<b>=</b> 0	≥ 0	Т
1	1	Τ	1	1	1	1		1
< 0	T	s#	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s#	s <sup>#</sup>	s#	s <sup>#</sup>
= 0		s <sup>#</sup>	Τ	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x\mapsto <0]$	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x\mapsto>0]$	$s^{\#}[x\mapsto\neq 0]$
> 0		s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>		s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
≤ 0		s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
<b>=</b> 0	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
≥ 0	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
Τ	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>

$e_1 < e_2$	T	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>=</b> 0	≥ 0	Т
	L							
< 0	T	s <sup>#</sup>			s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	T	s <sup>#</sup>
= 0	上	s <sup>#</sup>	T	T	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	1	s <sup>#</sup>
> 0	T	s <sup>#</sup>						
<u>≤</u> 0	上	s <sup>#</sup>	T	T	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	T	s <sup>#</sup>
<i>≠</i> 0	$\perp$	s <sup>#</sup>						
≥ 0	$\perp$	s <sup>#</sup>						
Т	1	s <sup>#</sup>						

x < e	Τ	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>≠</b> 0	≥ 0	Т
1	Τ.	1	1	1	1	1	1	1
< 0	Т	s#	Τ	Τ	$s^{\#}[x\mapsto <0]$	$s^{\#}[x\mapsto <0]$	Τ	$s^{\#}[x\mapsto <0]$
= 0	Т	s <sup>#</sup>	Τ	Τ	$s^{\#}[x\mapsto <0]$	$s^{\#}[x\mapsto <0]$	Τ	$s^{\#}[x\mapsto <0]$
> 0	Т	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
≤ 0	Т	s <sup>#</sup>	1	1	$s^{\#}[x\mapsto <0]$	$s^{\#}[x \mapsto < 0]$	1	$s^{\#}[x\mapsto <0]$
<b>=</b> 0	Т	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
≥ 0	Т	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
Τ	Ī	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>

$e_1 > e_2$	T	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>=</b> 0	≥ 0	Т
	L							
< 0	T	s <sup>#</sup>						
= 0	上		上	s <sup>#</sup>	上	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
> 0	T	T	上	s <sup>#</sup>	上	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
<u>≤</u> 0	上	s <sup>#</sup>						
<i>≠</i> 0	$\perp$	s <sup>#</sup>						
≥ 0	T			s <sup>#</sup>	上	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
Т	1	s <sup>#</sup>						

x > e	T	< 0	= 0	> 0	≤ 0	<b>≠</b> 0	≥ 0	Т
	T	Τ	Τ	Τ	Τ	1	1	
< 0	T	s#	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s#	s#	s <sup>#</sup>
= 0	1	Τ	Τ	s <sup>#</sup>	Τ	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$
> 0	1	1	1	s <sup>#</sup>	1	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$
≤ 0	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>				
<b>=</b> 0	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>				
≥ 0	1	1	1	s <sup>#</sup>	1	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$
Τ	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>				

$e_1 \leq e_2$		< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>=</b> 0	≥ 0	Т
								1
< 0		s <sup>#</sup>		T	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	T	s <sup>#</sup>
= 0	上	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	上	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
> 0	1	s <sup>#</sup>						
<u>≤</u> 0	上	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	T	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
<i>≠</i> 0		s <sup>#</sup>						
≥ 0	上	s <sup>#</sup>						
Τ		s <sup>#</sup>						

$x \leq e$	Τ	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>≠</b> 0	≥ 0	Т
$\perp$	T	1	Τ	Τ	1		1	1
< 0	T	s#	T	Τ	$s^{\#}[x\mapsto <0]$	$s^{\#}[x\mapsto <0]$	1	$s^{\#}[x\mapsto <0]$
= 0	Τ	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	$\perp$	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x\mapsto <0]$	$s^{\#}[x\mapsto=0]$	$s^{\#}[x\mapsto\leq 0]$
> 0	Τ	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
≤ 0			s <sup>#</sup>	1	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x\mapsto <0]$	$s^{\#}[x \mapsto = 0]$	$s^{\#}[x\mapsto\leq 0]$
$\neq 0$	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
≥ 0	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
Т	$\perp$	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>

$e_1 \geq e_2$	T	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>=</b> 0	≥ 0	Т
< 0		s <sup>#</sup>						
= 0	上		s <sup>#</sup>					
> 0	1	T	T	s <sup>#</sup>	T	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
<b>≤</b> 0	L	s <sup>#</sup>						
<i>≠</i> 0		s <sup>#</sup>						
≥ 0	L	1	s <sup>#</sup>					
Т	上	s <sup>#</sup>						

$x \ge e$	1	< 0	= 0	> 0	≤ 0	<b>≠</b> 0	≥ 0	Т
	T	1	Τ	Τ	1		1	1
< 0	T	s#	s#	s#	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s#	s <sup>#</sup>
= 0	$\perp$	$\perp$	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x \mapsto = 0]$	$s^{\#}[x\mapsto>0]$	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x\mapsto \geq 0]$
> 0	$\perp$	$\perp$	$\perp$	s <sup>#</sup>	Τ	$s^{\#}[x\mapsto>0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x\mapsto>0]$
<b>≤</b> 0	$\perp$	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
$\neq 0$	$\perp$	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
≥ 0	$\perp$	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x \mapsto = 0]$	$s^{\#}[x\mapsto>0]$	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x\mapsto\geq 0]$
Т	$\perp$	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>

#### Join

V	1	$(-\infty,b]$	[a, b]	$[a,+\infty)$	Т
1	1	$(-\infty,b]$	[a, b]	$[a,+\infty)$	Т
$[-\infty,d]$	$(-\infty, d]$	$(-\infty, max(b, d)]$	$(-\infty, max(b, d)]$	$\top$	Т
[c, d]	[c, d]	$(-\infty, max(b, d)]$	[min(a,c), max(b,d)]	$[min(a,c),+\infty)$	Т
$[c,+\infty)$	$[c,+\infty)$	Т	$[min(a,c),+\infty)$	$[min(a,c),+\infty)$	Т
Т	Т	Т	Т	Τ	Т

#### Addition

+	1	$(-\infty,b]$	[a, b]	$[a,+\infty)$	T
	上				
$[-\infty,d]$	上	$(-\infty, b+d]$			
[c, d]	T	$(-\infty, b+d]$	[a+c,b+d]		
$[c,+\infty)$		Т	$[a+c,+\infty)$	$[a+c,+\infty)$	
Т	1	Т	Т	Т	T

#### Subtraction

_	1	$(-\infty,b]$	[a, b]	$[a,+\infty)$	T
	上				$\perp$
$(-\infty,d]$	T	Т	$[a-d,+\infty)$	$[a-d,+\infty)$	T
[c, d]	T	$(-\infty, b-c]$	[a-d,b-c]	$[a-d,+\infty)$	Т
$[c,+\infty)$		$(-\infty, b-c]$	$(-\infty, b-c]$	Т	T
Т	1	Т	Т	Т	T

## Multiplication

*	1	$(-\infty, b]$		[a, b]		[a, +∞)	
1	I	1		1		Τ	
$(-\infty, d]$	Ι.	$b > 0 \lor d > 0$	Т	$(a < 0 \land b > 0) \lor (a > 0 \land b < 0)$ $(a \le 0 \land b \le 0) \land (a \ne 0 \lor b \ne 0)$	$\top$ $[min(ad, bd), +\infty)$	d > 0 ∨ a < 0	Т
(-∞, a)	_	$b \le 0 \land d \le 0$	$[bd, +\infty)$	$(a \ge 0 \land b \ge 0) \land (a \ne 0 \lor b \ne 0)$ $(a = 0 \land b = 0)$	$(-\infty, max(ad, bd)]$ [0, 0]	$d \le 0 \land a \ge 0$	$(-\infty, ad]$
[c, d]	Τ	$ \begin{array}{l} (c < 0 \land d > 0) \lor (c > 0 \land d < 0) \\ (c \le 0 \land d \le 0) \land (c \ne 0 \lor d \ne 0) \\ (c \ge 0 \land d \ge 0) \land (c \ne 0 \lor d \ne 0) \\ (c \ge 0 \land d \ge 0) \land (c \ne 0 \lor d \ne 0) \\ (c = 0 \land d = 0) \end{array} $	$T$ $[min(bc, bd), +\infty)$ $(-\infty, max(bc, bd)]$ $[0, 0]$	[min(ac, ad, bc, bd), max(ac, ad, bc	:, bd)]	$ \begin{array}{l} (c < 0 \land d > 0) \lor (c > 0 \land d < 0) \\ (c \le 0 \land d \le 0) \land (c \ne 0 \lor d \ne 0) \\ (c \ge 0 \land d \ge 0) \land (c \ne 0 \lor d \ne 0) \\ (c \ge 0 \land d \ge 0) \land (c \ne 0 \lor d \ne 0) \\ (c = 0 \land d = 0) \end{array} $	$(-\infty, max$ $[min(ac, a$ $[0, 0]$
[c, +∞)		$b > 0 \lor c < 0$	Т	$(a < 0 \land b > 0) \lor (a > 0 \land b < 0)$ $(a \le 0 \land b \le 0) \land (a \ne 0 \lor b \ne 0)$	$(-\infty, max(ac, bc)]$	a < 0 ∨ c < 0	Т
[5, +∞)	_	$b \le 0 \land c \ge 0$	$(-\infty,bc]$	$(a \ge 0 \land b \ge 0) \land (a \ne 0 \lor b \ne 0)$ $(a = 0 \land b = 0)$	$[min(ac, bc), +\infty)$ [0, 0]	$a \ge 0 \land c \ge 0$	$(-\infty,ac]$
Т	Τ	Т		$ \begin{aligned} a &= b = 0 \\ a &\neq 0 \lor b \neq 0 \end{aligned} $	[0, 0] T	Т	

#### Division

/	1	$(-\infty, b]$		[a, b]	<u> </u>	
1	1	1		1		
		d < 0	$[min(0, b/d), +\infty)$	$d \leq 0$	[min(0, a/d, b/d), max(0, a/d, b/d)]	
		0 = 0	$[min(0,b/a),+\infty)$	$d > 0 \land a = b = 0$	[0, 0]	
$(-\infty, d]$	$\perp$			$d > 0 \land a \ge 0 \land b > 0$		
		otherwise	T	$d > 0 \land a < 0 \land b \le 0$	$[min(a/d,b/d),+\infty)$	
				otherwise	Т	
		c = d = 0	1	c = d = 0	1	
		$0 < c \le d$ $(-\infty, max(b/c, b/d)]$		[ - 0 - 0	_	
[c, d]	$\perp$	$0 = c < d \land b \le 0$		c < 0 < d	$[min(0, a/c, b/c), max(0, a/c, b/c)] \lor [min(0, a/d, b/d), n]$	
		$c \le d < 0$	$[min(b/c, b/d), +\infty)$	1000	[mm(0, a/c, b/c), max(0, a/c, b/c)] \ [mm(0, a/d, b/d), m	
		otherwise	T	otherwise	[min(a/c, a/d, b/c, b/d), max(a/c, a/d, b/c, b/d)]	
		c > 0	$(-\infty, max(0, b/c)]$	<i>c</i> ≥ 0	[min(0, a/c, b/c), max(0, a/c, b/c)]	
		` = 0	$(-\infty, \max(0, b/c)]$	$c < 0 \land a = b = 0$	[0, 0]	
$[c, +\infty)$	$\perp$			$c < 0 \land a \ge 0 \land b > 0$	$[min(a/c,b/c),+\infty)$	
		otherwise	T	$c < 0 \land a < 0 \land b \le 0$	$(-\infty, max(a/c, b/c)]$	
				otherwise	Т	
_	-	Т		a = b = 0	[0, 0]	
'	_	'		otherwise	Т	

$e_1 = e_2$	Τ	$(-\infty,b]$	[a, b]	$[a, +\infty)$	Т
Τ	Т	Τ		1	1
$(-\infty, d]$	1	s <sup>#</sup>	if $a > d$ then $\perp$ else $s^{\#}$	if $a > d$ then $\perp$ else $s^{\#}$	s#
[c, d]	1	if $b < c$ then $\perp$ else $s^\#$	if $a > d$ or $b < c$ then $\perp$ else $s^{\#}$	if $a > d$ then $\perp$ else $s^{\#}$	s#
$[c,+\infty)$	Т	if $b < c$ then $\perp$ else $s^\#$	if $b < c$ then $\perp$ else $s^\#$	s <sup>#</sup>	s#
Т	Τ	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s#

x = e	$\perp$	$(-\infty,b]$		[a, b]	
1	$\perp$	1			
		$b \le d$	s <sup>#</sup>	a > d	
$[-\infty,d]$	⊥	b > d	$s^{\#}[x\mapsto (-\infty,d]]$	$a \leq d \wedge b > d$	$s^{\#}[x \mapsto [a,d]]$
		<i>b &gt;</i> u	5 [x + 7 ( ∞, u]]	$a \leq d \wedge b \leq d$	<i>s</i> <sup>#</sup>
		b < c	$\perp$	$b < c \lor a > d$	Τ
		c < b < d	$s^{\#}[x \mapsto [c,b]]$	$b > d \wedge a < c$	$s^{\#}[x \mapsto [c,d]]$
[c,d]	1		5 [x + 7 [c, b]]	$b > d \wedge a \geq c$	$s^{\#}[x \mapsto [a,d]]$
		b > d	$s^{\#}[x \mapsto [c,d]]$	$c \leq b \leq d \land a < c$	$s^{\#}[x \mapsto [c,b]]$
		<i>b &gt;</i> u	5 [X + 7 [c, u]]	$c \leq b \leq d \land c \leq a \leq d$	s <sup>#</sup>
		b < c	$\perp$	b < c	
$[c,+\infty)$	_	b > c	$s^{\#}[x \mapsto [c,b]]$	$b \geq c \wedge a < c$	$s^{\#}[x \mapsto [c,b]]$
		_	5 [X + 7 [C, D]]	$a \ge c$	s <sup>#</sup>
Τ	上	s <sup>#</sup>		s <sup>#</sup>	

$e_1 \neq e_2$	1	$(-\infty,b]$	[a, b]	$[a,+\infty)$	Т
		1	1		
$(-\infty,d]$	上	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
[c,d]	上	s <sup>#</sup>	$a = b = c = d$ $\perp$ otherwise $s^{\#}$	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
$[c,+\infty)$		s#	s#	s#	s#
Т	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>

$x \neq e$	T	$(-\infty,b]$	[a, b]
$\perp$	$\perp$	<b>T</b>	
$(-\infty,d]$	1	$s^{\#}$	s <sup>#</sup>
		$b = c = d$ $s^{\#}[x \mapsto (-\infty, b-1]]$	$a = c = d \wedge a \neq b$ $s^{\#}[x \mapsto [a+1,$
[c,d]		$b=c=d$ $s^{-1}[x\mapsto (-\infty,b-1]]$	$b = c = d \land a \neq b$ $s^{\#}[x \mapsto [a, b - b]$
[c, a]		otherwise s <sup>#</sup>	$a = b = c = d$ $\perp$
		otherwise 3"	otherwise $s^{\#}$
$[c,+\infty)$	上	s <sup>#</sup>	s#
Т	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>

$e_1 < e_2$		$[-\infty,b]$	[a, b]		$[a, +\infty]$	)	Τ
	上	上	上		上		上
$(-\infty,d]$		s <sup>#</sup>	$a \ge d$		$a \ge d$		s#
$[-\infty, u]$		3"	a < d	$s^{\#}$	a < d	$s^\#$	3"
[c, d]		s <sup>#</sup>	$a \ge d$		$a \ge d$		s <sup>#</sup>
[c,d]			a < d	$s^{\#}$	a < d	$s^\#$	5"
$[c,+\infty)$	上	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>		s <sup>#</sup>		s <sup>#</sup>
Т	上	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>		s <sup>#</sup>		s <sup>#</sup>

<i>x</i> < <i>e</i>	$\perp$	$(-\infty,b]$	[a, b]	$[a,+\infty)$
1	1	<u></u>	1	
		$b \ge d$ $s^{\#}[x \mapsto (-\infty, d -$	1]] $  a \ge d $	$a \ge d$ $\perp$
$[-\infty,d]$	1	$b < d s^{\#}$	$\begin{vmatrix} a \ge d & \bot \\ a < d \land b \ge d & s^{\#}[x \mapsto [a, d-1]] \\ a \le d \land b \le d & s^{\#} \end{vmatrix}$	2 < d s#[v \
		b < a - s	$a < d \land b < d  s^{\#}$	
		$b \ge d$ $s^{\#}[x \mapsto (-\infty, d -$		$a \ge d$ $\perp$
[c,d]	1	$b < d s^{\#}$	$a < d \land b \ge d$ $s^{\#}[x \mapsto [a, d-1]]$	$a < d  s^{\#}[x \mapsto$
		b < u s	$a < d \land b < d  s^{\#}$	a Cu 3 [A ->
$[c,+\infty)$	$\perp$	s <sup>#</sup>	s#	s <sup>#</sup>
Т	I	s <sup>#</sup>	s#	s#

$e_1 \leq e_2$	1	$(-\infty,b]$	[a, b]		$[a, +\infty]$	)	Т
	上	上					
( ~ d]		s#	a > d		a > d		s#
$[-\infty,d]$	—	3"	$a \leq d$	$s^{\#}$	$a \leq d$	$s^{\#}$	3"
[م م]		s <sup>#</sup>	a > d		a > d	上	s <sup>#</sup>
[c,d]		5"	$a \leq d$	$s^{\#}$	$a \leq d$	$s^{\#}$	5"
$[c,+\infty)$	上	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>		s <sup>#</sup>		s <sup>#</sup>
Т	T	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>		s <sup>#</sup>		s <sup>#</sup>

$x \leq e$	1	$(-\infty,b]$	[a, b]	$[a,+\infty)$
1	1	上	1	1
		$b>d$ $s^{\#}[x\mapsto (-\infty,d]]$	$a > d$ $\perp$	a > d ⊥
$(-\infty,d]$	1	$b < d s^{\#}$	$\begin{vmatrix} a > d & \pm \\ a \le d \land b > d & s^{\#}[x \mapsto [a, d]] \\ a \le d \land b \le d & s^{\#} \end{vmatrix}$	$a < d  s^{\#}[x \mapsto [a, d]]$
		$b>d$ $s^{\#}[x\mapsto (-\infty,d]]$	$a > d$ $\perp$	$a > d$ $\perp$
[c,d]	_	$b \le d  s^\#$	$\begin{vmatrix} a \le d \land b > d & s^{\#}[x \mapsto [a, d]] \\ a \le d \land b \le d & s^{\#} \end{vmatrix}$	$a \leq d  s^{\#}[x \mapsto [a, d]]$
[- \		s#	a \le u \land b \le u \sim s	s#
$[c,+\infty)$		_	-	
Т	Ī	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>

$e_1 > e_2$	1	$(-\infty,b]$	[a, b]	$[a,+\infty)$	Т
上	1				
$(-\infty,d]$	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
[c, d]	1	$b \le c \perp$	$b \le c$ $\perp$	s#	s#
		$b>c$ $s^{\#}$	$b>c$ $s^{\#}$	3"	3"
$[c,+\infty)$	1	$b \le c \perp$	$b \leq c$ $\perp$	s#	s#
		$b>c$ $s^{\#}$	$b>c$ $s^{\#}$	3"	3
Т		s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>

	-	/ /1	r 11	r , \
x > e		$(-\infty,b]$	[a, b]	$[a, +\infty)$
1	Ĺ	Т		1
$(-\infty,d]$		s <sup>#</sup>	s#	s <sup>#</sup>
		$b \leq c$ $\perp$	$b \le c$ $\perp$	$a \le c$ $s^{\#}[x \mapsto [c +$
[c,d]	Τ	$b > c$ $s^{\#}[x \mapsto [c+1,b]]$	$b > c \land a \le c$ $s^{\#}[x \mapsto [c+1,b]]$	$a > c$ $s^{\#}$
		2 × 5 5 [x. / [e + 1, b]]	$b>c \wedge a>c$ $s^{\#}$	
		$b \le c$ $\perp$	$b \le c$ $\perp$	$a \leq c$ $s^{\#}[x \mapsto [c + c]]$
$[c,+\infty)$	1	$b > c$ $s^{\#}[x \mapsto [c+1,b]]$	$b > c \land a \le c$ $s^{\#}[x \mapsto [c+1,b]]$	$a>c$ $s^{\#}$
			D / C / a / C 3"	
Τ	Т	s <sup>#</sup>	s#	s <sup>#</sup>

$e_1 \geq e_2$	1	$(-\infty,b]$	[a, b]	$[a,+\infty)$	Т
上	1	上	上		1
$(-\infty,d]$	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s#
[c, d]	1	$b < c \perp$	$b < c \perp$	s#	s#
		$b \geq c$ $s^{\#}$	$b \geq c$ $s^{\#}$	3"	3"
$[c,+\infty)$	1	$b < c \perp$	$b < c \perp$	s#	s#
		$b \geq c$ $s^{\#}$	$b \geq c  s^{\#}$	3"	3"
Т	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>

$x \ge e$	$\perp$	$(-\infty,b]$	[a, b]	$[a,+\infty)$
1	$\perp$	1	<b>T</b>	
$(-\infty,d]$	$\perp$	s <sup>#</sup>	$s^{\#}$	s <sup>#</sup>
		$b < c \perp$	$b < c$ $\perp$	$a < c$ $s^{\#}[x \vdash$
[c,d]	$\perp$	$b \ge c$ $s^{\#}[x \mapsto [c, b]]$	$b \ge c \land a < c  s^{\#}[x \mapsto [c,b]]$	$a \ge c$ $s^\#$
			$b \geq c \wedge a \geq c  s^{\#}$	
		$b < c \perp$	$b < c$ $\perp$	$a < c$ $s^{\#}[x \vdash$
$[c,+\infty)$	$\perp$	$b \ge c$ $s^{\#}[x \mapsto [c, b]]$	$b \ge c \land a < c  s^{\#}[x \mapsto [c,b]]$	$a > c$ $s^{\#}$
			$D \geq C \land a \geq C  S''$	<u> </u>
T	$\perp$	s <sup>#</sup>	$s^{\#}$	s <sup>#</sup>