Software Verification

Borsetto Riccardo

Univerisità degli Studi di Padova

5th December 2022

Join

$\vee$	$\bot$	<0	$=0$	>0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\bot$	$\bot$							
<0	<0	<0						
$=0$	$=0$	≤ 0	$=0$					
>0	>0	≥ 0	≥ 0	>0				
≤ 0	≤ 0	≤ 0	≤ 0	$\top$	≤ 0			
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\top$	$\neq 0$	$\top$	$\neq 0$		
≥ 0	≥ 0	$\top$	≥ 0	≥ 0	$\top$	$\top$	≥ 0	
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Addition

$+$	$\perp$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\perp$	$\perp$							
< 0	$\perp$	< 0						
$= 0$	$\perp$	< 0	$= 0$					
> 0	$\perp$	$\top$	> 0	> 0				
≤ 0	$\perp$	< 0	≤ 0	$\top$	≤ 0			
$\neq 0$	$\perp$	$\top$	$\neq 0$	$\top$	$\top$	$\top$		
≥ 0	$\perp$	$\top$	≥ 0	> 0	$\top$	$\top$	≥ 0	
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Subtraction

$-$	$\bot$	<0	$=0$	>0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
<0	$\bot$	$\top$	>0	>0	$\top$	$\top$	>0	$\top$
$=0$	$\bot$	<0	$=0$	>0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
>0	$\bot$	<0	<0	$\top$	<0	$\top$	$\top$	$\top$
≤ 0	$\bot$	$\top$	≥ 0	>0	$\top$	$\top$	≥ 0	$\top$
$\neq 0$	$\bot$	$\top$	$\neq 0$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
≥ 0	$\bot$	<0	≤ 0	$\top$	≤ 0	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Multiplication

$*$	$\perp$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\perp$	$\perp$							
< 0	$\perp$	> 0						
$= 0$	$\perp$	$= 0$	$= 0$					
> 0	$\perp$	< 0	$= 0$	> 0				
≤ 0	$\perp$	≥ 0	$= 0$	≤ 0	≥ 0			
$\neq 0$	$\perp$	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\top$	$\neq 0$		
≥ 0	$\perp$	≤ 0	$= 0$	≥ 0	≤ 0	$\top$	≥ 0	
$\top$	$\perp$	$\top$	$= 0$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Division

$/$	$\bot$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
< 0	$\bot$	> 0	$= 0$	< 0	≥ 0	$\neq 0$	≤ 0	$\top$
$= 0$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
> 0	$\bot$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
≤ 0	$\bot$	> 0	$= 0$	< 0	≥ 0	$\neq 0$	≤ 0	$\top$
$\neq 0$	$\bot$	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\top$	$\neq 0$	$\top$	$\top$
≥ 0	$\bot$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\top$	$\bot$	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\top$	$\neq 0$	$\top$	$\top$

Equality

$e_1 = e_2$	$\perp$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\perp$	$\perp$							
< 0	$\perp$	$s^{\#}$						
$= 0$	$\perp$	$\perp$	$s^{\#}$					
> 0	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$s^{\#}$				
≤ 0	$\perp$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$\perp$	$s^{\#}$			
$\neq 0$	$\perp$	$s^{\#}$	$\perp$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$		
≥ 0	$\perp$	$\perp$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	
$\top$	$\perp$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$

Equality

$x = e$	$\bot$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
< 0	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto < 0]$
$= 0$	$\bot$	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto = 0]$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto = 0]$	$s^\#[x \mapsto = 0]$
> 0	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$
≤ 0	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#[x \mapsto = 0]$	$s^\#[x \mapsto \leq 0]$
$\neq 0$	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto \neq 0]$
≥ 0	$\bot$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto = 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto \geq 0]$
$\top$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$e_1 \neq e_2$	$\perp$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\perp$	$\perp$							
< 0	$\perp$	$s^\#$						
$= 0$	$\perp$	$s^\#$	$\perp$					
> 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$				
≤ 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$			
$\neq 0$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$		
≥ 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	
$\top$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x \neq e$	$\perp$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
< 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$= 0$	$\perp$	$s^\#$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto \neq 0]$
> 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≤ 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\neq 0$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\top$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$e_1 < e_2$	$\bot$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
< 0	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$\bot$	$s^\#$
$= 0$	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$\bot$	$s^\#$
> 0	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≤ 0	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$\bot$	$s^\#$
$\neq 0$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\top$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x < e$	$\bot$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
< 0	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto < 0]$
$= 0$	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto < 0]$
> 0	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≤ 0	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto < 0]$
$\neq 0$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\top$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$e_1 > e_2$	$\perp$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
< 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$= 0$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$s^\#$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
> 0	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$s^\#$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≤ 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\neq 0$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$s^\#$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\top$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x > e$	$\bot$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
< 0	$\bot$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$
$= 0$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$s^{\#}$	$\bot$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$
> 0	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$s^{\#}$	$\bot$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$
≤ 0	$\bot$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$
$\neq 0$	$\bot$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$
≥ 0	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$s^{\#}$	$\bot$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$
$\top$	$\bot$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$

Equality

$e_1 \leq e_2$	$\perp$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
< 0	$\perp$	$s^\#$	$\perp$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$\perp$	$s^\#$
$= 0$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
> 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≤ 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\neq 0$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\top$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x \leq e$	$\bot$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
< 0	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto < 0]$
$= 0$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#[x \mapsto = 0]$	$s^\#[x \mapsto \leq 0]$
> 0	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≤ 0	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#[x \mapsto = 0]$	$s^\#[x \mapsto \leq 0]$
$\neq 0$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\top$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$e_1 \geq e_2$	$\perp$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
< 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$= 0$	$\perp$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
> 0	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$s^\#$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≤ 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\neq 0$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	$\perp$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\top$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x \geq e$	$\bot$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
< 0	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$= 0$	$\bot$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto = 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto \geq 0]$
> 0	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$
≤ 0	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\neq 0$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	$\bot$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto = 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto \geq 0]$
$\top$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Join

$\vee$	$\bot$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$	$\top$
$(-\infty, d]$	$(-\infty, d]$	$(-\infty, max(b, d)]$	$(-\infty, max(b, d)]$	$\top$	$\top$
$[c, d]$	$[c, d]$	$(-\infty, max(b, d)]$	$[min(a, c), max(b, d)]$	$[min(a, c), +\infty)$	$\top$
$[c, +\infty)$	$[c, +\infty)$	$\top$	$[min(a, c), +\infty)$	$[min(a, c), +\infty)$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Addition

$+$	$\bot$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$	$\top$
$\bot$	$\bot$				
$(-\infty, d]$	$\bot$	$(-\infty, b+d]$			
$[c, d]$	$\bot$	$(-\infty, b+d]$	$[a+c, b+d]$		
$[c, +\infty)$	$\bot$	$\top$	$[a+c, +\infty)$	$[a+c, +\infty)$	
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Subtraction

$-$	$\bot$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$(-\infty, d]$	$\bot$	$\top$	$[a-d, +\infty)$	$[a-d, +\infty)$	$\top$
$[c, d]$	$\bot$	$(-\infty, b-c]$	$[a-d, b-c]$	$[a-d, +\infty)$	$\top$
$[c, +\infty)$	$\bot$	$(-\infty, b-c]$	$(-\infty, b-c]$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Multiplication

$*$	$\perp$	$(-\infty, b]$		$[a, b]$		$[a, +\infty)$	
$\perp$	$\perp$	$\perp$		$\perp$		$\perp$	
$(-\infty, d]$	$\perp$	$b > 0 \vee d > 0$ $b \leq 0 \wedge d \leq 0$	$\top$ $[bd, +\infty)$	$(a < 0 \wedge b > 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0)$ $(a \leq 0 \wedge b \leq 0) \wedge (a \neq 0 \vee b \neq 0)$ $(a \geq 0 \wedge b \geq 0) \wedge (a \neq 0 \vee b \neq 0)$ $(a = 0 \wedge b = 0)$	$\top$ $[min(ad, bd), +\infty)$ $(-\infty, max(ad, bd)]$ $[0, 0]$	$d > 0 \vee a < 0$ $d \leq 0 \wedge a \geq 0$	$\top$ $(-\infty, ad]$
$[c, d]$	$\perp$	$(c < 0 \wedge d > 0) \vee (c > 0 \wedge d < 0)$ $(c \leq 0 \wedge d \leq 0) \wedge (c \neq 0 \vee d \neq 0)$ $(c \geq 0 \wedge d \geq 0) \wedge (c \neq 0 \vee d \neq 0)$ $(c = 0 \wedge d = 0)$	$\top$ $[min(bc, bd), +\infty)$ $(-\infty, max(bc, bd)]$ $[0, 0]$	$[min(ac, ad, bc, bd), max(ac, ad, bc, bd)]$		$(c < 0 \wedge d > 0) \vee (c > 0 \wedge d < 0)$ $(c \leq 0 \wedge d \leq 0) \wedge (c \neq 0 \vee d \neq 0)$ $(c \geq 0 \wedge d \geq 0) \wedge (c \neq 0 \vee d \neq 0)$ $(c = 0 \wedge d = 0)$	$\top$ $(-\infty, max$ $[min(ac, a$ $[0, 0]$
$[c, +\infty)$	$\perp$	$b > 0 \vee c < 0$ $b \leq 0 \wedge c \geq 0$	$\top$ $(-\infty, bc]$	$(a < 0 \wedge b > 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0)$ $(a \leq 0 \wedge b \leq 0) \wedge (a \neq 0 \vee b \neq 0)$ $(a \geq 0 \wedge b \geq 0) \wedge (a \neq 0 \vee b \neq 0)$ $(a = 0 \wedge b = 0)$	$\top$ $(-\infty, max(ac, bc)]$ $[min(ac, bc), +\infty)$ $[0, 0]$	$a < 0 \vee c < 0$ $a \geq 0 \wedge c \geq 0$	$\top$ $(-\infty, ac]$
$\top$	$\perp$	$\top$		$a = b = 0$ $a \neq 0 \vee b \neq 0$	$[0, 0]$ $\top$	$\top$	

Division

$/$	$\bot$	$(-\infty, b]$		$[a, b]$	
$\bot$	$\bot$	$\bot$		$\bot$	
$(-\infty, d]$	$\bot$	$d \leq 0$ otherwise	$[min(0, b/d), +\infty)$ $\top$	$d \leq 0$ $d > 0 \wedge a = b = 0$ $d > 0 \wedge a \geq 0 \wedge b > 0$ $d > 0 \wedge a < 0 \wedge b \leq 0$ otherwise	$[min(0, a/d, b/d), max(0, a/d, b/d)]$ $[0, 0]$ $(-\infty, max(a/d, b/d)]$ $[min(a/d, b/d), +\infty)$ $\top$
$[c, d]$	$\bot$	$c = d = 0$ $0 < c \leq d$ $0 = c < d \wedge b \leq 0$ $c \leq d < 0$ otherwise	$\bot$ $(-\infty, max(b/c, b/d)]$ $(-\infty, b/d]$ $[min(b/c, b/d), +\infty)$ $\top$	$c = d = 0$ $c < 0 < d$ otherwise	$\bot$ $[min(0, a/c, b/c), max(0, a/c, b/c)] \vee [min(0, a/d, b/d), m$ $[min(a/c, a/d, b/c, b/d), max(a/c, a/d, b/c, b/d)]$
$[c, +\infty)$	$\bot$	$c \geq 0$ otherwise	$(-\infty, max(0, b/c)]$ $\top$	$c \geq 0$ $c < 0 \wedge a = b = 0$ $c < 0 \wedge a \geq 0 \wedge b > 0$ $c < 0 \wedge a < 0 \wedge b \leq 0$ otherwise	$[min(0, a/c, b/c), max(0, a/c, b/c)]$ $[0, 0]$ $[min(a/c, b/c), +\infty)$ $(-\infty, max(a/c, b/c)]$ $\top$
$\top$	$\bot$	$\top$		$a = b = 0$ otherwise	$[0, 0]$ $\top$

Equality

$e_1 = e_2$	$\perp$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$(-\infty, d]$	$\perp$	$s^\#$	if $a > d$ then $\perp$ else $s^\#$	if $a > d$ then $\perp$ else $s^\#$	$s^\#$
$[c, d]$	$\perp$	if $b < c$ then $\perp$ else $s^\#$	if $a > d$ or $b < c$ then $\perp$ else $s^\#$	if $a > d$ then $\perp$ else $s^\#$	$s^\#$
$[c, +\infty)$	$\perp$	if $b < c$ then $\perp$ else $s^\#$	if $b < c$ then $\perp$ else $s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\top$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x = e$	$\bot$	$(-\infty, b]$		$[a, b]$	
$\bot$	$\bot$	$\bot$		$\bot$	
$(-\infty, d]$	$\bot$	$b \leq d$ $b > d$	$s^{\#}$ $s^{\#}[x \mapsto (-\infty, d]]$	$a > d$ $a \leq d \wedge b > d$ $a \leq d \wedge b \leq d$	$\bot$ $s^{\#}[x \mapsto [a, d]]$ $s^{\#}$
$[c, d]$	$\bot$	$b < c$ $c \leq b \leq d$ $b > d$	$\bot$ $s^{\#}[x \mapsto [c, b]]$ $s^{\#}[x \mapsto [c, d]]$	$b < c \vee a > d$ $b > d \wedge a < c$ $b > d \wedge a \geq c$ $c \leq b \leq d \wedge a < c$ $c \leq b \leq d \wedge c \leq a \leq d$	$\bot$ $s^{\#}[x \mapsto [c, d]]$ $s^{\#}[x \mapsto [a, d]]$ $s^{\#}[x \mapsto [c, b]]$ $s^{\#}$
$[c, +\infty)$	$\bot$	$b < c$ $b \geq c$	$\bot$ $s^{\#}[x \mapsto [c, b]]$	$b < c$ $b \geq c \wedge a < c$ $a \geq c$	$\bot$ $s^{\#}[x \mapsto [c, b]]$ $s^{\#}$
$\top$	$\bot$	$s^{\#}$		$s^{\#}$	

Equality

$e_1 \neq e_2$	$\perp$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$(-\infty, d]$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$[c, d]$	$\perp$	$s^\#$	$a = b = c = d$ $\perp$ otherwise $s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$[c, +\infty)$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\top$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x \neq e$	$\bot$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$(-\infty, d]$	$\bot$	$s^{\#}$	$s^{\#}$
$[c, d]$	$\bot$	$\begin{array}{ll} b = c = d & s^{\#}[x \mapsto (-\infty, b-1]] \\ \text{otherwise} & s^{\#} \end{array}$	$\begin{array}{ll} a = c = d \wedge a \neq b & s^{\#}[x \mapsto [a+1, \\ b = c = d \wedge a \neq b & s^{\#}[x \mapsto [a, b - \\ a = b = c = d & \bot \\ \text{otherwise} & s^{\#} \end{array}$
$[c, +\infty)$	$\bot$	$s^{\#}$	$s^{\#}$
$\top$	$\bot$	$s^{\#}$	$s^{\#}$

Equality

$e_1 < e_2$	$\bot$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$(-\infty, d]$	$\bot$	$s^{\#}$	$a \geq d \quad \bot$ $a < d \quad s^{\#}$	$a \geq d \quad \bot$ $a < d \quad s^{\#}$	$s^{\#}$
$[c, d]$	$\bot$	$s^{\#}$	$a \geq d \quad \bot$ $a < d \quad s^{\#}$	$a \geq d \quad \bot$ $a < d \quad s^{\#}$	$s^{\#}$
$[c, +\infty)$	$\bot$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$
$\top$	$\bot$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$

Equality

$x < e$	$\perp$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$(-\infty, d]$	$\perp$	$b \geq d$ $\quad s^\#[x \mapsto (-\infty, d-1]]$ $b < d$ $\quad s^\#$	$a \geq d$ $\quad \perp$ $a < d \wedge b \geq d$ $\quad s^\#[x \mapsto [a, d-1]]$ $a < d \wedge b < d$ $\quad s^\#$	$a \geq d$ $\quad \perp$ $a < d$ $\quad s^\#[x \mapsto$
$[c, d]$	$\perp$	$b \geq d$ $\quad s^\#[x \mapsto (-\infty, d-1]]$ $b < d$ $\quad s^\#$	$a \geq d$ $\quad \perp$ $a < d \wedge b \geq d$ $\quad s^\#[x \mapsto [a, d-1]]$ $a < d \wedge b < d$ $\quad s^\#$	$a \geq d$ $\quad \perp$ $a < d$ $\quad s^\#[x \mapsto$
$[c, +\infty)$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\top$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$e_1 \leq e_2$	$\perp$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$(-\infty, d]$	$\perp$	$s^\#$	$a > d$ $\perp$ $a \leq d$ $s^\#$	$a > d$ $\perp$ $a \leq d$ $s^\#$	$s^\#$
$[c, d]$	$\perp$	$s^\#$	$a > d$ $\perp$ $a \leq d$ $s^\#$	$a > d$ $\perp$ $a \leq d$ $s^\#$	$s^\#$
$[c, +\infty)$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\top$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x \leq e$	$\perp$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$(-\infty, d]$	$\perp$	$b > d \quad s^{\#}[x \mapsto (-\infty, d]]$ $b \leq d \quad s^{\#}$	$a > d \quad \perp$ $a \leq d \wedge b > d \quad s^{\#}[x \mapsto [a, d]]$ $a \leq d \wedge b \leq d \quad s^{\#}$	$a > d \quad \perp$ $a \leq d \quad s^{\#}[x \mapsto [a, d]]$
$[c, d]$	$\perp$	$b > d \quad s^{\#}[x \mapsto (-\infty, d]]$ $b \leq d \quad s^{\#}$	$a > d \quad \perp$ $a \leq d \wedge b > d \quad s^{\#}[x \mapsto [a, d]]$ $a \leq d \wedge b \leq d \quad s^{\#}$	$a > d \quad \perp$ $a \leq d \quad s^{\#}[x \mapsto [a, d]]$
$[c, +\infty)$	$\perp$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$
$\top$	$\perp$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$

Equality

$e_1 > e_2$	$\perp$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$(-\infty, d]$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$[c, d]$	$\perp$	$b \leq c \quad \perp$ $b > c \quad s^\#$	$b \leq c \quad \perp$ $b > c \quad s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$[c, +\infty)$	$\perp$	$b \leq c \quad \perp$ $b > c \quad s^\#$	$b \leq c \quad \perp$ $b > c \quad s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\top$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x > e$	$\perp$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$(-\infty, d]$	$\perp$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$
$[c, d]$	$\perp$	$b \leq c \quad \perp$ $b > c \quad s^{\#}[x \mapsto [c+1, b]]$	$b \leq c \quad \perp$ $b > c \wedge a \leq c \quad s^{\#}[x \mapsto [c+1, b]]$ $b > c \wedge a > c \quad s^{\#}$	$a \leq c \quad s^{\#}[x \mapsto [c +$ $a > c \quad s^{\#}$
$[c, +\infty)$	$\perp$	$b \leq c \quad \perp$ $b > c \quad s^{\#}[x \mapsto [c+1, b]]$	$b \leq c \quad \perp$ $b > c \wedge a \leq c \quad s^{\#}[x \mapsto [c+1, b]]$ $b > c \wedge a > c \quad s^{\#}$	$a \leq c \quad s^{\#}[x \mapsto [c +$ $a > c \quad s^{\#}$
$\top$	$\perp$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$

Equality

$e_1 \geq e_2$	$\perp$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$(-\infty, d]$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$[c, d]$	$\perp$	$b < c$ $\perp$ $b \geq c$ $s^\#$	$b < c$ $\perp$ $b \geq c$ $s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$[c, +\infty)$	$\perp$	$b < c$ $\perp$ $b \geq c$ $s^\#$	$b < c$ $\perp$ $b \geq c$ $s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\top$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x \geq e$	$\perp$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$(-\infty, d]$	$\perp$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$
$[c, d]$	$\perp$	$b < c$ $\perp$ $b \geq c$ $s^{\#}[x \mapsto [c, b]]$	$b < c$ $\perp$ $b \geq c \wedge a < c$ $s^{\#}[x \mapsto [c, b]]$ $b \geq c \wedge a \geq c$ $s^{\#}$	$a < c$ $s^{\#}[x \mapsto$ $a \geq c$ $s^{\#}$
$[c, +\infty)$	$\perp$	$b < c$ $\perp$ $b \geq c$ $s^{\#}[x \mapsto [c, b]]$	$b < c$ $\perp$ $b \geq c \wedge a < c$ $s^{\#}[x \mapsto [c, b]]$ $b \geq c \wedge a \geq c$ $s^{\#}$	$a < c$ $s^{\#}[x \mapsto$ $a \geq c$ $s^{\#}$
$\top$	$\perp$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$