#### Software Verification

Borsetto Riccardo

Univerisità degli Studi di Padova

5th December 2022

#### Join

V	上	< 0	= 0	> 0	<u>≤</u> 0	<b>=</b> 0	≥ 0	Т
1	上							
< 0	< 0	< 0						
= 0	= 0	<b>≤</b> 0	= 0					
> 0	> 0	≥ 0	≥ 0	> 0				
<u>≤ 0</u>	≤ 0	≤ 0	≤ 0	Т	≤ 0			
<b>=</b> 0	<i>≠</i> 0	<i>≠</i> 0	Т	<i>≠</i> 0	Т	<i>≠</i> 0		
≥ 0	≥ 0	Т	≥ 0	≥ 0	Т	Т	≥ 0	
Т	Т	Т	Т	Т	Т	Т	Т	Т

#### Addition

+	$\perp$	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>=</b> 0	≥ 0	Т
上	$\vdash$							
< 0	$\perp$	< 0						
= 0	$\perp$	< 0	= 0					
> 0	$\perp$	Т	> 0	> 0				
<u>≤</u> 0	$\perp$	< 0	≤ 0	Т	≤ 0			
<i>≠</i> 0	$\perp$	Т	<i>≠</i> 0	Т	Т	Т		
≥ 0	$\perp$	Т	≥ 0	> 0	Т	Т	≥ 0	
Т		Т	Т	Т	Т	Т	Т	Т

#### Subtraction

_	Τ	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>=</b> 0	≥ 0	Т
上	$\vdash$	$\perp$	$\perp$	上	$\perp$	上		$\perp$
< 0	$\perp$	Т	> 0	> 0	Τ	Т	> 0	T
= 0	$\perp$	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>≠</b> 0	≥ 0	T
> 0	$\perp$	< 0	< 0	Т	< 0	Т	Т	T
<u>≤</u> 0	$\perp$	Т	≥ 0	> 0	Т	Т	≥ 0	T
<i>≠</i> 0	$\perp$	Т	<i>≠</i> 0	Т	Τ	Т	Т	Т
≥ 0	工	< 0	<b>≤</b> 0	Т	<b>≤</b> 0	Т	Т	T
Т		Т	Т	Т	Т	Т	Т	Т

# Multiplication

*	1	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>=</b> 0	≥ 0	Т
1	上							
< 0	T	> 0						
= 0	1	= 0	= 0					
> 0	1	< 0	= 0	> 0				
<u>≤</u> 0		≥ 0	= 0	≤ 0	≥ 0			
<i>≠</i> 0	T	<i>≠</i> 0	= 0	<i>≠</i> 0	Т	<i>≠</i> 0		
≥ 0		≤ 0	= 0	≥ 0	≤ 0	Т	≥ 0	
Т	1	Т	= 0	Т	Т	Т	Т	Т

#### Division

/	$\perp$	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>=</b> 0	≥ 0	Т
上	$\vdash$	$\perp$	上	上	上	上		1
< 0	$\perp$	> 0	= 0	< 0	≥ 0	<i>≠</i> 0	≤ 0	Т
= 0	$\perp$		1			T	T	1
> 0	$\perp$	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>≠</b> 0	≥ 0	Т
<u>≤</u> 0	$\perp$	> 0	= 0	< 0	≥ 0	<b>≠</b> 0	≤ 0	Т
<i>≠</i> 0	$\perp$	<i>≠</i> 0	= 0	<i>≠</i> 0	Т	<i>≠</i> 0	Т	Т
≥ 0	$\perp$	< 0	= 0	> 0	≤ 0	<i>≠</i> 0	≥ 0	Т
Т		<i>≠</i> 0	= 0	<i>≠</i> 0	Т	<i>≠</i> 0	Т	Т

$e_1=e_2$	T	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>=</b> 0	≥ 0	Т
< 0		s <sup>#</sup>						
= 0	1	1	s <sup>#</sup>					
> 0	上	T	T	s <sup>#</sup>				
<b>≤</b> 0		s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>		s <sup>#</sup>			
<i>≠</i> 0		s <sup>#</sup>		s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>		
≥ 0	上	1	s <sup>#</sup>					
Т	1	s <sup>#</sup>						

x = e	Τ	< 0	= 0	> 0	≤ 0	<b>≠</b> 0	≥ 0	Т
$\perp$	T	1	Τ	Τ	1		1	
< 0	T	s#	Τ	Τ	$s^{\#}[x\mapsto <0]$	$s^{\#}[x \mapsto < 0]$	1	$s^{\#}[x\mapsto <0]$
= 0	$\perp$	$\perp$	s <sup>#</sup>	$\perp$	$s^{\#}[x \mapsto = 0]$	Τ	$s^{\#}[x \mapsto = 0]$	$s^{\#}[x\mapsto=0]$
> 0	$\perp$	$\perp$	1	s <sup>#</sup>	1	$s^{\#}[x\mapsto>0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$
≤ 0	$\perp$	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	1	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x\mapsto <0]$	$s^{\#}[x \mapsto = 0]$	$s^{\#}[x\mapsto\leq 0]$
$\neq 0$	$\perp$	s <sup>#</sup>	1	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x\mapsto <0]$	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x\mapsto\neq 0]$
≥ 0	$\perp$	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x \mapsto = 0]$	$s^{\#}[x\mapsto>0]$	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x\mapsto\geq 0]$
Т	$\perp$	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>

$e_1 \neq e_2$		< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>=</b> 0	≥ 0	Т
< 0		s <sup>#</sup>						
= 0	1	s <sup>#</sup>	T					
> 0	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>				
<b>≤</b> 0	L	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>			
<i>≠</i> 0	T	s <sup>#</sup>						
≥ 0	L	s <sup>#</sup>						
Т		s <sup>#</sup>						

$x \neq e$	T	< 0	= 0	> 0	<u>≤</u> 0	<b>=</b> 0	≥ 0	Т
1	1	Τ	1	1	1	1		1
< 0	T	s#	s <sup>#</sup>	s#	s#	s#	s#	s <sup>#</sup>
= 0		s <sup>#</sup>	Τ	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x \mapsto < 0]$	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x\mapsto\neq 0]$
> 0		s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>		s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
≤ 0		s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
<b>=</b> 0	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
≥ 0	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
Τ	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>

$e_1 < e_2$	T	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>=</b> 0	≥ 0	Т
	L							
< 0	T	s <sup>#</sup>			s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	T	s <sup>#</sup>
= 0		s <sup>#</sup>	T	T	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	1	s <sup>#</sup>
> 0	T	s <sup>#</sup>						
<u>≤</u> 0	T	s <sup>#</sup>	T	T	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	T	s <sup>#</sup>
<i>≠</i> 0	$\perp$	s <sup>#</sup>						
≥ 0	$\perp$	s <sup>#</sup>						
Т	1	s <sup>#</sup>						

x < e	Τ	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>≠</b> 0	≥ 0	Т
1	Τ.	1	1	1	1	1	1	1
< 0	Т	s#	Τ	Τ	$s^{\#}[x\mapsto <0]$	$s^{\#}[x\mapsto <0]$	Τ	$s^{\#}[x\mapsto <0]$
= 0	Т	s <sup>#</sup>	Τ	Τ	$s^{\#}[x \mapsto < 0]$	$s^{\#}[x\mapsto <0]$	Τ	$s^{\#}[x\mapsto <0]$
> 0	Т	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
≤ 0	Т	s <sup>#</sup>	1	1	$s^{\#}[x\mapsto <0]$	$s^{\#}[x \mapsto < 0]$	1	$s^{\#}[x\mapsto <0]$
<b>=</b> 0	Т	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
≥ 0	Т	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
Τ	Ī	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>

$e_1 > e_2$		< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>=</b> 0	≥ 0	Т
		1		1			1	1
< 0	T	s <sup>#</sup>						
= 0		1		s <sup>#</sup>	上	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
> 0	T	1	1	s <sup>#</sup>	T	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
<b>≤</b> 0	L	s <sup>#</sup>						
<i>≠</i> 0		s <sup>#</sup>						
≥ 0		1	1	s <sup>#</sup>		s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
Т	$\perp$	s <sup>#</sup>						

x > e	T	< 0	= 0	> 0	≤ 0	<b>≠</b> 0	≥ 0	Т
	T	Τ	Τ	Τ	Τ	1	1	1
< 0	T	s#	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s#	s#	s#	s#
= 0	1	1	Τ	s <sup>#</sup>	Τ	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$
> 0	1	Τ	1	s <sup>#</sup>	1	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$
≤ 0	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>				
<b>=</b> 0	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>				
≥ 0	1	1	1	s <sup>#</sup>	1	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$
Τ	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>				

$e_1 \leq e_2$	T	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>=</b> 0	≥ 0	Т
	L							
< 0	T	s <sup>#</sup>			s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	T	s <sup>#</sup>
= 0	上	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>		s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
> 0	T	s <sup>#</sup>						
<b>≤</b> 0	T	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	T	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
<i>≠</i> 0	$\perp$	s <sup>#</sup>						
≥ 0	T	s <sup>#</sup>						
Т	1	s <sup>#</sup>						

<i>x</i> ≤ <i>e</i>	Τ	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>≠</b> 0	≥ 0	Т
	Τ	1	Τ	Τ	1		1	1
< 0	Τ	s#	Τ	Τ	$s^{\#}[x\mapsto <0]$	$s^{\#}[x\mapsto <0]$	1	$s^{\#}[x\mapsto <0]$
= 0	$\perp$	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	$\perp$	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x \mapsto < 0]$	$s^{\#}[x \mapsto = 0]$	$s^{\#}[x\mapsto\leq 0]$
> 0	$\perp$	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
<b>≤</b> 0	Т	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	1	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x\mapsto <0]$	$s^{\#}[x \mapsto = 0]$	$s^{\#}[x\mapsto\leq 0]$
$\neq 0$	$\perp$	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
≥ 0	$\perp$	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
Т	$\perp$	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>

$e_1 \geq e_2$		< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>=</b> 0	≥ 0	Т
			T	T			T	1
< 0		s <sup>#</sup>						
= 0			s <sup>#</sup>					
> 0	1	T	T	s <sup>#</sup>	T	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
<u>≤</u> 0	L	s <sup>#</sup>						
<i>≠</i> 0		s <sup>#</sup>						
≥ 0	L	1	s <sup>#</sup>					
Т	上	s <sup>#</sup>						

$x \ge e$	Τ	< 0	= 0	> 0	<b>≤</b> 0	<b>≠</b> 0	≥ 0	Т
	T	1	Τ	Τ	1		1	1
< 0	T	s#	s#	s#	s#	s#	s#	s <sup>#</sup>
= 0	1	$\perp$	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x \mapsto = 0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x\mapsto \geq 0]$
> 0	Τ	$\perp$	$\perp$	s <sup>#</sup>	1	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x \mapsto > 0]$	$s^{\#}[x\mapsto>0]$
<b>≤</b> 0		s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
$\neq 0$	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>
≥ 0	1	1	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x\mapsto=0]$	$s^{\#}[x\mapsto>0]$	s <sup>#</sup>	$s^{\#}[x\mapsto\geq 0]$
Т	$\perp$	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>	s <sup>#</sup>