

Software Verification

Borsetto Riccardo

Univerisità degli Studi di Padova

5th December 2022

Join

\vee	\perp	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	\top
\perp	\perp							
< 0	< 0	< 0						
$= 0$	$= 0$	≤ 0	$= 0$					
> 0	> 0	≥ 0	≥ 0	> 0				
≤ 0	≤ 0	≤ 0	≤ 0	\top	≤ 0			
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	\top	$\neq 0$	\top	$\neq 0$		
≥ 0	≥ 0	\top	≥ 0	≥ 0	\top	\top	≥ 0	
\top	\top	\top	\top	\top	\top	\top	\top	\top

Addition

$+$	\perp	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	\top
\perp	\perp							
< 0	\perp	< 0						
$= 0$	\perp	< 0	$= 0$					
> 0	\perp	\top	> 0	> 0				
≤ 0	\perp	< 0	≤ 0	\top	≤ 0			
$\neq 0$	\perp	\top	$\neq 0$	\top	\top	\top		
≥ 0	\perp	\top	≥ 0	> 0	\top	\top	≥ 0	
\top	\perp	\top	\top	\top	\top	\top	\top	\top

Subtraction

$-$	\perp	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	\top
\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp
< 0	\perp	\top	> 0	> 0	\top	\top	> 0	\top
$= 0$	\perp	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	\top
> 0	\perp	< 0	< 0	\top	< 0	\top	\top	\top
≤ 0	\perp	\top	≥ 0	> 0	\top	\top	≥ 0	\top
$\neq 0$	\perp	\top	$\neq 0$	\top	\top	\top	\top	\top
≥ 0	\perp	< 0	≤ 0	\top	≤ 0	\top	\top	\top
\top	\perp	\top	\top	\top	\top	\top	\top	\top

Multiplication

*	\perp	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	\top
\perp	\perp							
< 0	\perp	> 0						
$= 0$	\perp	$= 0$	$= 0$					
> 0	\perp	< 0	$= 0$	> 0				
≤ 0	\perp	≥ 0	$= 0$	≤ 0	≥ 0			
$\neq 0$	\perp	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	\top	$\neq 0$		
≥ 0	\perp	≤ 0	$= 0$	≥ 0	≤ 0	\top	≥ 0	
\top	\perp	\top	$= 0$	\top	\top	\top	\top	\top

Division

/	\perp	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	\top
\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp
< 0	\perp	> 0	$= 0$	< 0	≥ 0	$\neq 0$	≤ 0	\top
$= 0$	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp
> 0	\perp	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	\top
≤ 0	\perp	> 0	$= 0$	< 0	≥ 0	$\neq 0$	≤ 0	\top
$\neq 0$	\perp	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	\top	$\neq 0$	\top	\top
≥ 0	\perp	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	\top
\top	\perp	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	\top	$\neq 0$	\top	\top

Equality

$e_1 = e_2$	\perp	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	\top
\perp	\perp							
< 0	\perp	$s^\#$						
$= 0$	\perp	\perp	$s^\#$					
> 0	\perp	\perp	\perp	$s^\#$				
≤ 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	\perp	$s^\#$			
$\neq 0$	\perp	$s^\#$	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$		
≥ 0	\perp	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	
\top	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x = e$	\perp	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	\top
\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp
< 0	\perp	$s^\#$	\perp	\perp	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	\perp	$s^\#[x \mapsto < 0]$
$= 0$	\perp	\perp	$s^\#$	\perp	$s^\#[x \mapsto = 0]$	\perp	$s^\#[x \mapsto = 0]$	$s^\#[x \mapsto = 0]$
> 0	\perp	\perp	\perp	$s^\#$	\perp	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$
≤ 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	\perp	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#[x \mapsto = 0]$	$s^\#[x \mapsto \leq 0]$
$\neq 0$	\perp	$s^\#$	\perp	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto \neq 0]$
≥ 0	\perp	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto = 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto \geq 0]$
\top	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$e_1 \neq e_2$	\perp	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	\top
\perp	\perp							
< 0	\perp	$s^\#$						
$= 0$	\perp	$s^\#$	\perp					
> 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$				
≤ 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$			
$\neq 0$	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$		
≥ 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	
\top	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x \neq e$	\perp	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	\top
\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp
< 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$= 0$	\perp	$s^\#$	\perp	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto \neq 0]$
> 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≤ 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\neq 0$	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
\top	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$e_1 < e_2$	\perp	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	\top
\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp
< 0	\perp	$s^\#$	\perp	\perp	$s^\#$	$s^\#$	\perp	$s^\#$
$= 0$	\perp	$s^\#$	\perp	\perp	$s^\#$	$s^\#$	\perp	$s^\#$
> 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≤ 0	\perp	$s^\#$	\perp	\perp	$s^\#$	$s^\#$	\perp	$s^\#$
$\neq 0$	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
\top	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x < e$	\perp	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	\top
\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp
< 0	\perp	$s^\#$	\perp	\perp	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	\perp	$s^\#[x \mapsto < 0]$
$= 0$	\perp	$s^\#$	\perp	\perp	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	\perp	$s^\#[x \mapsto < 0]$
> 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≤ 0	\perp	$s^\#$	\perp	\perp	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	\perp	$s^\#[x \mapsto < 0]$
$\neq 0$	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
\top	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$e_1 > e_2$	\perp	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	\top
\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp
< 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$= 0$	\perp	\perp	\perp	$s^\#$	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
> 0	\perp	\perp	\perp	$s^\#$	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≤ 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\neq 0$	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	\perp	\perp	\perp	$s^\#$	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
\top	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x > e$	\perp	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	\top
\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp
< 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$= 0$	\perp	\perp	\perp	$s^\#$	\perp	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$
> 0	\perp	\perp	\perp	$s^\#$	\perp	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$
≤ 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\neq 0$	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	\perp	\perp	\perp	$s^\#$	\perp	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$
\top	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$e_1 \leq e_2$	\perp	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	\top
\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp
< 0	\perp	$s^\#$	\perp	\perp	$s^\#$	$s^\#$	\perp	$s^\#$
$= 0$	\perp	$s^\#$	$s^\#$	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
> 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≤ 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\neq 0$	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
\top	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x \leq e$	\perp	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	\top
\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp
< 0	\perp	$s^\#$	\perp	\perp	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	\perp	$s^\#[x \mapsto < 0]$
$= 0$	\perp	$s^\#$	$s^\#$	\perp	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#[x \mapsto = 0]$	$s^\#[x \mapsto \leq 0]$
> 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≤ 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	\perp	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#[x \mapsto = 0]$	$s^\#[x \mapsto \leq 0]$
$\neq 0$	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
\top	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$e_1 \geq e_2$	\perp	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	\top
\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp
< 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$= 0$	\perp	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
> 0	\perp	\perp	\perp	$s^\#$	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≤ 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\neq 0$	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	\perp	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
\top	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x \geq e$	\perp	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	\top
\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp
< 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$= 0$	\perp	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto = 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto \geq 0]$
> 0	\perp	\perp	\perp	$s^\#$	\perp	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$
≤ 0	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\neq 0$	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	\perp	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto = 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto \geq 0]$
\top	\perp	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$