Software Verification

Borsetto Riccardo

Univerisità degli Studi di Padova

5th December 2022

Language

$$
\begin{aligned}
&\textbf{Abinop} \ni \text{aop} ::= + \mid - \mid * \mid \backslash \\
&\textbf{Aexp} \ni e ::= x \mid n \mid -e \mid e_1 \text{ aop } e_2 \\
&\textbf{Bbinop} \ni \text{bop} ::= = \mid \neq \mid < \mid \leq \mid > \mid \geq \\
&\textbf{Bexp} \ni b ::= \mathit{true} \mid \mathit{false} \mid e_1 \text{ bop } e_2 \mid b_1 \wedge b_2 \mid b_1 \vee b_2 \mid \neg b \\
&\textbf{While} \ni S ::= x := e \mid \textbf{skip} \mid S_1 ; S_2 \mid \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2 \\
&\qquad\qquad\quad \mid \textbf{while } b \textbf{ do } S
\end{aligned}
$$

Abstract Interpreter

$$
\begin{aligned}
& \mathit{AI} : \textbf{While} \to \mathit{bool} \to \mathbb{S} \to \mathbb{S} \times \mathit{List}(\mathbb{S}) \\
& \quad \mathit{AI}(x := e)(w)(s^\sharp) := (s^\sharp[x \mapsto \mathcal{A}^\sharp(e)(s^\sharp)], []) \\
& \quad \mathit{AI}(\textbf{skip})(w)(s^\sharp) := (s^\sharp, []) \\
& \quad \mathit{AI}(S_1; S_2)(w)(s^\sharp) := (u^\sharp, \mathit{invs}_1 +_{\mathit{List}(\mathbb{S})} \mathit{invs}_2) \\
& \qquad\qquad\qquad \text{with } (u^\sharp, \mathit{invs}_2) := \mathit{AI}(S_2)(w)(t^\sharp) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad (t^\sharp, \mathit{invs}_1) := \mathit{AI}(S_1)(w)(s^\sharp) \\
& \quad \mathit{AI}(\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2)(w)(s^\sharp) := (t^\sharp \vee_{\mathbb{S}} u^\sharp, \mathit{invs}_1 +_{\mathit{List}(\mathbb{S})} \mathit{invs}_2) \\
& \qquad\qquad\qquad \text{with } (t^\sharp, \mathit{invs}_1) := (\mathit{AI}(S_1)(w) \circ \mathcal{B}^\sharp(b))(s^\sharp) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad (u^\sharp, \mathit{invs}_2) := (\mathit{AI}(S_2)(w) \circ \mathcal{B}^\sharp(\neg b))(s^\sharp) \\
& \quad \mathit{AI}(\textbf{while } b \textbf{ do } S)(w)(s^\sharp) := (\mathcal{B}^\sharp(\neg b)(t^\sharp), \mathit{invs}) \\
& \qquad\qquad\qquad \text{with } (t^\sharp, \mathit{invs}) := \text{ab-lfp}(\mathit{AI}(S)(w))(b)(t^\sharp)(w)
\end{aligned}
$$

Abstract Semantics of arithmetic expressions

$$\mathcal{A}^\sharp : \mathbf{Aexp} \to \mathbb{S} \to A$$

$$\mathcal{A}^\sharp(n)(s^\sharp) := \alpha_{singleton}(n)$$

$$\mathcal{A}^\sharp(x)(s^\sharp) := \mathrm{lookup}_{\mathbb{S}}(s^\sharp)(x)$$

$$\mathcal{A}^\sharp(e_1 \text{ aop } e_2)(s^\sharp) := \mathcal{A}^\sharp(e_1)(s^\sharp) \text{ aop}^A \mathcal{A}^\sharp(e_2)(s^\sharp)$$

$$\mathcal{A}^\sharp(-e)(s^\sharp) := -^A \mathcal{A}^\sharp(e)(s^\sharp)$$

Abstract Semantics of boolean expressions

$$\mathcal{B}^\sharp : \textbf{Bexp} \to \mathbb{S} \to \mathbb{S}$$
$$\mathcal{B}^\sharp(\mathit{true})(s^\sharp) := s^\sharp$$
$$\mathcal{B}^\sharp(\mathit{false})(s^\sharp) := \bot_{\mathbb{S}}$$
$$\mathcal{B}^\sharp(e_1 \text{ bop } e_2)(s^\sharp) :=$$
$$\mathcal{B}^\sharp(b_1 \wedge b_2)(s^\sharp) := (\mathcal{B}^\sharp(b_2) \circ \mathcal{B}^\sharp(b_1))(s^\sharp)$$
$$\mathcal{B}^\sharp(b_1 \vee b_2)(s^\sharp) := \mathcal{B}^\sharp(b_1)(s^\sharp) \vee_{\mathbb{S}} \mathcal{B}^\sharp(b_2)(s^\sharp)$$

Step

$$\begin{aligned}\text{step} &: (\mathbb{S} \to \mathbb{S} \times \mathit{List}(\mathbb{S})) \to \mathit{bool} \to \mathbb{S} \to \mathbb{S} \to \mathbb{S} \times \mathit{List}(\mathbb{S}) \\ \text{step}(f)(b)(s^\sharp)(t^\sharp) &:= (s^\sharp \vee_{\mathbb{S}} u^\sharp, \mathit{invs}) \\ &\quad \text{with } (u^\sharp, \mathit{invs}) := f(\mathcal{B}^\sharp(b)(t^\sharp))\end{aligned}$$

Invariant Check

$$
\begin{aligned}
&\text{is-inv} : (\mathbb{S} \to \mathbb{S} \times \mathit{List}(\mathbb{S})) \to \mathbb{S} \to \mathbb{S} \to \mathit{bool} \\
&\qquad \text{is-inv}(f)(s^\sharp)(t^\sharp) := t^\sharp \sqsubseteq_{\mathbb{S}} u^\sharp \\
&\qquad\qquad\qquad \text{with } u^\sharp := \pi_1(\mathit{step}(f)(b)(s^\sharp)(t^\sharp))
\end{aligned}
$$

Steps

$$\text{steps} : (\mathbb{S} \to \mathbb{S} \times \mathit{List}(\mathbb{S})) \to \mathit{bool} \to \mathbb{S} \to \mathbb{S} \to \mathbb{S} \times \mathit{List}(\mathbb{S})$$

$$\text{steps}(f)(b)(s^\sharp)(t^\sharp) := \begin{cases} (t^\sharp, [t^\sharp]) & \text{if is-inv}(f)(s^\sharp)(t^\sharp) \\ (v^\sharp, \mathit{invs}_1 +_{\mathit{List}(\mathbb{S})} \mathit{invs}_2) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{with } (u^\sharp, \mathit{invs}_1) := \text{step}(f)(b)(s^\sharp)(t^\sharp)$$

$$(v^\sharp, \mathit{invs}_2) := \text{steps}(f)(b)(s^\sharp)(u^\sharp)$$

Widening

$$\text{wid} : (\mathbb{S} \to \mathbb{S} \times \mathit{List}(\mathbb{S})) \to \mathit{bool} \to \mathbb{S} \to \mathbb{S} \to \mathbb{S}$$

$$\text{wid}(f)(b)(s^\sharp)(t^\sharp) := \begin{cases} t^\sharp & \text{if is-inv}(f)(s^\sharp)(t^\sharp) \\ \text{wid}(f)(b)(s^\sharp)(t^\sharp \ \nabla_{\mathbb{S}} \ u^\sharp) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{with } u^\sharp := \pi_1(\mathit{step}(f)(b)(s^\sharp)(t^\sharp))$$

Narrowing

$$\text{nar} : (\mathbb{S} \to \mathbb{S} \times \mathit{List}(\mathbb{S})) \to \mathit{bool} \to \mathbb{S} \to \mathbb{S} \to \mathbb{S} \times \mathit{List}(\mathbb{S})$$

$$\text{nar}(f)(b)(s^\sharp)(t^\sharp) := \begin{cases} (v^\sharp, [v^\sharp]) & \text{if is-inv}(f)(s^\sharp)(v^\sharp) \\ (z^\sharp, \mathit{invs}_1 +_{\mathit{List}(\mathbb{S})} \mathit{invs}_2) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{with } u^\sharp &:= \pi_1(\text{step}(f)(b)(s^\sharp)(t^\sharp)) \\ v^\sharp &:= t^\sharp \ \Delta_{\mathbb{S}} \ u^\sharp \\ (w^\sharp, \mathit{invs}_1) &:= \text{step}(f)(b)(s^\sharp)(v^\sharp) \\ (z^\sharp, \mathit{invs}_2) &:= \text{nar}(f)(b)(s^\sharp)(v^\sharp \Delta_{\mathbb{S}} w^\sharp) \end{aligned}$$

Abstract Least Fixed Point

$$\text{ab-lfp} : (\mathbb{S} \to \mathbb{S} \times \mathit{List}(\mathbb{S})) \to \mathit{bool} \to \mathbb{S} \to \mathit{bool} \to \mathbb{S} \times \mathit{List}(\mathbb{S})$$

$$\text{ab-lfp}(f)(b)(s^\sharp)(w) := \begin{cases} \text{nar}(f)(b)(s^\sharp)(t^\sharp) & \text{if } w \\ \text{steps}(f)(b)(s^\sharp)(s^\sharp) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{with } t^\sharp := \text{wid}(f)(b)(s^\sharp)(s^\sharp).$$

Abstract State Update

$s^\sharp[x \mapsto a]$ defined using recursion

$$
\begin{cases}
\bot_{\mathbb{S}}[x \mapsto a] := [(x, a)] \\
\top_{\mathbb{S}}[x \mapsto a] := [(x, a)] \\
((y, a') :: ts^\sharp)[x \mapsto a] := \begin{cases} (y, a) :: ts^\sharp & \text{if } x = y \\ (y, a') :: ts^\sharp[x \mapsto a] & \text{otherwise} \end{cases}
\end{cases}
$$

Abstract State Join

$s^\sharp \vee_{\mathbb{S}} t^\sharp$ defined using recursion

$$\begin{cases} \bot_{\mathbb{S}} \vee_{\mathbb{S}} t^\sharp := t^\sharp \\ \top_{\mathbb{S}} \vee_{\mathbb{S}} t^\sharp := \top_{\mathbb{S}} \\ ((x, a) :: ts^\sharp) \vee_{\mathbb{S}} t^\sharp := (ts^\sharp \vee_{\mathbb{S}} t^\sharp)[x \mapsto a \vee_A \mathsf{lookup}(t^\sharp)(x)] \end{cases}$$

Abstract State Lookup

$\text{lookup}_{\mathbb{S}}(s^\sharp)(x)$ defined using recursion

$$\begin{cases} \text{lookup}_{\mathbb{S}}(\bot_{\mathbb{S}})(x) := \bot_A \\ \text{lookup}_{\mathbb{S}}(\top_{\mathbb{S}})(x) := \top_A \\ \text{lookup}_{\mathbb{S}}((y, a) :: ts^\sharp)(x) := \begin{cases} a & \text{if } x = y \\ \text{lookup}_{\mathbb{S}}(ts^\sharp)(x) & \text{otherwise} \end{cases} \end{cases}$$

Partial order

$$a_1 \leq_A a_2 := \; a_1 \vee_A a_2 = a_2$$

$$s^\sharp \sqsubseteq_{\mathbb{S}} t^\sharp := s^\sharp = \bot_{\mathbb{S}} \vee \forall x, \mathit{lookup}(s^\sharp)(x) \leq_A \mathit{lookup}(t^\sharp)(x)$$

State Widening

$$s^\sharp \nabla_{\mathbb{S}} t^\sharp := \begin{cases} t^\sharp & if s^\sharp = \bot_{\mathbb{S}} \\ map(f_{t^\sharp})(s^\sharp) & otherwise \end{cases}$$

with $f_{t^\sharp}(x, a) := (x, a \Delta lookup(t^\sharp)(x))$.

State Narrowing

$$s^\sharp \Delta_{\mathbb{S}} t^\sharp := \begin{cases} \perp_{\mathbb{S}} & \mathit{if} s^\sharp = \perp_{\mathbb{S}} \\ \mathit{map}(f_{t^\sharp})(s^\sharp) & \mathit{otherwise} \end{cases}$$

with $f_{t^\sharp}(x, a) := (x, a \Delta \mathit{lookup}(t^\sharp)(x))$.

Extended Sign

$$
\begin{aligned}
&A := \mathit{ExtSign}\\
&\mathbb{S} := \mathit{List}(\mathit{String} \times \mathit{ExtSign}) \cup \{\star\}\\
&\bot_{\mathbb{S}} := \star\\
&\top_{\mathbb{S}} := []\\
&\mathit{ExtSign} \ni a ::= \bot \mid < 0 \mid = 0 \mid > 0 \mid \leq 0 \mid \neq 0 \mid \geq 0 \mid \top
\end{aligned}
$$

α on Singletons

$$\alpha_{singleton}(n) := \begin{cases} = 0 & \text{if } n = 0 \\ < 0 & \text{if } n < 0 \\ > 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Addition

$+$	$\perp$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\perp$	$\perp$							
< 0	$\perp$	< 0						
$= 0$	$\perp$	< 0	$= 0$					
> 0	$\perp$	$\top$	> 0	> 0				
≤ 0	$\perp$	< 0	≤ 0	$\top$	≤ 0			
$\neq 0$	$\perp$	$\top$	$\neq 0$	$\top$	$\top$	$\top$		
≥ 0	$\perp$	$\top$	≥ 0	> 0	$\top$	$\top$	≥ 0	
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Subtraction

$-$	$\bot$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
< 0	$\bot$	$\top$	> 0	> 0	$\top$	$\top$	> 0	$\top$
$= 0$	$\bot$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
> 0	$\bot$	< 0	< 0	$\top$	< 0	$\top$	$\top$	$\top$
≤ 0	$\bot$	$\top$	≥ 0	> 0	$\top$	$\top$	≥ 0	$\top$
$\neq 0$	$\bot$	$\top$	$\neq 0$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
≥ 0	$\bot$	< 0	≤ 0	$\top$	≤ 0	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Multiplication

$*$	$\bot$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\bot$	$\bot$							
< 0	$\bot$	> 0						
$= 0$	$\bot$	$= 0$	$= 0$					
> 0	$\bot$	< 0	$= 0$	> 0				
≤ 0	$\bot$	≥ 0	$= 0$	≤ 0	≥ 0			
$\neq 0$	$\bot$	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\top$	$\neq 0$		
≥ 0	$\bot$	≤ 0	$= 0$	≥ 0	≤ 0	$\top$	≥ 0	
$\top$	$\bot$	$\top$	$= 0$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Division

$/$	$\bot$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
< 0	$\bot$	> 0	$= 0$	< 0	≥ 0	$\neq 0$	≤ 0	$\top$
$= 0$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
> 0	$\bot$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
≤ 0	$\bot$	> 0	$= 0$	< 0	≥ 0	$\neq 0$	≤ 0	$\top$
$\neq 0$	$\bot$	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\top$	$\neq 0$	$\top$	$\top$
≥ 0	$\bot$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\top$	$\bot$	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\top$	$\neq 0$	$\top$	$\top$

Equality

$e_1 = e_2$	$\bot$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\bot$	$\bot$							
< 0	$\bot$	$s^\#$						
$= 0$	$\bot$	$\bot$	$s^\#$					
> 0	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$s^\#$				
≤ 0	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$\bot$	$s^\#$			
$\neq 0$	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$		
≥ 0	$\bot$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	
$\top$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x = e$	$\bot$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
< 0	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto < 0]$
$= 0$	$\bot$	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto = 0]$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto = 0]$	$s^\#[x \mapsto = 0]$
> 0	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$
≤ 0	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#[x \mapsto = 0]$	$s^\#[x \mapsto \leq 0]$
$\neq 0$	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto \neq 0]$
≥ 0	$\bot$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto = 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto \geq 0]$
$\top$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$e_1 \neq e_2$	$\perp$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\perp$	$\perp$							
< 0	$\perp$	$s^\#$						
$= 0$	$\perp$	$s^\#$	$\perp$					
> 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$				
≤ 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$			
$\neq 0$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$		
≥ 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	
$\top$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x \neq e$	$\bot$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
< 0	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$= 0$	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto \neq 0]$
> 0	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≤ 0	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\neq 0$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\top$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$e_1 < e_2$	$\bot$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
< 0	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$\bot$	$s^\#$
$= 0$	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$\bot$	$s^\#$
> 0	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≤ 0	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$\bot$	$s^\#$
$\neq 0$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\top$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x < e$	$\bot$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
< 0	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto < 0]$
$= 0$	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto < 0]$
> 0	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≤ 0	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto < 0]$
$\neq 0$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\top$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$e_1 > e_2$	$\bot$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
< 0	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$= 0$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
> 0	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≤ 0	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\neq 0$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\top$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x > e$	$\perp$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
< 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$= 0$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$s^\#$	$\perp$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$
> 0	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$s^\#$	$\perp$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$
≤ 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\neq 0$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$s^\#$	$\perp$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$
$\top$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$e_1 \leq e_2$	$\perp$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
< 0	$\perp$	$s^\#$	$\perp$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$\perp$	$s^\#$
$= 0$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
> 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≤ 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\neq 0$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\top$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x \leq e$	$\perp$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
< 0	$\perp$	$s^\#$	$\perp$	$\perp$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$\perp$	$s^\#[x \mapsto < 0]$
$= 0$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#[x \mapsto = 0]$	$s^\#[x \mapsto \leq 0]$
> 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≤ 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto < 0]$	$s^\#[x \mapsto = 0]$	$s^\#[x \mapsto \leq 0]$
$\neq 0$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\top$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$e_1 \geq e_2$	$\perp$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
< 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$= 0$	$\perp$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
> 0	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$s^\#$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≤ 0	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\neq 0$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	$\perp$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\top$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x \geq e$	$\bot$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
< 0	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$= 0$	$\bot$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto = 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto \geq 0]$
> 0	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$s^\#$	$\bot$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$
≤ 0	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\neq 0$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
≥ 0	$\bot$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto = 0]$	$s^\#[x \mapsto > 0]$	$s^\#$	$s^\#[x \mapsto \geq 0]$
$\top$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Join

$\vee$	$\bot$	< 0	$= 0$	> 0	≤ 0	$\neq 0$	≥ 0	$\top$
$\bot$	$\bot$							
< 0	< 0	< 0						
$= 0$	$= 0$	≤ 0	$= 0$					
> 0	> 0	≥ 0	≥ 0	> 0				
≤ 0	≤ 0	≤ 0	≤ 0	$\top$	≤ 0			
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\top$	$\neq 0$	$\top$	$\neq 0$		
≥ 0	≥ 0	$\top$	≥ 0	≥ 0	$\top$	$\top$	≥ 0	
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Join

$\vee$	$\bot$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$	$\top$
$(-\infty, d]$	$(-\infty, d]$	$(-\infty, max(b, d)]$	$(-\infty, max(b, d)]$	$\top$	$\top$
$[c, d]$	$[c, d]$	$(-\infty, max(b, d)]$	$[min(a, c), max(b, d)]$	$[min(a, c), +\infty)$	$\top$
$[c, +\infty)$	$[c, +\infty)$	$\top$	$[min(a, c), +\infty)$	$[min(a, c), +\infty)$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Addition

$+$	$\perp$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$	$\top$
$\perp$	$\perp$				
$(-\infty, d]$	$\perp$	$(-\infty, b + d]$			
$[c, d]$	$\perp$	$(-\infty, b + d]$	$[a + c, b + d]$		
$[c, +\infty)$	$\perp$	$\top$	$[a + c, +\infty)$	$[a + c, +\infty)$	
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Subtraction

$-$	$\perp$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$(-\infty, d]$	$\perp$	$\top$	$[a-d, +\infty)$	$[a-d, +\infty)$	$\top$
$[c, d]$	$\perp$	$(-\infty, b-c]$	$[a-d, b-c]$	$[a-d, +\infty)$	$\top$
$[c, +\infty)$	$\perp$	$(-\infty, b-c]$	$(-\infty, b-c]$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Multiplication

$*$	$\bot$	$(-\infty, b]$		$[a, b]$		$[a, +\infty)$	
$\bot$	$\bot$	$\bot$		$\bot$		$\bot$	
$(-\infty, d]$	$\bot$	$b > 0 \vee d > 0$ $b \leq 0 \wedge d \leq 0$	$\top$ $[bd, +\infty)$	$(a < 0 \wedge b > 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0)$ $(a \leq 0 \wedge b \leq 0) \wedge (a \neq 0 \vee b \neq 0)$ $(a \geq 0 \wedge b \geq 0) \wedge (a \neq 0 \vee b \neq 0)$ $(a = 0 \wedge b = 0)$	$\top$ $[min(ad, bd), +\infty)$ $(-\infty, max(ad, bd)]$ $[0, 0]$	$d > 0 \vee a < 0$ $d \leq 0 \wedge a \geq 0$	$\top$ $(-\infty, ad]$
$[c, d]$	$\bot$	$(c < 0 \wedge d > 0) \vee (c > 0 \wedge d < 0)$ $(c \leq 0 \wedge d \leq 0) \wedge (c \neq 0 \vee d \neq 0)$ $(c \geq 0 \wedge d \geq 0) \wedge (c \neq 0 \vee d \neq 0)$ $(c = 0 \wedge d = 0)$	$\top$ $[min(bc, bd), +\infty)$ $(-\infty, max(bc, bd)]$ $[0, 0]$	$[min(ac, ad, bc, bd), max(ac, ad, bc, bd)]$		$(c < 0 \wedge d > 0) \vee (c > 0 \wedge d < 0)$ $(c \leq 0 \wedge d \leq 0) \wedge (c \neq 0 \vee d \neq 0)$ $(c \geq 0 \wedge d \geq 0) \wedge (c \neq 0 \vee d \neq 0)$ $(c = 0 \wedge d = 0)$	$\top$ $(-\infty, max$ $[min(ac, a$ $[0, 0]$
$[c, +\infty)$	$\bot$	$b > 0 \vee c < 0$ $b \leq 0 \wedge c \geq 0$	$\top$ $(-\infty, bc]$	$(a < 0 \wedge b > 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0)$ $(a \leq 0 \wedge b \leq 0) \wedge (a \neq 0 \vee b \neq 0)$ $(a \geq 0 \wedge b \geq 0) \wedge (a \neq 0 \vee b \neq 0)$ $(a = 0 \wedge b = 0)$	$\top$ $(-\infty, max(ac, bc)]$ $[min(ac, bc), +\infty)$ $[0, 0]$	$a < 0 \vee c < 0$ $a \geq 0 \wedge c \geq 0$	$\top$ $(-\infty, ac]$
$\top$	$\bot$	$\top$		$a = b = 0$ $a \neq 0 \vee b \neq 0$	$[0, 0]$ $\top$	$\top$	

Division

$/$	$\perp$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$(-\infty, d]$	$\perp$	$d \leq 0$: $[min(0, b/d), +\infty)$ otherwise: $\top$	$d \leq 0$: $[min(0, a/d, b/d), max(0, a/d, b/d)]$ $d > 0 \wedge a = b = 0$: $[0, 0]$ $d > 0 \wedge a \geq 0 \wedge b > 0$: $(-\infty, max(a/d, b/d)]$ $d > 0 \wedge a < 0 \wedge b \leq 0$: $[min(a/d, b/d), +\infty)$ otherwise: $\top$	$d \leq 0$: $(-\infty, max(a/d, 0)]$ otherwise: $\top$	$\top$
$[c, d]$	$\perp$	$c = d = 0$: $\perp$ $0 < c \leq d$: $(-\infty, max(b/c, b/d)]$ $0 = c < d \wedge b \leq 0$: $(-\infty, b/d]$ $c \leq d < 0$: $[min(b/c, b/d), +\infty)$ otherwise: $\top$	$c = d = 0$: $\perp$ $c < 0 < d$: $[min(0, a/c, b/c), max(0, a/c, b/c)] \vee [min(0, a/d, b/d), max(0, a/d, b/d)]$ otherwise: $[min(a/c, a/d, b/c, b/d), max(a/c, a/d, b/c, b/d)]$	$c = d = 0$: $\perp$ $0 < c \leq d$: $[min(a/c, a/d), +\infty)$ $0 = c < d \wedge a \geq 0$: $[a/d, +\infty)$ $c \leq d < 0$: $(-\infty, max(a/c, a/d)]$ otherwise: $\top$	$c = d = 0$: $\perp$ otherwise: $\top$
$[c, +\infty)$	$\perp$	$c \geq 0$: $(-\infty, max(0, b/c)]$ otherwise: $\top$	$c \geq 0$: $[min(0, a/c, b/c), max(0, a/c, b/c)]$ $c < 0 \wedge a = b = 0$: $[0, 0]$ $c < 0 \wedge a \geq 0 \wedge b > 0$: $[min(a/c, b/c), +\infty)$ $c < 0 \wedge a < 0 \wedge b \leq 0$: $(-\infty, max(a/c, b/c)]$ otherwise: $\top$	$c \geq 0$: $[min(a/c, 0), +\infty)$ otherwise: $\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$a = b = 0$: $[0, 0]$ otherwise: $\top$	$\top$	$\top$

Equality

$e_1 = e_2$	$\perp$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$(-\infty, d]$	$\perp$	$s^\#$	if $a > d$ then $\perp$ else $s^\#$	if $a > d$ then $\perp$ else $s^\#$	$s^\#$
$[c, d]$	$\perp$	if $b < c$ then $\perp$ else $s^\#$	if $a > d$ or $b < c$ then $\perp$ else $s^\#$	if $a > d$ then $\perp$ else $s^\#$	$s^\#$
$[c, +\infty)$	$\perp$	if $b < c$ then $\perp$ else $s^\#$	if $b < c$ then $\perp$ else $s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\top$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x = e$	$\bot$	$(-\infty, b]$		$[a, b]$	
$\bot$	$\bot$	$\bot$		$\bot$	
$(-\infty, d]$	$\bot$	$b \leq d$ $b > d$	$s^\#$ $s^\#[x \mapsto (-\infty, d]]$	$a > d$ $a \leq d \wedge b > d$ $a \leq d \wedge b \leq d$	$\bot$ $s^\#[x \mapsto [a, d]]$ $s^\#$
$[c, d]$	$\bot$	$b < c$ $c \leq b \leq d$ $b > d$	$\bot$ $s^\#[x \mapsto [c, b]]$ $s^\#[x \mapsto [c, d]]$	$b < c \vee a > d$ $b > d \wedge a < c$ $b > d \wedge a \geq c$ $c \leq b \leq d \wedge a < c$ $c \leq b \leq d \wedge c \leq a \leq d$	$\bot$ $s^\#[x \mapsto [c, d]]$ $s^\#[x \mapsto [a, d]]$ $s^\#[x \mapsto [c, b]]$ $s^\#$
$[c, +\infty)$	$\bot$	$b < c$ $b \geq c$	$\bot$ $s^\#[x \mapsto [c, b]]$	$b < c$ $b \geq c \wedge a < c$ $a \geq c$	$\bot$ $s^\#[x \mapsto [c, b]]$ $s^\#$
$\top$	$\bot$	$s^\#$		$s^\#$	

Equality

$e_1 \neq e_2$	$\bot$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$(-\infty, d]$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$[c, d]$	$\bot$	$s^\#$	$a = b = c = d$ $\quad \bot$ otherwise $\quad s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$[c, +\infty)$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\top$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x \neq e$	$\perp$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$(-\infty, d]$	$\perp$	$s^{\#}$	$s^{\#}$
$[c, d]$	$\perp$	$b = c = d$ $s^{\#}[x \mapsto (-\infty, b-1]]$ otherwise $s^{\#}$	$a = c = d \wedge a \neq b$ $s^{\#}[x \mapsto [a+1,$ $b = c = d \wedge a \neq b$ $s^{\#}[x \mapsto [a, b -$ $a = b = c = d$ $\perp$ otherwise $s^{\#}$
$[c, +\infty)$	$\perp$	$s^{\#}$	$s^{\#}$
$\top$	$\perp$	$s^{\#}$	$s^{\#}$

Equality

$e_1 < e_2$	$\perp$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$(-\infty, d]$	$\perp$	$s^\#$	$a \geq d$ $\perp$ $a < d$ $s^\#$	$a \geq d$ $\perp$ $a < d$ $s^\#$	$s^\#$
$[c, d]$	$\perp$	$s^\#$	$a \geq d$ $\perp$ $a < d$ $s^\#$	$a \geq d$ $\perp$ $a < d$ $s^\#$	$s^\#$
$[c, +\infty)$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\top$	$\perp$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x < e$	$\perp$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$(-\infty, d]$	$\perp$	$b \geq d$ $\quad s^{\#}[x \mapsto (-\infty, d-1]]$ $b < d$ $\quad s^{\#}$	$a \geq d$ $\quad \perp$ $a < d \wedge b \geq d$ $\quad s^{\#}[x \mapsto [a, d-1]]$ $a < d \wedge b < d$ $\quad s^{\#}$	$a \geq d$ $\quad \perp$ $a < d$ $\quad s^{\#}[x \mapsto$
$[c, d]$	$\perp$	$b \geq d$ $\quad s^{\#}[x \mapsto (-\infty, d-1]]$ $b < d$ $\quad s^{\#}$	$a \geq d$ $\quad \perp$ $a < d \wedge b \geq d$ $\quad s^{\#}[x \mapsto [a, d-1]]$ $a < d \wedge b < d$ $\quad s^{\#}$	$a \geq d$ $\quad \perp$ $a < d$ $\quad s^{\#}[x \mapsto$
$[c, +\infty)$	$\perp$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$
$\top$	$\perp$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$

Equality

$e_1 \leq e_2$	$\perp$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$(-\infty, d]$	$\perp$	$s^{\#}$	$a > d$ $\perp$ $a \leq d$ $s^{\#}$	$a > d$ $\perp$ $a \leq d$ $s^{\#}$	$s^{\#}$
$[c, d]$	$\perp$	$s^{\#}$	$a > d$ $\perp$ $a \leq d$ $s^{\#}$	$a > d$ $\perp$ $a \leq d$ $s^{\#}$	$s^{\#}$
$[c, +\infty)$	$\perp$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$
$\top$	$\perp$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$

Equality

$x \leq e$	$\bot$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$(-\infty, d]$	$\bot$	$b > d$ $\quad s^{\#}[x \mapsto (-\infty, d]]$ $b \leq d$ $\quad s^{\#}$	$a > d$ $\quad \bot$ $a \leq d \wedge b > d$ $\quad s^{\#}[x \mapsto [a, d]]$ $a \leq d \wedge b \leq d$ $\quad s^{\#}$	$a > d$ $\quad \bot$ $a \leq d$ $\quad s^{\#}[x \mapsto [a, d]]$
$[c, d]$	$\bot$	$b > d$ $\quad s^{\#}[x \mapsto (-\infty, d]]$ $b \leq d$ $\quad s^{\#}$	$a > d$ $\quad \bot$ $a \leq d \wedge b > d$ $\quad s^{\#}[x \mapsto [a, d]]$ $a \leq d \wedge b \leq d$ $\quad s^{\#}$	$a > d$ $\quad \bot$ $a \leq d$ $\quad s^{\#}[x \mapsto [a, d]]$
$[c, +\infty)$	$\bot$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$
$\top$	$\bot$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$

Equality

$e_1 > e_2$	$\bot$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$(-\infty, d]$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$[c, d]$	$\bot$	$b \leq c \quad \bot$ $b > c \quad s^\#$	$b \leq c \quad \bot$ $b > c \quad s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$[c, +\infty)$	$\bot$	$b \leq c \quad \bot$ $b > c \quad s^\#$	$b \leq c \quad \bot$ $b > c \quad s^\#$	$s^\#$	$s^\#$
$\top$	$\bot$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$	$s^\#$

Equality

$x > e$	$\perp$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$(-\infty, d]$	$\perp$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$
$[c, d]$	$\perp$	$b \leq c \quad \perp$ $b > c \quad s^{\#}[x \mapsto [c+1, b]]$	$b \leq c \quad \perp$ $b > c \wedge a \leq c \quad s^{\#}[x \mapsto [c+1, b]]$ $b > c \wedge a > c \quad s^{\#}$	$a \leq c \quad s^{\#}[x \mapsto [c +$ $a > c \quad s^{\#}$
$[c, +\infty)$	$\perp$	$b \leq c \quad \perp$ $b > c \quad s^{\#}[x \mapsto [c+1, b]]$	$b \leq c \quad \perp$ $b > c \wedge a \leq c \quad s^{\#}[x \mapsto [c+1, b]]$ $b > c \wedge a > c \quad s^{\#}$	$a \leq c \quad s^{\#}[x \mapsto [c +$ $a > c \quad s^{\#}$
$\top$	$\perp$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$

Equality

$e_1 \geq e_2$	$\perp$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$(-\infty, d]$	$\perp$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$
$[c, d]$	$\perp$	$b < c$ $\perp$ $b \geq c$ $s^{\#}$	$b < c$ $\perp$ $b \geq c$ $s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$
$[c, +\infty)$	$\perp$	$b < c$ $\perp$ $b \geq c$ $s^{\#}$	$b < c$ $\perp$ $b \geq c$ $s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$
$\top$	$\perp$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$

Equality

$x \geq e$	$\perp$	$(-\infty, b]$	$[a, b]$	$[a, +\infty)$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$(-\infty, d]$	$\perp$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$
$[c, d]$	$\perp$	$b < c \quad \perp$ $b \geq c \quad s^{\#}[x \mapsto [c, b]]$	$b < c \quad \perp$ $b \geq c \wedge a < c \quad s^{\#}[x \mapsto [c, b]]$ $b \geq c \wedge a \geq c \quad s^{\#}$	$a < c \quad s^{\#}[x \mapsto$ $a \geq c \quad s^{\#}$
$[c, +\infty)$	$\perp$	$b < c \quad \perp$ $b \geq c \quad s^{\#}[x \mapsto [c, b]]$	$b < c \quad \perp$ $b \geq c \wedge a < c \quad s^{\#}[x \mapsto [c, b]]$ $b \geq c \wedge a \geq c \quad s^{\#}$	$a < c \quad s^{\#}[x \mapsto$ $a \geq c \quad s^{\#}$
$\top$	$\perp$	$s^{\#}$	$s^{\#}$	$s^{\#}$