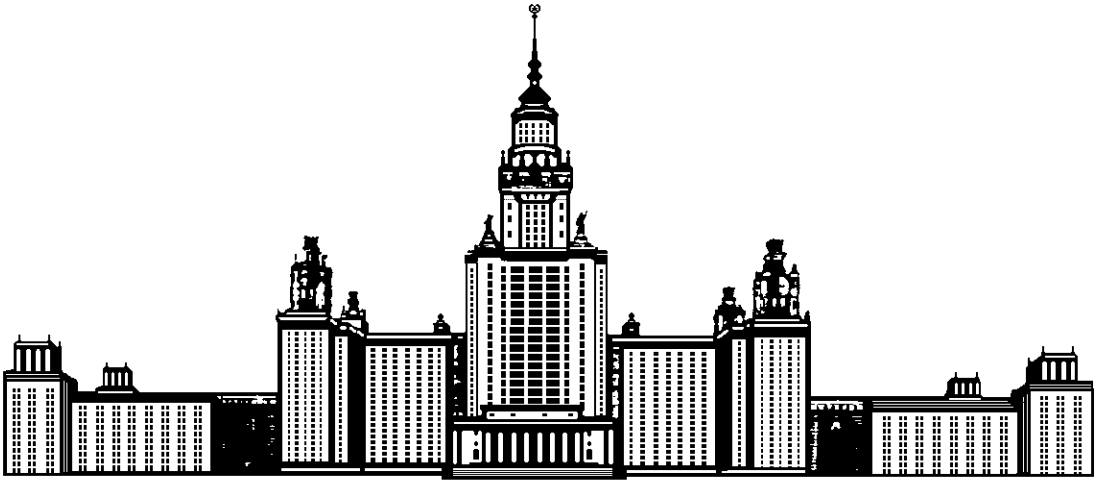
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова



факультет вычислительной математики и кибернетики
кафедра ВТМ

Курсовая работа

"Исследование и развитие технологий автогенерации вычислительного кода на GPU в применении к задачам тензорной аппроксимации. Реализация параллелного алгоритма ALS"

Кузнецов Максим Алексеевич
студент 4 курса

Москва, 2013

1 Введение

Для решения современных вычислительных задач необходимо использовать большие вычислительные мощности. Одним из наиболее эффективных вычислительных инструментов являются графические процессоры, однако, несмотря на развитие инструментов разработки, написание GPU-кода занимает достаточно много времени. Само по себе программирование на GPU — сложная задача, поэтому хотелось бы иметь технологии автоматического распараллеливания, однако они часто проигрывают "ручному" программированию. При этом можно выделить класс задач, которые допускают возможность автоматической генерации эффективного GPU-кода, а получающийся код можно использовать в динамических языках (Python — http://www.python.org/). До недавнего времени удобных инструментов такого рода не было, но они стали интенсивно развиваться. Мы возьмем за основу проект loopy (http://git.tiker.net/loopy.git), разработанный Андреасом Клекнером (http://mathema.tician.de/aboutme/), который позволяет генерировать OpenCL Python-модули для небольших, но трудоемких циклов.

2 Цель работы

Целью работы является исследование и развитие технологий автогенерации вычислительного кода на GPU в применении к задачам тензорной аппроксимации.Тензорные алгоритмы трудоемки и требуют большого числа вычислений, поэтому развитие параллельных версий стандартных алгоритмов играет большую роль, тем не менее не существует параллельных версий программ, реализующих эти алгоритмы. В качестве языка программирования используется язык Python, а в качестве средства автоматической генерации кода пакет loopy.

Выбор Python обусловлен тем,что Python обладает рядом достоинств перед стандартными языками (C, Fortran), в том числе: удобство разработки и написания нового кода, наличие стандартной библиотеки и многое другое. Язык Python достаточно медленный (в силу особенностей организации циклов, определения переменных), и идея использовать его для параллельных вычислений может показаться неудачной. Однако, мощь Python заключается в возможности подключения модулей, написанных на C, Fortran, а также пакетов автоматической генерации таких модулей, благодаря чему удается сохранить простоту Python и получить скорость исполнения C-кода. В частности в Python реализованы модули pyOpenCL (http://mathema.tician.de/software/pyopencl) и pyCUDA (http://mathema.tician.de/software/pycuda).

Следует отметить, что обычно автоматически сгенерированный код уступает "ручному", однако автоматическая генерация кода позволяет достичь высокой эффективности при распараллеливании циклов. Также уменьшается время разработки программы. **Основная задача — выяснить возможности ускорения программ, реализующих тензорные алгоритмы, написанных на Python с помощью средств автогенерации кода для GPU.**

3 Актуальность исследования

Привлекательность исследования обусловлена несколькими факторами:

1. Тензорные алгоритмы начали активно разрабатываться в последнее время
2. Написание GPU-кода — сложная задача, существует необходимость исследовать возможности автогенерации GPU-кода
3. Вычислительная мощность GPU превосходит многоядерные CPU, использование GPU эффективней

Ввиду того, что процесс написания GPU-кода вручную длительный и трудоемкий, хоть и эффективный, в вычислительных задачах хотелось бы использовать следующий "идеальный" способ его написания:

1. Использование в динамических языках (Python)
2. Автоматическое распараллеливание стандартных задач (циклов), генерация OpenCL/CUDA-кода
3. Высокая эффективность

4 Текущее состояние исследований

Пакет loopy очень свежий, однако уже сейчас обладает множеством возможностей. Loopy открытый проект, разрабатывающийся Андреасом Клекнером, активно добавляются недостающие функции. Пакет позволяет генерировать GPU-код из заданного Python-кода, а результат такой генерации возвращает в виде функции, имя которой определяется пользователем, а последующие вызовы можно осуществить, используя это имя, минуя процесс генерации кода. Приведем пример Python-кода с использованием пакета loopy:

```
def test_image_matrix_mul(ctx_factory):
    dtype = np.float32
    ctx = ctx_factory()
    order = "C"

    n = get_suitable_size(ctx)
# Создается вычислительное ядро GPU-кода
    knl = lp.make_kernel(ctx.devices[0],
            "{[i,j,k]: 0<=i,j,k<%d}" % n,
            [
                "c[i, j] = sum(k, a[i, k]*b[k, j])"
                ],
            [
                lp.ImageArg("a", dtype, shape=(n, n)),
                lp.ImageArg("b", dtype, shape=(n, n)),
                lp.GlobalArg("c", dtype, shape=(n, n), order=order),
                ],
            name="matmul") # Имя функции, заданное пользователем
 для дальнейшего использования

    seq_knl = knl
#Создается разбиение циклов
    knl = lp.split_iname(knl, "i", 16, outer_tag="g.0", inner_tag="l.1")
    knl = lp.split_iname(knl, "j", 16, outer_tag="g.1", inner_tag="l.0")
    knl = lp.split_iname(knl, "k", 32)
    # conflict-free
    knl = lp.add_prefetch(knl, 'a', ["i_inner", "k_inner"])
    knl = lp.add_prefetch(knl, 'b', ["j_inner", "k_inner"])
#Окончательное формирование кода
    kernel_gen = lp.generate_loop_schedules(knl)
    kernel_gen = lp.check_kernels(kernel_gen, dict(n=n))
```

Данный код реализует перемножение двух матриц размера $n \times n$. Сгенерированный loopy GPU-код достаточно велик (более 100 строк для этого примера), и писать его аналог вручную достаточно долго, в то время как длительность работы loopy измеряется в секундах. При этом код весьма эффективен и легко используется в Python.

Основная проблема — определение граничных условий в циклах.

5 Модельная задача

В качестве примера алгоритма аппроксимации тензора будем рассматривать алгоритм построения канонического разложения. Необходимо ввести следующие определения:

Определение

Тензором A размерности d назовем многомерный массив, элементы которого $\mathrm{A}(\mathrm{i}_1,\mathrm{i}_2,\ldots,\mathrm{i}_d)$ имеют d индексов. $1 \le i_k \le n_k$; n_k называются модовыми размерами (размерами мод)

Определение

Каноническим разложением многомерного массива (*тензора*) называется представление вида

$$A(i_1, i_2, \ldots, i_d) = \sum_{\alpha=1}^{r} U_1(i_1, \alpha) U_2(i_2, \alpha) \ldots U_d(i_d, \alpha), \tag{1}$$

где U_k называются *факторами* канонического разложения, а r — каноническим рангом.

Уравнение (1) является основным. Подробнее о тензорах и их разложениях можно узнать в обзоре [3]

5.1 Алгоритм ALS

Пусть задан тензор A с элементами $A_{i_1 \ldots i_d}$. Задача состоит в том, чтобы найти его каноническое приближение, а именно найти такие матрицы $U_1, \ldots, U_d$

$$A_{i_1,\ldots,i_d} \approx \sum_{\alpha=1}^{r} U_1(i_1, \alpha) U_2(i_2, \alpha) \ldots U_d(i_d, \alpha). \tag{2}$$

Математическая постановка задачи состоит в том, чтобы решить задачу (2) в смысле наименьших квадратов

$$\sum_{i_1,\ldots,i_d} \left(A(i_1, \ldots, i_d) - \sum_{\alpha=1}^{r} U_1(i_1, \alpha) U_2(i_2, \alpha) \ldots U_d(i_d, \alpha) \right)^2 \longrightarrow \min . \tag{3}$$

Будем решать вариационную задачу поиска аппроксимации тензора с помощью алгоритма ALS (Alternating Least Squares), подробное изложение которого можно найти в статье [1]. Основная идея алгоритма, состоит в том, чтобы фиксировать все факторы канонического разложения, кроме одного, и искать минимум функционала только по нему. Путем циклических перестановок, используя уже полученные факторы, строятся последующие, до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность аппроксимации или, пока не сработают другие критерии остановки алгоритма (превышение максимального количества итераций, превышение времени выполнения программы).

5.1.1 Оценка сложности алгоритма ALS и возможности его параллельной реализации

Предположим, что заданный тензор A имеет размеры мод n и ранг r.

Простейшая программа для вычисления каждого фактора $\mathrm{U}_{\mathrm{i}\alpha}$ может быть написана с помощью помощью вложенных циклов. Тогда сложности вычисления правой и левой частей системы соответственно:

1. Сложность вычисления левой части системы для одной матрицы U пропорциональна $O(nr^2)$;
2. Сложность вычисления правой части $O(n^3 r)$;

что уже при $n = 512$ требует большого количества времени для вычисления.Сравнительную характеристику алгоритма ALS можно найти в статье [2]

Можно сформулировать **основную задачу программирования:**

1. **Выделить наиболее трудоемкий цикл**
2. **Распараллелить его, используя пакет loopy**

6 План исследований

План исследований состоит из следующих пунктов:

1. Анализ эффективности loopy на стандартных примерах, сравнение различных аппаратных платформ
2. Реализация модельных примеров (матрично-матричное перемножение)
3. Реализация модельной задачи
4. Сравнение быстродействие программ, написанных на Python+loopy и только на Python, анализ результатов

7 О пакете Loopy

7.1 Установка

Пакет loo.py в настоящее время имеет несколько зависимостей. Эти пакеты нужно установить перед началом установки loo.py:

- gmpy https://code.google.com/p/gmpy/
- pyopencl http://github.com/inducer/pyopencl
- pympolic http://github.com/inducer/pymbolic
- islpy http://github.com/inducer/islpy
- cgen http://github.com/inducer/cgen

Практически все из них можно скачать воспользовавшись помощью git. После установки вышеперечисленных пакетов, можно переходить к установке самого пакета loo.py. В настоящее время Андреас Клекнер (разработчик пакета) перенес актуальную версию в закрытый репозиторий, однако стабильную версию можно найти здесь: http://git.tiker.net/loopy.git. Как только все пакеты будут инсталлированы на компьютер, можно приступать к работе с loo.py.

7.2 Предназначение и синтаксис loo.py

Пакет loo.py предназначен для автоматической генерации OpenCL кода, который можно использовать на GPU. Для использования приема автоматической генерации кода (с помощью loo.py) алгоритм изначально должен быть приведен к алгоритму со вложенными циклами (последовательности вложенных циклов). Основная задача данного модуля “разворачивать” вложенные циклы, причем пакет в состоянии преобразовать циклы различной степени вложенности. В процессе работы loo.py генерирует вычислительное ядро, которое впоследствие и нужно запускать на GPU. Приведем пример ядра, в котором используются основные функции пакета:

```
def LU_solver(ctx):
  order='C'
  dtype = np.float32
  knl = lp.make_kernel(ctx.devices[0],
  [
```

```
    "{[l,k,i,j,m]: 0<=l<r and 0<=k<n-1 and k+1<=i<n and 0<=j<n-1 and 0<=m<n-1-j}",

  ],
  [
  "bcopy[i,l] = bcopy[i,l]-bcopy[k,l]*LU[i,k] {id=lab1}",
  "bcopy[n-1-j,l]=bcopy[n-j-1,l]/LU[n-j-1,n-1-j] {id=l2, dep=lab1}",
  "bcopy[m,l]= bcopy[m,l]-bcopy[n-j-1,l]*LU[m,n-1-j] {id=l3, dep =l2}",
  "bcopy[0,l]=bcopy[0,l]/LU[0,0]{id=l4, dep=l2}",
  ],
  [
  lp.GlobalArg("LU", dtype, shape = "n, n" , order=order),
  lp.GlobalArg("bcopy", dtype, shape = "n, r" , order=order),
  lp.ValueArg("n", np.int64),
  lp.ValueArg("r", np.int64),
  ],
  assumptions="n>=1")
  knl = lp.split_iname(knl, "k", 1)
  knl = lp.split_iname(knl, "i", 32)
  knl = lp.split_iname(knl, "j", 32)
  knl = lp.split_iname(knl, "l", 32, outer_tag="g.0", inner_tag="l.0")

  print knl
  print lp.CompiledKernel(ctx, knl).get_highlighted_code()
  return knl
```

Данный код реализует решение системы, поданной в стандартном виде LU-разложения, алгоритм подается в специальном виде с использованием синтаксиса loo.py.

7.3 Входной параметр ядра

На вход функции реализующей ядро подается контекст выполнения программы. Стандартным является следующий способ получение контекста:

```
plt = cl.get_platforms()
nvidia_plat = plt[1]
ctx = cl.Context(nvidia_plat.get_devices())
```

После выполнения кода в переменную ctx будет подан контекст, соответствующий графической плате (в данном случае NVIDIA)

7.4 Внутренние элементы ядра

Генерацией ядра в переменную knl занимается функция $\text{make}_{\text{kernel}}$ на вход которой подается:

- Домен, иными словами имена переменных-счетчиков цикла и границы изменения переменных в виде строки. Loo.py поддерживает циклы с заранее неизвестными граничными условиями,переменными условиями

```
"{[l,k,i,j,m]: 0<=l<r and 0<=k<n-1 and k+1<=i<n and 0<=j<n-1 and 0<=m<n-1-j}",
```

В примере переменными цикла являются l, k, i, j, m, где $l \in [0, r)$ причем r до этого нигде не объявлена и будет определена в процессе выполнения из входных параметров. k являющаяся переменной цикла, объемлющего вложенный в него цикл по i определена в переменных пределах. Таким образом можно сконструировать широкий класс алгоритмов, допускающих подобную реализацию.

- Инструкции для исполнения (не менее одной), каждой из которой можно присвоить метку с помощью переменной *id* и зависимости *dep*. Инструкция $id = label1$ зависит от инструкции $id = lab2$, если она должна быть выполнена после инструкции $lab2$.

Инструкции из примера:

```
"bcopy[i,l] = bcopy[i,l]-bcopy[k,l]*LU[i,k] {id=lab1}",
"bcopy[n-1-j,l]=bcopy[n-j-1,l]/LU[n-j-1,n-1-j] {id=l2, dep=lab1}",
```

- Аргументов, в которые входят входные параметры, константы, выходные параметры.

Каждый параметр должен иметь тип, размер (возможно указание в символьном "неявном" виде, так и в явном численном или в виде переменной (которая должна быть до этого определена)) Пример аргумента:

```
lp.GlobalArg("LU", dtype, shape = "n, n" , order=order),
```

- Дополнительных параметров, как допущение, приблизительная размерность или величина.

Примеры можно найти в директории *test* пакета loo.py

7.5 Задание разбиения вычислительной сетки

После того как ядро написано, необходимым является указать каким образом нужно разбить вычислительную сетку для этого ядра (как разбить циклы). Этим занимается функция" split_ iname":

```
knl = lp.split_iname(knl, "l", 32, outer_tag="g.0", inner_tag="l.0")
```

Первый параметр — ядро, переменные которого нужно разбить. Следующий — имя переменной-счетчика, далее указывается размер по сколько нужно разбить цикл (обычно 16 или 32, является рекомендуемымм разбиением, однако возможно и любое другое). В конце указываются опциональные параметры внешних и внутренних рабочих групп.

7.5.1 О выборе параметров разбиения

К сожалению невозможно придумать универсальный алгоритм, по которому следует выбирать разбиение. Однако несмотря на это, очень сильно качество распараллеливания зависит от выбора "outer_ tag" и "inner_ tag". Есть несколько базовых правил, как например "всегда выбирать для оси 0 разбиение 1", однако попытка подобрать "идеальные" параметры ведет к чрезмерному усложнению операций с памятью, взаимодействию между частями, что не позволяет создать устойчивую и надежную автоматическую реализацию. Для пользователя пакета loo.py это значит, что лучше воспользоваться стандартными разбиениями и попробовать на основе затрачиваемого на выполнение времени подобрать наиболее выгодные параметры разбиения. Напрямую с разбиением звязан и доступ к памяти. В loo.py есть специальная функция add_ prefetch(knl, "a", ["i_ inner", "j_ inner"], fetch_ bounding_ box=True), однако Андреас Клекнер сейчас работает над ее усовершенствованием, использовать ее пока сложно (все двигается к автоматизации распределения памяти, однако пока код еще не готов)

8 О вызове ядра

8.1 Расположение массивов

После того, как написано ядро, расставлено разбиение, это ядро можно начинать использовать. Однако перед этим необходимо выполнить некоторые приготовления. Как было сказано выше, необходимо определить контекст. После определения контекста, желательно (в силу серьезной экономии времени) все параметры (массивы, тензоры) поместить на устройство. Для этого нужно выполнить серию команд.

1. Создать очередь

```
queue = cl.CommandQueue(ctx,properties=cl.command_queue_properties.PROFILING_ENABLE)
```

1. Специальной командой cl.array_ to device(queue, variable) послать объект variable на устройство

```
u2=cl.array.to_device(queue,u)
```

Привести u к обычному массиву (numpy.array) можно с помощью метода get()

```
numpy_array_u2 = u2.get()
```

Важно чтобы все массивы имели определенный явно тип

Вызов ядра напоминает вызов функции или процедуры. Однако перед самим вызовом нужно выполнить несколько команд

- Создать очередь "queue". **Очередь в программе должна быть единственной!**
- Создать словарь параметров "parameters". При этом выходные параметры могут подаваться в словаре или нет.
- Скомпилировать ядро. Ядро может быть скомпилировано единожды и запомнено в специальной переменной для дальнейшего использования.
- Вызвать скомпилированное ядро с параметрами очередь "queue" и "parameters"

Приведем пример вызова ядра:

```
cknl_r_U = lp.CompiledKernel(ctx, knl_r_U)
parameters={"a":a2,"v":v2,"w":w2,"n":n,"r":r,"f":prav}
evt=cknl_r_U(queue, **parameters)[0]
#evt,(f)= cknl_r_U(queue, **parameters) этот способ с пересылкой и поэтому не очень хорош
evt.wait()
```

9 Используемы платформы

В ходе выполнения курсовой работы испоьзовались следующие вычислительные платформы:

- Мобильная видеокарта NVIDIA
- Процессор Intel Core i5
- Кластер ИВМ РАН tesla

Включим сведения о кластере ИВМ (так как основная часть экспериментов проводилась на нем)

Device Tesla C2070	
CL_ DEVICE_ NAME:	Tesla C2070
CL_ DEVICE_ VENDOR:	NVIDIA Corporation
CL_ DRIVER_ VERSION:	304.54
CL_ DEVICE_ VERSION:	OpenCL 1.1 CUDA
CL_ DEVICE_ OPENCL_ C_ VERSION:	OpenCL C 1.1
CL_ DEVICE_ TYPE:	CL_ DEVICE_ TYPE_ GPU
CL_ DEVICE_ MAX_ $\text{COMPUTE}_{\text{UNITS}}$:	14
CL_ DEVICE_ MAX_ WORK_ ITEM_ DIMENSIONS:	3
CL_ DEVICE_ MAX_ WORK_ ITEM_ SIZES:	1024 / 1024 / 64
CL_ DEVICE_ MAX_ WORK_ GROUP_ SIZE:	1024
CL_ DEVICE_ MAX_ CLOCK_ FREQUENCY:	1147 MHz
CL_ DEVICE_ ADDRESS_ BITS:	32
CL_ DEVICE_ MAX_ MEM_ ALLOC_ SIZE:	1343 MByte
CL_ DEVICE_ GLOBAL_ MEM_ SIZE:	5375 MByte
CL_ DEVICE_ ERROR_ CORRECTION_ SUPPORT:	yes
CL_ DEVICE_ LOCAL_ MEM_ TYPE:	local
CL_ DEVICE_ LOCAL_ MEM_ SIZE:	48 KByte
CL_ DEVICE_ MAX_ CONSTANT_ BUFFER_ SIZE:	64 KByte
CL_ DEVICE_ IMAGE_ SUPPORT:	1
CL_ DEVICE_ MAX_ READ_ IMAGE_ ARGS:	128
CL_ DEVICE_ MAX_ WRITE_ IMAGE_ ARGS:	8

10 Численные эксперименты

В ходе курсовой работы были реализованы несколько алгоритмов: алгоритм вычисления правой части ALS, алгоритм решения СЛАУ с помощью LU-разложения, алгоритм ALS. Для каждого алгоритма получена OpenCL реализация, а запуск программ их реализующих осуществлялся на вышеперечисленных платформах. Эксперименты проводились с тензором размерности $d = 3$ (трехмерным тензором) и различными размерами n и рангом r. В ходе экспериментов на Tesla были получены следующие результаты: Для фиксированного ранга $r = 3$ и размерности тензора n исследована скорость выполнения как отдельных ядер, так и всего алгоритма ALS. Однако ALS алгоритм не гарантирует сходимость, только убывание невязки, поэтому будем указывать только время выполнения одной итерации. Приведем таблицу с временем выполнения.

размер n	128	256	512	756
вычисление правой части	0.013803	0.08674	0.65225	0.92513
вычисление левой части	0.00035595	0.0004210	0.000552	0.000673
решение СЛАУ	0.00025391	0.00025510	0.000256	0.000256
LU-разложение	0.00024890	0.0002851	0.00035	0.000391
время одной итерации	0.026740	0.1834	1.08289	1.92985

Приведем также таблицу с временем выполнения одной итерации программы, вычисления правой части в зависимости от ранга r и фиксированной размерности тензора $n = 128$

ранг r	3	6	10	20
время вычисления правой части	0.01380	0.0152	0.0162	0.0184
время одной итерации	0.04326	0.0437	0.0468	0.0556

Для наглядности также построим графики поведения времени вычисления правой части на CPU, мобильном GPU и Tesla:

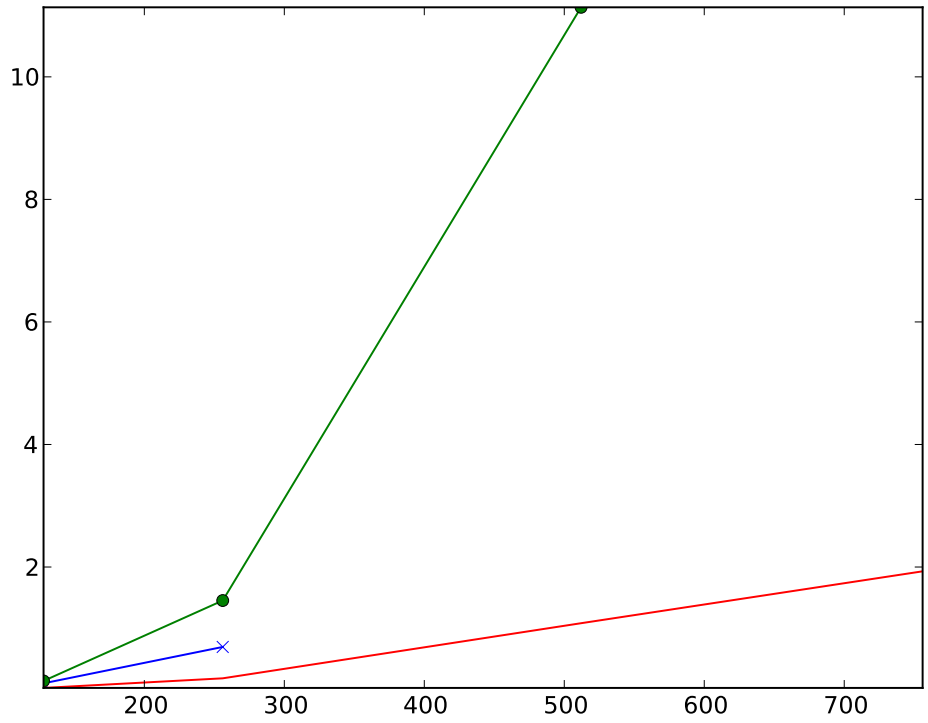


Рис. 1: Зависимость времени выполнения одной итерации от размера n.На графике синяя линия соответствует мобильному GPU, зеленая CPU, красная Tesla. Обрывы линий означают, что тензор большего размера уже не помещается в память.

11 Заключение

Средствами автоматической генерации кода удобно воспользоваться для распараллеливания тензорных алгоритмов с использованием вычислительного потенциала графических процессоров. Ускорение работы программы ожидается существенным, как в силу высокой производительности GPU, так и благодаря структуре самого алгоритма. Тензорные алгоритмы широко востребованы, а создание их эффективной и быстрой реализации является одной из приоритетных задач, в то время как возможности автоматической генерации кода на GPU позволяют создать такую реализацию быстро.

На примере алгоритма ALS продемонстрированы возможности автоматического распараллеливания тензорных алгоритмов с использованием пакета loo.py. Получено серьезное ускорение ALS, изучен способ автоматического распараллеливания тензорных алгоритмов.

12 Приложение

В данном приложении приводятся Python ядра, использованные в ходе работы над курсовой. Названия ядер должны помочь понять, какой алгоритм оно реализует.

```
#def LU_decomposition(ctx):
  order='C'
  dtype = np.float32
  knl = lp.make_kernel(ctx.devices[0],
```

```
  [
    "{[k,i]: 0<=k<n-1 and k+1<=i<n}",
    "{[j,l]: 0<=k<n-1 and k+1<=j,l<n}",
  ],
  [
  "syst[i,k] = syst[i,k]/syst[k,k] {id=lab1}",
  "syst[l,j]= syst[l,j] - syst[l,k]*syst[k,j] {dep=lab1}",
  ],
  [
  lp.GlobalArg("syst", dtype, shape = "n, n" , order=order),
  lp.ValueArg("n", np.int32),
  ],
  assumptions="n>=1")
  knl = lp.split_iname(knl, "k", n)
  knl = lp.split_iname(knl, "i", 32)
  knl = lp.split_iname(knl, "j", 32)
  knl = lp.split_iname(knl, "l", 32)

#  print knl
#  print lp.CompiledKernel(ctx, knl).get_highlighted_code()
  return knl

def LU_solver(ctx):
  order='C'
  dtype = np.float32
  knl = lp.make_kernel(ctx.devices[0],
  [

    "{[l,k,i,j,m]: 0<=l<r and 0<=k<n-1 and k+1<=i<n and 0<=j<n-1 and 0<=m<n-1-j}",

  ],
  [
  "bcopy[i,l] = bcopy[i,l]-bcopy[k,l]*LU[i,k] {id=lab1}",
  "bcopy[n-1-j,l]=bcopy[n-j-1,l]/LU[n-j-1,n-1-j] {id=l2, dep=lab1}",
  "bcopy[m,l]= bcopy[m,l]-bcopy[n-j-1,l]*LU[m,n-1-j] {id=l3, dep =l2}",
  "bcopy[0,l]=bcopy[0,l]/LU[0,0]{id=l4, dep=l2}",
  ],
  [
  lp.GlobalArg("LU", dtype, shape = "n, n" , order=order),
  lp.GlobalArg("bcopy", dtype, shape = "n, r" , order=order),
  lp.ValueArg("n", np.int64),
  lp.ValueArg("r", np.int64),
  ],
  assumptions="n>=1")
  knl = lp.split_iname(knl, "k", 1)
  knl = lp.split_iname(knl, "i", 32)
  knl = lp.split_iname(knl, "j", 32)
  knl = lp.split_iname(knl, "l", 32, outer_tag="g.0", inner_tag="l.0")

#  print knl
#  print lp.CompiledKernel(ctx, knl).get_highlighted_code()
  return knl
def Prav_U(ctx):
```

```
  order='C'
  dtype = np.float32
  knl = lp.make_kernel(ctx.devices[0],
  [

    "{[i,j,k,alpha]: 0<=alpha<r and 0<=i,j,k<n}",

  ],
  [
    "f[alpha,i]=sum((j,k), a[i,j,k]*v[alpha,j]*w[alpha,k])",
  ],
  [
    lp.GlobalArg("a", dtype, shape="n, n, n", order=order),
    lp.GlobalArg("v", dtype, shape="r, n", order=order),
    lp.GlobalArg("w", dtype, shape="r, n", order=order),
    lp.GlobalArg("f", dtype, shape="r, n", order=order),
    lp.ValueArg("n", np.int64),
    lp.ValueArg("r", np.int64),
  ],
  assumptions="n>=1")
  knl = lp.split_iname(knl, "i", 16,outer_tag="g.0", inner_tag="l.0")
  knl = lp.split_iname(knl, "alpha", 1, outer_tag="g.1", inner_tag="l.1")
  knl = lp.split_iname(knl, "j", 16)
  knl = lp.split_iname(knl, "k", 16)
  print lp.CompiledKernel(ctx, knl).get_highlighted_code()
  return knl


def Prav_V(ctx):
  order='C'
  dtype = np.float32
  knl = lp.make_kernel(ctx.devices[0],
  [

    "{[i,j,k,alpha]: 0<=alpha<r and 0<=i,j,k<n}",

  ],
  [
    "f[alpha,j]=sum((k,i), a[i,j,k]*w[alpha, k]*u[alpha, i])",
  ],
  [
    lp.GlobalArg("a", dtype, shape="n, n, n", order=order),
    lp.GlobalArg("u", dtype, shape="r, n", order=order),
    lp.GlobalArg("w", dtype, shape="r, n", order=order),
    lp.GlobalArg("f", dtype, shape="r, n", order=order),
    lp.ValueArg("n", np.int64),
    lp.ValueArg("r", np.int64),
  ],
  assumptions="n>=1")
  knl = lp.split_iname(knl, "j", 16,outer_tag="g.0", inner_tag="l.0")
  knl = lp.split_iname(knl, "alpha", 3, outer_tag="g.1", inner_tag="l.1")
  knl = lp.split_iname(knl, "i", 16)
  knl = lp.split_iname(knl, "k", 16)
```

```
  return knl

def Prav_W(ctx):
  order='C'
  dtype = np.float32
  knl = lp.make_kernel(ctx.devices[0],
  [

    "{[i,j,k,alpha]: 0<=alpha<r and 0<=i,j,k<n}",

  ],
  [
    "f[alpha,k]=sum((i,j), a[i,j,k]*u[alpha, i]*v[alpha, j])",
  ],
  [
    lp.GlobalArg("a", dtype, shape="n, n, n", order=order),
    lp.GlobalArg("v", dtype, shape="r, n", order=order),
    lp.GlobalArg("u", dtype, shape="r, n", order=order),
    lp.GlobalArg("f", dtype, shape="r, n", order=order),
    lp.ValueArg("n", np.int64),
    lp.ValueArg("r", np.int64),
  ],
  assumptions="n>=1")
  knl = lp.split_iname(knl, "k", 16,outer_tag="g.0", inner_tag="l.0")
  knl = lp.split_iname(knl, "alpha", 3, outer_tag="g.1", inner_tag="l.1")
  knl = lp.split_iname(knl, "j", 16)
  knl = lp.split_iname(knl, "i", 16)


  return knl

def left_U(ctx):
  order='C'
  dtype = np.float32
  knl = lp.make_kernel(ctx.devices[0],
  [

    "{[j,k,alpha,alpha1]: 0<=alpha,alpha1<r and 0<=j,k<n}",

  ],
  [
    "l[alpha,alpha1]=sum((j), v[alpha,j]*v[alpha1,j])*sum((k),w[alpha,k]*w[alpha1,k])",
  ],
  [

    lp.GlobalArg("v", dtype, shape="r, n", order=order),
    lp.GlobalArg("w", dtype, shape="r, n", order=order),
    lp.GlobalArg("l", dtype, shape="r, r", order=order),
    lp.ValueArg("n", np.int64),
    lp.ValueArg("r", np.int64),
  ],
  assumptions="n>=1")
```

```
  knl = lp.split_iname(knl, "alpha1", 16,outer_tag="g.0", inner_tag="l.0")
  knl = lp.split_iname(knl, "alpha", 3, outer_tag="g.1", inner_tag="l.1")
  knl = lp.split_iname(knl, "j", 16)
  knl = lp.split_iname(knl, "k", 16)

  return knl

def left_V(ctx):
  order='C'
  dtype = np.float32
  knl = lp.make_kernel(ctx.devices[0],
  [

    "{[i,k,alpha,alpha1]: 0<=alpha,alpha1<r and 0<=i,k<n}",

  ],
  [
    "l[alpha,alpha1]=sum((i), u[alpha,i]*u[alpha1,i])*sum((k),w[alpha,k]*w[alpha1,k])",
  ],
  [

    lp.GlobalArg("u", dtype, shape="r, n", order=order),
    lp.GlobalArg("w", dtype, shape="r, n", order=order),
    lp.GlobalArg("l", dtype, shape="r, r", order=order),
    lp.ValueArg("n", np.int64),
    lp.ValueArg("r", np.int64),
  ],
  assumptions="n>=1")
  knl = lp.split_iname(knl, "alpha1", 16,outer_tag="g.0", inner_tag="l.0")
  knl = lp.split_iname(knl, "alpha", 3, outer_tag="g.1", inner_tag="l.1")
  knl = lp.split_iname(knl, "i", 16)
  knl = lp.split_iname(knl, "k", 16)

  return knl

def left_W(ctx):
  order='C'
  dtype = np.float32
  knl = lp.make_kernel(ctx.devices[0],
  [

    "{[j,i,alpha,alpha1]: 0<=alpha,alpha1<r and 0<=j,i<n}",

  ],
  [
    "l[alpha,alpha1]=sum((i), u[alpha,i]*u[alpha1,i])*sum((j),v[alpha,j]*v[alpha1,j])",
  ],
  [

    lp.GlobalArg("v", dtype, shape="r, n", order=order),
    lp.GlobalArg("u", dtype, shape="r, n", order=order),
    lp.GlobalArg("l", dtype, shape="r, r", order=order),
    lp.ValueArg("n", np.int64),
```

```
    lp.ValueArg("r", np.int64),
  ],
  assumptions="n>=1")
  knl = lp.split_iname(knl, "alpha1", 16,outer_tag="g.0", inner_tag="l.0")
  knl = lp.split_iname(knl, "alpha", 3, outer_tag="g.1", inner_tag="l.1")
  knl = lp.split_iname(knl, "j", 16)
  knl = lp.split_iname(knl, "i", 16)

  return knl

def get_tensor(ctx):
  order='C'
  dtype = np.float32
  knl = lp.make_kernel(ctx.devices[0],
  [

    "{[j,i,alpha,k]: 0<=alpha<r and 0<=i,j,k<n}",

  ],
  [
    "res[i,j,k]=sum((alpha), u[alpha,i]*v[alpha,j]*w[alpha,k])",
  ],
  [
    lp.GlobalArg("res", dtype, shape="n, n, n", order=order),
    lp.GlobalArg("v", dtype, shape="r, n", order=order),
    lp.GlobalArg("u", dtype, shape="r, n", order=order),
    lp.GlobalArg("w", dtype, shape="r, n", order=order),
    lp.ValueArg("n", np.int32),
    lp.ValueArg("r", np.int32),
  ],
  assumptions="n>=1")
  knl = lp.split_iname(knl, "i", 8,outer_tag="g.0", inner_tag="l.0")
  knl = lp.split_iname(knl, "j", 8, outer_tag="g.1", inner_tag="l.1")
  knl = lp.split_iname(knl, "alpha", 2)
  knl = lp.split_iname(knl, "k", 8, outer_tag="g.2", inner_tag="l.2" )

  return knl
```

Список литературы

[1] J.D. Carroll and J.J. Chang. Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an n-way generalization of "eckart-young" decomposition. *Psychometrika*, 35(3):283–319, 1970.

[2] N.K.M. Faber, R. Bro, and P.K. Hopke. Recent developments in candecomp/parafac algorithms: a critical review. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 65(1):119–137, 2003.

[3] T.G. Kolda and B.W. Bader. Tensor decompositions and applications. *SIAM review*, 51(3):455, 2009.