Каноническая аппроксимация тензоров и ее реализация на Python

Кузнецов М.А.

1 Введение

Аппроксимация многомерных массивов играет важную роль в приложениях. Однако вместо заданного многомерного массива часто нужно пользоваться его приближением, свойства которого известны, возможно. в отличие от заданного. Такие аппроксимации удобно строить используя следующее представление многомерного массива (*тензора*)

Определение

Тензором A размерности d назовем многомерный массив, элементы которого A(i_1,i_2,. . . ,i_d) имеют d индексов.

Определение

Каноническим разложением многомерного массива (*тензора*) называется представление вида

$$A(i_1, i_2, \dots, i_d) = \sum_{\alpha=1}^{r} U_1(i_1, \alpha) U_2(i_2, \alpha) \dots U_d(i_d, \alpha), \tag{1}$$

где U_k называются *факторами* канонического разложения, а r — каноническим рангом.

Уравнение (1) является основным.

2 Численные эксперименты

В данном параграфе будут изложены в графическом виде результаты работы программы, реализующей метод ALS. В качестве входных данных подавались:

- Размерность тензора $d = 3$
- Ранг r переменный
- Размерности мод $dimension_i$ переменные

2.1 Численные эксперименты для случайных тензоров

В качестве входного тензора подается тензор, случайным образом полученный программно (с помощью процедуры gettensor) наперед заданного ранга и размерностей мод.

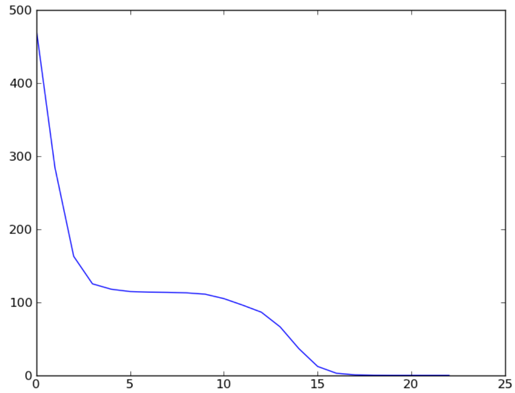
Первый цикл экспериментов призван был установить характер поведения нормы невязки

$$max|A(i_1, i_2, i_3) - Approximation(i_1, i_2, i_3)| \tag{2}$$

где Approximation(i_1,i_2,i_3) — аппроксимация заданного тензора, построенная с помощью алгоритма ALS, реализованного на Python.

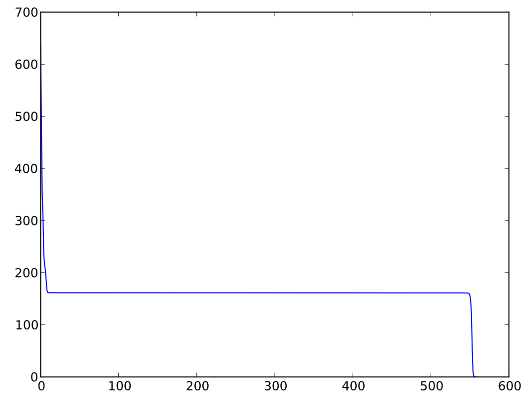
Ниже приводятся графики поведения нормы невязки (2) в зависимости от числа итераций.

- Для случайного тензора ранга $r = 5$

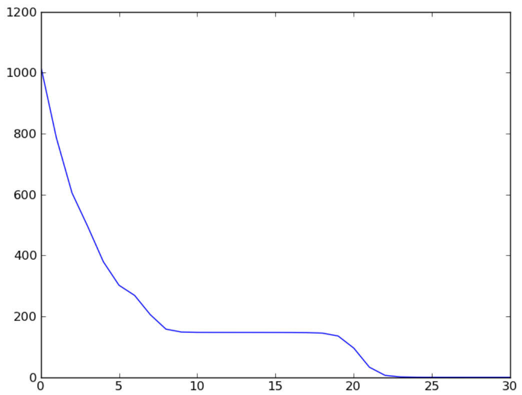


- Для случайного тензора ранга $r = 10$

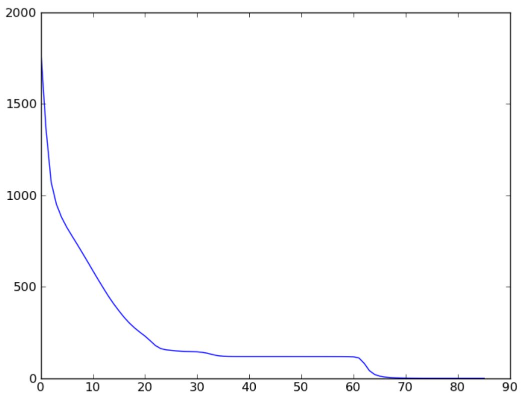
На этом примере метод попал в локальный минимум функционала (2), вследствии чего невязка убывает медленно почти на всем протяжении времени работы алгоритма. Однако миновав локальный минимум, метод сошелся очень быстро.



- Для случайного тензора ранга $r = 25$



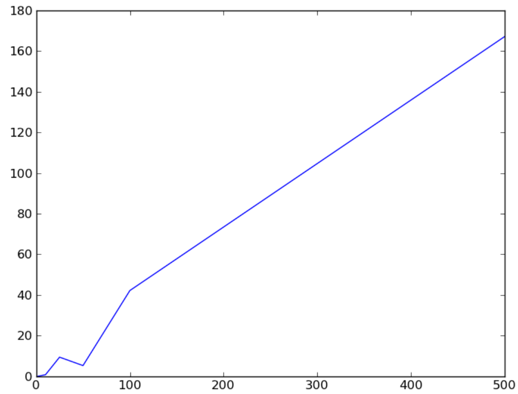
- Для случайного тензора ранга $r = 100$



Несмотря на то, что скорость убывания невязки может варьироваться в зависимости от ранга и начального приближения, невязка убывает монотонно.

Следующая серия экспериментов показывает нрафическую зависимость времени выполнения программы от:

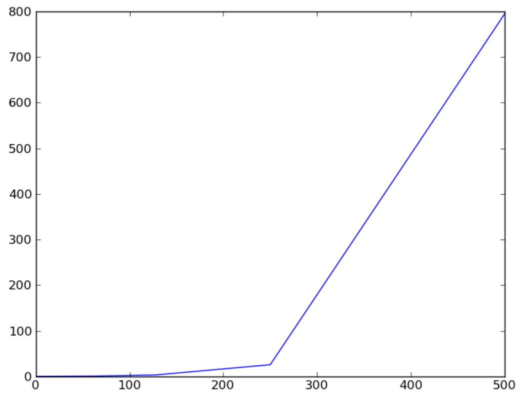
- ранга r при фиксированных размерностях тензора



в ходе этого эксперимента размерности мод $dimension_i$ брались равными между собой и равными 32 а ранг менялся $r = 2{,}3{,}5{,}10{,}25{,}50{,}100{,}500$. Исходя из графика, можно сделать вывод, что время зависит от ранга как O(r)

- размерностей тензора $dimension_i$ (i $= 1,\ldots,3$) при фиксированном ранге Эта серия экспериментов проводилась с целью изучения зависимости времени выполнения программы от размерностей мод

$dimension_i = 32{,}64{,}128{,}250{,}500$ и ранге $r = 5$.



Судя по графику время выполнения программы пропорционально $\mathrm{O}(\mathrm{n}^{1,2})$