

UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Physikalisches Praktikum PAP 2 für Studierende der Physik

Mechanik und Thermodynamik (PAP2.1)

- Praktikumsvorbereitung
- 211 Gekoppelte Pendel
- 212 Zähigkeit von Flüssigkeiten
- 213 Kreisel
- 221 Adiabatenkoeffizient $\kappa = c_p/c_v$
- 222 Heißluftmotor
- 223 Messung der Boltzmannkonstante
Teil I Brownsche Bewegung

Optik (PAP2.1)

- 232 Michelson-Interferometer
- 233 Fourieroptik (2-Tages-Versuch)
- 234 Lichtquellen und Gitterspektroskopie

Elektrizität und Radioaktivität (PAP2.2)

- 241 Wechselstromeigenschaften von RCL-Gliedern (2-Tages-Versuch)
- 242 Spannungsverstärkung
- 243 Messung der Boltzmannkonstante
Teil II Thermisches Rauschen
- 245 Induktion
Grundlagen zu den Versuchen der Radioaktivität
- 251 Statistik
- 252 Aktivierung mit thermischen Neutronen
- 253 Absorption von α -, β - und γ -Strahlen
- 255 Röntgenspektrometer
- 256 Röntgenfluoreszenz

I Vorbemerkung

Dieses Praktikum verfolgt hauptsächlich drei Ziele:

1. Sie lernen den Umgang mit physikalischen Messgeräten und Messapparaturen.
2. Kenntnisse, die Sie bereits erworben haben (oder noch erwerben werden) sollen durch die Überprüfung im Experiment gesichert werden.
3. Das Führen eines Protokolls.

Zu diesem Zweck enthält das Praktikum Versuche mit überschaubarer Theorie und einfachen Messapparaturen, deren Funktionsweise leicht einzusehen ist. Natürlich ist damit nicht die Messgenauigkeit aufwendiger Apparaturen, wie sie in der Forschung verwendet werden, erreichbar. Das Ziel des Praktikums sind weniger präzise Ergebnisse, sondern Sie sollen lernen, die Einflüsse, die die Messgenauigkeit begrenzen, zu erkennen und einzuschätzen. Aus diesem Grund sollen bei der Auswertung die Ergebnisse stets mit einer Fehlerabschätzung angegeben werden.

Lesen Sie bei der Versuchsvorbereitung die Versuchsanleitung genau durch und überlegen Sie, was bei der Versuchsdurchführung und Auswertung gemacht werden soll, welche Messwerte Sie brauchen, usw. Nur so können Sie zügig messen und vermeiden unnötige Mehrarbeit durch Fehler beim Auswerten.

Gestalten Sie die Auswertung übersichtlich und kennzeichnen Sie alle Angaben so, dass man sofort erkennen kann, worum es sich handelt (z.B.: „aus der Zeichnung abgelesen:“, „Literaturwert:“, „Mittelwert der Messreihe:“). Endergebnisse werden stets zusammen mit ihrem Fehler angegeben und besonders kenntlich gemacht, z.B. durch doppeltes Unterstreichen. Es ist unsinnig, den Fehler mit mehr als zwei Stellen anzugeben; das Ergebnis soll bis auf maximal zwei ungenaue Stellen angegeben werden (s.u.).

Bei graphischen Darstellungen von Messwerten ist folgendes zu beachten:

- Die graphische Darstellung erfolgt grundsätzlich auf Millimeterpapier bzw. Logarithmenpapier.
- Richtige Größe wählen. Nutzen Sie wenn möglich den vollen Bereich des mm-Papiers bzw. Logarithmenpapier.
- Bei jeder Achse Messgröße und Maßeinheit angeben (Bsp.: T in $^{\circ}\text{C}$, T [$^{\circ}\text{C}$], $T/^{\circ}\text{C}$).

- Um sich das Eintragen der Messpunkte zu erleichtern, empfiehlt es sich eine sinnvolle Achseneinteilung zu wählen (z.B. $1^{\circ}\text{C}=0,5\text{ cm}$ oder 1 cm oder 2 cm zu wählen und nicht $1^{\circ}\text{C}=0,4\text{ cm}$ oder $2,5\text{ cm}$)
- Verbinden Sie beim Zeichnen von Kurven nicht einfach die Punkte miteinander („Malen nach Zahlen“), sondern versuchen Sie die Streuung der Messwerte auszugleichen.
- Befinden sich mehrere Kurven in einem Diagramm, so sind die einzelnen Kurven und Messwerte zu kennzeichnen (Legende hinzufügen).
- Jede Zeichnung, Tabelle und Diagramm muss mit einer Text-Überschrift versehen werden.

II Vorbereitung

Um das Praktikum effizient durchzuführen, ist eine gründliche Vorbereitung notwendig. Es ist nicht in Ihrem Interesse die Versuche „starr“ nach Anleitung abzuarbeiten, ohne zu verstehen was Sie überhaupt praktizieren. Die erfolgreiche Teilnahme am Praktikum setzt voraus, dass Sie ein entsprechendes Kenntnisniveau der mit den Versuchen verknüpften Physik besitzen. Ob diese Kenntnisse aus Ihrem Fundus oder aus Ihrer Vorbereitung stammen, ist natürlich belanglos. Informieren Sie sich vor Beginn der Versuchsdurchführung, über die Stichpunkte, die bei den jeweiligen Versuchen unter dem Kapitel „Vorbereitung“ aufgelistet sind. Dabei reicht das alleinige Studium der Praktikumsanleitung keinesfalls aus. **Die Praktikumsanleitung ist kein Lehrbuch!** Zu jedem Versuch sind daher zusätzlich Literaturempfehlungen angegeben. Bei den meisten Versuchen ist es vollkommen ausreichend, wenn Sie sich mit Hilfe der Standardwerke (Walcher, Gerthsen, Bergmann-Schäfer, etc.) auf die Versuche vorbereiten.

Um Ihnen die Vorbereitung zu erleichtern, sind neben den Stichpunkten zusätzlich noch Fragen in der Praktikumsanleitung aufgelistet.

Eine Versuchsdurchführung ohne ausreichende Vorbereitung ist klarerweise ohne Lerneffekt und nicht sinnvoll. Die Praktikantin oder der Praktikant muss in diesem Fall damit rechnen, nach Hause geschickt zu werden und den Versuch zu einem späteren Zeitpunkt zu wiederholen.

Die folgenden Punkte fassen das Basiswissen zusammen, über das Sie bei den Versuchen verfügen sollten:

1. Mathematische Voraussetzungen - elementare Funktionen: Polynome, trigonometrische Funktionen, Logarithmus- und Exponential-Funktion - elementares Differenzieren und Integrieren - gewöhnliche Differentialgleichungen: Schwingungsgleichung/Kraftgesetz, Gleichung des natürlichen Wachstums.
2. Statistik und Fehler - Mittelwert, Standardabweichung, statistische und systematische Fehler, Fehler des Mittelwertes, Fehlerfortpflanzung, Gauß-Verteilung.
3. Die 7 Basiseinheiten des SI-Systems : m, kg, s, A, K, mol, Cd.
4. Mechanik - Newtonschen Gesetze; Kräfteparallelogramm - Erhaltungssätze für Translation und Rotation (Energie, Impuls, Drehimpuls) - Drehmoment, Trägheitsmoment u. Steinerscher Satz - Hooksches Gesetz, Elastische Konstanten - Resonanzkurve - Für Studierende mit Hauptfach Physik: Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators und typische Lösungen - Schallgeschwindigkeit, longitudinale und transversale Schwingungen.
5. Elektrizitätslehre - Elementarladung und Ladungserhaltung; Faraday-Konstante, Avogadrokonstante, Stoffmenge - Ohmsches Gesetz, Kirchhoffsche Regeln, spezifischer Widerstand - Messbereichserweiterung von Messinstrumenten - Kondensator, Kapazität. Für Studierende mit Hauptfach Physik: Herleitung Kondensatorentladung, Bewegung einer Ladung im elektrischen Feld.
6. Optik - Reflexions- und Brechungsgesetz - Abbildung mit Linsen (geometrische Bildkonstruktion, Linsengleichung, Abbildungsmaßstab) - kontinuierliche und Linienspektren (qualitatives Verständnis) - Auflösungsvermögen optischer Instrumente.
7. Wärmelehre - Wärme, Zustandsgrößen (Temperatur, innere Energie,...), Zustandsgleichung des idealen Gases - 1. und 2. Hauptsatz, Wärmebilanz, spezifische Wärme, Phasendiagramm, Dampfdruck - Für Studierende mit Hauptfach Physik: Van-der-Waals-Gleichung realer Gase, Verlauf der Isothermen im $p(V)$ -Diagramm, Gesetz von Dulong-Petit, Freiheitsgrade und Gleichverteilungssatz, Clausius-Clapeyron Gleichung.

Die Kenntnis dieses Basiswissens erspart natürlich nicht das sorgfältige Durcharbeiten der Anleitung und die Vorbereitung der anderen Kapitel im Skript.

Insbesondere sollten Sie sich bei der Vorbereitung auch schon über die Versuchsdurchführung, die Messmethoden und über die Auswertung Gedanken machen. Machen Sie sich bewusst, was und wie Sie messen werden und schätzen Sie ab, welchen Einfluss die Fehler der Einzelmessungen auf den Gesamtfehler haben (Bsp.: eine quadratische Größe geht mit doppeltem Gewicht ein, als eine lineare).

III Durchführung der Versuche

Sehen Sie sich die Apparatur gründlich an und machen Sie sich mit der Funktion aller Einzelteile vertraut. Spielen Sie die Messprozedur nach Möglichkeit zunächst qualitativ durch. Wenn Sie eine elektrische Schaltung herzustellen haben, kontrollieren Sie zunächst selbst sorgfältig, ob Sie keine Schaltfehler gemacht haben. **Vor Anlegen der Spannung muss die Schaltung vom Assistenten abgenommen werden.** Das Protokoll wird auch während der Messungen lückenlos geführt, d.h. man soll keine großen Zwischenräume für spätere Eintragungen lassen. Lassen Sie sich Zeit zum Führen eines ordentlichen Protokolls.

Ein Protokoll ist eine dokumentarische Darstellung des gesamten Versuchsaufbaus: Versuchsaufbau, Versuchsdurchführung, Erfassung und Auswertung von Messdaten, Diskussion der Ergebnisse. Die Qualität der bei einem Praktikumsversuch erzielten Ergebnisse hängt nicht nur vom Messverfahren und der Genauigkeit der Messgeräte ab, sondern auch vom exakten experimentellen Arbeiten und der korrekten Protokollführung. Im Einzelnen soll das Protokoll enthalten:

1. Überschrift und Versuchsnummer.
2. Einleitung: Formulierung der theoretischen Grundlagen, sowie physikalischer Begriffe und Gesetze, die zum Verständnis des Versuchs erforderlich sind.
3. Das Protokoll muss so ausgelegt sein, dass Formeln, die für den Versuch benötigt werden, und zwar zunächst in der Form, in der man sie als allgemein bekannt voraussetzen kann, dann die für den Versuch nötigen Umformungen. Damit man den Einfluss der Fehler der gemessenen Größen auf das Versuchsergebnis leichter übersehen kann, ist es zweckmäßig, die Formeln auf die Form

Versuchsergebnis = Funktion der direkt gemessenen Größen

zu bringen. Alle Abkürzungen, die in den Formeln vorkommen, müssen erklärt sein, evtl. mit Hilfe der Skizze der Apparatur. Diesen Teil des Protokolls schreiben Sie am besten schon zu Hause bei der Vorbereitung.

4. Skizze und Beschreibung der Versuchsanordnung (schematisch, Schaltplan bei elektrischen Schaltungen).
5. Knappe aber vollständige Angaben über das Messverfahren, soweit dies nicht völlig selbstverständlich ist. Das Protokoll muss selbsterklärend sein!
6. Präsentieren Sie Ihre Messergebnisse in Form von Tabellen und Diagrammen, die klar und ausreichend beschriftet sein müssen. Kommentieren Sie diese mit einigen einleitenden Sätzen.
7. Führen Sie nach Möglichkeit eine vorläufige Auswertung unmittelbar nach der Messung durch.
8. Bei der Auswertung müssen alle Zwischenrechnungen im Protokollheft ausgeführt werden. Vergleichen Sie, soweit vorhanden, Ihre Messergebnisse mit Literaturwerten. Bei der Fehlerabschätzung berücksichtigen Sie nur die Faktoren, die Sie quantitativ kennen, also im allgemeinen die zufälligen Fehler und die mutmaßliche Genauigkeit der Eichung der Instrumente. **Es genügt vollständig, sich auf die Faktoren zu beschränken, die die Messgenauigkeit hauptsächlich begrenzen.** Wenn Sie glauben, dass bei dem Versuch systematische Fehler auftreten, die Sie nicht quantitativ erfassen können, machen Sie hierüber eine kurze Bemerkung. Achten Sie darauf, dass Sie alle zur Auswertung nötigen Angaben aufgeschrieben haben (z.B. Barometerstand, Zimmertemperatur, etc.).
9. Zusammenfassung und kritische Diskussion. Fassen Sie am Schluss der Auswertung den gesamten Versuch mit einigen kurzen Sätzen zusammen. Gehen Sie dabei auf die physikalische Fragestellung ein, das Messprinzip, die Messergebnisse und Fehler. Setzen Sie sich kritisch mit dem Versuch auseinander. Gibt es Möglichkeiten den Versuchsaufbau oder das Messprinzip zu verbessern? Gibt es Möglichkeiten die Fehler zu minimieren?

IV Messgenauigkeit und Fehlerabschätzung

Jede Messung kann nur mit einer begrenzten Genauigkeit durchgeführt werden. Zwei unabhängige Messungen werden daher unterschiedliche Ergebnisse liefern.

Damit das Resultat einer Messung aussagekräftig ist, reicht es nicht aus nur den Zahlenwert des Messergebnisses anzugeben, sondern es muss auch eine Aussage über die Messgenauigkeit gemacht werden. Dies geschieht z.B. durch die Angabe eines Intervalls $[x - \Delta x, x + \Delta x]$ bzw.

$$x \pm \Delta x, \quad (1)$$

innerhalb dessen der „wahre Wert“ mit einer bestimmten, anzugebenen Wahrscheinlichkeit liegt.

Beispiel:

Die Bestimmung der Erdbeschleunigung mit einem Fadenpendel ergab folgendes Resultat:

$$g = (9,81 \pm 0,03) \text{ m/s}^2. \quad (2)$$

Die erste Zahlenangabe entspricht der besten Schätzung des „wahren Wertes“. Die zweite Zahl ist die Messgenauigkeit, die man häufig auch den „Fehler“ des Messergebnisses nennt. Das Wort „Fehler“ darf nicht falsch interpretiert werden. Diese Angabe gibt nicht etwa den Betrag an, um den das Messergebnis falsch ist, sondern stellt ein Unsicherheitsbereich dar, in dem der „wahre Wert“ mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit liegt. Wie groß diese Wahrscheinlichkeit ist, werden wir an späterer Stelle diskutieren. Das Resultat der Messung ist dann wie folgt zu interpretieren:

Als beste Schätzung für die Erdbeschleunigung wurde ein Wert von $9,81 \text{ m/s}^2$ bestimmt. Der wahre Wert liegt mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit im Intervall $9,78 \text{ m/s}^2 \dots 9,84 \text{ m/s}^2$.

Beachten Sie, dass es bei der Angabe des Messergebnisses und der Messunsicherheit keinen Sinn macht beliebig viele Nachkommastellen anzugeben (Taschenrechnerergebnis). Die Angabe

$$g = (9,8114587 \pm 0,0298682) \text{ m/s}^2 \quad (3)$$

ist sinnlos. Die Messgenauigkeit soll auf eine oder höchstens zwei signifikante Stellen gerundet werden und die letzte signifikante Stelle des Messergebnisses soll der selben Größenordnung entsprechen wie die Messgenauigkeit:

$$g = (9,81 \pm 0,03) \text{ m/s}^2. \quad (4)$$

IV.1 Systematische und Statistische Fehler

Bei einer Messung können zwei Arten von Fehlern auftreten: Systematische Fehler und statistische (zufällige) Fehler. Systematische Fehler führen dazu, dass das Messergebnis einseitig vom wahren Wert abweicht. Eine Wiederholung der Messung zeigt immer die gleiche Abweichung. Der Messwert ist entweder immer größer oder immer kleiner als der „wahre Wert“. Im Gegensatz dazu schwanken bei zugrundeliegenden statistischen Fehlern, die Messwerte zufällig. Mal sind sie größer, das andere mal kleiner als der „wahre Wert“.

IV.1.1 Systematische Fehler

Systematische Fehler werden zunächst durch die begrenzte Genauigkeit der Eichung der Instrumente verursacht. Bei Maßstäben und Skaleneinteilungen ist die absolute Genauigkeit in der Regel etwas besser als die Ablesegenauigkeit. An vielen Analogmessinstrumenten ist zusätzlich noch eine Genauigkeitsklasse angegeben. Diese gibt den relativen Fehler des Messbereichsendwertes an. Wird z.B. mit einem Voltmeter der Klasse 1,5 innerhalb eines Messbereiches von 200 V eine Messung durchgeführt, so beträgt der Fehler 1,5% von 200 V, d.h. 3 V. Bei digitalen Instrumenten wird der Fehler in der Regel durch zwei Größen angegeben. Einen prozentualen Fehler, der sich entweder auf dem Messwert (Angabe *v.M.* = *vom Messwert*) oder auf den Messbereich (Angabe *v.E.* = *vom Endwert*) bezieht, sowie eine Fehlerangabe in der Form: $\pm x$ Digits. Die letztere Angabe bedeutet, dass der Messwert um $\pm x$ Einheiten der hintersten Stelle der Anzeige schwanken kann.

Beispiel: Mit einem digitalen Voltmeter mit der Genauigkeitsangabe

$$\pm 1,5\% \text{ v.M.}, \pm 3 \text{ Digits}$$

wird ein Spannung von 12,00 V gemessen. Der absolute Fehler berechnet sich aus 1,5% vom Messwert sowie drei Einheiten der letzten Stelle: 1,5% von 12,00 V und $3 \times 10 \text{ mV} = 180 \text{ mV} + 30 \text{ mV} = 210 \text{ mV}$.

Desweiteren können systematische Fehler auch durch Umwelteinflüsse wie Temperaturdriften, Einkopplung elektrischer Felder (z.B. Netzbrummen) etc. oder aber auch durch grundsätzliche Mängel des Messverfahrens verursacht werden. Z.B. muss bei der Messung an einer hochohmigen Spannungsquelle der Innenwiderstand des Voltmeters berücksichtigt werden (wichtig in Versuch 41 *Temperaturmessung*). Geschieht dies nicht, treten systematische Abweichungen auf.

Nr.	x [V]	Nr.	x [V]	Nr.	x [V]	Nr.	x [V]
1	5,070	6	5,039	11	5,053	16	5,038
2	5,073	7	5,043	12	5,054	17	5,058
3	5,031	8	5,034	13	5,078	18	5,040
4	5,024	9	5,034	14	5,071	19	5,071
5	5,034	10	5,079	15	5,050	20	5,051

Tabelle 1: *Ergebnisse einer 20-maligen Spannungsmessung.*

Für die Abschätzung von systematischen Fehlern lassen sich keine allgemeinen Regeln aufstellen. Es kommt im Einzelfall auf den Scharfsinn und die physikalischen Kenntnisse des Experimentators an. Allerdings können systematische Fehler auch noch nach einer Messung berücksichtigt werden. Sind die Ursachen bekannt, kann das Messergebnis entsprechend korrigiert werden.

IV.1.2 Statistische Fehler

Statistische Fehler entstehen durch zufällige Prozesse während des Messprozesses. Ursachen hierfür sind z.B. das Rauschen eines Sensors oder thermodynamische Prozesse. Auch der Experimentator selbst kann eine statistische Fehlerquelle darstellen, da dieser stets die Messwerte aufnehmen, ablesen und interpretieren muss. All dies kann statistischen Schwankungen unterliegen. Z.B. wird man bei einer mehrmaligen Zeitmessung mit einer Stoppuhr aufgrund schwankender Reaktionszeiten verschiedene Ergebnisse erhalten.

Statistische Fehler haben die Eigenschaft, dass die Messergebnisse zufällig um den „wahren Wert“ schwanken. Falls es möglich ist eine Messung mehrmals zu wiederholen, können solche Fehler mit Mitteln der Statistik aus der Streuung der Messwerte ermittelt werden.

Tabelle 1 zeigt ein Beispiel, bei dem eine elektrische Spannung x 20-mal gemessen wurde. Die Messwerte sind in Abbildung 1 eingetragen.

Gesucht ist ein Wert der die beste Schätzung des wahren Wertes darstellt. Mit Hilfe statistischer Überlegungen lässt sich zeigen, dass dieser Bestwert dem arithmetischen Mittelwert entspricht:

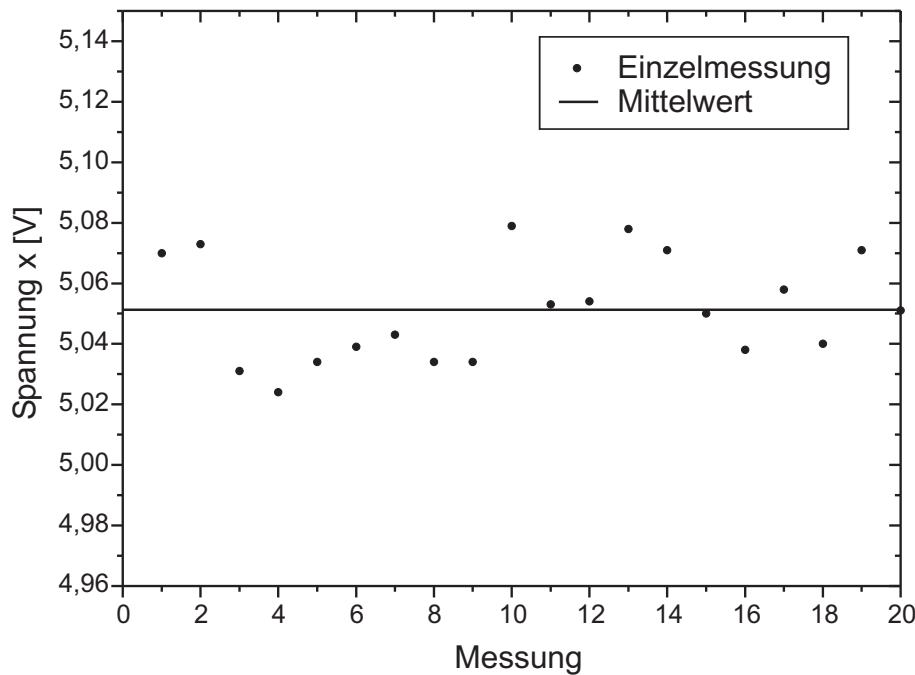


Abbildung 1: Darstellung von 20 unabhängigen Messungen einer elektrischen Spannung x . Die waagrechte Linie entspricht dem Mittelwert.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (6)$$

Dieser Wert ist in Abbildung 1 als waagrechte Linie eingezeichnet.

Neben der besten Schätzung des „wahren Werts“ (Mittelwert) müssen wir zusätzlich noch eine Aussage über die Genauigkeit der Messung machen. Dazu wiederholen wir die Messung nicht nur 20-mal sondern viele Male mehr. In Abbildung 2 sind z.B. 3500 Einzelmessungen aufgetragen. Hier ist noch deutlicher zu erkennen, dass die Messwerte symmetrisch um einen mittleren Wert streuen. Die meisten Messwerte liegen in der Nähe des Mittelwertes. Aber es gibt auch einzelne „Ausreißer“, die weiter weg vom Mittelwert liegen. Um dies

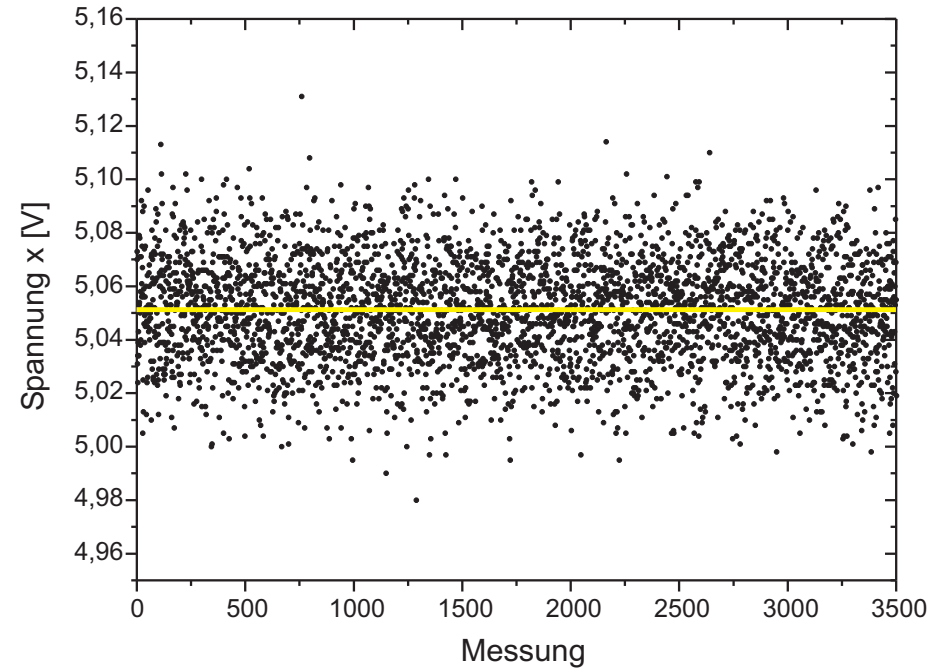


Abbildung 2: Darstellung von 3500 Messungen.

zu quantifizieren empfiehlt sich eine andere grafische Darstellung der Messwerte in Form eines Histogramms. Dabei wird gezählt, wieviele Einzelmessungen innerhalb eines bestimmten Intervalls aufgetreten sind und die entsprechende Häufigkeit in Form eines Säulendiagramms dargestellt. Solch ein Histogramm ist in Abbildung 3 dargestellt. Für sehr viele Messungen, streng genommen für unendlich viele, nähert sich das Histogramm einer bekannten Verteilung, die als Normal- bzw. Gaußverteilung bezeichnet wird und durch

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(\mu - x)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (7)$$

dargestellt wird. Die Gaußverteilung beschreibt eine Wahrscheinlichkeitsdichte,

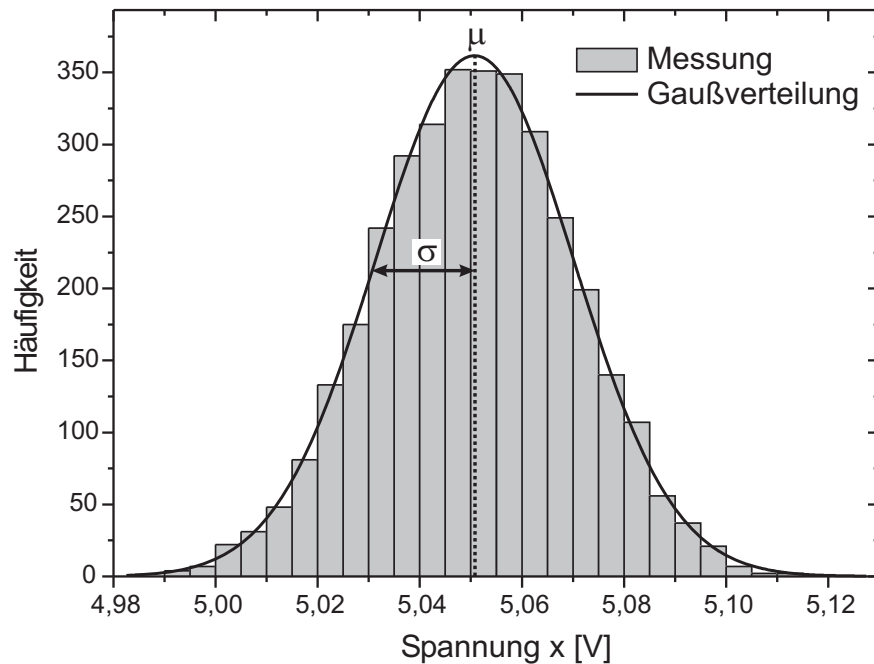


Abbildung 3: Histogramm von 3500 Einzelmessungen. Die durchgezogene Linie zeigt die dazugehörige Gaußverteilung mit den Parametern μ und σ . Die Gaußverteilung ist hier nicht auf Eins normiert, sondern auf die Fläche des Histogramms.

d.h.

$$\int_a^b P(x) dx \quad (8)$$

gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Wert x_i gemessen wird, der im Intervall $a \leq x_i \leq b$ liegt. Durch den Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}\sigma$ ist die Verteilung normiert, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1. \quad (9)$$

Dies ist sofort einsichtig, da mit 100%-iger Wahrscheinlichkeit irgendein Wert gemessen wird.

Eine Gaußverteilung besitzt zwei Parameter. Die Lage des Maximums der Verteilung wird durch die Größe μ bestimmt und entspricht dem wahrscheinlichsten Wert. Die Breite der Verteilung ist durch die Größe σ (Abbildung 3) gegeben.

Falls die Messwerte tatsächlich gaußverteilt sind - und das ist sehr häufig der Fall - können wir annehmen, dass wir das Messergebnis einer großen Anzahl von Einzelmessungen, ebenfalls durch die Parameter μ und σ beschreiben können. Wie sich zeigen lässt, konvergiert der arithmetische Mittelwert \bar{x} für eine große Anzahl von Einzelmessungen, gegen den wahrscheinlichsten Wert μ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \mu. \quad (10)$$

Der Mittelwert stellt somit, wie wir bereits zuvor erwähnt haben, die beste Schätzung des „wahren Werts“ dar.

Die Breite der Gaußverteilung wird durch σ bestimmt. Je größer σ , desto breiter ist die Verteilung und umso größer ist die Streuung der Messwerte um den wahrscheinlichsten Wert μ . Wir können daher σ als ein Maß für die Messgenauigkeit interpretieren.

Für eine große Anzahl von Einzelmessungen lässt sich zeigen, dass die Reihe (Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung vom Mittelwert)

$$S'_E = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}, \quad (11)$$

gegen σ konvergiert:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S'_E = \sigma. \quad (12)$$

S'_E wird als **Standardabweichung** einer Messreihe bezeichnet. Allerdings ist hier Vorsicht geboten. S'_E ist nur dann ein guter Schätzwert für die Streuung der Messwerte, wenn viele Einzelmessungen durchgeführt werden. Bei nur wenigen Messungen wird die Streuung um den Mittelwert überschätzt. Eine genauere Überlegung zeigt, dass es besser ist als Maß für die Streuung die Größe

$$S_E = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}, \quad (13)$$

zu verwenden. S_E wird auch als der **mittlere Fehler einer Einzelmessung** bezeichnet.

Intervall	$\pm\sigma$	$\pm 2\sigma$	$\pm 3\sigma$
Wahrscheinlichkeit	68,3%	95,5%	99,7%

Tabelle 2: Wahrscheinlichkeiten für unterschiedliche Werte von σ .

Wird eine Messung viele Male wiederholt und als beste Schätzung des „wahren Wertes“ der Mittelwert \bar{x} angegeben, so ist dieser natürlich genauer als der Messwert einer Einzelmessung und zwar um den Faktor $1/\sqrt{N}$:

$$S_M = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}. \quad (14)$$

S_M wird auch als **mittlerer Fehler des Mittelwerts** oder einfach als **Standardfehler** bezeichnet.

Mit Hilfe von Gleichung (8) lässt sich berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Messwert x_i im Bereich von $\pm\sigma$ um den wahrscheinlichsten Wert μ schwankt:

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} P(x) dx = 68,3 \%. \quad (15)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Messung ein Wert im Bereich $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$ auftritt beträgt 68,3 %. Analog lassen sich auch die Wahrscheinlichkeiten für den 2σ bzw. 3σ -Bereich bestimmen.

Für das Endergebnis einer Messung gibt man in der Regel den 1σ -Fehler S_E bzw. S_M an. Wird ein größerer Fehlerbereich angegeben (z.B. 3σ -Fehler) ist dies gesondert zu vermerken.

Beispiel:

Für die in Tabelle 1 angegebenen Messdaten errechnen sich die Ergebnisse wie folgt:

$$\text{Mittelwert: } \bar{x} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{5,070 \text{ V} + \dots + 5,051 \text{ V}}{20} = 5,051 \text{ V}. \quad (16)$$

$$\text{Fehler einer Einzelmessung: } S_E = \sqrt{\frac{1}{19} \sum_{i=1}^{20} (\bar{x} - x_i)^2} = 0,0173 \text{ V}. \quad (17)$$

$$\text{Fehler des Mittelwerts: } S_M = \sqrt{\frac{1}{20 \cdot 19} \sum_{i=1}^{20} (\bar{x} - x_i)^2} = 0,0039 \text{ V}. \quad (18)$$

Das Endergebnis wird in der Form

$$\bar{x} \pm S_M \quad \text{bzw.} \quad \bar{x} \pm \Delta x \quad (19)$$

angegeben. Anstatt S_M schreibt man auch häufig für den Fehler einfach Δx . In unserem Beispiel erhalten wir

$$x = (5,051 \pm 0,004) \text{ V}. \quad (20)$$

IV.2 Fehlerfortpflanzung

Bei vielen Praktikumsversuchen reicht es nicht aus nur eine physikalische Größe zu messen und dessen Fehler abzuschätzen. In der Regel sollen aus dem Messergebnis weitere Größen und dessen Genauigkeiten bestimmt werden.

Beispiel:

Es soll die Verlustleistung P eines ohmschen Widerstands R , an dem die Spannung U anliegt, bestimmt werden. Dazu wird der Widerstand R und die Spannung U gemessen und gemäß

$$P = \frac{U^2}{R} \quad (21)$$

die Verlustleistung berechnet. Da sowohl R als auch U nur mit einer bestimmten Genauigkeit bestimmt wurden, besitzt auch die daraus abgeleitete Größe P eine endliche Genauigkeit.

Die Bestimmung dieser Genauigkeit geschieht mit Hilfe der Differentialrechnung.

Wenn die direkt gemessenen Größen x und y um kleine Beträge dx und dy geändert werden, verändert sich der Wert einer Funktion $f = f(x, y)$ um

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (\text{vollständiges Differential}) \quad (22)$$

Hier bedeutet $\partial f/\partial x$ die partielle Differentiation der Funktion f nach x , d.h. die Ableitung von f nach x , wobei die Variable y als Konstante behandelt wird.

Wenn wir in dieser Gleichung die Differentiale dx und dy durch die Fehler Δx und Δy der direkt gemessenen Größen ersetzen wollen, müssen wir berücksichtigen, dass sich die Fehler im Mittel teilweise kompensieren werden, wenn sie voneinander unabhängig sind. Daher berechnet man den mittleren Fehler Δf durch „quadratische Addition“ nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2} \quad (23)$$

Hier und im Folgenden wird unter Δx bei zufälligen Fehlern, der mittlere Fehler S_M nach Gleichung (14), bei systematischen Fehlern die oben diskutierten Überlegungen verstanden.

Für das oben angeführte Beispiel (21) berechnet sich der Fehler wie folgt:

$$P = P(U, R) \quad (24)$$

$$\Delta P = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial U} \Delta U\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial R} \Delta R\right)^2} \quad (25)$$

$$= \sqrt{\left(2\frac{U}{R} \Delta U\right)^2 + \left(-\frac{U^2}{R^2} \Delta R\right)^2} \quad (26)$$

Die funktionale Abhängigkeit der zu ermittelnden Größe von den direkt gemessenen hat häufig eine einfache Form. Es lohnt sich, die folgenden Formeln zu merken, die aus der allgemeinen Gleichung (23) folgen:

$$f = ax \quad \Delta f = a\Delta x \quad (27)$$

$$f = x + y \quad \Delta f = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (28)$$

$$f = xy, \quad f = x/y \quad \frac{\Delta f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2} \quad (29)$$

$$f = x^{\pm b} \quad \frac{\Delta f}{f} = |b| \frac{\Delta x}{x}, \quad b = \text{const.} \quad (30)$$

Merken Sie sich:

Farbe	Frequenz [THz]	U_S [V]	ΔU_S [V]
gelb	518,7	-0,59	0,05
grün	549,0	-0,72	0,05
blau	687,9	-1,28	0,05
UV	821,3	-1,88	0,05

Tabelle 3: Messdaten aus dem Versuch Fotoeffekt.

1. „Der absolute Fehler einer Summe oder Differenz zweier Größen ist gleich der quadratischen Summe der absoluten Fehler der Summanden“.
2. „Der relative Fehler des Produkts oder des Quotienten zweier Größen ist gleich der quadratischen Summe der einzelnen relativen Fehler“.

Für eine Fehlerabschätzung kann man statt den Gleichungen (28) und (29) auch die einfacheren Formeln $\Delta f = \Delta x + \Delta y$ bzw. $\Delta f/f = \Delta x/x + \Delta y/y$ verwenden.

Bevor man mit der Messung beginnt, sollte man sich mit Hilfe der Gleichungen (27) bis (30) überlegen, durch welche Fehler die Genauigkeit der Messung hauptsächlich begrenzt wird. Man kann dann versuchen, die empfindlich in das Resultat eingehenden Fehler klein zu halten.

V Ausgleichsrechnung

Bei vielen Praktikumsversuchen kommt es häufig vor, dass die Steigung m einer linearen Funktion bestimmt werden muss. Hier im Praktikum können Sie dies auf zwei verschiedene Arten machen. Eine grafische Methode die hier erläutert werden soll und eine rechnerische Methode die im nächsten Abschnitt *Lineare Regression* diskutiert wird.

Wir wollen die Bestimmung einer Geradensteigung anhand eines Beispiels mit Daten des Versuchs 35, *Fotoeffekt* erläutern. Bei diesem Versuch wird mit Hilfe einer Fotozelle das Planck'sche Wirkungsquantum bestimmt werden. Dazu wird die Fotozelle mit Licht unterschiedlicher Frequenz (Farbe) beleuchtet und gemessen, bei welcher Sperrspannung U_S der Fotostrom verschwindet. Die Messdaten sind in Tabelle 3 zusammengefasst und in Abbildung 4 dargestellt.

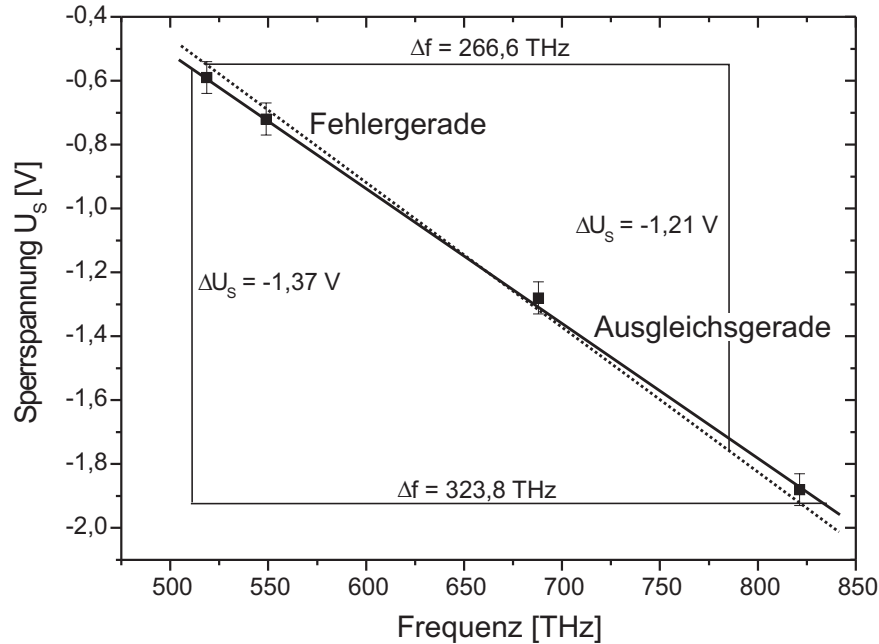


Abbildung 4: Bestimmung der Steigung und dessen Fehler mit Hilfe einer Ausgleichsgerade (durchgezogen) und Fehlergerade (punktiert).

Das Planck'sche Wirkungsquantum lässt sich aus der Steigung $\Delta U_S / \Delta f$ des Graphen gemäß

$$h = e \frac{\Delta U_S}{\Delta f}, \quad (31)$$

bestimmen, wobei e die Elementarladung darstellt. Um die Steigung zu berechnen legen wir zunächst durch alle Messpunkte unter Berücksichtigung der Messfehler eine Ausgleichsgerade. Dabei soll die Gerade so platziert werden, dass die Abweichung der einzelnen Messpunkte von der Gerade im Mittel minimal wird.

Für das Planck'sche Wirkungsquantum berechnen wir:

$$h = e \frac{\Delta U_S}{\Delta f} = e \frac{1,37 \text{ V}}{323,8 \text{ THz}} = 6,78 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (32)$$

Um den Messfehler abzuschätzen, legen wir durch die Messwerte eine zweite Gerade (Fehlergerade). Diese sollte maximal steil (oder maximal flach) sein aber noch innerhalb der Fehler der einzelnen Messungen liegen. Hieraus erhalten wir:

$$h = e \frac{\Delta U_S}{\Delta f} = e \frac{1,21 \text{ V}}{266,6 \text{ THz}} = 7,27 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (33)$$

Den Fehler schätzen wir aus der Differenz der beiden Steigungen ab. Somit lautet das Ergebnis dieser Messung:

$$h = (6,8 \pm 0,5) \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (34)$$

VI Lineare Regression

Sofern bei einer Messung keine systematischen Fehler auftreten und die Messdaten normalverteilt sind, gilt für die Wahrscheinlichkeit, für x_i den Wert y_i zu messen:

$$P_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta y_i} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - f(x_i)}{\Delta y_i}\right)^2\right\}, \quad (35)$$

wobei Δy_i den Fehler von y_i bezeichnet. Die Gesamtwahrscheinlichkeit P alle N Messwerte zu messen, berechnet sich aus dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten P_i :

$$P = \prod_i P_i \quad (36)$$

$$= \left(\prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta y_i}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_i \left(\frac{y_i - f(x_i)}{\Delta y_i}\right)^2\right\}. \quad (37)$$

Gesucht werden nun die Funktionsparameter von $f(x)$, für die die Wahrscheinlichkeit P maximal wird. Der erste Term in (37) stellt eine Konstante dar, die nicht von den Funktionsparametern abhängt. Somit wird die Wahrscheinlichkeit maximal, wenn die Summe in der Exponentialfunktion minimal wird. Diese Summe wird auch als χ^2 -Summe bezeichnet.

$$\chi^2 \equiv \sum_i \left(\frac{y_i - f(x_i)}{\Delta y_i} \right)^2. \quad (38)$$

Wir wollen uns im Folgenden auf lineare Funktionen beschränken, d.h.

$$f(x) = mx + n. \quad (39)$$

Für die Berechnung der Parameter m und n folgt dann:

$$\chi^2(m, n) = \sum_i \left(\frac{y_i - (mx_i + n)}{\Delta y_i} \right)^2 = \text{Minimum} \quad (40)$$

Durch diese Methode wird eine Gerade mit den Parametern m und n bestimmt, für die die quadratischen Abstände der Messwerte y_i von der Geraden minimal wird. Durch den Faktor $1/\Delta y_i^2$ werden zusätzlich Messwerte mit einem kleinen Fehler Δy_i stärker gewichtet als Messwerte mit einem großen Fehler (Methode der kleinsten Fehlerquadrate, engl.: least square method).

Für die Berechnung von m und n müssen wir die Nullstellen der partiellen Ableitungen bestimmen:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial m} = -2 \sum_i x_i \frac{y_i - (mx_i + n)}{\Delta y_i^2} = 0 \quad (41)$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial n} = -2 \sum_i \frac{y_i - (mx_i + n)}{\Delta y_i^2} = 0. \quad (42)$$

Auflösen nach den Funktionsparametern liefert:

$$m = \frac{1}{\xi} \left(\sum \frac{1}{\Delta y_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\Delta y_i^2} - \sum \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \sum \frac{y_i}{\Delta y_i^2} \right) \quad (43)$$

$$n = \frac{1}{\xi} \left(\sum \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2} \sum \frac{y_i}{\Delta y_i^2} - \sum \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\Delta y_i^2} \right), \quad (44)$$

mit

$$\xi = \sum \frac{1}{\Delta y_i^2} \sum \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2} - \left(\sum \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \right)^2. \quad (45)$$

Für den Fall, dass alle Fehler gleich groß sind, d.h. $\Delta y_i \equiv \Delta y$, vereinfachen sich diese Gleichungen:

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (46)$$

$$n = \frac{\overline{x^2 y} - \bar{x} \bar{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (47)$$

Da die Messwerte y_i fehlerbehaftet sind, besitzen auch die Funktionsparameter einen Fehler den wir mit Δm bzw. mit Δn bezeichnen. Die Fehler berechnen sich nach der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta m^2 = \sum_i \left(\frac{\partial m}{\partial y_i} \right)^2 \Delta y_i^2 \quad (48)$$

$$\Delta n^2 = \sum_i \left(\frac{\partial n}{\partial y_i} \right)^2 \Delta y_i^2. \quad (49)$$

Mit Hilfe von Gleichung (43) und (44) erhalten wir:

$$\Delta m^2 = \frac{1}{\xi} \sum_i \frac{1}{\Delta y_i^2} \quad (50)$$

$$\Delta n^2 = \frac{1}{\xi} \sum_i \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2}, \quad (51)$$

wobei ξ in Gleichung (45) definiert wurde. Sind wiederum alle $\Delta y_i \equiv \Delta y$ gleich groß, so vereinfachen sich diese Berechnungen zu

$$\Delta m^2 = \frac{\Delta y^2}{N} \frac{1}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, \quad (52)$$

$$\Delta n^2 = \frac{\Delta y^2}{N} \frac{\overline{x^2}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (53)$$

Die hier ausgeführten Überlegungen gelten nicht nur für lineare Funktionen, sondern lassen sich auch auf andere Funktionen übertragen.

Wir wollen wieder eine Beispielrechnung mit den Daten des Versuchs Fotoeffekt (Tabelle 3) durchführen. Hier entspricht x = Frequenz, $U_S = y$ und $\Delta U_S = \Delta y$.

Da die Fehler der einzelnen Messungen alle gleich groß sind, müssen wir nur die Mittelwerte in Gleichung (46) berechnen:

$$\bar{x} = 6,442 \times 10^{14} \text{ Hz} \quad (54)$$

$$\bar{y} = -1,118 \text{ V} \quad (55)$$

$$\overline{xy} = -7,815 \times 10^{14} \text{ VHz} \quad (56)$$

$$\overline{x^2} = 4,295 \times 10^{29} \text{ Hz}^2 \quad (57)$$

$$\bar{x}^2 = 4,150 \times 10^{29} \text{ Hz}^2 \quad (58)$$

Für die Steigung folgt:

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = -4,238 \times 10^{-15} \text{ V Hz}. \quad (59)$$

Das Plank'sche Wirkungsquantum erhalten wir durch Multiplikation mit der Elementarladung:

$$h = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot 4,238 \times 10^{-15} \text{ V Hz} = 6,79 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (60)$$

Den Fehler berechnen wir mit Hilfe von Gleichung (52):

$$\Delta m^2 = \frac{\Delta y^2}{N(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}, \quad (61)$$

wobei nach Tabelle 3 für $\Delta y = 0,05 \text{ V}$ und für $N = 4$ zu wählen ist. Wir erhalten für den Fehler von h :

$$\Delta h = e \Delta m = 0,33 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (62)$$

Das Messergebnis lautet somit

$$h = (6,8 \pm 0,3) \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (63)$$

Versuch 211 Gekoppelte Pendel

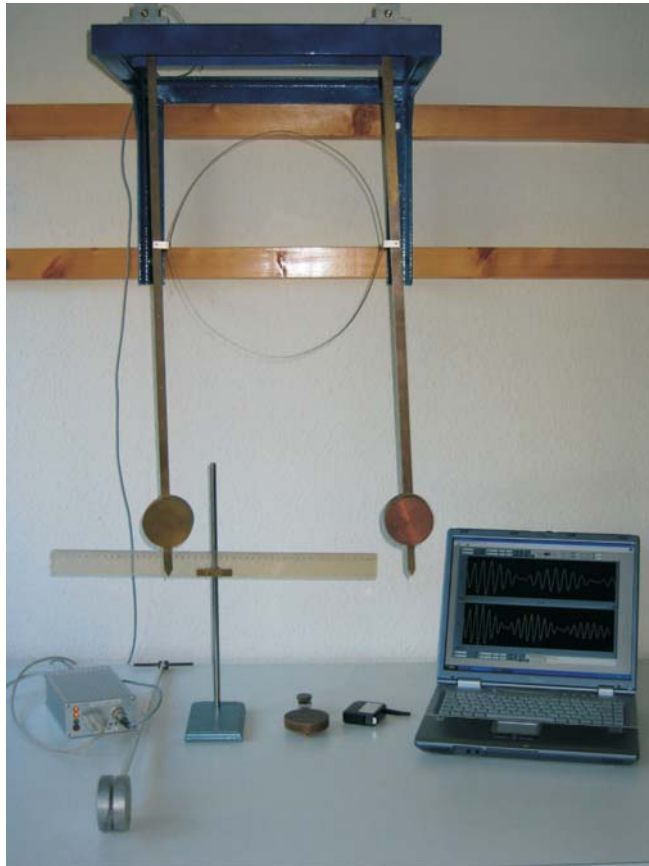


Abbildung 1: Versuchsaufbau.

I Messaufbau

- zwei Pendel aus Messing (Dichte: $\rho=7,5 \text{ g/cm}^3$)
- Kopplungsfeder (Ring aus Federbronzeband)
- fest montierter magnetischer Winkelaufnehmer
- Analog-Digital Wandler
- PC mit Drucker

II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart
- Sommerfeld-Vorlesungen Band 1
- Demtröder, Experimentalphysik Band 1
- Homepage des Praktikums (<http://www.physikpraktika.uni-hd.de>).

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: harmonischer Oszillator, gekoppelte Oszillatoren, Dreh- und Trägheitsmoment, physikalisches Pendel, gekoppelte Differentialgleichungen, Schwebung, Normalschwingungen. Informieren Sie sich auch über die Grundlagen des Hall-Effekts, da die Messung der Auslenkungswinkel der Pendel diesen Effekt ausnutzt.

Verständnisfragen:

1. Überlegen Sie welche Drehmomente auf zwei gekoppelte Pendel wirken. Stellen Sie die Differentialgleichung auf und skizzieren Sie den Lösungsweg.
2. Beschreiben Sie in Worten die Anfangsbedingungen für die symmetrische-, asymmetrische- und Schwebungsschwingung und diskutieren Sie die jeweiligen Schwingungszustände.

3. Welche Frequenz ist größer, die der symmetrischen oder der antisymmetrischen Schwingung? Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Wie lautet die Definition der Begriffe Eigenfrequenz und Eigenschwingung bei einem schwingungsfähigen System von N Massepunkten? Wie viele Eigenfrequenzen besitzt ein solches System?

IV Aufgaben

1. Bei drei verschieden starken Kopplungen sind die Frequenzen der symmetrischen und der antisymmetrischen Eigenschwingungen von zwei gekoppelten, gleichartigen Messingpendeln zu bestimmen.
2. Für die gleichen Kopplungen wie bei Aufgabe 1 sind Schwebungen zu erzeugen und die Frequenz der Pendel und der Schwebung zu bestimmen.

V Motivation

„Der niederländische Physiker Christian Huygens beobachtete 1665 ein außerordentlich spannendes Phänomen: Als er wegen einer leichten Erkrankung sein Haus nicht verlassen konnte, betrachtete er gedankenverloren zwei von ihm eigenhändig angefertigte Pendeluhrn, die nebeneinander an der Wand hingen. Schon bald fiel ihm auf, daß sich die beiden Pendel völlig synchron bewegten. Diese Kuriosität beschäftigte Huygens so sehr, daß er über mehrere Stunden die Pendelbewegung verfolgte. Während dieser langen Zeit schwangen sie stets im Gleichtakt. Selbst als der Wissenschaftler eines der beiden Pendel von Hand in einen anderen Schwingungsrhythmus versetzte, musste er zu seinem großen Erstaunen feststellen, daß sich nach kaum einer halben Stunde der Gleichtakt wieder einstellte. Huygens nahm daraufhin an, daß sich die Uhren gegenseitig beeinflussen müssen, sei es durch Luftbewegung oder schwache, durch die Wand übertragene Vibrationen. Um diese Vermutung zu überprüfen, brachte er die Uhren an gegenüberliegenden Wänden an. Tatsächlich kamen sie zunehmend aus dem Takt und im Laufe eines Tages verlor die eine fünf Sekunden gegenüber der anderen.“¹

¹Matthias Ducci, „Periodische und chaotische Oszillationserscheinungen an Metallelektroden und elektrochemische Modellerperimente zur Erregungsleitung am Nerven“, Dissertation an der Universität Oldenburg, 2000

Gekoppelte, schwingungsfähige Systeme spielen in der Physik eine fundamentale Rolle. Ein einfaches Beispiel solch eines Systems sind Moleküle, bei denen einzelne Atome in erster Näherung untereinander elastisch gekoppelt sind (CO_2 , NH_3 etc.). Je nach der räumlichen Struktur und den Bindungspartnern können Moleküle verschiedene Schwingungs- und Rotationszustände besitzen. Es können zum Beispiel Drehschwingungen von Atomgruppen um eine Bindungsachse auftreten oder die Bindungspartner schwingen gegeneinander. Finden Änderungen des Rotations- und Schwingungszustands statt, so ist dies, genauso wie bei elektronischen Übergängen in der Atomhülle, mit der Emission elektromagnetischer Strahlung verbunden. Durch Messung der Molekülspektren mit Hilfe der Infrarotspektroskopie können wichtige Moleküldaten wie die Art der Bindung, die Bindungsabstände und Bindungswinkel sowie die „Federkonstante“ bestimmt werden.

Gekoppelte Oszillatoren finden sich auch in jedem Festkörper. Bei einem Kristall sind im Prinzip alle Atome über elektrische Wechselwirkungen miteinander gekoppelt, so daß der Kristall zu Schwingungen angeregt werden kann. Zur mathematischen Beschreibung stellt man sich den Kristall aus regelmäßig angeordneten Massenpunkten vor, die mit ihren nächsten Nachbarn durch Federn gekoppelt sind. Die Auswertung dieses Systems führt zu quantisierten Gitterschwingungen, sogenannte Phononen.

Nicht nur in der Physik, sondern auch in nahezu allen anderen naturwissenschaftlichen Gebieten, stößt man auf gekoppelte Oszillatoren. Beispiele aus der Biologie sind die Schrittmacherzellen des Herzens oder die neuronalen Netzwerke des Gehirns und des Rückenmarks, die rhythmisch-periodische Vorgänge wie Laufen oder Atmen steuern.

Beim vorliegenden Versuch sollen Sie anhand zwei mechanisch gekoppelter Pendel die elementaren Eigenschaften gekoppelter Oszillatoren kennenlernen. Sie werden sehen, daß bei entsprechend gewählten Anfangsbedingungen die Gesamtenergie zwischen den beiden Pendeln hin und her wechselt. Andere Anfangsbedingungen führen zu synchronen oder antisymmetrischen Schwingungen. Desweiteren werden Sie den Einfluss der Kopplungsstärke auf die Eigenfrequenzen untersuchen und ein System mit unterschiedlich schweren Pendel analysieren.

Um die Analogie zu anderen schwingungsfähigen Systemen zu erkennen, sollen Sie qualitativ das Verhalten von elektrisch gekoppelten Schwingkreisen beobachten.

VI Grundlagen

Um den Schwingungszustand eines gekoppelten Pendels zu beschreiben, müssen zunächst die Differentialgleichungen für die einzelnen Pendel aufgestellt werden. Betrachten wir zunächst ein einzelnes, ungekoppeltes Pendel mit dem Trägheitsmoment J und dem Direktionsmoment $D = mgL$, wobei L die Pendellänge, m die Masse und g die Erdbeschleunigung darstellen. Für das Pendel gilt für kleine Winkel φ die Differentialgleichung:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi. \quad (1)$$

Die Lösung beschreibt eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}} = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (2)$$

Werden nun zwei solcher Pendel durch eine Feder mit dem Direktionsmoment $D' = D_F l^2$ (D_F beschreibt die Federkonstante und l die Länge von der Feder aufhängung zur Pendelachse) gekoppelt, so wirken zusätzliche Drehmomente M_i , die von den jeweiligen Auslenkungswinkeln φ_1, φ_2 abhängen:

$$\text{Pendel 1: } M_1 = D'(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (3)$$

$$\text{Pendel 2: } M_2 = D'(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Diese zusätzlichen Drehmomente, müssen bei der Differentialgleichung des freien Pendels (1) hinzuaddiert werden. Wir erhalten somit ein System aus zwei gekoppelten Differentialgleichungen,

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi}_1 &= -D\varphi_1 + D'(\varphi_2 - \varphi_1) \\ J\ddot{\varphi}_2 &= -D\varphi_2 + D'(\varphi_1 - \varphi_2), \end{aligned} \quad (4)$$

die sich leicht entkoppelt lassen, wenn man $u = \varphi_1 + \varphi_2$ und $v = \varphi_1 - \varphi_2$ substituiert (Hinweis: Addieren und Subtrahieren Sie jeweils die Gleichungen (4) und führen Sie dann die Substitution durch). Damit erhalten wir ein einfaches System von zwei unabhängigen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} J\ddot{u} + Du &= 0 \\ J\ddot{v} + (D + 2D')v &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Die Lösungen sind harmonische Schwingungen mit den Kreisfrequenzen ω_1, ω_2 :

$$u = u(t) = A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t, \quad \text{mit } \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{J}} \quad (6)$$

$$v = v(t) = A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t, \quad \text{mit } \omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2D'}{J}}$$

Durch erneute Substitution mit $\varphi_1 = \frac{1}{2}(u + v)$ und $\varphi_2 = \frac{1}{2}(u - v)$ erhalten wir schließlich die Gleichungen für die Auslenkungswinkel der Pendel:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}(A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t) \quad (7)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2}(A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t - A_2 \cos \omega_2 t - B_2 \sin \omega_2 t).$$

Diese allgemeinen Lösungen beschreiben auf den ersten Blick eine recht komplexe Bewegung der Pendel. Für bestimmte Anfangsbedingungen ergeben sich allerdings sehr anschauliche Schwingungsgleichungen. Dazu müssen die im folgenden besprochenen Anfangsbedingungen $\varphi_i(t = 0)$ und $\dot{\varphi}_i(t = 0)$ in die Gleichungen (7) eingesetzt werden und die Koeffizienten A_i und B_i bestimmt werden.

Wir wollen drei Spezialfälle, wie sie in Abbildung 2 skizziert sind, genauer betrachten:

1. Symmetrische Schwingung

Beide Pendel werden um den gleichen Winkel ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t = 0$ gleichzeitig losgelassen.

$$\begin{aligned} \text{Anfangsbedingung: } \varphi_1(0) &= \varphi_2(0) = \varphi_0 \\ \dot{\varphi}_1(0) &= \dot{\varphi}_2(0) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Für die Koeffizienten erhalten wir:

$$A_1 = 2\varphi_0, A_2 = B_1 = B_2 = 0 \quad (9)$$

und damit schließlich

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi_0 \cos \omega_1 t. \quad (10)$$

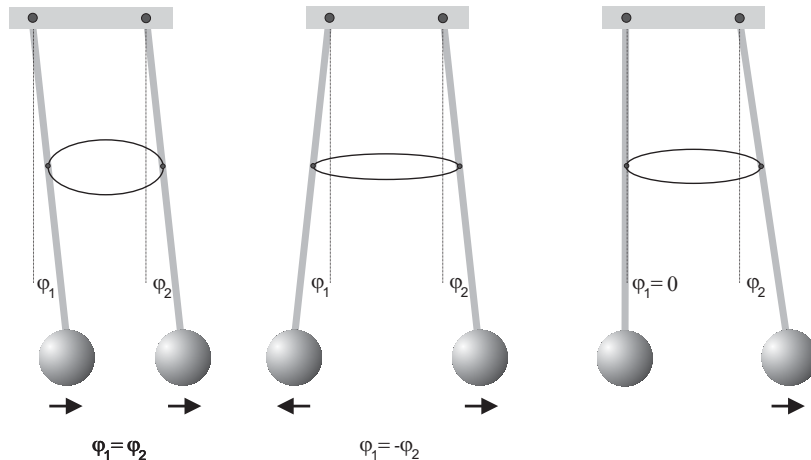


Abbildung 2: Schwingungsformen des gekoppelten Pendel für unterschiedliche Randbedingungen. Von links nach rechts: symmetrische Schwingung, antisymmetrische Schwingung, Schwebung.

Die beiden Pendel schwingen harmonisch und phasengleich mit der Frequenz ω_1 . Nach Gleichung (6) hängt ω_1 nicht vom Direktionsmoment der Kopplung ab (ω_1 hängt nur vom Direktionsmoment D des freien, ungekoppelten Pendels ab). Die Pendel schwingen also so, als seien sie gar nicht gekoppelt. Dies ist ja auch sofort einzusehen da beide Pendel stets den gleichen Abstand voneinander aufweisen und so die Kopplungsfeder während der Schwingung niemals gestaucht oder gedehnt wird. Die Kopplungsfeder verharrt also stets im gleichen Zustand, wie zu Beginn der Schwingung. Es findet also keine Kopplung von einem Pendel auf das andere statt.

2. Asymmetrische Schwingung

Beide Pendel werden gegenphasig um den gleichen Winkelbetrag ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t = 0$ gleichzeitig losgelassen.

$$\begin{aligned} \text{Anfangsbedingung:} \quad \varphi_1(0) &= -\varphi_2(0) = \varphi_0 \\ \dot{\varphi}_1(0) &= \dot{\varphi}_2(0) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Für die Koeffizienten ergeben sich in diesem Fall:

$$A_2 = 2\varphi_0, A_1 = B_1 = B_2 = 0 \quad (12)$$

und damit schließlich

$$\varphi_1(t) = -\varphi_2(t) = \varphi_0 \cos \omega_2 t. \quad (13)$$

Die beiden Pendel schwingen harmonisch aber diesmal gegenphasig mit der Frequenz ω_2 . Die Frequenz ω_2 hängt sowohl vom Direktionsmoment des Pendels als auch vom Direktionsmoment der Kopplung ab!

3. Schwebungsschwingung

Das eine Pendel verharrt in der Ruhelage während das andere um den Winkel φ_0 ausgelenkt wird.

$$\begin{aligned} \text{Anfangsbedingung:} \quad \varphi_1(0) &= 0, \varphi_2(0) = \varphi_0 \\ \dot{\varphi}_1(0) &= \dot{\varphi}_2(0) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Für die Koeffizienten erhalten wir

$$A_1 = -A_2 = \varphi_0, B_1 = B_2 = 0 \quad (15)$$

und die Schwingungsgleichungen lauten nach einigen Umformungen:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \varphi_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) \\ \varphi_2(t) &= \varphi_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) \end{aligned} \quad (16)$$

Diese Gleichungen beschreiben eine Schwebung. Das zu Beginn ausgelenkte Pendel überträgt allmählich seine Schwingungsenergie auf das anfangs ruhende Pendel bis es schließlich selbst stillsteht. Danach kehrt sich der Vorgang um und das nun schwingende Pendel regt das ruhende Pendel an. Die Schwingung der gekoppelten Pendel wird in diesem Fall durch zwei Frequenzen beschrieben: Zum einen durch die Frequenz $\omega_I = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)$ mit denen jedes einzelne Pendel schwingt, zum anderen durch die Schwebungsfrequenz $\omega_{II} = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$ mit der die Energie eines Einzelpendels oszilliert.

²In der Literatur wird manchmal auch die Schwebungsfrequenz ohne den Faktor 1/2 durch $\omega_{II} = \omega_2 - \omega_1$ definiert

Die zu den Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2 gehörenden Schwingungen werden als Normalschwingungen bezeichnet. Allgemein gilt, dass ein System aus N gekoppelten Oszillatoren N Normalschwingungen besitzt. Jede mögliche Schwingung eines einzelnen Oszillators kann immer durch eine Linearkombination dieser Normalschwingungen dargestellt werden. So ist die Schwebungsschwingung eine Linearkombination der beiden Normalschwingungen mit den Frequenzen ω_1 und ω_2 .

Kopplungsgrad

Um die Stärke der Kopplung zu quantifizieren, definiert man den Kopplungsgrad κ durch

$$\kappa = \frac{D'}{D + D'}. \quad (17)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (6) für ω_1 und ω_2 erhält man für κ :

$$\kappa = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2}. \quad (18)$$

Der Kopplungsgrad kann also durch Messung der Schwingungszeiten der Normalschwingungen bestimmt werden.

Messtechnik

Die Winkelauslenkung beider Pendel wird magnetisch mit Hilfe des Hall-Effekts gemessen. Dazu befindet sich auf der Stirnseite der Pendelachse ein Hall-Sensor, der im homogenen Feld zweier Stabmagnete positioniert ist. Schwingt das Pendel und damit auch der Sensor (relativ zum raumfesten Magnetfeld), so wird eine Hallspannung erzeugt, die proportional zum Sinus des Auslenkungswinkel ist (Abbildung 3).

Die Hall-Spannung wird mit einem Analog-Digital-Wandler digitalisiert und über eine serielle Schnittstelle (RS232) in einen PC eingelesen. Die Daten werden anschließend in die jeweiligen Auslenkungswinkel umgerechnet und als Funktion der Zeit graphisch dargestellt. Neben der graphischen Darstellung der Messwerte wird bei jeder Messung automatisch eine Textdatei angelegt, in der die jeweiligen Messdaten gespeichert werden. Der Name der Datei setzt sich aus dem aktuellen Datum und der Uhrzeit, bei der die Messung beendet wurde, zusammen. Sie finden die Dateien unter C:\Messungen. Damit Sie die Messdaten später richtig zuordnen können, sollten Sie bei jeder Messung im

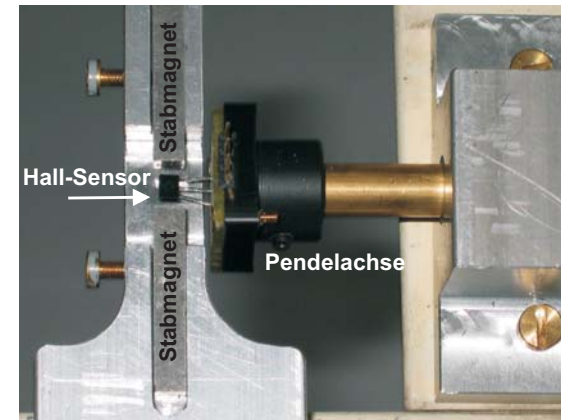


Abbildung 3: Hall-Sensor als Winkelmesser.

Feld „Datei-Kommentar“ eine Bemerkung eintragen, die die aktuelle Messung eindeutig beschreibt. Dieser Kommentar wird automatisch mitgespeichert. Zur Bestimmung der Schwingungszeiten können Sie mit Hilfe von verschiedenen Cursors die Kurven ausmessen. Desweiteren können Sie Bereiche auswählen, die vergrößert dargestellt werden sollen (Abbildung 4). Die Bedienung der Software ist weitgehendst selbsterklärend. Über einzelne spezielle Funktionen wird Sie der betreuende Assistent informieren.

VII Durchführung des Versuchs

1. Skizzieren Sie den Versuchsaufbau.
2. Schalten Sie die Elektronik des Analog-Digital Wandlers ein und starten Sie das Messprogramm „gekoppelte Pendel“. Eine Verknüpfung des Programms befindet sich auf dem Desktop. Überprüfen Sie zunächst den Nullabgleich der beiden Pendel. Sie können in der Software für jedes Pendel einen Winkel-Offset einstellen, so dass in der Ruhelage der Pendel ein Winkel von 0° angezeigt wird.
3. Messen Sie zunächst ohne Koppelfeder für jedes einzelne Messingpendel die Schwingungsfrequenz. Regen Sie beide Pendel an und starten Sie daraufhin das Messprogramm. Zeichnen Sie mehrere Schwingungsperioden auf

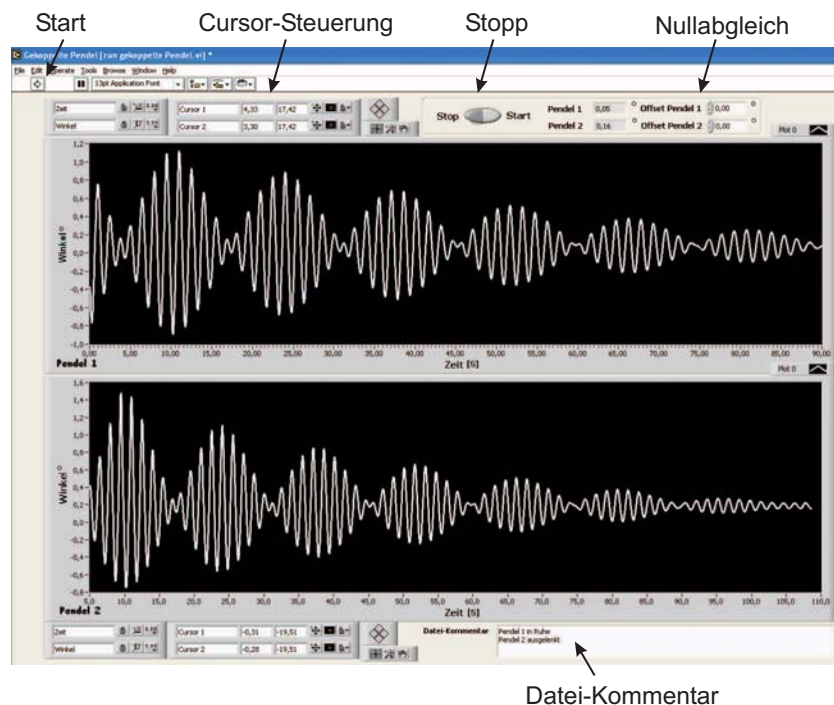


Abbildung 4: Bedienoberfläche der Software.

und stoppen Sie dann das Programm. Mit den Cursors können Sie nun die Periodendauer der beiden Schwingungen ausmessen. Zur Dokumentation Ihrer Messung sollten Sie diese am besten gleich ausdrucken. Verwenden Sie dazu das Programm „Origin“. Ihr Assistent wird Ihnen dabei weiterhelfen.

4. Regen Sie für drei verschiedenen Kopplungsgrade einmal die symmetrische und danach die antisymmetrische Eigenschwingung der beiden Messingpendel an. Die Befestigungslöcher für die Ringfeder ist an der rechten Pendelstange markiert. Notieren Sie, wo die Feder eingehängt wurde und messen Sie die Länge bis zur Pendelachse. Ob eine Eigenschwingung rein angeregt ist, erkennt man daran, dass die Amplituden beider Pendel gleichzeitig monoton abnehmen, während bei gemischter Anregung die

Amplituden mehr oder weniger schwanken. Allerdings ist es schwierig die symmetrische Schwingung sauber anzuregen, da die Aufhängung der Feder immer eine leichte Kopplung erzeugt. Die Feder überträgt nicht nur Zug-, sondern auch Druckkräfte. Für kleine Auslenkungen ist die Kraft ausreichend linear von der Auslenkung abhängig. Für große Auslenkungen ist ein solcher Ring aber bei Zug viel steifer als bei Druck. Die differentiellen Federkonstanten in den beiden Lagen unterscheiden sich dann um einen Faktor zehn! Messen Sie die Frequenzen der Eigenschwingungen und Drucken Sie die Messungen aus.

5. Regen Sie beide Eigenschwingungen gleichzeitig an, indem Sie das eine Pendel in der Ruhelage festhalten und erst freigeben, nachdem Sie das andere Pendel bei der Maximalauslenkung losgelassen haben. Bei dieser Anregungsform („gemischte Anregung“) sind die Schwingungs- und die Schwebungsfrequenzen für die gleichen Kopplungen wie zuvor zu messen. Auch hier wieder die Messungen gleich ausdrucken. Bei der Schwebung kommt immer nur das eine Pendel wieder voll zur Ruhe, welches am Anfang in Ruhe war. Sie sehen, auch zwei Pendel mit gleicher Schwingungsdauer können bei einer Kopplung ein überraschendes Verhalten zeigen!
6. Zusätzlich zu den gekoppelten Pendeln ist noch ein Aufbau vorhanden, an dem Sie die Kopplung zweier elektrischer Schwingkreise mit Hilfe eines Oszilloskops beobachten können. Die Kopplung erfolgt induktiv über die Spulen. Die Kopplungsstärke können Sie durch variieren des Abstands zwischen den Spulen einstellen.

Beobachten Sie für unterschiedliche Kopplungen (Spulenabstände), die Schwingungen beider Schwingkreise. Hinweise zur Bedienung des Oszilloskops liegen aus.

VIII Auswertung

Die Frequenzen der reinen (ω_1, ω_2) und der gemischten Schwingungsformen (ω_I, ω_{II}) sind zu berechnen und miteinander zu vergleichen. Bei der gemischten Anregung sind die direkt gemessenen Frequenzen mit den theoretischen Werten $\omega_I = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)$ und $\omega_{II} = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$ zu vergleichen. Tragen Sie dazu die gemessenen und theoretischen Werte der Schwingungs- und Schwebungsfrequenzen mit ihren Fehlern in eine Tabelle ein.

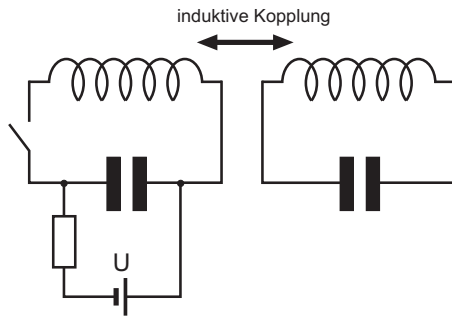


Abbildung 5: Gekoppelte elektrische Schwingkreise. Die Kopplung erfolgt induktiv über die Spulen. Der Kondensator im linken Schaltkreis wird über den Widerstand geladen. Wird der Schalter geschlossen, so wird im linken Kreis eine Schwingung angeregt. Durch die Kopplung überträgt sich allmählich, ganz analog zu den gekoppelten Pendeln, die Energie in den rechten Schwingkreis und wieder zurück. Die Oszillation kann durch Abgriff über den Spulen mit einem Oszilloskop dargestellt werden.

Berechnen Sie aus den gemessenen Schwingungsdauern die Kopplungsgrade. Für schwache Kopplungen ($D \gg D'$) können Sie Gleichung (17) durch

$$\kappa = \frac{D'}{D} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\omega_1^2} \quad (19)$$

nähern. Beachten Sie, dass D' proportional zu l^2 (l ist die Länge vom Aufhängungspunkt der Feder zur Pendelachse). Die Verhältnisse zweier Kopplungsgrade entsprechen dann dem Quadrat der Verhältnisse der Koppellängen. Berechnen Sie die Verhältnisse der Kopplungsgrade die Sie aus den gemessenen Frequenzen bestimmt haben und vergleichen Sie diese mit den Verhältnissen der Kopplungsgraden die Sie aus der Längenmessung erhalten.

Versuch 212

Zähigkeit von Flüssigkeiten

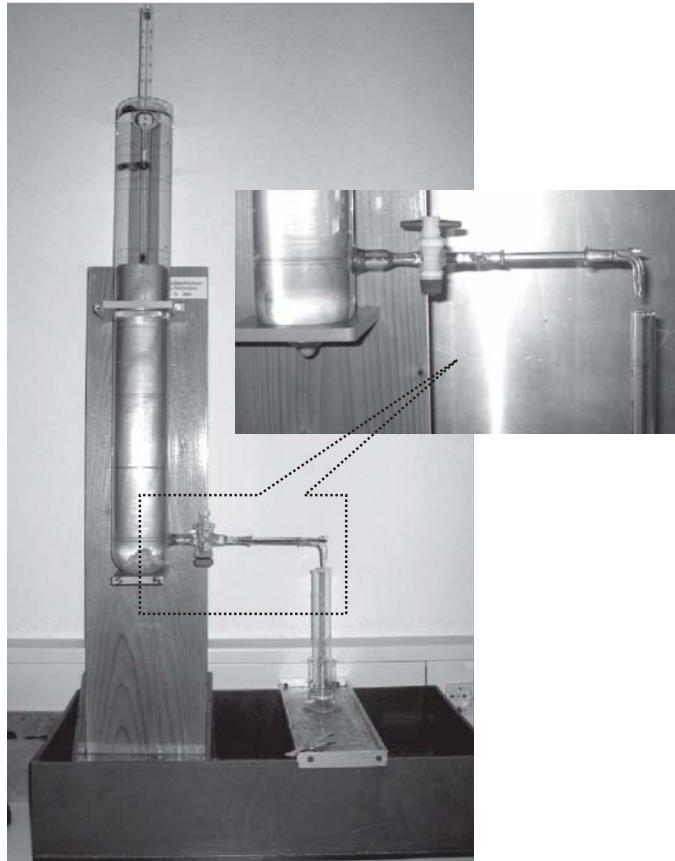


Abbildung 1: Kugelfallviskosimeter und Kapillarviskosimeter.

I Messaufbau

- Messzylinder aus Hartglas mit Messskaler, gefüllt mit Polyethylenglykol. Am unteren Teil des Zylinders befindet sich eine Präzisionskapillare (Länge: $100 \text{ mm} \pm 0,5 \text{ mm}$, Kapillardurchmesser $1,5 \text{ mm} \pm 0,01 \text{ mm}$).
- Kugeln aus „Hostaform C“ mit folgenden Durchmessern: $2r = 2,0 / 3,0 / 4,0 / 5,0 / 6,0 / 7,144 / 8,0 / 9,0 \text{ mm}$ ($\pm 1\%$). Die Dichte der Kugeln und die Dichte von Polyethylenglykol ist im Anhang angegeben.
- Thermometer
- Pinzetten, Bechergläser
- Maßstab
- Stoppuhren

II Literatur

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Demtröder, *Experimentalphysik 1*, Springer Verlag.
- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart.
- Die Ableitung des Gesetz von Stokes finden Sie in W. Nolting, *Grundkurs: Theoretische Physik, Band 1*.
- Homepage des Praktikums (<http://www.physikpraktika.uni-hd.de>).

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Reale Flüssigkeiten, innere Reibung, Zähigkeit (Viskosität), Temperaturabhängigkeit der Zähigkeit, laminare Strömung, Stokes'sches Gesetz, Gesetz von Hagen-Poiseuille, Reynold'sches Ähnlichkeitsgesetz, Reynoldszahl, Turbulenz.

Für Mathematiker und Physiker: Berechnen Sie die Zeitabhängigkeit der Geschwindigkeit $v(t)$ einer in eine Flüssigkeit fallende Kugel. Stellen Sie

dazu mit Hilfe den an der Kugel angreifenden Kräften eine Differentialgleichung auf und lösen Sie diese unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $v(0) = 0$. Nach welcher Zeit ist die Geschwindigkeit der Kugel nahezu konstant?

Verständnisfragen:

1. Welche Kräfte wirken auf eine fallende Kugel in einer Flüssigkeit und wie lautet die Differentialgleichung?
2. Wann erreicht die fallende Kugel ihre Endgeschwindigkeit?
3. Erläutern Sie den Unterschied zwischen laminarer und turbulenter Strömung.
4. Was besagt die Reynoldszahl? Wie groß ist die kritische Reynoldszahl für eine Kugel die in einer Flüssigkeit fällt und wie groß ist sie bei einer Rohrströmung?
5. Welche Kraft wirkt, wenn zwei parallele Platten, zwischen denen sich eine Flüssigkeit befindet, gegeneinander verschoben wird?
6. Was besagt das Gesetz von Hagen-Poiseuille?
7. Wie erhöht sich der Fluss, wenn der Rohrdurchmesser bei konstanten Druck verdoppelt wird?

IV Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Viskosität von Polyethylenglykol nach Stokes mit einem Kugelfallviskosimeter. Zusätzlich ist die Gültigkeitsgrenze des Stokes'schen Gesetzes zu überprüfen, indem der Übergang von laminarer zu turbulenter Umströmung der Kugel (Wirbelablösung) ermittelt wird.
2. Bestimmen Sie die Zähigkeit von Polyethylenglykol nach Hagen-Poiseuille mit dem Kapillarviskosimeter.
3. Vergleichen Sie die unter 1. und 2. gewonnenen Werte miteinander.

V Grundlagen

Bewegt sich ein Körper mit **konstanter Geschwindigkeit** in einem fluiden oder gasförmigen Medium, so ist trotz der gleichförmigen Bewegung eine Kraft notwendig, um die Bewegung aufrecht zu erhalten. Dies scheint zunächst widersprüchlich zum zweiten Newtonschen Gesetz zu sein, nach dem ein Körper beschleunigt wird wenn auf ihn eine Kraft wirkt. Allerdings gilt dies nur im Vakuum. Bei der Bewegung in einem Medium wirken zusätzlich Reibungskräfte, die dazu führen, dass bei einer konstanten äußeren Kraft, die Nettokraft verschwindet und sich der Körper mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Die Reibung wird bei Flüssigkeiten durch zwischenmolekulare Kräfte verursacht. Diese führt dazu, dass bei der Bewegung eines Körpers durch eine Flüssigkeit, **das Medium teilweise mitbewegt wird**. Sie alle haben dies schon beim morgendliche Frühstück erlebt. Taucht man einen Löffel in ein Honigglas und zieht diesen dann senkrecht nach oben heraus, so bleibt aufgrund der Adhäsion eine dünne Honigschicht am Löffel haften. Diese Schicht wechselwirkt mit benachbarten Molekülen, so dass beim Herausziehen ein ganzer Honigklumpen mitbewegt wird. Die Reibungskräfte lassen sich auch beim Umrühren von Honig oder Marmelade beobachten. Sie müssen eine deutliche Kraft aufwenden um den Löffel im Glas zu bewegen. Beim Umrühren von Kaffee ist dieser Effekt kaum wahrzunehmen. Offenbar hängt die Reibungskraft von der „Zähigkeit“ der Flüssigkeit ab.

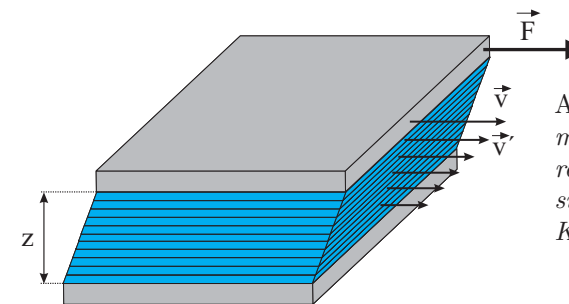


Abbildung 2: Gedankenexperiment zur Bestimmung der inneren Reibung. Die Flüssigkeit soll sich schichtweise in Richtung der Kraft bewegen.

Um die Reibungskräfte eines Körpers in einer Flüssigkeit zu quantifizieren, betrachten wir die Anordnung nach Abbildung 2. Bei diesem (Gedanken)-Experiment befindet sich zwischen zwei gleich großen Platten, die im Abstand z parallel zueinander ausgerichtet sind, eine Flüssigkeit. Die untere Platte ruht. Auf die obere Platte wird eine Kraft ausgeübt, so dass sie sich mit konstanter

Geschwindigkeit v bewegt. Da an der oberen Platte aufgrund der Adhäsion ein Flüssigkeitsfilm haftet, bewegt sich dieser mit der Geschwindigkeit der Platte mit. Andererseits beträgt die Geschwindigkeit des Flüssigkeitsfilms die an der unteren, ruhenden Platte haftet, Null. Aus Stetigkeitsgründen müssen daher die dazwischen liegenden Flüssigkeitsschichten mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten aneinander vorbeigleiten. Die oberste Flüssigkeitsschicht, die sich mit der Platte mitbewegt, übt auf die darunter liegende Schicht eine Tangentialkraft aus und beschleunigt diese auf eine Geschwindigkeit v' . So beschleunigt jede Schicht die darunter liegende und wird gleichzeitig von dieser nach dem Reaktionsprinzip gebremst.

Experimentell zeigt sich, dass die Kraft F , die notwendig ist um die obere Platte zu bewegen, proportional zur Fläche A und zur Geschwindigkeit v und umgekehrt proportional zum Abstand z ist. Bewegt sich die obere Platte gleichförmig, so verschwindet die Nettokraft, d.h. die Reibungskraft F_r ist vom Betrag her gleich groß wie die auf die obere Platte ausgeübte Kraft F . Für die (Newtonsche) Reibungskraft gilt dann:

$$F_r = \eta A \frac{v}{z}. \quad (1)$$

Für den allgemeinen Fall drückt man diese Gleichung besser durch den Geschwindigkeitsgradienten dv/dz aus:

$$F_r = \eta A \frac{dv}{dz}. \quad (2)$$

Die Proportionalitätskonstante η ist eine flüssigkeitsspezifische Größe und wird als dynamische Viskosität, Zähigkeit oder meist auch nur als Viskosität bezeichnet. Für die Maßeinheit gilt nach Gleichung (1): $[\eta] = \text{Pa s}$.¹

Das Newtonsche Reibungsgesetz gilt natürlich auch für andere Körpergeometrien. Gleiten die einzelnen Flüssigkeitsschichten aneinander ab ohne sich zu vermischen, spricht man von einer Schichtströmung oder von einer **laminaren Strömung**. Bei großen Geschwindigkeiten und bei speziellen Körpergeometrien, ist dies nicht mehr der Fall. In der Flüssigkeit kommt es dann zur Bildung von Wirbeln, die die Schichten vermischen. Bei diesen **turbulenten Strömungen** ist der Strömungswiderstand viel größer als bei einer laminaren Strömung, so dass das Newtonsche Reibungsgesetz seine Gültigkeit (Abbildung 3) verliert. **Reynoldszahl**

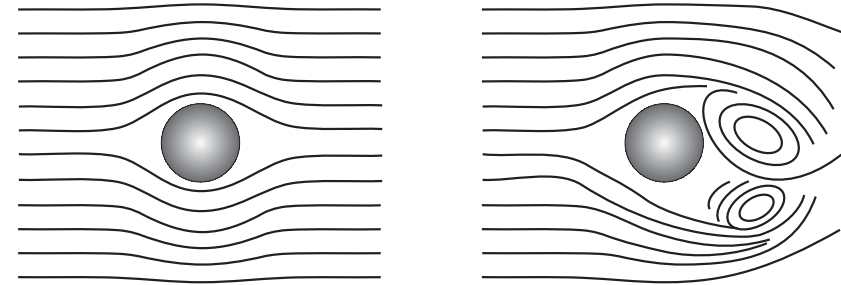


Abbildung 3: Bewegung einer Kugel durch eine Flüssigkeit. Links: Laminare Strömung bei der die Flüssigkeit den Körper symmetrisch umfließt. Die einzelnen Schichten gleiten aneinander ab ohne sich zu vermischen. Rechts: Turbulente Strömung bei hohen Geschwindigkeiten. In Folge der Wirbelbildung kommt es zu einer Vermischung der Flüssigkeit.

Ob sich eine Flüssigkeit laminar oder turbulent verhält, lässt sich mit Hilfe der dimensionslosen Reynoldszahl **abschätzen**. Die Reynoldszahl ist eine semiempirische Größe, die das Verhältnis der (doppelten) kinetischen Energie eines Volumenelements der Flüssigkeit, zu den Reibungsverlusten beschreibt:

$$Re = \frac{2E_{kin}}{W_{Reibung}}. \quad (3)$$

Je größer die kinetische Energie der Flüssigkeit, desto instabiler wird die Strömung. Andererseits wirkt die innere Reibung der Flüssigkeit dämpfend und somit stabilisierend auf die Strömungsbewegung. Bei kleinen Reynoldszahlen ist $E_{kin} \leq W_{Reibung}$ und die Flüssigkeit strömt laminar. Oberhalb eines kritischen Wertes Re_{kr} tritt dagegen eine turbulente Strömung auf. In diesem Fall gilt: $E_{kin} \gg W_{Reibung}$.

Führt man eine charakteristische Länge L ein, die die Geometrie des Strömungssystems beschreibt, so lässt sich die Reynoldszahl auch wie folgt darstellen:

$$Re = \frac{\rho v L}{\eta}, \quad (4)$$

wobei v die mittlere Strömungsgeschwindigkeit und ρ die Dichte der Flüssigkeit beschreibt. Bei einer Rohrströmung ist für L der Rohrdurchmesser einzusetzen. Bei der Bewegung einer Kugel durch eine Flüssigkeit beschreibt L den Durchmesser der Kugel.

¹In manchen Lehrbüchern findet man auch noch die Einheit Poise: 10 Poise = 1 Pa s.

Die kritische Reynoldszahl hängt vom jeweiligen Experiment ab. Beispielsweise zeigt sich experimentell, dass bei der Strömung einer Flüssigkeit durch ein Rohr, der Übergang von laminarer zur turbulenter Strömung bei einer Reynoldszahl von $Re_{kr}=2300$ erfolgt. Natürlich ist der Übergang nicht scharf, so dass auch bei der kritischen oder höheren Werten der Reynoldszahl noch ein laminarer Fluss möglich ist. Allerdings reicht ab der kritischen Reynoldszahl bereits eine kleine Störung aus, um die Strömung in eine turbulente umschlagen zu lassen. Bei der Bewegung einer Kugel durch eine Flüssigkeit, erfolgt der Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung bereits bei viel kleineren Reynoldszahlen. Experimentell zeigt sich, dass hier die kritische Reynoldszahl ungefähr Eins beträgt: $Re_{kr} \approx 1$

Bestimmung der Viskosität mit einem Kugelfallviskosimeter nach Stokes

Bewegt sich eine Kugel mit dem Radius r mit konstanter Geschwindigkeit v durch eine Flüssigkeit, so wirkt auf sie die Reibungskraft:

$$F_r = 6\pi\eta rv. \quad (5)$$

Diese Gleichung wird als das Gesetz von Stokes bezeichnet. Die Herleitung folgt aus dem Newtonschen Reibungsgesetz (1) und findet sich in den meisten Lehrbüchern der theoretischen Mechanik. Zu beachten ist, dass das Stokes'sche Gesetz eine Näherung für laminare Strömungen mit $Re < 1$ ist und nur für unendlich ausgedehnte Flüssigkeiten gültig ist. Wir werden an späterer Stelle daher noch Korrekturen anbringen müssen.

Unter Ausnutzung des Stokes'schen Gesetz lässt sich die Viskosität η einer Flüssigkeit bestimmen. Beim Kugelfallviskosimeter wird eine Kugel mit dem Radius r in die Flüssigkeit, dessen Viskosität bestimmt werden soll, fallen gelassen. Nach einer Beschleunigungsphase bewegt sich die Kugel mit einer konstanten Sinkgeschwindigkeit v_s . In diesem Fall verschwinden alle an die Kugel angreifende Kräfte, d.h. Gewichtskraft $F_g = \rho_k V_k g$, Auftriebskraft $F_a = -\rho_f V_k g$ und Reibungskraft $F_r = -6\pi\eta r v_s$ heben sich auf:

$$F_g + F_a + F_r = 0. \quad (6)$$

Dabei beziehen sich die mit k indizierten Größen auf die Kugel und die mit f indizierten, auf die Flüssigkeit. Einsetzen der einzelnen Kräfte und Auflösen

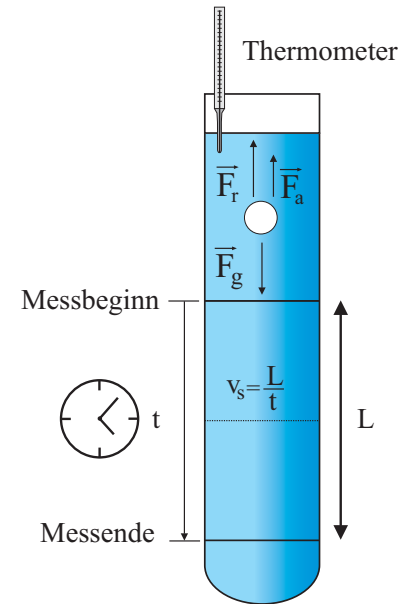


Abbildung 4: Bestimmung der Viskosität einer Flüssigkeit mit einem Kugelfallviskosimeter. Bewegt sich die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit, heben sich alle angreifenden Kräfte auf.

nach η liefert für die Viskosität der Flüssigkeit:

$$\eta = \frac{2}{9} g \frac{(\rho_k - \rho_f)}{v_s} r^2. \quad (7)$$

Durch Messung der Sinkgeschwindigkeit v_s kann so die Viskosität bestimmt werden.

Bestimmung der Viskosität nach Hagen-Poiseuille: Laminare Rohrströmung

Eine andere Methode die Viskosität einer Flüssigkeit zu bestimmen, ist die Messung des Volumenstroms einer laminaren Rohrströmung. Betrachten wir dazu ein Rohr der Länge L und Radius R (Abbildung 5). Damit eine Strömung überhaupt möglich ist, muss an den Stirnflächen eine Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2$ vorhanden sein. Im Fall einer laminaren Strömung kann die Bewegung der Flüssigkeit wieder als Schichtströmung interpretiert werden, wobei bei einem Rohr mit kreisförmigen Querschnitt, einzelne Zylindermäntel aneinander abgleiten. Auf einen coaxialen Teilzylinder in der Flüssigkeit mit dem Radius

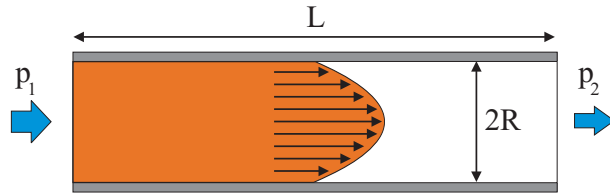


Abbildung 5: *Laminare Rohrströmung. Unter dem Einfluss der Druckdifferenz $p_1 - p_2$ strömt die Flüssigkeit in einem zylindrischen Rohr mit einem parabol-förmigen Geschwindigkeitsprofil.*

$r < R$, wirkt aufgrund der Druckdifferenz eine Kraft

$$F_p = \pi r^2 (p_1 - p_2). \quad (8)$$

Andererseits wirkt auch die Newtonsche Reibungskraft

$$F_r = -2\pi r L \eta \frac{dv}{dr}. \quad (9)$$

Bei einer stationären Strömung, bei der sich die einzelnen Schichten mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, muss die Nettokraft verschwinden, d.h. $F_p = F_r$:

$$-2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} = \pi r^2 (p_1 - p_2). \quad (10)$$

Hieraus folgt für den Geschwindigkeitsgradienten

$$\frac{dv}{dr} = \frac{p_1 - p_2}{2\eta L} r. \quad (11)$$

Integration über r unter Berücksichtigung der Randbedingung $v(R) = 0$, liefert für die Geschwindigkeitsverteilung in der Flüssigkeit

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} (R^2 - r^2). \quad (12)$$

Diese Gleichung stellt ein Rotationsparaboloid dar. Die Flüssigkeit besitzt demnach das in Abbildung 5 gezeigte parabolische Geschwindigkeitsprofil.

Um den Volumenstrom, d.h. die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch die Querschnittsfläche des Rohrs strömt, zu bestimmen, müssen wir über die

gesamte Querschnittsfläche integrieren:

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^R 2\pi r v(r) dr = \frac{\pi (p_1 - p_2) R^4}{8\eta L}. \quad (13)$$

Beachten Sie die Abhängigkeit von R^4 . Eine Verdopplung des Rohrradius ver-sechzehnfacht den Volumenstrom!

Gleichung (13) wird nach dem deutschen Wasserbau-Ingenieur Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen und nach dem französischen Arzt und Physiologen Poiseuille, auch als das Gesetz von Hagen-Poiseuille bezeichnet.

Sind Länge und Radius des Rohrs und die Druckdifferenz bekannt, so kann durch Messung des Volumenstroms die Viskosität bestimmt werden.

VI Durchführung des Versuchs

1. Bestimmung der Viskosität nach Stokes mit einem Kugelfallviskosimeter

Bei dem Versuch wird die Fallzeit Δt der Kugel zwischen zwei im Abstand Δs angebrachten Markierungen gemessen. Die Messungen sind entweder mit steigendem oder mit fallendem Kugelradius durchzuführen. Notieren Sie sich die Temperaturen der Flüssigkeiten während der Messung mit den kleinsten Kugeln.

Legen Sie die Fallstrecke der Kugeln fest und notieren Sie diesen Wert. Der Abstand der ersten Messmarke von der Flüssigkeitsoberfläche ist so zu wählen, dass sich die Kugel beim Durchlaufen der ersten Messmarke, mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Lassen Sie von jedem Durchmesser 5 Kugeln die Fallstrecke möglichst in der Rohrachse durchfallen. Zur Bestimmung der Fallzeit dienen die zahlreich beigegebenen Handstoppuhren. Bei den kleinsten Durchmessern empfiehlt sich eine Simultanmessung von mehreren Kugeln durchzuführen. Damit sich die Messzeiten bei den kleinen Kugeln nicht über einen zu langen Zeitraum erstrecken, können Sie hier eine kürzere Fallstrecke verwenden. Der Innendurchmesser des Kugelfallgefäßes ist am Viskosimeter angegeben. Vergessen Sie nicht diesen Wert in Ihr Protokoll aufzunehmen.

Sie müssen bei der Durchführung des Experiments unbedingt darauf achten, dass an den Kugeln keine Luftbläschen haften. Sortieren Sie daher vor dem Einbringen der Kugeln in das Fallgefäß, zunächst einige Kugeln des jeweiligen Durchmessers in ein Becherglas und geben Sie etwas Flüssigkeit mit hinein.

Schwenken Sie das Becherglas vorsichtig um, so dass die Kugeln vollständig benetzt sind und keinerlei Luftbläschen mehr daran zu erkennen sind. Mit der Pinzette werden dann die mit der Flüssigkeit benetzten Kugeln in das Fallgefäß gegeben.

2. Bestimmung der Viskosität nach Hagen-Poiseuille mit einem Kapillarviskosimeter

Stellen Sie unter den Ausfluss der Kapillare ein Becherglas und öffnen Sie den Hahn, indem Sie ihn parallel zur Kapillare drehen. Warten Sie nach dem Öffnen so lange ab, bis sich die Strömungsverhältnisse stabilisiert haben und eine gleichmäßige Tropfenfolge zu beobachten ist. Sobald dies der Fall ist, stellen Sie einen leeren Messzylinder unter den Ausfluss, starten die Stoppuhr und notieren die Anfangshöhe h_A der Flüssigkeitssäule. Führen Sie dies am besten gemeinsam mit Ihrem Partner durch, indem einer die Höhe des Flüssigkeitspiegels abliest und der andere gleichzeitig den Messzylinder unterstellt und die Stoppuhr startet. Messen Sie für das Gemisch 1 die Ausströmzeit von ca. 20 cm³ bis 25 cm³ der Flüssigkeit. Nachdem diese Mengen ausgeströmt sind, schließen Sie den Hahn und messen erneut die Höhe des Flüssigkeitspiegels h_E . Notieren Sie die Raumtemperatur.

Achtung: Da eine Wiederholung der Messung relativ lange dauert, bei einer einmaligen Messung aber die Möglichkeit eines Irrtums besteht, müssen zur Kontrolle Zwischenwerte des Volumens aufgenommen werden. Notieren Sie daher bei laufender Stoppuhr die Ausflusszeit bei 5, 10, 15, 20, 25 cm³.

Achten Sie unbedingt nach Beendigung dieser Messung, dass der Hahn der Kapillare geschlossen ist.

VII Auswertung

Zu 1)

- Nach Gleichung (7) ergibt sich für die Sinkgeschwindigkeit v_{lam} einer Kugel unter dem Einfluss Stokes'scher Reibung bei laminarer Strömung:

$$v_{lam} = \frac{2}{9} g \frac{\rho_k - \rho_f}{\eta} r^2. \quad (14)$$

Trägt man den Mittelwert der Sinkgeschwindigkeit gegen das Quadrat des Radius auf, so ergibt sich im Gültigkeitsbereich des Stokes'schen Gesetz eine Gerade. Da allerdings die Dichte der Kugeln etwas vom Radius abhängt, ist es besser das Verhältnis $\bar{v}/(\rho_k - \rho_f)$ gegen r^2 aufzutragen, wobei \bar{v} den Mittelwert ihrer gemessenen Sinkgeschwindigkeit bei den jeweiligen Radien bezeichnet.

- Das Stokes'sche Gesetz ist nur für eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeit gültig. Wegen des endlichen Durchmessers des Fallrohres, wird die Sinkgeschwindigkeit verfälscht und systematisch zu klein gemessen, wobei der Fehler mit wachsendem Kugelradius zunimmt. Dies lässt sich durch die Ladenburg'sche Korrektur λ im Stokes'schen Gesetz berücksichtigen:

$$F_r = 6\pi\eta r v \lambda \quad (15)$$

mit

$$\lambda = \left(1 + 2,1 \frac{r}{R}\right), \quad (16)$$

wobei R den Radius des Fallrohres beschreibt. Bei der Korrektur müssen daher die Sinkgeschwindigkeiten mit dem Faktor λ multipliziert werden. Überlegen Sie sich, ob im Rahmen der Messgenauigkeit der Sinkgeschwindigkeiten der einzelnen Kugeln, eine Korrektur sinnvoll ist und tragen Sie diese gegebenenfalls in das gleiche Diagramm mit ein.

- Legen Sie durch den linearen Bereich eine Gerade die durch den Ursprung geht und bestimmen Sie aus der Steigung die Viskosität. Berechnen Sie mit diesem Viskositätswert für jeden Kugelradius nach Gleichung (14) den zu jedem Messwert v gehörenden theoretischen Wert v_{lam} , d.h. die Werte, die auf der extrapolierten Anfangsgeraden liegen. Zusätzlich ist für jeden Kugelradius (Durchmesser d) die Reynoldszahl

$$Re = \frac{\rho_f v d}{\eta} \quad (17)$$

zu berechnen. Dabei beschreibt v die bei dem jeweiligen Kugelradius gemessene Sinkgeschwindigkeit.

Tragen Sie das Verhältnis v/v_{lam} gegen $\log Re$ auf (einfach logarithmisches Papier mit drei Dekaden) und bestimmen Sie die Stelle, an denen ein Knick in der Kurve auftritt. An dieser Stelle verliert das Stokes'sche Gesetz seine Gültigkeit und die laminare Strömung schlägt in eine turbulente Strömung um. Schätzen Sie den Zahlenwert für die kritische Reynoldszahl ab.

Zu 2)

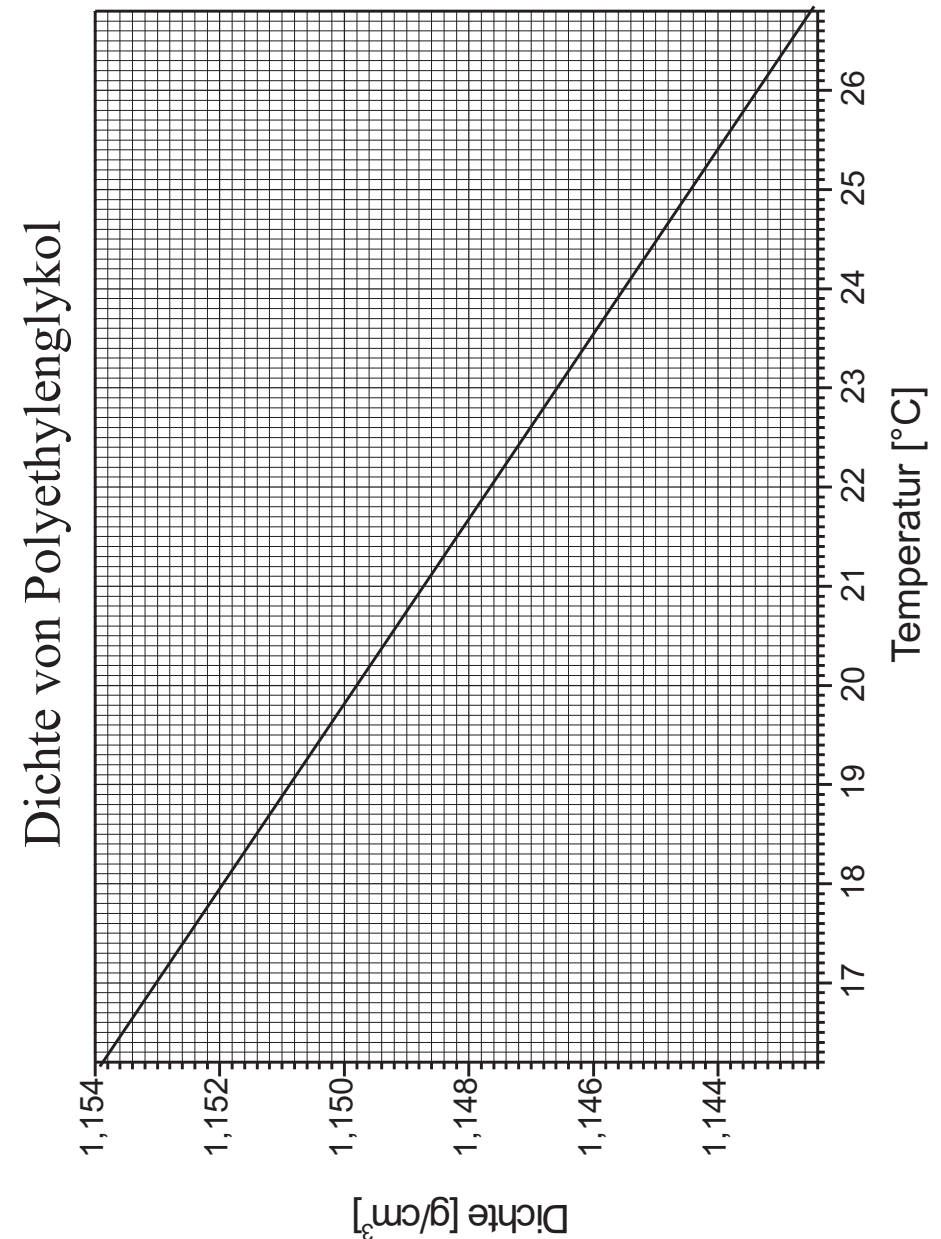
- Berechnen Sie die Zähigkeit nach Hagen-Poiseuille. Beachten Sie, dass der Druck in der Kapillare durch die Höhe der Flüssigkeitssäule bestimmt wird. Während des Abfließens der Flüssigkeit ändert sich in der Säule die Flüssigkeitshöhe und damit die Druckdifferenz in der Kapillare. Für die Berechnung der Druckdifferenz ist daher der Mittelwert von Anfangs- und Endhöhe h_A, h_E zu benutzen.
- Berechnen Sie die Reynoldszahl der Kapillare und überzeugen Sie sich, dass laminare Strömung vorlag.
- Vergleichen Sie die gemessenen Viskositäten nach Hagen-Poiseuille mit den Werten nach Stokes (Fehlergrenzen abschätzen!). Achten Sie darauf, dass die Temperaturen u.U. verschieden sind.

VIII Anhang

Dichte der Kugeln:

Ø 2 mm bis 7,144 mm	$1,375 \text{ g/cm}^3 < \rho < 1,380 \text{ g/cm}^3$
Ø 8 mm	$1,355 \text{ g/cm}^3 < \rho < 1,360 \text{ g/cm}^3$
Ø 9 mm	$1,360 \text{ g/cm}^3 < \rho < 1,365 \text{ g/cm}^3$

(Bitte die Werte mit den Angaben auf dem Kugelsortierkasten vergleichen.)



Versuch 213

Kreisel



Abbildung 1: Aufbau des Kreisel- Versuchs.

I Messaufbau

- Stahlkugel mit Aluminiumstab ($m = 4,164 \text{ kg}$ incl. Stab, Kugelradius $r=5,08 \text{ cm}$) als Kreisel gelagert in einer Luftkissenpfanne
- 2 Gewichte ($r_a=0,725 \text{ cm}$, $r_i=0,325 \text{ cm}$, $h=1,1 \text{ cm}$, $m=9,85 \text{ g}$)
- Farbscheibe, Scheibe mit konzentrischen Ringen
- Stroboskop
- Stoppuhr
- Motor mit Netzgerät
- Gyroskop zur Demonstration der Kreiseigenschaften

II Literatur

- Bergmann-Schäfer, *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 1*.
- Demtröder, *Experimentalphysik 1*, Springer Verlag.
- Pohl, *Einführung in die Physik, Band 1: Mechanik, Akustik und Wärmelehre*, Springer Verlag.
- Für Interessierende der theoretischen Physik sind die Bücher von Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, Verlag Wiley-VCH und von Herbert Goldstein, *Klassische Mechanik*, Akademische Verl.-Ges., zu empfehlen.

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Mechanik des starren Körpers, Drehmoment und Drehimpuls - insbesondere deren Vektoreigenschaften, Trägheitsmoment und Trägheitstensor, Hauptträgheitsmomente, kräftefreier und schwerer Kreisel, Präzession und Nutation. Schauen Sie sich auch nochmals den Versuch Trägheitsmoment an, den Sie im Praktikum 1 durchgeführt haben.

Verständnisfragen:

1. In welcher Beziehung stehen Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit eines um eine Achse rotierenden Körpers? In welchem Koordinatensystem nimmt der Trägheitstensor Diagonalgestalt an?
2. Wie groß ist das Trägheitsmoment einer Kugel; wo liegen ihre Hauptträgheitsachsen? Beschreiben Sie die Lagen der Hauptträgheitsmomente bei einem rotationssymmetrischen Körper.
3. Warum fällt ein Kreisel nicht um?
4. Was ist die Ursache für das Auftreten von Präzession und Nutation?

IV Aufgaben

1. Untersuchen Sie in einem Vorversuch qualitativ das Verhalten eines Kreisels.
2. Messen Sie die Reibungsverluste des Kreisels und bestimmen Sie die Dämpfungskonstante und Halbwertszeit.
3. Bestimmen Sie aus der Präzessionsfrequenz eines schweren Kreisels das Trägheitsmoment um die Figurenachse.
4. Aus Größe und Richtung der Umlaufgeschwindigkeit der momentanen Drehachse um die Figurenachse soll das Trägheitsmoment senkrecht zur Figurenachse bestimmt werden.
5. Das gleiche Trägheitsmoment ist zusätzlich aus der Nutationsfrequenz zu bestimmen.

V Motivation

Seit unserer Geburt sind wir zu jeder Zeit der Schwerkraft ausgesetzt. Wir empfinden es daher als selbstverständlich, dass ein Gegenstand, der nicht im Schwerpunkt gelagert oder durch irgendwelche Aufhängungen fixiert wird, stets nach „unten“ fällt oder umkippt. Umso faszinierender ist es daher, dass sich ein rotierender Körper unter Umständen völlig anders verhalten kann. Wird

ein schnell rotierender Kreisel angestoßen und damit der Schwerpunkt außerhalb der Symmetrieachse verlagert, fällt er nicht um, sondern weicht senkrecht zur Richtung der Schwerkraft aus. Dadurch erhält er einen zusätzlichen Drehimpuls. Der Kreisel rotiert dann zum einen um seine eigene Achse und zum anderen führt er gleichzeitig eine Drehbewegung um die Richtung der Erdanziehung aus. Diese Bewegung wird als Präzession bezeichnet. Erst wenn die Rotation zu gering wird, wird der Kreisel instabil und kippt.

Kreiselphänomene finden sich in vielen Bereichen. Wir leben sogar auf einem Kreisel, der zudem eine Präzessionsbewegung durchführt! Die Erde ist keine ideale Kugel, sondern infolge der Rotation abgeplattet. Ihr Durchmesser ist am Äquator rund 43 km größer als der Poldurchmesser. Zudem ist die Erde um etwa $66,5^\circ$ gegen die Erdbahnebene geneigt. Aufgrund dieser Schiefstellung üben Sonne und Mond ein Drehmoment auf die Erde aus, welches versucht, die Erdachse aufzurichten und damit die Ekliptikschiefe zu verkleinern. Diesem Drehmoment weicht die Erde in einer rechtwinkligen Bewegung aus und präzessiert so um die Ekliptikebene. Die Zeit, die die Erdachse für einen vollen Präzessionsumlauf benötigt, beträgt ca. 25800 Jahre. Mit der Präzessionsbewegung ist eine stetige Wanderung des Himmelnordpols verbunden. Zur Zeit zeigt die Erdachse auf den Polarstern, der somit die Nordrichtung anzeigt. In etwa 12000 Jahre wird der Stern Vega diese Aufgabe übernehmen.



*Innenansicht eines
Kreiselkompass.*

Technische Anwendung findet der Kreisel (Gyroskop) im Bereich der Navigation als Kreiselkompass, als künstlicher Horizont (Kreiselhorizont) und als Autopilot bei Flugzeugen. Bei letzterem wird mit dem Kreisel die Neigung der Tragflächen und mit einem zweiten Kreisel der Winkel zwischen Heck und dem Cockpit des Flugzeuges bestimmt. Zusammen mit einem Beschleunigungs- und Geschwindigkeitsmesser kann so der Kurs der Maschine automatisch eingestellt werden. Mechanische Kreiselsysteme finden sich auch im Hubble-Teleskop. Sie dienen der Kursstabilisierung und helfen dem Teleskop die Balance zu halten und in der Bahn zu bleiben. Die Lebensdauer eines Satelliten wird oft durch die Lebensdauer seiner Gyroskope begrenzt. Fallen sie aus, so sind Richtung und Ausmaß von Lageänderungen nicht mehr feststellbar.

Beim Hubble-Weltraumteleskop war dies bereits schon zweimal der Fall. Zum Glück hat man das Teleskop mit insgesamt drei Ersatzkreiseln ausgestattet, so dass die Ausfälle nur von kurzer Dauer waren.

Auch in der Physik treten in vielen Bereichen Kreiselphänomene auf. So lassen sich die Eigenschaften eines mechanischen Kreisels zusammen mit quantenmechanischen Überlegungen auf Moleküle übertragen. Damit können z.B. die Rotationsspektren von Molekülen interpretiert werden.

Eine weitere Kreiselerscheinung ist die Larmor- Präzession. Aus klassischer Sicht bewegt sich im Atom ein Elektron um den Atomkern. Mit der Elektronenbewegung ist ein Kreisstrom verbunden, das ein magnetisches Dipolmoment induziert, welches senkrecht zur Ebene der Elektronenbewegung orientiert ist. Befindet sich nun solch ein Atom in einem äußeren \vec{B} -Feld, so strebt das magnetische Moment eine Ausrichtung parallel zum Magnetfeld an. Somit kommt es zu einer Präzession um die Feldrichtung.

Das mechanische Kreisel auch heute noch in der Forschung eingesetzt werden, dokumentiert der folgende Zeitungsartikel.

Einstein wird überprüft

Quarzkugeln in Raum und Zeit

Los Angeles (AP). Zwei grundlegende Annahmen von Albert Einstein sollen jetzt endlich überprüft werden. Am 17. April soll die von der Nasa finanzierte und von der Universität Stanford entwickelte Sonde Gravity Probe 2 (Schwerkraftsonde 2) vom US-Luftwaffenstützpunkt Vandenberg ins All starten. Die Sonde soll zwei Theorien Einsteins überprüfen: über Raum und Zeit und wie die Erde beide beeinflusst. Kern des Experiments sind vier Gyroskope – absolut runde, sich drehende Quarzkugeln von der Größe von Tischtennisbällen. Wenn sie einmal im Weltraum sind und sich drehen, sollten die Quarze ihre Richtung ändern – wenn Einstein Recht hatte.

Abbildung 2: *Bei dem Experiment sollen die Zusammenhänge von Raum, Zeit und Schwerkraft erforscht werden. Nach Einstein wird die Raumzeit durch einen schweren Körper „gekrümmt“. Auch eine rotierende Masse wie unsere Erde sollte das Raumzeit- Gewebe quasi mit sich reißen. Wenn Einsteins Theorie richtig ist, muss sich diese Raumverwirbelung auf die Rotation von Kreiseln auswirken, die sich in einem Satelliten um die Erde bewegen. (Quelle: Sonntag Aktuell, 4.4.04)*

VI Grundlagen

Der kräftefreie, symmetrische Kreisel

Jeder starrer Körper, der sich um einen festen Punkt dreht, stellt einen Kreisel dar. Wird der Kreisel im Schwerpunkt gelagert, so wird er als kräftefreier Kreisel bezeichnet. Bei dieser Aufhängung übt die Gewichtskraft kein äußeres Drehmoment \vec{M} auf den Kreisel aus, so dass Betrag und Richtung des Drehimpulses \vec{L} zeitlich konstant bleiben. Sind zudem zwei Hauptträgheitsmomente gleich groß, so wird der Kreisel als symmetrisch bezeichnet.

Zur Beschreibung der Bewegung des kräftefreien, symmetrischen Kreisels wollen wir im Folgenden drei charakteristische Achsen heranziehen. Die Symmetrieachse des Kreisels wird als Figurenachse bezeichnet und durch die Größe \vec{F} beschrieben. Daneben ist noch die raumfeste Drehimpulsachse \vec{L} und die Richtung der Drehachse $\vec{\omega}$ zur Beschreibung der Kreiselbewegung wichtig.

Wird der Kreisel an der Figurenachse festgehalten und derart in Rotation versetzt, dass sich beim Andrehen die Richtung der Figurenachse nicht ändert, so fallen alle drei Achsen zusammen und sind zeitlich und räumlich konstant (Abbildung 3 links). Nur für diesen Spezialfall zeigten die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und der Drehimpuls \vec{L} in die gleiche Richtung und sind über das Hauptträgheitsmoment der Figurenachse miteinander verknüpft.

Die **allgemeine** Bewegung des kräftefreien, symmetrischen Kreisels ist weitaus komplizierter. Experimentell kann man den allgemeinen Bewegungszustand dadurch einstellen, indem man dem um seine Figurenachse rotierenden Kreisel einen leichten Schlag erteilt. Dies führt dazu, dass die charakteristischen Kreiselachsen nicht mehr wie zuvor parallel ausgerichtet sind, sondern unterschiedliche Orientierungen einnehmen. Der Kreisel vollführt dann eine recht komplizierte Taumelbewegung, die als **Nutation**¹ bezeichnet wird (Abbildung 3 Mitte). Der Drehimpuls ist auch bei dieser Kreiselbewegung weiterhin räumlich und zeitlich konstant. Allerdings rotiert die Figurenachse auf einem Kegelmantel (Nutationskegel) mit der Nutationsfrequenz $\vec{\omega}_N$ um die raumfeste Drehimpulsachse und führt dabei gleichzeitig eine Eigenrotation $\vec{\omega}_F$ durch. Die resultierende Drehachse ist daher nicht konstant sondern eine Überlagerung der Eigenrotation um die Figurenachse und der Nutationsbewegung der Figurenachse um die Richtung des Drehimpulses. Daher wollen wir im Folgenden von der **momentanen Drehrichtung** $\vec{\omega}$ des Kreisels sprechen, die die Rotation

¹lat. nutare: nicken, schwanken

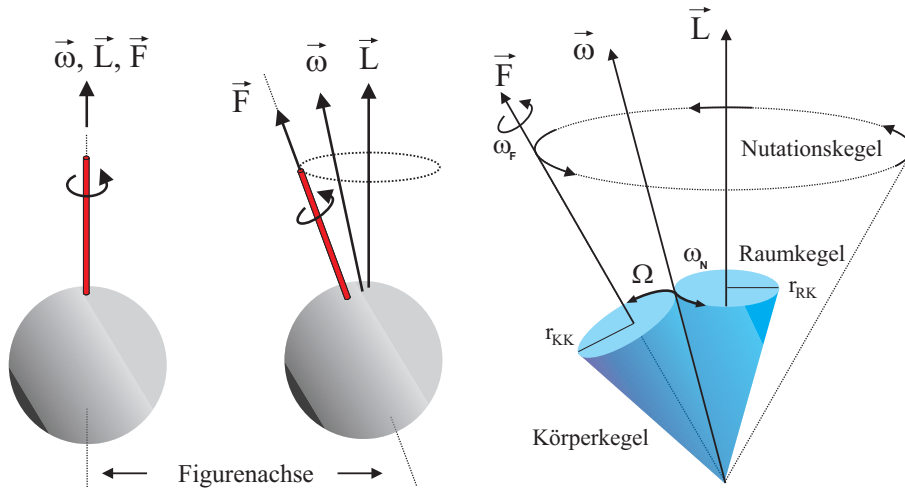


Abbildung 3: Bewegungen des kräftefreien symmetrischen Kreisels. Links: Figurenachse, momentane Drehrichtung und Drehimpuls sind parallel ausgerichtet und zeitlich konstant. Mitte: Nutationsbewegung. Alle drei charakteristische Achsen haben unterschiedliche Richtungen und nur der Drehimpuls ist zeitlich konstant. Rechts: Orientierung und Bewegung der Achsen im Nutationsfall für einen Kreisel mit $I_z < I_x = I_y$, wobei I_z das Trägheitsmoment um die Figurenachse darstellt. Die Bewegung kann man sich durch das Abrollen eines körperfesten Kegels auf einem raumfesten Kegel veranschaulichen.

des Kreisels zu einem bestimmten Zeitpunkt beschreibt.

Die Ausrichtung der einzelnen Kreiselachsen lässt sich leichter verstehen, wenn wir die rechte Skizze in Abbildung 3 betrachten. Die Figurenachse stellt hier die Symmetrieachse eines **gedachten Kegels** dar. Dieser körperfeste, sogenannte Körperkegel, rollt auf dem Mantel eines weiteren, raumfesten Kegels (Raumkegel), mit dem Drehimpuls als Symmetrieachse, ab. Die Lage der momentanen Drehrichtung ergibt sich in dieser Darstellung aus der Berührlinie der beiden Kegelmäntel.

Aus Abbildung 3 rechts folgt unmittelbar, dass bei der Nutation die Figurenachse, der Drehimpuls und die momentane Winkelgeschwindigkeit immer in einer Ebene liegen. Somit kann die momentane Winkelgeschwindigkeit in einen Nutationsanteil $\vec{\omega}_N$ und in einen Anteil der Eigenrotation der Figurenachse $\vec{\omega}_F$

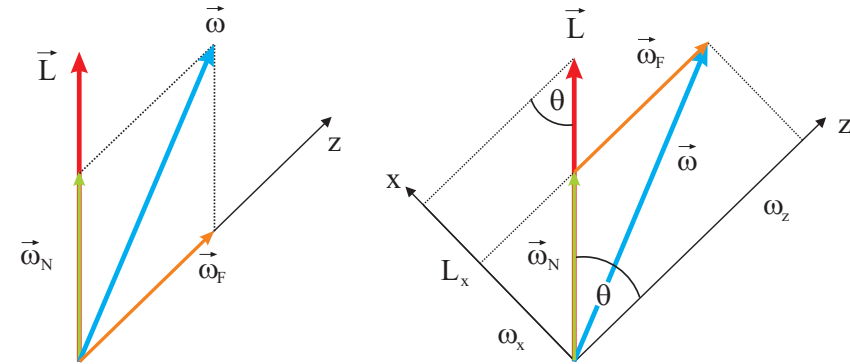


Abbildung 4: Geometrie der Nutationsbewegung. Das Koordinatensystem wurde so gewählt, dass es körperfest ist und seine Achsen mit den Hauptachsen des Kreisels zusammenfallen. Die z-Richtung ist parallel zur Figurenachse orientiert.

zerlegt werden (Abbildung 4 links):

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_N + \vec{\omega}_F. \quad (1)$$

Zerlegen wir zusätzlich Drehimpuls und momentane Winkelgeschwindigkeit in x- und z- Komponenten, so ergibt sich aus

$$\omega_x = \omega_N \sin \theta \quad (2)$$

und mit Hilfe der Beziehungen $L_x = L \sin \theta$ und $L_x = I_x \omega_x$ für den Betrag der Nutationsfrequenz:

$$\omega_N = \frac{L}{I_x} \quad (3)$$

Ist die Nutationsbewegung nur schwach ausgeprägt, d.h. bei kleinem Winkel θ , so kann der Betrag des Drehimpulses angenähert werden durch

$$L \approx I_z \omega \approx I_z \omega_F. \quad (4)$$

Hiermit ergibt sich für die Nutationsfrequenz

$$\omega_N \approx \frac{I_z}{I_x} \omega_F. \quad (5)$$

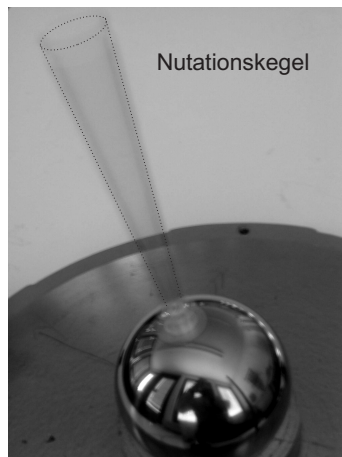


Abbildung 5: Nutationsbewegung der Figurenachse: Die Figurenachse läuft auf einem Kegelmantel um die raumfeste Drehimpulsachse.

Die Nutationsbewegung der Figurenachse lässt sich im Experiment leicht beobachten (Abbildung 5). Schwieriger gestaltet sich die Visualisierung der momentanen Drehachse. Um die momentane Drehachse zu beobachten, müssen wir einen Trick anwenden. Dazu wird auf die Figurenachse eine Scheibe mit unterschiedlich farbigen Segmenten gesteckt. Für einen Beobachter, der auf die mit dem Kreisel rotierende Scheibe blickt, verschwimmen aufgrund der Trägheit des Auges die Farben, so dass er nur die Mischfarbe der einzelnen Farbsegmente wahrnimmt. Nur in dem Punkt, in dem die momentane Drehachse die Farbscheibe durchstößt, steht die Farbscheibe „kurzfristig still“ und der Beobachter erkennt die „unverfälschte“ Farbe eines Segments. Dieser Punkt kennzeichnet somit die Orientierung der momentanen Drehrichtung.

Aufgrund der Wanderung der momentanen Drehachse auf dem Körperkegel um die Figurenachse, sieht der Beobachter am Ort der momentanen Drehachse, wie die einzelnen Farben der Sektorenscheibe durchlaufen werden (Abbildung 6). Der Farbwechsel erfolgt mit der Winkelgeschwindigkeit Ω (Abbildung 3), dessen Betrag sich aus dem Verhältnis der Radien von Körperkegel (r_{KK}) und Raumkegel (r_{RK}) sowie der Nutationsfrequenz ω_N bestimmen lässt:

$$\frac{\Omega}{\omega_N} = \frac{r_{RK}}{r_{KK}}. \quad (6)$$

Da die Berechnung von Ω algebraisch recht aufwendig ist, soll hier direkt das Ergebnis angegeben werden. Eine analytische Berechnung von Ω wird im An-

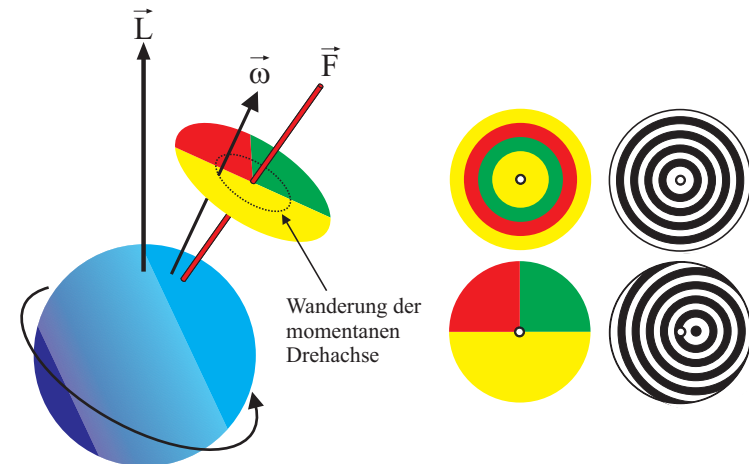


Abbildung 6: Visualisierung der momentanen Drehachse mit Hilfe einer farbigen Sektorscheibe. Neben der Farbscheibe stehen noch anders gemusterte Scheiben im Praktikumsversuch zur Verfügung.

hang durchgeführt:

$$\Omega = \frac{I_x - I_z}{I_x} \omega_F. \quad (7)$$

Für eine spätere Anwendung ist noch folgende Umformung nützlich:

$$I_x - I_z = \frac{I_z}{\omega_F/\Omega - 1}. \quad (8)$$

Der schwere, symmetrische Kreisel

Beim schweren Kreisel liegt der Unterstützungspunkt nicht mehr im Schwerpunkt, aber im Fall des symmetrischen Kreisels ($I_x = I_y$) immer noch auf der Figurenachse. Im Versuch wird dazu auf den Aluminiumstab eine Zusatzmasse m montiert, wodurch der Schwerpunkt entlang der Figurenachse verschoben wird. Wir wollen hier nur den Fall analytisch untersuchen, bei dem die Orientierungen von $\vec{\omega}$ und \vec{L} zusammenfallen, d.h. es soll keine Nutationsbewegungen vorhanden sein.

Aufgrund der Gewichtskraft wirkt auf den Kreisel ein Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{l} \times m\vec{g}, \quad (9)$$

wobei \vec{l} den Vektor darstellt, der vom Unterstützungspunkt des Kreisel zur Zusatzmasse auf der Figurenachse zeigt (Abbildung 7).

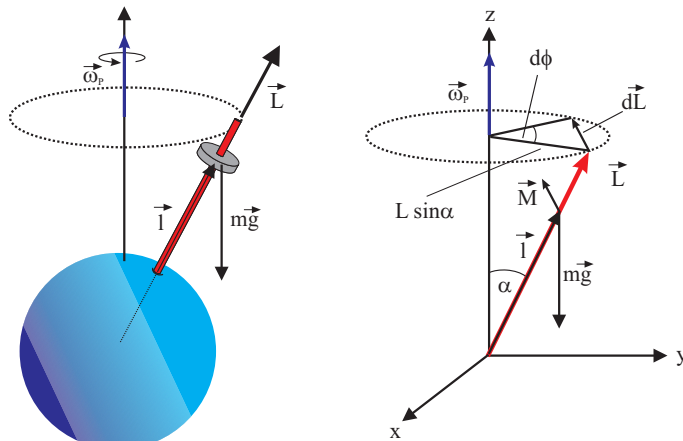


Abbildung 7: Links: Durch eine Zusatzmasse an der Figurenachse wird aus dem kräftefreien Kreisel ein schwerer Kreisel. Die Gewichtskraft übt ein äußeres Drehmoment $\vec{M} = \vec{l} \times m\vec{g}$ aus, so dass der Kreisel mit der Frequenz $\vec{\omega}_P$ um die z-Achse präzidiert. Rechts: Geometrie zur Bestimmung der Präzessionsfrequenz.

Dieses Drehmoment bewirkt, dass sich der Drehimpuls zeitlich ändert. Wegen $\vec{M} \perp \vec{L}$ zeigt die Änderung des Drehimpulses in Richtung des Drehmoments, d.h. $d\vec{L} \parallel \vec{M}$ und damit $d\vec{L} \perp \vec{L}$, woraus unmittelbar folgt, dass der Betrag des Drehimpulses zeitlich konstant bleibt. Das äußere Drehmoment bewirkt demnach nur eine Änderung der Drehimpulsrichtung: **Der Drehimpulsvektor läuft auf einem Kegelmantel um die z-Richtung und versucht sozusagen der Gewichtskraft seitlich auszuweichen.** Man bezeichnet diese Kreiselbewegung als **Präzession**². Die Präzessionsfrequenz $\vec{\omega}_P$, d.h. die Frequenz mit der der Drehimpuls um die z-Richtung rotiert, kann nach Abbildung 7 aus der zeitlichen Änderung des Präzessionwinkels φ abgeleitet werden:

²lat. praecedere: das Vorangehen

$$\omega_P = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dL}{L \sin \alpha dt}. \quad (10)$$

Mit $L = I_z \omega_F$ erhalten wir

$$\omega_P = \frac{mgl}{I_z \omega_F} \quad (11)$$

oder allgemein

$$\vec{M} = \vec{\omega}_P \times \vec{L}. \quad (12)$$

Die Präzessionsfrequenz ist demnach unabhängig von der räumlichen Orientierung des Kreisels und hängt nur vom Drehimpuls und vom Drehmoment ab.

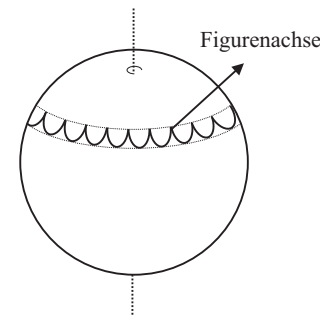


Abbildung 8: Bewegung der Figurenachse bei einer Überlagerung von Präzession und Nutation.

Bisher haben wir nur den Fall untersucht, bei dem der schwere Kreisel keine Nutation vollführt. Im Fall einer zusätzlichen Nutationsbewegung, weist der Kreisel eine komplexere Bewegung auf. Bei dieser Überlagerung von Präzession und Nutation durchläuft die Spitze der Figurenachse eine „girlandenförmige“ Bahn, deren genaue Form vom Verhältnis der Nutationsfrequenz zur Präzessionsfrequenz abhängt (Abbildung 8). Diese Bewegung ist im Praktikumsversuch leicht zu beobachten, soll hier aber quantitativ nicht weiter untersucht werden.

Zusammenfassung

- Ein starrer Körper, der um einen festen Punkt rotiert, stellt einen Kreisel dar. Sind genau zwei Hauptträgheitsmomente identisch, so wird der

Kreisel als symmetrisch bezeichnet. Wird der Kreisel im Schwerpunkt unterstützt so heißt der Kreisel kräftefrei. In diesem Fall wirken keine äußeren Drehmomente und der Drehimpuls ist räumlich und zeitlich konstant.

- Die allgemeine Bewegung eines kräftefreien Kreisels stellt eine Nutationsbewegung dar. Dabei führt die Figurenachse eine Eigendrehung mit ω_F durch und rotiert mit der Nutationsfrequenz ω_N gleichzeitig um die raumfeste Drehimpulsachse. Die Winkelgeschwindigkeit ist nicht konstant sondern bewegt sich mit Ω um die Figurenachse. Diese Bewegung kann mit Hilfe einer farbigen Sektorscheibe beobachtet werden. Die Bewegungen der charakteristischen Kreiselachsen kann man sich durch ein Abrollen eines körperfesten Kegels auf einen raumfesten Kegels veranschaulichen.
- Liegt der Auflagepunkt des Kreisels nicht im Schwerpunkt, so heißt der Kreisel schwerer Kreisel. In diesem Fall übt die Gewichtskraft ein Drehmoment aus, das zu einer Präzession führt. Dabei bewegt sich der Drehimpuls mit der Frequenz ω_P auf einem Kegelmantel um die Richtung der Gewichtskraft.

VII Durchführung des Versuchs

Beschreibung des Luftkissenkreisels

Als Kreisel dient eine luftkissengelagerte Stahlkugel, in die ein Aluminiumstab eingeschraubt ist und etwa 17 cm über die Kugeloberfläche hinausragt. Die Kugel ist nicht gehärtet und kann durch unsachgemäße Behandlung beschädigt werden (z.B. durch Fallenlassen). **Der Kreisel darf beim Herausnehmen niemals am Stab festgehalten werden. Verbiegt sich die Aluminiumstange auch nur geringfügig, ist der Versuch nicht mehr durchführbar!**

Durch den Stab wird die Figurenachse und die I_z -Achse festgelegt. Auf ihm werden während des Versuchs Gewichtsstücke und Farbscheiben angebracht. Der Stab ist mit Rillen im Abstand von 1 cm versehen. Im Abstand von 10, 15 und 20 cm von der Kugelmitte sind zusätzlich noch Doppelrillen markiert. Am Stabende ist ein Kugellager befestigt, an dem der Stab zur Änderung seiner Orientierung angefasst werden kann, ohne dabei die Frequenz Eigenrotation merklich zu verändern. Trotz des eingebauten Stabs ist die Stabseite der Kugel leichter. Einen kräftefreien Kreisel kann man daher nur erhalten, wenn

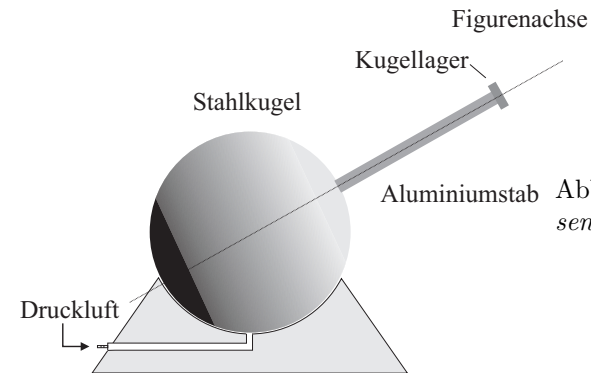


Abbildung 9: Aufbau des Luftkissenkreisels.

man ein Zusatzgewicht an dem Stab befestigt. Dazu dient unter anderem die Farbscheibe, die auch für stroboskopische Messungen benutzt wird.

Justierung des Kreisels

Schieben Sie die Farbscheibe auf den Stab bis nahe an die Kugel und lassen Sie den Kreisel mit etwa 1-2 Hz rotieren. Verschieben Sie die Figurenachse mit Hilfe des Kugellagers in horizontaler Lage und lassen Sie dann die Achse vorsichtig los. Falls der Kreisel präzessiert, müssen Sie die Scheibe je nach Richtung der Präzession entlang des Stabs verschieben. Ist der Kreisel schließlich kräftefrei, so schieben Sie eine passende Zahl von Unterlegscheiben zwischen Scheibe und Kreisel. Damit ist gewährleistet, dass Sie bei einem Wechsel der Scheibe, den kräftefreien Zustand leichter wieder einstellen können.

Beschleunigen des Kreisels

Für kleine Geschwindigkeiten genügt es, die Kugel dadurch zu beschleunigen, dass man den senkrechten Stab zwischen den beiden gegeneinander gleitenden Handflächen in Drehung versetzt. Für höhere Geschwindigkeiten ist es bequemer, den Motor zu benutzen: Halten Sie dabei den Kreisel am Kugellager fest und versetzen Sie den Kreisel durch Andrücken des Filzrad am Kugelumfang in Rotation.

Bedienung des Stroboskops

Die Bestimmung der charakteristischen Kreisel frequencies werden mit einem Stroboskop durchgeführt. Das Stroboskop³ sendet mit einstellbarer Frequenz, Lichtpulse von etwa $10\ \mu\text{s}$ Dauer aus. Bewegt sich die auf den Kreisel montierte Farbscheibe mit der gleichen Frequenz wie die Blitzfrequenz des Stroboskops, so wird diese immer in der gleichen Lage beleuchtet. Für den Beobachter scheint die Scheibe dann still zu stehen. Allerdings tritt diese Erscheinung auch dann auf, wenn die Scheibe mit der n -fachen Blitzfrequenz rotiert. Ist dagegen die Blitzfrequenz beispielsweise doppelt so hoch wie die des Kreisels, so beobachtet man zwei gleichfarbige Sektoren. Durch gezieltes Variieren um die n -fache Frequenz müssen Sie die richtige Frequenz herausfinden.

Mit dem kleinen Motor kann der Kreisel auf maximal $800\ \text{min}^{-1}$ beschleunigt werden. Diesen Bereich können sie komplett in der Stellung I des Stroboskopes erfassen. Sie brauchen daher den Messbereich des Stroboskops nicht umzuschalten. Da die Sektorenscheibe natürlich auch vom Raumlicht beleuchtet wird, erscheinen die Farben immer etwas vermischt, nur die Trennlinien der Sektoren bleiben bei der richtigen Frequenz stehen.

1. Vorversuch

Der Vorversuch soll Sie mit dem Kreisel vertraut machen und Ihnen die später genauer zu untersuchenden Erscheinungen qualitativ demonstrieren.

a) Öffnen Sie das Druckluftventil an der Wand. Stecken Sie die Scheibe mit den Farbsektoren nach oben auf den Stab und balancieren Sie die Scheibe wie zuvor beschrieben aus, so dass der Kreisel kräftefrei wird. Beschleunigen Sie den Kreisel auf einige Umdrehungen pro Sekunde und beobachten Sie die Reaktion des Kreisels, wenn Sie den Metallring des Kugellagers am Stabende mit einem Finger zur Seite drücken. Erläutern Sie Ihre Beobachtungen.

b) Stellen Sie nun eine Nutationsbewegung ein, indem Sie dem Stab einen leichten, seitlichen Stoß erteilen. Beobachten Sie die Farbscheibe: In der mischfarbigen Fläche der sich drehenden Scheibe sollten Sie einen Punkt erkennen, an dem eine „reine, unvermischte“ Farbe erscheint. An dieser Stelle ändert sich die Farbe gemäß der Farbanordnung auf der Sektorenscheibe. Dieser Punkt stellt den um die Figurenachse wandernden Ort der momentanen Drehachse dar. Drehen Sie die Scheibe um, so dass die Seite mit den farbigen

Ring nach oben zeigt und wiederholen Sie den Versuch. Wenn Sie beim Anschlagen des Kreisels einen Nutationskegel erreichen, der gerade in einem der Farbringe verläuft, ändert sich die Farbe am Ort der momentanen Drehachse nicht, d.h. $\vec{\omega}$ läuft auf einem Kreis um die Figurenachse.

c) Legen Sie zusätzlich die Scheibe mit den konzentrischen Kreisen auf die Farbscheibe. Wählen Sie zunächst die Seite der Scheibe, bei der der Mittelpunkt der Kreise seitlich gegen die Aufnahmeachse verschoben ist. Liegt keine Nutation vor ($\vec{\omega} \parallel \vec{L}$) so erkennt man ein System konzentrischer, verwaschener Kreise um den Stab. D.h. der Mittelpunkt des Kreissystems zeigt die Drehachse an. Drehen Sie nun die Scheibe um und versetzen Sie den Kreisel in Drehung. Durch einen seitlichen Stoß werden wieder die drei Kreiselachsen getrennt. Warum markiert jetzt der Mittelpunkt der verwaschenen Kreise die Drehimpulsachse, die räumlich stehen bleibt? Bringen Sie ein Zusatzgewicht am Stab an und wiederholen Sie den Versuch. Die Drehimpulsachse sollte nun ein Präzessionsbewegung durchführen.

d) Ohne zusätzliche Farbscheibe richtet sich der Stab immer auf, d.h. der Schwerpunkt liegt unterhalb der Kugelmittle. Mit einem Zusatzgewicht am Ende des Stabes fällt dagegen der Kreisel um. In diesem Fall liegt der Schwerpunkt oberhalb der Kugelmittle. Versetzen Sie in beiden Fällen den Kreisel in Drehung und lassen Sie den Stab aus einer nichtvertikalen Stellung los. Beobachten Sie die Drehrichtung der Präzession. Ändern Sie die Drehrichtung des Kreisels und wiederholen Sie den Versuch.

2. Dämpfung des Kreisels

Bringen Sie wieder die Sektorenscheibe an und überprüfen Sie ob der Kreisel kräftefrei ist. Montieren Sie zusätzlich beide Gewichte am Stabende. Beschleunigen Sie den Kreisel mit Hilfe des Motors bei senkrechter Achse auf ca. $600 - 700\ \text{min}^{-1}$. Messen Sie alle 2 Minuten die Drehfrequenz des Kreisels über einen Zeitraum von 12 Minuten. Notieren Sie die Drehfrequenz bei der jeweiligen Zeit unter Berücksichtigung der Fehler.

3. Präzession

Bei allen Messungen dieser Aufgabe wird der Kreisel zunächst bei senkrechter Achse auf die gewünschte Geschwindigkeit gebracht. Anschließend wird

³Am Stroboskop wird die Frequenz in Umdrehungen/Minute angezeigt.

die Achse durch Angreifen am Kugellager schräg gestellt und kurz vor der gewählten Ablesemarke möglichst nutationsfrei losgelassen. Als Ablesemarke dient ein Messingstab in der Kreiselbasis.

a) Montieren Sie auf den Stab die Farbscheibe und vergewissern Sie sich, dass der Kreisel kräftefrei ist. Befestigen Sie im Abstand von 20 cm zur Kugelmittle ein Zusatzgewicht auf den Stab. Die Drehgeschwindigkeit sollten Sie auf ungefähr 500 min^{-1} einstellen. Lassen Sie den Stab bei gleicher Drehgeschwindigkeit des Kreisels möglichst nutationsfrei unter drei verschiedenen Winkeln des Stabs gegen die Vertikale los und bestimmen Sie jeweils die Zeit für einen Umlauf (Präzessionsdauer T_P).

b) Belasten Sie den kräftefreien Kreisel mit folgenden Zusatzmassen:

- Ein Gewichtsstück bei 15 cm.
- Ein Gewichtsstück bei 20 cm.
- Zwei Gewichtsstücke bei 15 cm.
- Zwei Gewichtsstücke bei 20 cm.

Messen Sie für jede Gewichtseinstellung bei jeweils vier verschiedene Frequenzen f im Bereich $250 \text{ min}^{-1} < f < 700 \text{ min}^{-1}$, mit der Stoppuhr die Präzessionsdauer T_P . Beginnen Sie bei jeder Masseneinstellung bei einer hohen Frequenz und bremsen Sie dann für die folgenden Messungen den Kreisel etwas ab. Notieren Sie für jede Messung die Frequenz ω_F und die Präzessionsdauer T_P .

4. Umlauf der momentanen Drehachse um die Figurenachse

Überprüfen Sie, ob der Kreisel kräftefrei ist. Versetzen Sie anschließend den Kreisel bei senkrechter Achse mit Hilfe des Motors in Rotation. Nach dem Anwerfen wird durch einen leichten seitlichen Stoß auf die Achse, der Kreisel in Nutation versetzt.

a) Bestimmen Sie die Umlaufrichtung der momentanen Drehachse mit Hilfe der Farbscheibe. Beachten Sie die Reihenfolge der Farben.

b) Messen Sie mit der Stoppuhr für 10 Frequenzen im Bereich $300 \text{ min}^{-1} < f < 600 \text{ min}^{-1}$ jeweils die Zeit t für 10 Umläufe der momentanen Drehachse um die Figurenachse (Frequenz des Farbwechsels Ω der Sektorscheibe).

5. Nutation

Versetzen Sie den kräftefreien Kreisel durch vorsichtiges Anschlagen an die Achse in Nutation. Damit die in Gleichung (5) gemachte Näherung gilt, sollte die Öffnung des Nutationskegels an der Spitze des Stabes nur 1-2 cm betragen. Bestimmen Sie 10 Wertepaare von ω_N und ω_F . Gehen Sie dabei folgendermaßen vor: Aufgrund der Luftreibung nehmen die Frequenzen ständig ab. Es ist daher wichtig, dass beide Frequenzen möglichst schnell hintereinander gemessen werden. Es empfiehlt sich daher, erst das Stroboskop auf eine Frequenz einzustellen, die etwas kleiner ist als die momentane Frequenz ω_F . Notieren Sie diese Frequenz und warten Sie bis der Kreisel diese Frequenz erreicht und bestimmen Sie dann rasch die zugehörige Frequenz ω_N .

VIII Auswertung

zu 1) Diskutieren Sie Ihre Beobachtungen des Vorversuchs.

zu 2) Tragen Sie die Messpunkte auf halb-logarithmischen Papier auf. Bestimmen Sie die Dämpfungskonstante und Halbwertszeit.

zu 3a) Vergleichen Sie die gemessenen Präzessionszeiten und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

zu 3b) Aufgrund der Dämpfung des Kreisels ändert sich während der Präzessionsbewegung die Drehfrequenz ω_F . Berechnen Sie für jede Messung mit Hilfe der Dämpfungsmessung aus Aufgabe 2 und dem Startwert von ω_F die Drehfrequenz am Ende der Präzessionsbewegung und bestimmen Sie daraus ein mittleres $\bar{\omega}_F$. Tragen Sie jeweils T_P als Funktion von $\bar{\omega}_F$ auf und bestimmen Sie für jedes äußere Drehmoment die Steigung s_i . Beachten Sie, dass die Geraden durch den Ursprung gehen. Berechnen Sie aus den Steigungswerten nach Gleichung (11) das Trägheitsmoment I_z . Das zusätzliche Trägheitsmoment der unterschiedlichen Gewichtsstücke kann vernachlässigt werden. Der Mittelwert der vier Messungen ist dann das gesuchte Trägheits-

moment I_z des Kreisel

zu 4a) Vergleichen Sie Ihre Beobachtungen mit Gleichung (8) und den zu Abbildung 3 gegebenen Erläuterungen. Welches der beiden Trägheitsmomente I_x, I_z ist größer?

zu 4b) Tragen Sie die gemessene Umlauffrequenz der momentanen Drehachse gegen ω_F auf und bestimmen Sie die Steigung der Geraden. Mit Gleichung (8) und dem in Aufgabe 3 bestimmten Trägheitsmoment I_z kann $\Delta I = I_x - I_z$ und damit I_x berechnet werden.

zu 5) Tragen Sie ω_N über ω_F in einem Diagramm auf und bestimmen Sie mit Gleichung (5) und dem bekannten I_z wieder I_x .

IX Anhang: Berechnung der Kreisfrequenz Ω mit Hilfe der Eulerschen Gleichungen

Bei einem starren Körper, der um eine beliebige Achse durch seinen Schwerpunkt rotiert, fallen im Allgemeinen die Richtungen des Drehimpulses \vec{L}' und der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}'$ nicht zusammen. In einem **raumfesten**, kartesischen Koordinatensystem⁴, gilt für den Drehimpuls:

$$\begin{pmatrix} L'_x \\ L'_y \\ L'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I'_{xx} & I'_{xy} & I'_{xz} \\ I'_{yx} & I'_{yy} & I'_{yz} \\ I'_{zx} & I'_{zy} & I'_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{pmatrix} \quad (13)$$

bzw.

$$\vec{L}' = \hat{I}' \vec{\omega}', \quad (14)$$

wobei \hat{I}' den Trägheitstensor darstellt. Wählen wir dagegen ein **körperfestes** Koordinatensystem, das parallel zu den Hauptachsen des Kreisels orientiert ist, so nimmt der Trägheitstensor eine sehr einfache Form an. In diesem Hauptachsensystem verschwinden alle Nebenmomente und der Trägheitstensor

⁴Größen, die mit einem Strich versehen sind, beziehen sich hier stets auf ein raumfestes Koordinatensystem.

hat Diagonalform:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Die allgemeine Bewegungsgleichung

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M}' \quad (16)$$

gilt aber nur in einem Inertialsystem, z.B. im raumfesten Koordinatensystem. Bei dem körperfestem System handelt es sich um ein rotierendes und damit um ein beschleunigtes Bezugssystem. Allerdings können die Größen des raumfesten Systems auf das mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotierende Koordinatensystem durch

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} \quad (17)$$

transformiert werden. Im körperfesten Koordinatensystem lautet dann die Bewegungsgleichung

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}. \quad (18)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (15) erhalten wir schließlich die Eulerschen Gleichungen:

$$\begin{aligned} M_x &= I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z \\ M_y &= I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z \\ M_z &= I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y. \end{aligned} \quad (19)$$

Wenden wir diese Gleichungen auf den kräftefreien, symmetrischen Kreisel an: Die Kräftefreiheit führt dazu, dass kein Drehmoment auf den Kreisel wirkt, d.h. $M_i = 0$ und aufgrund der Symmetrie gilt zudem $I_x = I_y \equiv I_x$. Mit diesen Randbedingungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_x) \omega_y \omega_z &= 0 \\ I_x \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= 0 \\ I_z \dot{\omega}_z &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Aus der letzten Gleichung folgt unmittelbar, dass die z-Komponente von $\vec{\omega}$ konstant ist. Definieren wir zusätzlich noch die Größe

$$\Omega = \frac{I_z - I_x}{I_x} \omega_z, \quad (21)$$

so folgt schließlich

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x + \Omega\omega_y &= 0 \\ \dot{\omega}_y - \Omega\omega_x &= 0.\end{aligned}\tag{22}$$

Differentiation einer Gleichung nach der Zeit und Eliminierung der jeweils anderen Frequenz liefert zwei identische Oszillatorgleichungen

$$\begin{aligned}\ddot{\omega}_x + \Omega^2\omega_x &= 0 \\ \ddot{\omega}_y + \Omega^2\omega_y &= 0.\end{aligned}\tag{23}$$

Wir erhalten schließlich für die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}\omega_x &= A \cos(\Omega t + \varphi) \\ \omega_y &= A \sin(\Omega t + \varphi) \\ \omega_z &= \text{konst.},\end{aligned}\tag{24}$$

wobei $A^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 = \text{konst.}$ und φ von den Anfangsbedingungen abhängt. Aus den Gleichungen (24) lesen wir, dass im körperfesten System die Spitze des Winkelgeschwindigkeits-Vektors $\vec{\omega}$ mit der Frequenz $\Omega = \text{konst.}$ (Gleichung (21)) auf einer zur Figurenachse senkrechten Ebene rotiert. Die momentane Winkelgeschwindigkeit bewegt sich somit auf einem Kegel, entsprechend dem Körperkegel in Abbildung 3 um die Figurenachse. Dies entspricht unseren Überlegungen, die wir in den Gleichungen (6) und (7) angegeben haben.

Versuch 221

Adiabatenkoeffizient $\kappa = c_p/c_V$



Abbildung 1: Links: Versuchsaufbau nach Rüchardt. Rechts: Aufbau nach Clément-Desormes. Der Gasbehälter befindet sich im Aluminiumgehäuse.

I Messaufbau

Aufbau nach Clément-Desormes:

- Gasbehälter mit Manometeraufsatz und Luftbalg

Aufbau nach Rüchardt:

- Gasbehälter mit Rohransatz und Nadelventil

- Glasrohr mit zylindrischem Schwingkörper
- Gasflaschen (Argon, Luft)
- Stoppuhr

II Literatur

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler, Demtröder.
- Homepage des Praktikums (<http://www.physikpraktika.uni-hd.de>).

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Zustandsänderungen eines Gases und deren Darstellung im pV-Diagramm (Isotherme, Isobare, Isochore, Adiabate), Adiabaten-Exponent, Poisson-Gleichung, spezifische Wärme eines Gases, Gleichverteilungssatz, Freiheitsgrade (theoretische Werte für c_p/c_V bei ein- und mehratomigen Gasen).

Verständnisfragen:

1. Für welchen thermodynamischen Prozess ist die Größe κ von Bedeutung?
2. Welche Beziehung besteht zwischen den Größen c_p , c_V , κ und f (Anzahl der Freiheitsgrade)? Wie groß ist der theoretische Wert von κ für ein Edelgas? Was erwarten Sie für Luft bzw. für Kohlendioxid?
3. Was ist größer: c_p oder c_V ?

IV Aufgabe

1. Das Verhältnis der spezifischen Wärmen c_p/c_V ist für Luft auf zwei verschiedene Weisen und für Argon nach Rüchardt zu messen.

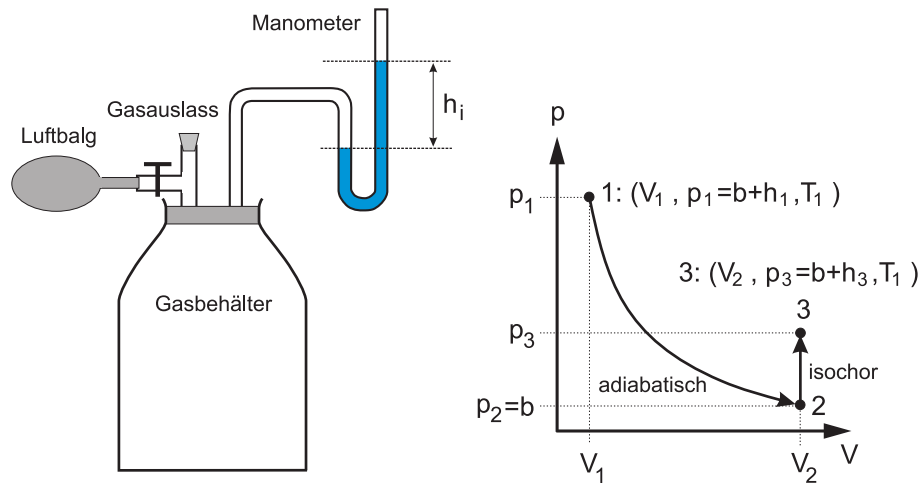


Abbildung 2: Links: Skizze des Aufbaus nach Clément und Desormes. Rechts: Dazugehöriges pV -Diagramm.

V Grundlagen

V.1 Messung des Adiabatenkoeffizienten nach Clément und Desormes

Der Messaufbau ist in Abbildung 2 dargestellt. Der Druck in einem luftgefüllten Gasbehälter lässt sich mit Hilfe eines Luftbalgs vergrößern und kann mit einem Manometer abgelesen werden.

Durch Pumpen mit dem Luftballg wird in dem Gasbehälter ein Überdruck erzeugt, wobei sich das Gas dabei erwärmt. Wartet man nun so lange ab, bis sich das Gas wieder auf Zimmertemperatur abgekühlt hat, so ist der Zustand 1 im pV -Diagramm in Abbildung 2 erreicht:

$$\text{Zustand 1: } V_1, \quad p_1 = b + h_1, \quad T_1 \quad (1)$$

wobei V_1 das Volumen im Zustand 1, b der äußere Luftdruck, h_1 die Höhendifferenz des Manometers und T_1 die Temperatur des Gases im Zustand 1 (Zimmertemperatur) bezeichnen.

Im nächsten Schritt wird der Gasauslassstopfen am Gasbehälter für eine kurze Zeit geöffnet, so dass sich der Druck im Behälter dem äußeren Luftdruck b an-

gleicht. Dabei entweichen Moleküle aus der Flasche, d.h. die Gasmenge ändert sich. Dies ist gleichbedeutend mit der Annahme, dass man durch eine Volumenvergrößerung um ΔV zu dem Druck b kommt. Da der Druckausgleich sehr schnell erfolgt, findet kein Wärmeaustausch mit der Umgebung statt. Es handelt sich daher um einen adiabatischen Prozess, bei dem sich die Temperatur des Gases um ΔT abkühlt. Für den Zustand 2 des Gases gilt dann:

$$\text{Zustand 2: } V_2 = V_1 + \Delta V, \quad p_2 = b, \quad T_2 = T_1 - \Delta T. \quad (2)$$

Nun wartet man solange ab, bis die Temperatur des Gases wieder auf Zimmertemperatur angestiegen ist. Da sich dabei das Volumen nicht ändert, handelt es sich um eine isochore Zustandsänderung bei der der Druck ansteigt. Hat die Temperatur des Gases schließlich Zimmertemperatur erreicht, befindet sich das Gas im Zustand 3:

$$\text{Zustand 3: } V_3 = V_2 = V_1 + \Delta V, \quad p_3 = b + h_3, \quad T_3 = T_1. \quad (3)$$

Die Zustände 1 und 2 sind durch die Poisson'sche Gleichung miteinander verknüpft:

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa. \quad (4)$$

Hiermit berechnen wir

$$(b + h_1) V_1^\kappa = b (V_1 + \Delta V)^\kappa. \quad (5)$$

Da $\Delta V \ll V_1$ ist können wir $(V_1 + \Delta V)^\kappa$ nähern durch

$$(V_1 + \Delta V)^\kappa = V_1^\kappa \left(1 + \frac{\Delta V}{V_1}\right)^\kappa \approx V_1^\kappa \left(1 + \kappa \frac{\Delta V}{V_1}\right). \quad (6)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in Gleichung (5) ein, so erhalten wir

$$\frac{h_1}{b} = \kappa \frac{\Delta V}{V_1}. \quad (7)$$

In den Zuständen 1 und 3 ist die Temperatur der Luft im Gasbehälter gleich, d.h. es gilt das Boyle-Mariotte'sche Gesetz $pV = \text{konst.}$:

$$p_1 V_1 = p_3 V_3 \quad (8)$$

$$\rightarrow (b + h_1) V_1 = (b + h_3) (V_1 + \Delta V). \quad (9)$$

Da $h_3 \ll b$ und $\Delta V \ll V_1$, kann der Term $h_3 \Delta V$ vernachlässigt werden. Somit ergibt sich:

$$h_1 V_1 = h_3 V_1 + b \Delta V, \quad \text{bzw.} \quad (10)$$

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{h_1 - h_3}{b}. \quad (11)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in Gleichung (7) ein, so erhalten wir schließlich:

$$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_3}. \quad (12)$$

Wir können somit den Adiabatenkoeffizient κ allein durch Ablesen des Manometerstandes in den Zuständen „1“ und „3“ bestimmen.

V.2 Messung des Adiabatenkoeffizienten nach Rüchardt

Eine weitere Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten eines Gases, ist mit der Methode nach Rüchardt möglich (Abbildung 3). Auf einem Gasbehälter ist eine Glasröhre montiert. Bringt man in das Glasrohr einen Schwingkörper, der nahezu den gleichen Durchmesser wie das Glasrohr besitzt, so schwingt dieser in der Röhre auf und ab. Dabei wird das Gas periodisch adiabatisch komprimiert und expandiert. Allerdings ist die Schwingung stark gedämpft, so dass nur wenige Perioden beobachtbar sind.

Um dem entgegenzuwirken befindet sich in der Mitte des Glasrohrs eine kleine Öffnung von ungefähr 1 mm Durchmesser. Lässt man einen gleichmäßigen Gasstrom in die Flasche, dann wirkt, sofern sich der Schwingkörper unterhalb der Öffnung befindet, ein zusätzlicher Druck auf den Schwingkörper. Befindet sich der Schwingkörper über der Öffnung, so entweicht der Gasstrom durch die Öffnung und der Druck sinkt. Beachten Sie, dass durch diese Maßnahme nur die Reibungsverluste ausgeglichen werden. Die eigentliche Bewegung des Schwingkörpers beruht auch weiterhin auf die adiabatische Kompression und Expansion des Gases.

Der Schwingkörper befindet sich im Gleichgewicht wenn der Druck p in der Flasche gleich der Summe aus dem Luftdruck p_0 und dem „Schweredruck“ des Schwingkörpers ist:

$$p = p_0 + \frac{mg}{A}, \quad (13)$$

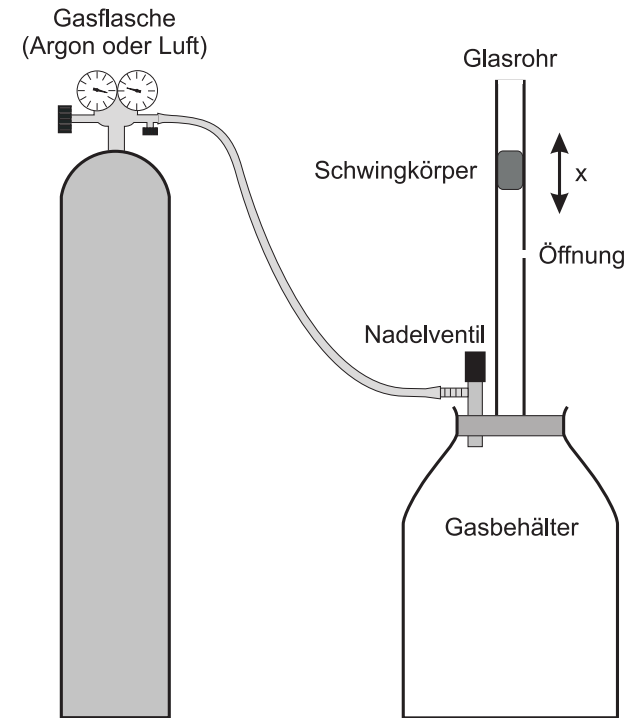


Abbildung 3: Versuchsaufbau nach Rüchardt.

wobei m die Masse und A die Querschnittsfläche des Schwingkörpers beschreiben. Schwingt der Körper um eine kleine Strecke x über die Gleichgewichtslage hinaus, wobei sich der Druck p um dp ändert, so gilt nach dem Newton'schen Gesetz:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = A dp. \quad (14)$$

Da der Vorgang adiabatisch erfolgt, gilt die Poisson'sche Gleichung

$$pV^\kappa = \text{konst.} \quad (15)$$

Differentiation dieses Ausdrucks nach V liefert:

$$p = V^{-\kappa} \cdot \text{konst.} \quad (16)$$

$$\frac{dp}{dV} = -\kappa V^{-\kappa-1} \cdot \text{konst.} \quad (17)$$

$$\frac{dp}{dV} = -\kappa \frac{p}{V} \quad (18)$$

$$dp = -\kappa \frac{p}{V} dV. \quad (19)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in Gleichung (14) ein, so erhalten wir:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -A \kappa \frac{p}{V} dV. \quad (20)$$

Mit $dV = Ax = \pi r^2 x$, wobei r den Radius des Glasrohrs darstellt, ergibt sich:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\pi^2 r^4 \kappa \frac{p}{V} x \quad (21)$$

bzw.

$$\ddot{x} + \frac{\pi^2 r^4 \kappa p}{mV} x = 0. \quad (22)$$

Gleichung (22) ist die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators. Die allgemeine Form lautet

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (23)$$

Vergleichen wir dies mit Gleichung (22), so ergibt sich für die Kreisfrequenz des Schwingkörpers:

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi^2 r^4 \kappa p}{mV}} \quad (24)$$

bzw. für die Periodendauer T

$$T = \sqrt{\frac{4mV}{r^4 \kappa p}}. \quad (25)$$

Für den Adiabatenkoeffizienten κ folgt dann:

$$\kappa = \frac{4mV}{r^4 T^2 p}. \quad (26)$$

Die Größen m , V und r sind bekannt und an der Versuchsanordnung angegeben. Für p ist der Druck gemäß Gleichung (13) einzusetzen. Somit kann der Adiabatenkoeffizient allein durch Messung der Periodendauer T bestimmt werden.

VI Durchführung des Versuchs

Da für jede Teilaufgabe nur ein Messaufbau zur Verfügung steht, beginnt die eine Gruppe mit der Messung des Adiabatenkoeffizienten nach Clément und Desormes, die andere mit der Messung nach Rüchardt. Anschließend wechseln beide Gruppen den Versuchsaufbau.

1. Methode nach Clément und Desormes

1. Erzeugen Sie durch mehrmaliges Pumpen mit dem Luftball ein Überdruck im Gasbehälter. Bei diesem Vorgang erwärmt sich das Gas. Warten Sie daher nach der Druckerhöhung einige Minuten ab, bis die Temperatur des Gases wieder auf Zimmertemperatur abgesunken ist. Sie können das Erreichen der Zimmertemperatur am asymptotischen Absinken des Druckes am Manometer auf den Endwert h_1 beobachten. Dies entspricht, wie im Kapitel „Grundlagen“ erläutert, dem Zustand 1 im pV-Diagramm. Notieren Sie den Druck h_1 in Ihr Protokollheft.
2. Öffnen Sie nun für etwa 2 Sekunden den Stopfen der Gasausslassöffnung. Dadurch wird ein adiabatischer Druckausgleich erzielt (Zustand 2 im pV-Diagramm). Warten Sie anschließend wieder den Temperatúrausgleich ab, bis sich ein konstanter Überdruck h_3 eingestellt hat (Zustand 3). Dieser Wert wird abgelesen und im Protokollheft notiert.
3. Der Versuch ist mindestens 5-mal zu wiederholen. Falls der Enddruck h_3 noch groß genug ist, kann man diesen Zustand als Anfangszustand für die folgende Messung benutzen. Falls nicht, müssen Sie den Druck durch Pumpen mit dem Luftball erneut erhöhen.

2. Methode nach Rüchardt

1. Stellen Sie am Reduzierventil der Gasflasche einen Druck von ca. 0,4 bar ein und regeln Sie das Nadelventil an der Apparatur so ein, dass sich eine Schwingung um die Mitte des Rohres (d.h. um die Gasaustrittsöffnung) einstellt. Um sicherzustellen, dass der Gasbehälter vollständig mit dem

entsprechenden Gas gefüllt ist, sollten Sie bevor Sie mit der Messung beginnen einige Minuten abwarten.

2. Die Größen m , V und r sind an der Versuchsanordnung angegeben. Notieren Sie diese Werte sowie den Luftdruck in Ihr Protokollheft.
3. Messen Sie an jedem Aufbau die Zeit für mindestens 50 Schwingungen.

VII Auswertung

Berechnen Sie für beide Messmethoden die Adiabatenkoeffizienten der entsprechenden Gase und vergleichen Sie diese mit den theoretisch zu erwartenden Werten. Was könnten die Ursachen für mögliche Abweichungen sein?

VIII Anhang

Bemerkung zum Adiabatenkoeffizient:

Der Unterschied der molaren Wärmen eines idealen Gases ist gegeben durch

$$c_p - c_V = R, \quad (27)$$

wobei R die allgemeine Gaskonstante darstellt. Bei der Ableitung dieser Beziehung wird vorausgesetzt, dass die innere Energie des Gases nicht vom Volumen sondern nur von der Temperatur abhängt. Dies ist für verdünnten Gase einigermaßen der Fall. Bei der Betrachtung der kinetischen Gastheorie in den Lehrbüchern sagt man, einatomige Gase haben drei, nämlich die translatorischen Freiheitsgrade, zweiatomige Gase (oder gestreckte Moleküle) zusätzlich zwei rotatorische Freiheitsgrade und drei- oder mehratomige Gase insgesamt 6 Freiheitsgrade, woraus sich dann $c_V = 1,5R$, bzw. $2,5R$ und $3R$ ergibt und somit $\kappa = 5/3$ bzw. $7/5$ und $4/3$ folgt. Tatsächlich treten aber z.B. bei dem linearen CO_2 -Molekül bei Zimmertemperatur bereits Knickschwingungen auf, oder bei Ethan machen die beiden CH_3 -Gruppen Rotationspendelschwingungen gegeneinander, so dass zur inneren Energie weitere Beiträge kommen, die zu einer Erniedrigung von κ führen. In der folgenden Tabelle sind einige Werte für κ nach Kohlrausch aufgelistet:

Gas	κ
Ar	1,648
He	1,63
H_2	1,41
N_2	1,401
O_2	1,398
CO_2	1,293
Methan	1,308
Ethan	1,188
Propan	1,13

Versuch 222

Heißluftmotor

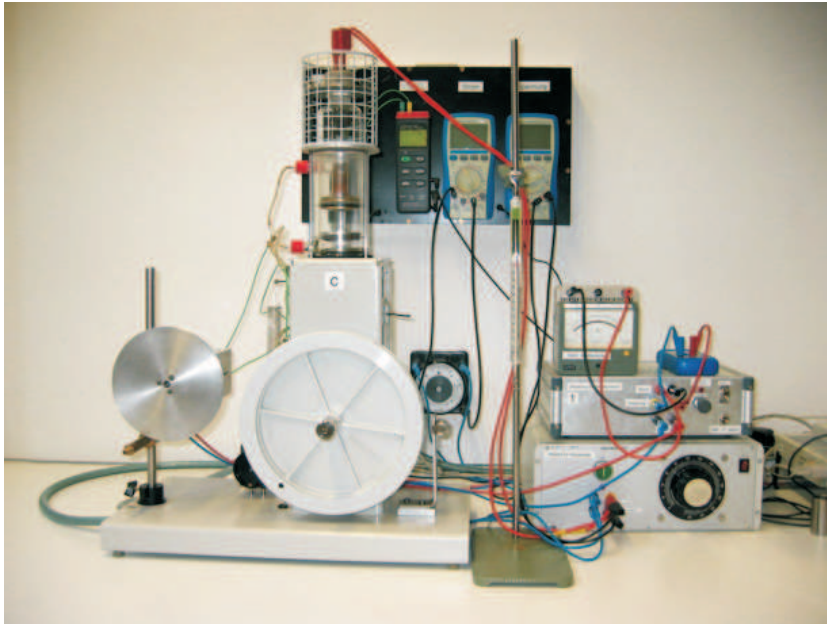


Abbildung 1: Versuchsaufbau.

I Messaufbau

- Heißluftmotor
- regelbares Netzteil für die Heizwendel
- Sensorsystem „Cassy“ mit Druck- Temperatur- und Wegsensor
- PC mit Drucker
- Dreikanal Thermometer

- Multimeter
- Elektrischer Antriebsmotor mit regelbarem Netzteil
- Durchflussmengen- Messgerät des Kühlwassers

II Literatur

- Bergmann- Schäfer, *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band I*, de Gruyter Berlin.
- Eichler, Kronfeldt, Sahn, *Das Neue Physikalische Grundpraktikum*, Springer Verlag.
- Demtröder, *Experimentalphysik 1*, Springer Verlag.

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Grundlagen der Wärmelehre, ideales Gasgesetz, Zustandsgrößen, Hauptsätze der Thermodynamik, thermodynamischer Kreisprozess, Wärmekraftmaschine, Kältemaschine und Wärmepumpe, Carnot- Prozess, Wirkungsgrad.

Verständnisfragen:

1. Wie lauten die drei Hauptsätze der Thermodynamik?
2. Worin unterscheiden sich isotherme, adiabatische, isochore und isobare Zustandsänderungen? Wie verlaufen diese im pV- Diagramm?
3. Beschreiben Sie den Carnot'schen Kreisprozess. Wie groß ist der theoretische Wirkungsgrad?
4. Diskutieren Sie die Wirkungsweise eines Stirlingmotors anhand des pV- Diagramms. Erläutern Sie für jeden Takt die Änderung der inneren Energie, die zugeführter Wärme und die geleistete Arbeit.
5. Beschreiben Sie die Funktion des Regenerators und diskutieren Sie warum der Stirling- Prozess mit einem idealem Regenerator den maximalen Wirkungsgrad einer periodisch arbeitenden Wärmekraftmaschine erreicht.

6. Erklären Sie mit Hilfe des pV-Diagramms die Funktionen der Stirling-Maschine beim Betrieb als Kältemaschine und als Wärmepumpe.
7. Laufen Wärmepumpen und Kältemaschinen gleichsinnig oder gegensinnig?
8. Worin liegt der Vorteil einer Wärmepumpe gegenüber anderen Heizquellen?

IV Aufgaben

1. Untersuchen Sie qualitativ die Wirkungsweise des Heißluftmotors als Kältemaschine und Wärmepumpe.
2. Bestimmen Sie den Wirkungsgrad des Heißluftmotors aus dem pV-Diagramm.
3. Ermitteln Sie den Wirkungsgrad durch Messung der abgegebenen Arbeit mit Hilfe einer Drehmomentmessung.

V Motivation

„...These imperfections have been in great measure removed by time and especially by the genius of the distinguished Bessemer¹. If Bessemer iron or steel had been known thirtyfive or forty years ago there is scarce a doubt that the air engine would have been a great success.“

Robert Stirling, 1876

In diesem Zitat bezieht sich Robert Stirling auf die Gefahren der Anfang des 19. Jahrhunderts aufkommenden Hochdruckdampfmaschinen. Um den Wirkungsgrad der Dampfmaschine zu steigern, wurde die Kesseltemperatur unter hohem Druck weit über den Siedepunkt des Wassers erhöht. Allerdings waren die damals zur Verfügung stehenden Materialien- Stahl war noch nicht bekannt- ungeeignet, diesen hohen Drücken dauerhaft standzuhalten. Zahlreiche Kesselexplosionen waren die Folge, die viele Menschenopfer forderten.

¹Ein nach Henry Bessemer benannte Stahlsorte bzw. ein Verfahren zur Massenstahlerzeugung.

Die technischen Mängel der Hochdruckdampfmaschine, insbesondere die Gefahren für die Arbeiter, waren mitverantwortlich dafür, dass sich der schottische Pfarrer Robert Stirling mit der Entwicklung eines neuen Motortyps beschäftigte. 1816 wurde von dem damals 26-jährigen Stirling der Heißluftmotor zum Patent angemeldet. Damit ist der Stirlingmotor, nach der Dampfmaschine, die älteste periodisch arbeitende Wärmekraftmaschine.

Die ersten Anwendungen des Stirlingmotors waren vor allem Wasserpumpen und Maschinenantriebe mit kleinem bis mittlerem Leistungsbedarf. Allerdings gelang es dem Stirlingmotor niemals, sich gegen die Dampfmaschine so richtig durchzusetzen. Mit der Entwicklung neuer Materialien, insbesondere des Stahls, wurden die Dampfmaschinen betriebssicherer und verdrängten den Heißluftmotor immer mehr vom Markt. Lediglich in solchen Bereichen, in denen Antriebe mit geringer Leistung benötigt wurden, wie z.B. Ventilatoren oder Nähmaschinen, wurden Heißluftmotoren in größerer Stückzahl eingesetzt.

Das endgültige Ende der Stirlingmotoren, aber auch letztendlich der Dampfmaschinen, wurde durch die Erfindung des Verbrennungsmotors und des Elektromotors eingeleitet. Diese neuen Motoren waren bei gleichem Gewicht deutlich leistungstärker und auch günstiger herzustellen als der Heißluftmotor, so dass dieser allmählich vom Markt verschwand.

Im Jahre 1938 griff die Firma Philips die Ideen Stirlings erneut auf. Philips suchte für seine Radioempfänger und Sendestationen neue Absatzmärkte in Afrika und Asien. Da die Elektrifizierung dieser Länder noch nicht vorangeschritten war, benötigte man Stromgeneratoren, die auf Basis des Heißluftmotors entwickelt werden sollten. Kurz nach dem zweiten Weltkrieg wurden die ersten Prototypen und 1950 ein 200 W Stirlingmotor vorgestellt. Allerdings wurde dieser Motor niemals in großen Stückzahlen gefertigt. Mit der Erfindung des Transistors wurden die Radioempfänger immer energiesparender und benötigten daher keine zusätzlichen Stromgeneratoren. Trotzdem wurde an der Entwicklung des Heißluftmotors weiter gearbeitet. 1975 stellte Philips einen 4-Zylinder Heißluftmotor vor, der eine Leistung von 115 PS bei 3200 Umdrehungen pro Minute erreichte. Der Wirkungsgrad dieses Motors betrug 40 %!

Ein wesentlicher Vorteil der Heißluftmotoren besteht darin, dass die „Wärme von außen zugeführt wird“ und nicht wie bei Otto- oder Dieselmotoren eine innere Verbrennung erfolgt. Dadurch können nahezu alle Energieträger verwendet werden; nicht nur flüssige, feste oder gasförmige Brennstoffe, sondern auch Sonnenenergie, die bei chemischen Reaktionen freiwerdende Wärme und im Prinzip auch Kernenergie. Die äußere Verbrennung ist zudem sehr umweltschonend. Durch einen externen Brenner kann die Verbrennung optimal regu-

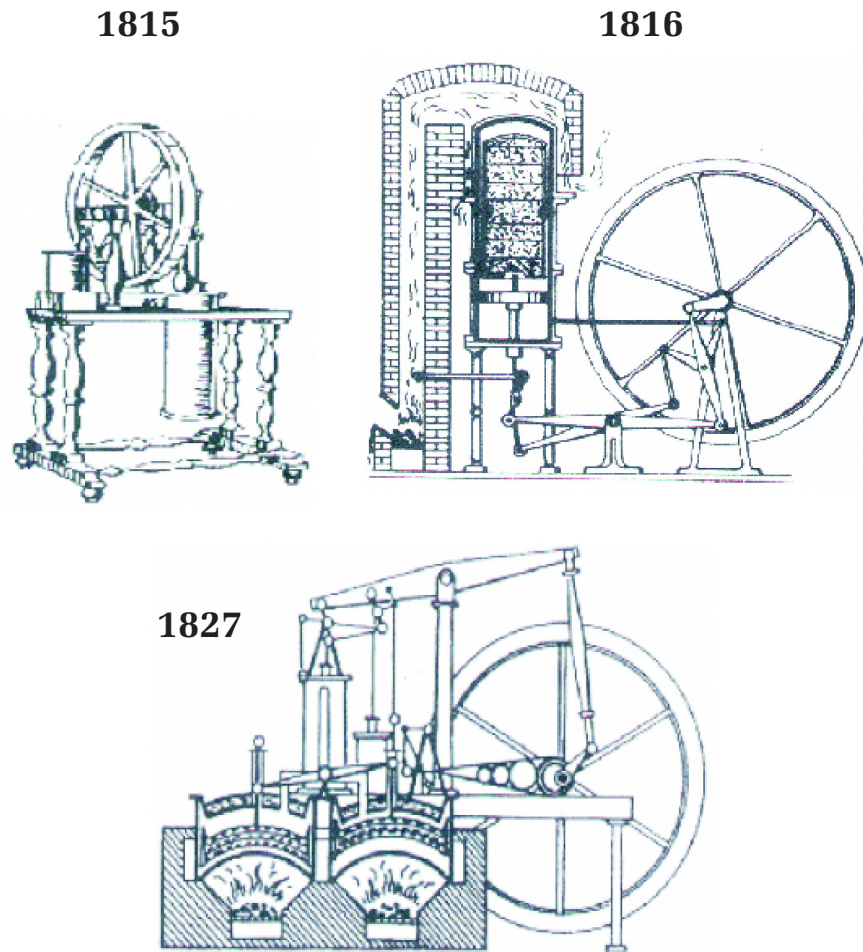


Abbildung 2: Historische Stirlingmotoren. Quelle: Hermann Schmidt. Hat der Stirlingmotor eine Zukunft? Eine allgemeine Übersicht.

liert werden, so dass ein Minimum an Umweltschadstoffen wie Kohlenmonoxid oder Stickoxide erzeugt werden. Desweiteren entstehen bei der äußeren Verbrennung keine Verschmutzungen und Rückstände innerhalb des Motors, wodurch eine hohe Standzeit gewährleistet ist und ein wartungsbedingter Ölwechsel des Motors nur selten oder gar nicht notwendig ist. Weitere Vorteile liegen in der geringen Geräuschemission, der Laufruhe und dem hohen Wirkungsgrad. Der theoretische Wirkungsgrad des Stirlingmotors entspricht dem des Carnot- Wirkungsgrades und ist damit höher als der theoretische Wirkungsgrad von Otto- und Dieselmotoren.

Allerdings besitzt der Heißluftmotor gegenüber den hochgezüchteten Verbrennungsmotoren auch deutliche Nachteile: Um bei kleiner Bauhöhe und geringem Gewicht hohe Leistungen zu erzielen, muss das Arbeitsgas auf einen sehr hohen Druck (≈ 150 bar) „vorgespannt“ werden und zudem der Motor bei hohen Drehzahlen betrieben werden. Damit sind äußerst hohe mechanische Belastungen, bei den trockenlaufende Lagern und Dichtungen verbunden. Die Materialien des Erhitzers müssen bis zu 1000°C hitze- und druckbeständig sein. Bei einem Innendruck von 150 bar ist dies nicht trivial! Diese Anforderungen setzen spezielle Materialien voraus, die die Herstellung dieses Motors gegenüber den Verbrennungsmotoren verteuern. Ein weiterer Nachteil liegt in dem hohem Aufwand der Leistungsregulierung. Bei einem Verbrennungsmotor lässt sich die Leistung durch die Einspritzmenge des Brennstoffes sehr einfach einstellen. Bei dem Heißluftmotor ist dies nicht möglich. Eine schnelle Leistungsregulierung ist hier nur über eine Variierung des Innendrucks möglich- bei typischerweise 150 bar ebenfalls nicht trivial.

Angesicht des heutigen Entwicklungsstand ist der Einsatz von Heißluftmotoren nur in solchen Bereichen wirtschaftlich, in denen Otto- oder Dieselmotoren nicht eingesetzt werden können. Ein erfolgversprechendes Anwendungsgebiet stellen Blockheizkraftwerk (BHKW) zur dezentralen Energieversorgung dar. Solche Kraftwerke können zur Stromerzeugung mit günstigen und nachwachsenden Brennstoffen (z.B. Holzpellets) befeuert werden. Zudem lässt sich die Abwärme zu Heizzwecken nutzen, so dass ein sehr hoher Wirkungsgrad erreicht wird. Zur Zeit wird von der Sindelfinger Firma Solo ein Blockheizkraftwerk auf Basis eines Stirling- Motors in Serie gefertigt. Dieses Stirling- Modul liefert eine elektrische Leistung von 2-9 kW bei einem elektrischen Wirkungsgrad von 24 %. Der Gesamtwirkungsgrad des BHKW liegt nach Angaben der Firma Solo bei 90 %.

Gute Marktchancen besitzt der Heißluftmotor auch im Bereich der FCKW-freien Kälteerzeugung. Der Stirling- Motor kann nämlich nicht nur als Wärme-

kraftmaschine, sondern auch zum Heizen bzw. Kühlen verwendet werden. Wird der Motor von außen mechanisch angetrieben, so arbeitet er je nach Drehrichtung des Antriebs als Wärmepumpe oder als Kältemaschine. Vor allem im Betrieb als Kältemaschine finden sich zahlreiche technische Anwendungen. Da Temperaturen von bis zu -190°C erreicht werden können, eignen sich Stirling-Motoren zur Kühlung von Supraleitern, von Infrarotsensoren und zur Luft- oder Erdgasverflüssigung.

Das Konzept der Stirlingmaschinen ist noch lange nicht beendet. Gerade in der jetzigen Zeit, in der man immer mehr nach umweltschonenden und regenerativen Energiequellen sucht, stellt der Heißluftmotor ein erfolgversprechendes Konzept dar. Die Entwicklung neuer Werkstoffe und Verfahren ist so weit voran geschritten, dass die von Stirling vorhergesagte Ära bereits begonnen hat:

„It remains for some skilled and ambitious mechanist in a future age to repeat it under favourable circumstances and with complete success.“

Robert Stirling, 1876

VI Grundlagen

Wirkungsweise des Heißluftmotors

Es gibt unterschiedliche Typen von Stirlingmotoren. Wegen des einfachen Aufbaus wollen wir zunächst das Funktionsprinzip des Stirlingmotors anhand eines sogenannten γ -Typ Heißluftmotors diskutieren (Abbildung 3 oben). Dieser Motor besitzt zwei separate Zylinder, die durch ein Rohr miteinander verbunden sind. Beide Zylinder sind mit Luft gefüllt und nach außen abgedichtet. Um den Wirkungsgrad zu erhöhen, werden bei industriell gefertigten Motoren statt Luft auch Edelgase oder Wasserstoff als Arbeitsgas verwendet. Wir werden später noch darauf zurückkommen.

Betrachten wir zunächst den linken Zylinder (Abbildung 3 unten) des Heißluftmotors. Der untere Bereich wird von außen beheizt, der obere gekühlt. Bei den im Praktikum verwendeten Motoren erfolgt die Heizung elektrisch mit einer Heizwendel und die Kühlung durch eine Wasserkühlung. Im Zylinder befindet sich der sogenannte **Verdrängerkolben** der ungefähr die Hälfte des Zylindervolumen einnimmt. Seine Aufgabe besteht darin, das Arbeitsgas zwischen dem heißen und dem kalten Bereich des Zylinders hin und her zu bewegen. Befindet

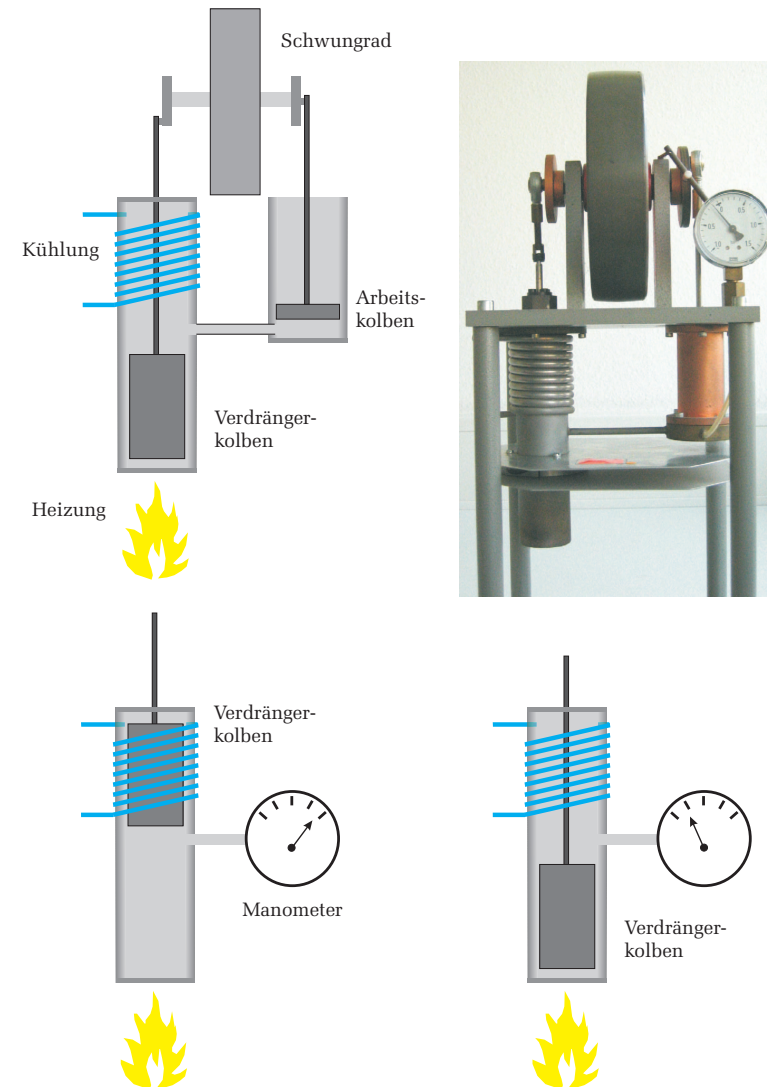


Abbildung 3: Oben: Aufbau eines γ -Typ Stirlingmotors. Unten: Wirkungsweise des Verdrängers.

sich der Verdrängerkolben im oberen Bereich, so hat er die Luft in den unteren, beheizten Bereich des Zylinders verdrängt. Umgekehrt wurde die Luft in den kalten Bereich des Zylinders verdrängt, wenn sich der Verdrängerkolben im unteren Teil des Zylinders befindet. Beachten Sie, dass der Verdrängerkolben das Arbeitsgas nicht komprimiert, sondern es nur zwischen den beiden Wärmereervoirs hin und her schiebt. Je nach Stellung des Verdrängers, wird das Gas einmal aufgeheizt und im anderen Fall abgekühlt. Befindet sich das Gas im geheizten Bereich, so steigt auch der Druck im Zylinder. Hat dagegen der Verdränger die Luft in den kalten Bereich verschoben, so kühlt sich die Luft ab und der Druck sinkt. Dieser „Heizzylinder“ ist nun mit einem weiteren Zylinder, dem Arbeitszylinder, über ein Rohr verbunden (Abbildung 3 oben). In ihm erfolgt die eigentliche Kompression und Expansion des Gases durch den sogenannten **Arbeitskolben**. Verdrängerkolben und Arbeitskolben werden durch eine gemeinsame Kurbelwelle gesteuert. Die Kolben sind so angeordnet, dass eine Kompression des Gases dann erfolgt, wenn sich die Luft im kalten Bereich des Heizzylinders, und damit über das Rohr auch im Arbeitszylinder, befindet. Das Arbeitsgas wird demnach bei einem geringen Druck komprimiert. Nach der Kompression verdrängt der Verdrängerkolben die Luft in den heißen Bereich, der Druck steigt, das Arbeitsgas expandiert und verschiebt den Arbeitskolben, so dass nach außen mechanische Arbeit verrichtet wird. Danach wird die Luft wieder abgekühlt und einen Teil der zuvor freigewordenen Arbeit dazu verwendet, dass Gas erneut zu komprimieren. Der Kreisprozess beginnt von vorne.

Im Gegensatz zu dem γ -Typ Heißluftmotor besitzt der β -Typ Stirlingmotor (Abbildung 4) nur einen Zylinder, in dem sowohl Arbeitskolben als auch Verdrängungskolben gemeinsam angeordnet sind. Das Funktionsprinzip entspricht dem des γ -Typ Heißluftmotors, mit dem Unterschied, dass der Gaswechsel von heiß nach kalt im Kompressionsraum nicht durch ein Rohr, sondern in einem gemeinsamen Zylinder erfolgt. Dadurch verringert sich das Totvolumen und der Wirkungsgrad steigt. Im Praktikumsversuch werden wir quantitative Messungen nur am β -Typ Stirlingmotor durchführen. Ein γ -Typ Motor steht zu Demonstrationszwecken zur Verfügung.

Abbildung 5 links zeigt den Stirling- Prozess im pV- Diagramm; rechts daneben die entsprechenden Stellungen des Arbeits- und Verdrängerkolbens. Beim idealen Stirling- Prozess werden vier Zustandsänderungen durchlaufen:

- 1 \rightarrow 2 Isotherme Expansion: In Stellung 1 befindet sich der Verdrängungskolben ganz unten (unterer Totpunkt). Die Luft befindet sich im **heißen** Zylinderbereich und wird aufgeheizt. Bei der isothermen Expansion nimmt das Arbeitsgas die Wärmemenge Q_1 auf, dehnt sich dabei aus und

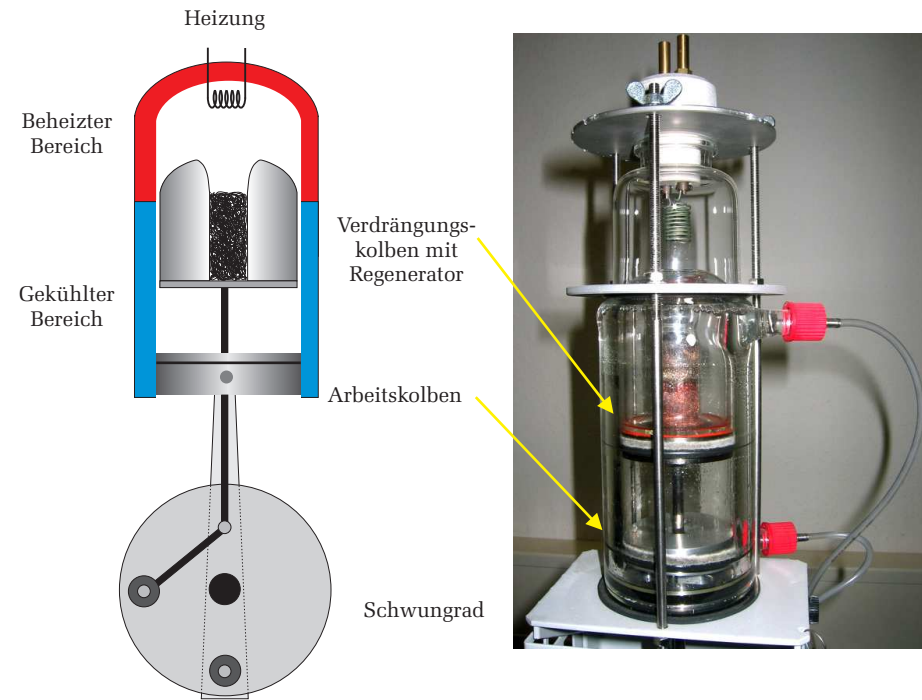


Abbildung 4: Aufbau eines β -Typ Stirlingmotors.

verschiebt den Arbeitskolben gegen den Atmosphärendruck nach unten, wobei vom Gas die Arbeit W_1 geleistet wird.

- 2 \rightarrow 3 Isochore Abkühlung: Der Verdrängungskolben bewegt sich nach oben und verdrängt das Arbeitsgas in den gekühlten Bereich. Das Gas wird auf die Temperatur T_2 abgekühlt und gibt dabei die Wärmemenge Q_2 an das Kühlsystem ab.
- 3 \rightarrow 4 Isotherme Kompression: Der Arbeitskolben bewegt sich nach oben und komprimiert die **kalte** Luft. Dabei wird vom Kolben die Arbeit W_3 verrichtet. Die bei der Kompression freiwerdende Wärmemenge Q_3 wird an das Kühlsystem abgeführt.
- 4 \rightarrow 1 Isochore Erwärmung: Der Verdrängerkolben bewegt sich nach unten

und schiebt das Arbeitsgas in den heißen Bereich zurück. Durch Aufnahme der Wärmemenge Q_4 steigt die Temperatur wieder auf den Anfangswert T_1 .

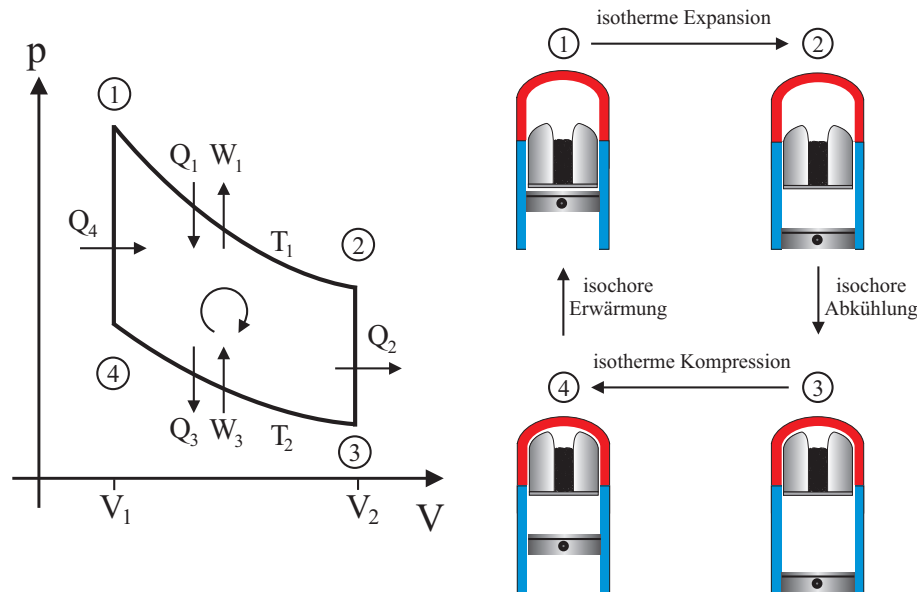


Abbildung 5: Links: pV -Diagramm des idealen Stirling Prozesses. Rechts: Korrespondierende Stellungen des Arbeits- und Verdrängungskolbens bei einem β -Typ Heißluftmotor.

Der ideale Stirling Prozess lässt sich technisch nicht realisieren. Eine isochore Zustandsänderung setzt eine diskontinuierliche Kolbenbewegung voraus. Bei den Zustandsänderungen $2 \rightarrow 3$ und $4 \rightarrow 1$ müsste der Arbeitskolben im Stillstand verharren und nur der Verdrängerkolben bewegt werden. Zudem müssten die Isothermen sehr langsam durchlaufen werden, so dass ein hinreichender Wärmeaustausch mit dem Heiz- bzw. Kühlsystem gewährleistet ist. Solch eine Maschine könnte nur diskontinuierlich mit geringer Drehzahl arbeiten, womit ein äußerst unruhiger Lauf und sehr hohe mechanische Belastungen verbunden wären.

Bei dem im Praktikum verwendeten Motor sind sowohl Arbeits- als auch Verdrängerkolben über das Schwungrad direkt an die Kurbelwelle angekoppelt

(Abbildung 4). Beide Kolben weisen somit eine annähernd sinusförmige Bewegung auf, wodurch ein ruhiger, belastungsarmer Lauf möglich ist. Zudem sind Arbeits- und Verdrängungskolben um 90° phasenverschoben angeordnet, so dass der ideale Stirling- Prozess einigermaßen gut angenähert werden kann (Abbildung 6 links). Der Nachteil bei diesem kontinuierlich laufenden Kurbeltrieb liegt darin, dass der Kreisprozess nicht in vier diskreten Zustandsänderungen durchlaufen wird, sondern dass es zu einer Überlappung der einzelnen Takte kommt. So findet beispielsweise bei der Expansion im Arbeitstakt $1 \rightarrow 2$ auch gleichzeitig ein vorzeitiger Gasaustausch vom heißen in den kalten Bereich statt und zu Beginn des Kompressionstaktes $3 \rightarrow 4$ befindet sich noch nicht die gesamte Luft im gekühlten Teil des Motors. Diese Überlappungen führen zu einer Reduzierung des Wirkungsgrads gegenüber dem idealen Stirling- Prozess. Das pV -Diagramm eines realen Heißluftmotors zeigt daher deutliche Abweichungen vom idealen Stirling- Prozess (Abbildung 6 rechts). Die starken Abrundungen im Bereich der Isochoren gegenüber dem idealen Prozess sind auf die kontinuierliche Bewegung des Kolbens und die Trägheit der Wärmeleitung zurückzuführen.

Funktion des Regenerators

Durch den Einsatz eines Regenerators kann die Effizienz des Heißluftmotors erheblich gesteigert werden. Um dies zu verstehen, blicken wir nochmals auf die Funktion des Verdrängungskolbens zurück. Der Verdrängungskolben hat die Aufgabe das Arbeitsgas periodisch zwischen dem geheizten und dem gekühlten Bereich zu bewegen. Im Takt $2 \rightarrow 3$ der isochoren Abkühlung bewegt sich der Verdrängerkolben nach oben und schiebt das Arbeitsgas in den gekühlten Bereich.

Beim „Gasaustausch“ ist es zum einen wichtig, dass die Temperaturänderung des Arbeitsgases möglichst rasch erfolgt und zum anderen, dass die von außen zugeführte Wärme dem System nicht völlig verlorenght. Beides wird mit dem Regenerator erreicht, der als Kurzzeitzwärmespeicher wirkt. Der Verdrängungskolben besitzt in axialer Richtung eine Öffnung, die mit Kupferwolle gefüllt ist. Bewegt sich der Verdränger nach oben, so strömt die heiße Luft durch den Regenerator und gibt dabei einen Großteil der Wärme an die Kupferwolle ab. Diese Wärme wird im Regenerator gespeichert, so dass das Arbeitsgas auf dem Rückweg $4 \rightarrow 1$ vom kalten in den heißen Bereich, sich einen Großteil der zuvor abgegebenen Wärme aus der Kupferwolle zurückholen kann. Diese Wärmemenge wird demnach nicht an das Kühlsystem abgeführt, sondern

Position

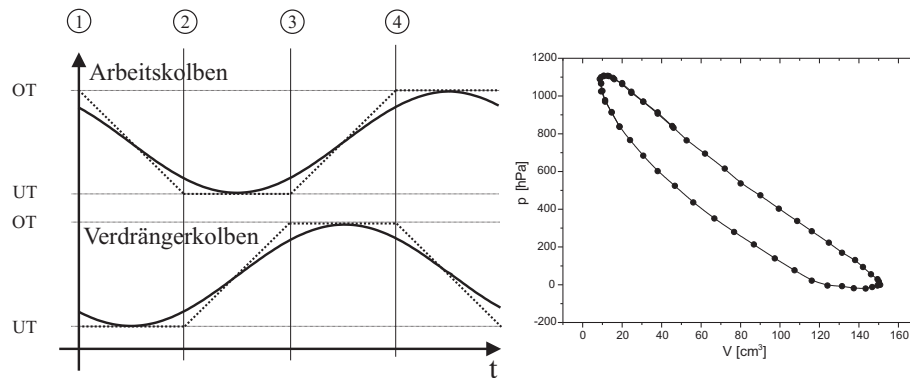


Abbildung 6: Links: Kurbelwellendiagramm eines Heißluftmotors. Die gepunktete Kurve verdeutlicht die diskontinuierliche Kolbenbewegung des idealen Stirling-Prozesses, die durchgezogene Linie die kontinuierlich laufende Bewegung bei einem Kurbeltrieb. Die Bezeichnungen OT/UT an der Ordinate kennzeichnen den oberen bzw. unteren Totpunkt, d.h. die Umkehrpunkte der jeweiligen Kolbenbewegungen. Rechts: Gemessenes pV -Diagramm des im Praktikum eingesetzten Heißluftmotors. Die von der Kurve eingeschlossene Fläche entspricht der pro Zyklus in mechanische Arbeit überführten Wärmeenergie.

bleibt innerhalb des Kreisprozesses erhalten. Mit einem idealen Regenerator erreicht der Wirkungsgrad des Stirling-Motors den maximal möglichen Wirkungsgrad einer periodisch arbeitenden Wärmekraftmaschine! Wir werden bei der Berechnung des Wirkungsgrades noch darauf zurückkommen.

Thermodynamische Beschreibung des Stirling-Prozesses

Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik führt die einem System zugeführte Wärmemenge dQ zu einer Änderung der inneren Energie dU sowie zur Verrichtung einer Volumenarbeit pdV :

$$dQ = dU + pdV \quad (1)$$

Bei einem idealen Gas beschreibt die innere Energie allein die Bewegungsenergie der Gasmoleküle. Eine Erhöhung der inneren Energie führt somit zu einem Temperaturanstieg. Mit Hilfe der molaren Wärmekapazität C_V ergibt sich

$$dQ = C_V \nu dT + pdV, \quad (2)$$

wobei ν die Gasmenge in mol bezeichnet.

Beim Stirling'schen Kreisprozess werden, wie in Abbildung 5 dargestellt, vier Zustandsänderungen durchlaufen. Wir wollen im Folgenden für jeden Takt die Energiebilanz (2) aufstellen und daraus den Wirkungsgrad des idealen Stirling-Prozesses berechnen:

1. Bei der isothermen Expansion wird dem Heizsystem die Wärmemenge Q_1 entzogen. Da die Temperatur konstant bleibt, wird diese Wärmemenge vollständig in mechanische Volumenarbeit umgewandelt.

$$dQ_1 = pdV. \quad (3)$$

Mit Hilfe der Zustandsgleichung des idealen Gases

$$pV = \nu RT, \quad (4)$$

wobei R die ideale Gaskonstante darstellt, ergibt sich für (3)

$$dQ_1 = pdV = \nu RT_1 \frac{dV}{V}. \quad (5)$$

Durch Integration von V_1 bis V_2 (siehe Abbildung 5) ergibt sich schließlich für die Wärmemenge Q_1

$$Q_1 = \nu RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (6)$$

Da bei der isothermen Zustandsänderung die zugeführte Wärmemenge vollständig in Volumenarbeit W umgewandelt wird, gilt für die bei diesem Motortakt geleistete Arbeit

$$W_1 = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (7)$$

2. Bei der isochoren Abkühlung wird wegen $dV = 0$ keine Volumenarbeit geleistet. Temperaturänderungen wirken sich daher nur auf die innere Energie aus:

$$dQ_2 = -C_V \nu dT. \quad (8)$$

Durch Integration ergibt sich

$$Q_2 = -C_V \nu \int_{T_1}^{T_2} dT = -C_V \nu (T_1 - T_2), \quad (9)$$

wobei dieser Ausdruck negativ ist, da Wärme nach außen abgeführt wird.² Die mechanische Arbeit W_2 ist bei diesem Motortakt Null:

$$W_2 = 0. \quad (10)$$

3. Bei der isothermen Kompression gelten die gleichen Überlegungen wie bei der isothermen Expansion. Zu berücksichtigen ist lediglich, dass die Kompression bei diesem Motortakt bei der Temperatur T_2 erfolgt und die Richtung der Integration über das Volumen entgegengesetzt, von V_2 nach V_1 verläuft. Für die nach außen abgeführte Wärmemenge ergibt sich:

$$Q_3 = -\nu RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (11)$$

und für die Volumenarbeit

$$W_3 = -\nu RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (12)$$

4. Auch hier gelten die gleichen Überlegungen wie unter 2. Die vom Gas aufgenommene Wärmemenge Q_4 beträgt

$$Q_4 = C_V \nu (T_1 - T_2) \quad (13)$$

und es wird keine mechanische Arbeit verrichtet.

$$W_4 = 0 \quad (14)$$

Die vom Heißluftmotor geleistete Nutzarbeit W_N ergibt sich aus dem Kurvenintegral über den gesamten Kreisprozess.

$$W_N = \oint p dV \quad (15)$$

²Vorzeichenkonvention: Negative Vorzeichen treten bei Termen auf bei denen Wärme nach außen abgeführt wird oder wenn dem Gas von außen Arbeit zugeführt wird (Kompression). Leistet das Gas nach außen Arbeit oder wird Wärme zugeführt, sind die entsprechenden Terme positiv.

Da nur beim Durchlaufen der Isothermen Arbeit geleistet wird, ist die Nutzarbeit gerade die Summe der Teilarbeiten in den Takten $1 \rightarrow 2$ und $3 \rightarrow 4$:

$$\begin{aligned} W_N &= W_1 + W_3 = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \nu RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} \\ W_N &= \nu R (T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1} \end{aligned} \quad (16)$$

Die Nutzarbeit ist demnach umso größer, je größer die Temperaturdifferenz und je größer das Kompressionsverhältnis V_2/V_1 ist.

Der ideale thermische Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine ist definiert durch das Verhältnis der Nettoarbeit W_N zur aufgenommenen Wärmemenge Q^+

$$\eta_{th} = \frac{W_N}{Q^+}. \quad (17)$$

Betrachten wir zunächst einen Heißluftmotor **ohne Regenerator** und berechnen zur Bestimmung des thermischen Wirkungsgrads die aufgenommene Wärmemenge Q^+ . Im Takt $2 \rightarrow 3$ wird das Arbeitsgas isochor abgekühlt und die Wärme dem Kühlwassersystem zugeführt. Diese Abwärme geht ohne Regenerator dem System verloren, so dass bei der isochoren Erwärmung im Zyklus $4 \rightarrow 1$ die benötigte Wärme erneut aus dem Heizsystem entnommen werden muss. Die während des Kreisprozesses insgesamt aufgenommene Wärmemenge Q^+ setzt sich somit aus zwei Beiträgen zusammen, nämlich aus den zugeführten Wärmemengen bei der isothermen Expansion und der isochoren Erwärmung:

$$Q^+ = Q_1 + Q_4 = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + C_V \nu (T_1 - T_2). \quad (18)$$

Zusammen mit Gleichung (16) erhalten wir nach einigen Umformungen für den thermischen Wirkungsgrad

$$\eta_{th} = \frac{W_N}{Q^+} = \frac{\ln \frac{V_2}{V_1} (1 - \frac{T_2}{T_1})}{\ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{C_V}{R} (1 - \frac{T_2}{T_1})}. \quad (19)$$

Wie man dieser Gleichung entnehmen kann, hängt der Wirkungsgrad von der Temperaturdifferenz, vom Kompressionsverhältnis aber auch von der **Art des verwendeten Gases** ab. Im Nenner steht das Verhältnis der molaren Wärmekapazität und der Gaskonstante. Nach dem Äquipartitionsprinzip entspricht dieses Verhältnis gerade der halben Anzahl der Freiheitsgrade der Gasmoleküle.

Um einen hohen Wirkungsgrad zu erzielen, werden daher bei industriell gefertigten Motoren, häufig Edelgase als Arbeitsmedium eingesetzt. Diese haben als einatomige Gase nur drei Freiheitsgrade und besitzen daher die kleinsten molaren Wärmekapazitäten.

Durch die Verwendung eines Regenerators kann der Wirkungsgrad des Heißluftmotors deutlich gesteigert werden. Mit diesem wird die Abwärme der isochoren Abkühlung im Takt $2 \rightarrow 3$ nicht an das Kühlwasser abgeführt, sondern im Regenerator (Kupferwolle) gespeichert. Ein idealer Regenerator kann die gesamte Wärme zwischenspeichern und bei der isochoren Erwärmung im Zyklus $4 \rightarrow 1$ dem Arbeitsgas wieder zuführen. Somit bleibt dieser Wärmebeitrag im System erhalten. Die einzige äußere Wärmezufuhr erfolgt dann nur bei der isothermen Expansion, so dass für die insgesamt aufgenommene Wärmemenge Q^+ gilt:

$$Q^+ = Q_1 = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (20)$$

Mit Gleichung (16) erhält man für den thermischen Wirkungsgrad η_{th}^R des Stirling- Prozesses mit einem idealen Regenerator

$$\eta_{th}^R = \frac{W_N}{Q^+} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (21)$$

Somit erreicht der Stirling- Prozess den gleichen Wirkungsgrad wie der Carnot-Prozess und damit den maximal möglichen Wirkungsgrad, die eine periodisch arbeitende Wärmekraftmaschine überhaupt erreichen kann.

Betrieb des Heißluftmotors als Wärmepumpe und Kältemaschine

Der Stirling'sche Kreisprozess ist einer der wenigen Kreisprozesse, der umkehrbar ist. Wird das Schwungrad des Motors von außen angetrieben, so kann dieser auch als Kältemaschine oder Wärmepumpe betrieben werden.

Bei einem äußeren Antrieb wird der **Kreisprozeß** im pV- Diagramm in umgekehrter Richtung, d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen³. In diesem Fall kehren sich die Richtungen aller Energieströme um. Beim Betrieb als Kältemaschine wird dem zu kühlenden Bereich die Wärmemenge Q_2 entzogen und dem Wärmereservoir die Wärmemenge $Q_1 = W + Q_2$ zugeführt (Abbildung 7). W bezeichnet dabei die von außen zugeführte mechanische Arbeit. Der im Praktikum verwendete Motor arbeitet als Kältemaschine, wenn er im Uhrzeigersinn

³Der Drehsinn bezieht sich hier auf das Durchlaufen des Prozesses im pV-Diagramm und hat nichts mit der Drehrichtung der Kurbelwelle zu tun!

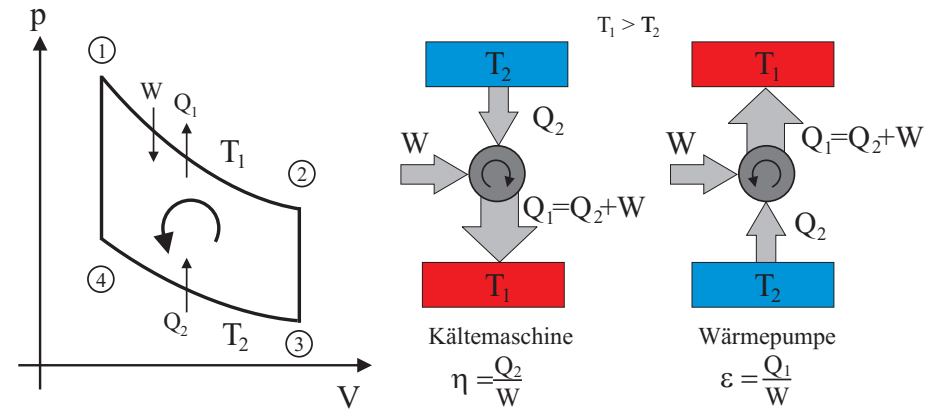


Abbildung 7: Links: Beim Betrieb des Heißluftmotors als Kältemaschine oder Wärmepumpe wird das pV- Diagramm links herum durchlaufen. Rechts: Energiebilanz von Kältemaschine und Wärmepumpe.

von außen angetrieben wird. Dabei sinkt die Temperatur im oberen Raum und die Kühlwassertemperatur steigt. Wird der Motor entgegen dem Uhrzeigersinn betrieben, so arbeitet er als Wärmepumpe. Dabei sinkt die Temperatur des Kühlwassers und der obere Bereich des Motors wird aufgeheizt.

Der Wirkungsgrad einer Kältemaschine lässt sich durch das Verhältnis der der kalten Seite entzogenen Wärmemenge Q_2 zur zugeführten mechanischen Arbeit W definieren:

$$\eta = \frac{Q_2}{W} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \quad (22)$$

Die Effizienz einer Wärmepumpe wird durch die sogenannte Leistungsziffer ϵ charakterisiert:

$$\epsilon = \frac{Q_1}{W}. \quad (23)$$

Die Berechnung dieses Ausdrucks lässt sich analog wie bei der Wärmekraftmaschine durchführen, sie hängt nur von den Temperaturen der beiden Wärmereservoirs ab:

$$\epsilon = \frac{T_1}{T_1 - T_2} > 1 \quad ! \quad (24)$$

VII Durchführung des Versuchs

Sicherheitshinweise:

- Lassen Sie den Heißluftmotor niemals unbeaufsichtigt laufen.
- Der beheizte Bereich des Motors wird sehr heiß. Achten Sie beim Umgang mit dem Motor, dass Sie diese Bereiche nicht berühren.
- Verwenden Sie bei allen Strom- und Spannungsmessungen ausschließlich die vollisolierten Sicherheits- Messleitungen.
- Der Motor darf nur bei eingeschalteter Wasserkühlung betrieben werden.
- Die Heizwendel des Keramik-Zylinderkopfs darf nur bei laufendem Motor bis zur Gelbglut erhitzt werden. Im Fall eines Stillstandes, werfen Sie den Motor rasch wieder an oder schalten Sie das Netzteil aus.
- Der Heizstrom des Teflon-Zylinderkopf darf 6 A nicht übersteigen (Anzeige am Amperemeter maximal 1,2 A).
- Der Betrieb des Motors als Wärmepumpe oder Kältemaschine darf nur bei montierter Riemenabdeckung erfolgen.
- Die Drehzahl soll nicht kleiner als $2,5 \text{ s}^{-1}$ und nicht größer als $7,0 \text{ s}^{-1}$ sein.

Aufbau des Heißluftmotors

Der im Praktikum eingesetzte Heißluftmotor besteht aus einem Glaszylinder, in dem sowohl Arbeits- als auch Verdrängerkolben vertikal angeordnet sind. Beide Kolben werden durch eine gemeinsame Kurbelwelle gesteuert, wobei der Verdrängerkolben dem Arbeitskolben um 90° vorausseilt. Der untere Teil des Zylinders ist doppelwandig und wird mit Kühlwasser versorgt. Die Temperatur des zufließenden als auch des abfließenden Wassers können mit Hilfe von Thermoelementen gemessen werden. Zusätzlich wird die Durchflussmenge mit einem elektronischen Durchflussmengenmessgerät angezeigt.

Der Heißluftmotor ist mit einem abnehmbaren Zylinderkopf ausgestattet. Beim Betrieb als Wärmekraftmaschine wird auf den Zylinder ein elektrisch beheizbarer Kopf montiert, der den oberen Bereich des Motors heizt. Die Heizleistung kann mit Hilfe eines externen Netzteils stufenlos eingestellt werden

(max. 300 W) und mit Hilfe von zwei Multimetern gemessen werden. Das Amperemeter ist nur für einen Dauerstrom von 10 A ausgelegt. Da im Betrieb höhere Ströme auftreten, ist vor dem Amperemeter ein Stromwandler geschaltet, der den Strom um das Fünffache reduziert. Der tatsächliche fließende Strom ist daher um einen Faktor fünf höher als das Amperemeter anzeigt. Beim Betrieb als Wärmepumpe bzw. Kältemaschine kann der geheizte Kopf durch einen anderen Zylinderkopf ausgetauscht werden. In diesem Kopf ist ein Reagenzglas montiert, das in den Motor hineinreicht. Das Reagenzglas wird mit Wasser gefüllt und die Temperatur des Wassers mit einem weiteren Thermometer gemessen. Der Antrieb für die Wärmepumpe/Kältemaschine erfolgt über einen Riemenantrieb des Schwungrades mittels eines Elektromotors. Achten Sie unbedingt darauf, dass alle rotierenden Teile und der Antriebsriemen durch die Riemenabdeckung geschützt sind. Die Leistung des Elektromotors kann durch ein separates Netzteil variiert werden und durch eine Strom- und Spannungsmessung bestimmt werden. Bei Aufbau A ist die Leistung am Netzteil angegeben.

Der Verdrängerkolben ist wie der Zylinder aus Glas gefertigt und auf einer wassergekühlten Aluminiumplatte montiert. Der Zu- und Abfluss des Kühlwassers erfolgt durch ein koaxiales Rohr in der Pleuelstange. Diese zusätzliche Kühlung erhöht die Effizienz des Wärmeaustauschs mit dem kalten Wärmereservoir. In axialer Richtung besitzt der Verdränger eine Öffnung, die mit Kupferwolle gefüllt ist und als Regenerator wirkt.

Zur Darstellung von pV-Diagrammen werden Druck und Volumen gemessen. Die Volumenmessung beruht auf der Messung der Auslenkung des Arbeitskolbens: An der Unterseite des Arbeitskolbens ist eine Schnur befestigt, die über eine Umlenkrolle und eine Reibscheibe ein Potentiometer antreibt. Somit wird die Bewegung des Kolbens in eine korrespondierende Drehung des Potentiometers übertragen. Die Druckmessung im Kompressionsraum erfolgt mit Hilfe eines elektronischen Drucksensors. Das Potentiometer und der Drucksensor werden mit einem Interface ausgelesen und mit Hilfe einer speziellen Software (Cassy) auf einem Computer dargestellt.

Inbetriebnahme der Wasserkühlung

Schalten Sie zunächst die Wasserkühlung ein: Damit beide Motoren gekühlt werden, müssen die Kugelhähne des jeweiligen Motors an der Wandinstallation geöffnet sein. Der Hahn **D** steuert den Kühlkreislauf des γ -Heißluftmotors und muss während der Versuchsdurchführung geschlossen bleiben. Kontrollieren

Sie den Wasserfluss mit Hilfe des Durchflussmessers. Durch zweimaliges Drücken der Taste **Funktion** und anschließend Drücken der Taste \leftarrow wird der Durchfluss in ml/min angezeigt. Die Durchflussmenge soll im Bereich von 200 ml/min bis 300 ml/min liegen.

Kontrollieren Sie, ob der Motor ausreichend geschmiert ist. Auf der Innenseite des Glaszylinders muss ein deutlicher Ölfilm sichtbar sein. Ist dies nicht der Fall, wenden Sie sich an den Assistenten.

Machen Sie sich **bevor** Sie mit der ersten Messung beginnen, mit der Bedienung der Software „CASSY Lab“ und „Thermolink“ vertraut.

1. Betrieb des Heißluftmotors als Kältemaschine und quantitative Bestimmung der Kälteleistung

Wird der Heißluftmotor als Kältemaschine betrieben, so wird dem oberen Teil des Zylinders pro Umlauf die Wärme Q_2 entzogen und dem Kühlkreislauf die Wärme Q_1 zugeführt. Da der Wärmefluss vom kälteren zum wärmeren Reservoir nicht selbstständig abläuft, muss dafür pro Umlauf die mechanische Arbeit W_M aufgewendet werden. Für die an das Kühlsystem abgegebene Wärme gilt im idealen Fall: $Q_1 = Q_2 + W_M$.

In diesem Versuchsteil sollen Sie Q_1 , Q_2 und W_M experimentell bestimmen und den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{Q_2}{W_M} \quad (25)$$

berechnen.

Die dem oberen Teil des Zylinders entzogene Wärme Q_2 wird durch eine Kompensationsmessung bestimmt. Mit Hilfe einer Heizwendel wird die Temperatur des Zylinderkopfes konstant gehalten. Dadurch wird die von der Kältemaschine abgeführte Wärme kompensiert: Die von der Heizung pro Umlauf zugeführte elektrische Arbeit W_H entspricht dann gerade der dem Zylinderkopf von der Kältemaschine entzogenen Wärme Q_2 :

$$Q_2 = W_H = \frac{U_H I_H}{f}, \quad (26)$$

wobei U_H und I_H die Heizspannung und den Heizstrom bezeichnen und f für die Motordrehzahl steht.

Die an das Kühlwasser abgegebene Wärme Q_1 wird mit Hilfe der kalorischen Zustandsgleichung

$$Q_1 = \frac{c_W \rho_W \Delta T \dot{V}}{f} \quad (27)$$

berechnet. Hierbei bezeichnet c_W und ρ die Wärmekapazität und Dichte von Wasser ($c_W = 4180 \text{ J/(kg K)}$), $\Delta T = T_{zu} - T_{ab}$ und \dot{V} die Temperaturdifferenz von Zu- und Ablauf und den Volumenstrom des Kühlwassers.

Die pro Umdrehung zugeführte mechanische Arbeit lässt sich durch eine Strom- und Spannungsmessung des elektrischen Antriebsmotors bestimmen:

$$W_M = \frac{U_M I_M}{f}. \quad (28)$$

Dabei ist zu beachten, dass auch der Elektromotor einen Wirkungsgrad kleiner als Eins besitzt. Sie sollten dies bei der Diskussion Ihrer Ergebnisse berücksichtigen.

Durchführung:

Montieren Sie den **Teflon-Zylinderkopf** mit der Heizwendel auf den Motor. Überprüfen Sie anschließend ob die Heizwendel nicht den Verdränger berührt und ziehen Sie gleichmäßig die Muttern an. Im Zylinderkopf ist ein Thermoelement eingebaut, mit dem die Temperatur im Zylinder gemessen werden kann. Verbinden Sie das Anschlusskabel des Thermoelements mit dem Digitalthermometer an der Medientafel (Anschluss T3). Schließen Sie den Heizkopf an das Netzteil und dieses mit den beiden Multimetern an der Medientafel an. **Verbinden Sie den Stromausgang mit dem Stromwandler und diesen mit dem 20 A Eingang des Amperemeters. Stellen Sie den Bereichsschalter auf 20 A AC. Spannungsbereich des Voltmeters: 20 V AC.**

Spannen Sie den Antriebsriemen über das Schwungrad des Motors und an der Seite des Elektromotors über die Riemenscheibe. **Anschließend ist die Riemenabdeckung zu montieren.**

Die Stromausgangsbuchsen des Motornetzteils müssen Sie an das analoge Dreheiseninstrument anschließen und die Spannungsbuchsen an das daneben liegende Multimeter. Schalten Sie den Computer ein und starten Sie das Programm „Thermolink“ zum Auslesen des Digitalthermometers. Zeichnen Sie die Temperaturen des Kühlwassers und die Temperatur im oberen Teil des Motors auf. Starten Sie nach einigen Minuten den Elektromotor: Schalten Sie den

Netzschalter auf der Rückseite ein und wählen Sie die gewünschte Drehrichtung (kalt, warm) auf der Frontseite aus. Drehen Sie dann den Einstellregler nach rechts auf maximale Drehzahl. Durch Betätigung des Hauptschalter auf der Frontseite startet der Motor.

Die Temperatur im oberen Teil des Motors beginnt zu sinken. Versuchen Sie nun durch die elektrische Heizung die Temperatur wieder auf den ursprünglichen Wert einzustellen: Drehen Sie den Einstellregler am Heizungs- Netzteil auf Nullstellung und schalten Sie dann das Netzteil ein. Erhöhen Sie nun **langsam** die Heizleistung bis die Temperatur wieder auf den Anfangswert angestiegen ist.

Achtung:

**Der maximale Heizstrom darf 6 A nicht übersteigen!
Anzeige Amperemeter maximal 1,2 A!**

Der Temperaturanstieg erfolgt nicht spontan sondern mit einer Zeitverzögerung. Sie müssen daher nach jeder Leistungseinstellung abwarten bis sich die Temperatur stabilisiert hat und dann nachregeln. Auf keinen Fall darf die Heizleistung zu groß eingestellt werden !

Wenn Sie den ursprünglichen Temperaturwert wieder über einen längeren Zeitraum erreicht haben, protokollieren Sie die Heizleistung W_H und die Durchflussmenge \dot{V} des Kühlwassers (Mittelwerte bilden!). Die Temperaturdifferenz des Kühlwassers ist sofort aus der grafischen Aufzeichnung zu bestimmen.

Die von außen zugeführte mechanische Leistung W_M wird in der nächsten Aufgabe bestimmt.

2. Betrieb als Kältemaschine und Wärmepumpe

Bei dieser Teilaufgabe soll der Betrieb des Heißluftmotors als Kältemaschine und Wärmepumpe qualitativ untersucht werden. Durch Bestimmung der „Gefrierwärme“ von Wasser soll zusätzlich der Wirkungsgrad der Kältemaschine abgeschätzt werden.

Stecken Sie den **Zylinderkopf mit dem Reagenzglas** auf den Motor. Achten Sie darauf, dass der Kopf plan sitzt und das Reagenzglas nur so weit in den Verdrängerkolben eintaucht, dass es nicht vom Verdränger berührt wird. Um dies zu überprüfen, drehen Sie den Verdränger mit Hilfe des Schwungrades vorsichtig in den oberen Totpunkt. Wenn die Position in Ordnung ist, ziehen Sie die Zylinderkopfmuttern gleichmäßig an. Messen Sie mit der Pipette ungefähr 1 ml Wasser ab und füllen dieses in das Reagenzglas und stecken Sie zusätzlich

den Temperaturfühler mit hinein. Achten Sie darauf, dass das Thermometer möglichst zentrisch sitzt und nicht an den Rand des Reagenzglases stößt.

Verbinden Sie den Spannungsausgang des Motor- Netzteils mit dem Voltmeter an der Medientafel (Messbereich 200 V DC). An den Stromausgang schließen Sie das Weicheiseninstrument im 6 A Bereich an.

Starten Sie das Programm „Kältemaschine.lab“ sowie das Programm „Thermolink“ zum Auslesen des Digitalthermometers. Beginnen Sie mit der Aufzeichnung der Temperatur des Wassers im Reagenzglas und des Kühlwassers zunächst ohne dass der Motor läuft. Nach einigen Minuten können Sie dann den Motor starten.

Protokollieren Sie die Motorleistung durch eine Spannungs- und Strommessung. Lassen Sie den Motor als Kältemaschine mindestens 10 bis 15 Minuten laufen, bis die Temperatur deutlich unter 0°C gefallen ist und sich nicht mehr ändert. Stoppen Sie dann das Messprogramm (Motor nicht abschalten !) und drucken Sie den Temperaturverlauf aus. Gegebenenfalls sollten Sie interessante Kurvenverläufe vergrößert darstellen und separat ausdrucken. Drucken Sie ebenfalls den Temperaturverlauf des Kühlwassers aus. Bestimmen Sie anschließend die Drehzahl mit dem optischen Drehzahlmessgerät.

Betreiben Sie unmittelbar danach den Motor als Wärmepumpe. Starten Sie zunächst wieder die beiden Programme und anschließend den Motor. Schalten Sie den Drehrichtungsschalter auf „warm“. Messen Sie erneut den Temperaturgang des Wassers im Reagenzglas und den Temperaturverlauf des Kühlwassers.

3. Betrieb als Wärmekraftmaschine

In diesem Versuchsteil wird der Heißluftmotor als Wärmekraftmaschine betrieben. Der Motor wird mit Hilfe einer Heizwendel und unter Zuführung der elektrischen Energie Q_{el} von außen beheizt. Bei der Beheizung des Motors treten bereits Verluste auf, die dazu führen, dass ein Teil der zugeführten Wärme gar nicht in den Kreisprozess mit einfließen. Vor allem bei dem im Praktikum verwendeten Motor sind diese erheblich. Um Ihnen einen Einblick in das Funktionsprinzip des Motors zu geben, sind die wesentlichen Teile dieses Demonstrationsmotors aus Glas gefertigt. Dadurch treten sehr große Verluste bedingt durch Wärmeabstrahlung und Wärmeleitung auf. Bezeichnen wir diese Verluste durch Q_v , so wird effektiv nur die Wärme $Q_{el} - Q_v$ in den Kreisprozess von außen eingekoppelt. Ein Teil dieser Wärme wird von dem Motor in mechanische Energie W_{mech} umgewandelt. Diese kann zum einen durch Aufnahme des pV- Diagramms und Vermessung der eingeschlossenen

Fläche bestimmt werden und zum anderen durch eine Drehmomentmessung an der Motorachse. Neben der Umwandlung in mechanischer Energie, fließt ein großer Teil der zugeführten Wärme „ungenutzt“ in den Kühlkreislauf. Diese Abwärme wird im folgenden durch Q_{ab} bezeichnet. Desweiteren kommen Reibungsverluste Q_R durch Kolben und Lager hinzu. Die Energiebilanz des Heißluftmotors lässt sich somit wie folgt angeben:

$$Q_{el} = Q_v + W_{mech} + Q_{ab} + Q_R. \quad (29)$$

Experimentell können die Größen Q_{el} , W_{mech} und Q_{ab} unmittelbar bestimmt werden. Die Verluste Q_v und Q_R lassen sich allerdings nicht ohne größeren Aufwand messen. Diese sind durch eine Differenzmessung abzuschätzen. Bezeichnen wir die allgemeinen Verluste durch $Q_V = Q_v + Q_R$ so gilt nach (29):

$$Q_V = Q_v + Q_R = Q_{el} - Q_{ab} - W_{mech}. \quad (30)$$

Die pro Motorzyklus von außen zugeführte Wärme, wird aus der elektrischen Heizleistung und der Motordrehzahl f bestimmt:

$$Q_{el} = \frac{P_{el}}{f} = \frac{IU}{f}. \quad (31)$$

Die an das Kühlwasser abgegebene Wärme Q_{ab} wird wie bei Aufgabe 1 mit Hilfe der kalorischen Zustandsgleichung

$$Q_{ab} = \frac{c_W \rho_W \Delta T \dot{V}}{f} \quad (32)$$

berechnet.

Die mechanische Arbeit W_{mech} wird durch zwei Methoden bestimmt. Die Aufnahme des pV-Diagramms und Berechnung der Fläche erfolgt mit einem Computer. Hieraus lässt sich die Arbeit W_{pV} bestimmen.

Bei der zweiten Methode wird die abgegebene Arbeit W_D durch eine Drehmomentmessung an der Motorachse mit Hilfe eines Pronyschen Bremszaums bestimmt. Dieser besteht aus zwei hölzernen Bremsbacken, die an der Motorwelle montiert werden. Mit Hilfe zweier Schrauben kann eine variable Bremskraft auf die Welle ausgeübt werden. Zur Messung des Drehmomentes wird der Bremszaum in einen Kraftmesser eingehängt und so ausgerichtet, dass der Bremszaum waagrecht ausgerichtet ist und der Kraftmesser senkrecht dazu hängt. In diesem Fall gilt für das Drehmoment D :

$$D = lF, \quad (33)$$

wobei l die Länge des Bremszaums von der Motorachse bis zur Aufhängung des Kraftmessers ist und F die Kraft. Für die pro Motorzyklus abgegebene Arbeit W_D gilt somit:

$$W_D = 2\pi D, \quad (34)$$

bzw. für die Leistung

$$P_D = W_D f, \quad (35)$$

wobei f die Drehzahl des Motors ist.

Statt des Kraftmessers können Sie auch eine Waage benutzen. Dies hat den Vorteil, dass der Bremszaum nicht ausgerichtet werden muss. Allerdings „flackert“ die Anzeige etwas. Probieren Sie aus, welche Methode Ihnen lieber ist.

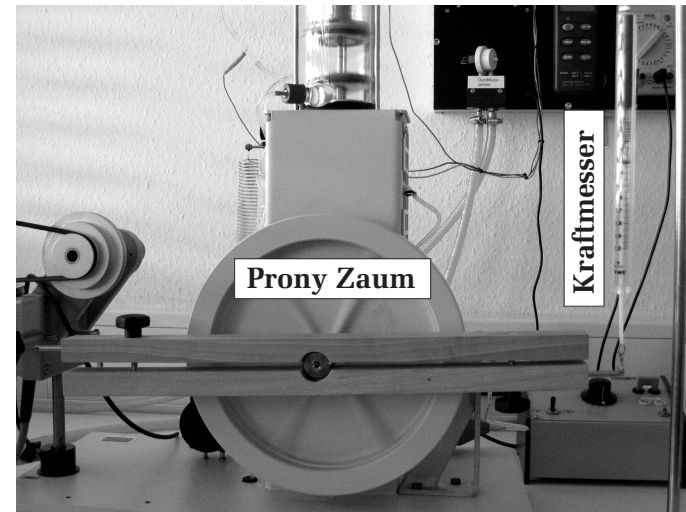


Abbildung 8: Bestimmung der mechanischen Arbeit durch eine Drehmomentmessung an der Motorwelle.

Durchführung:

Montieren Sie den **Keramik-Zylinderkopf** mit der Heizwendel auf den Motor. Schließen Sie den Heizkopf an das Netzteil und dieses mit den beiden Multimetern an der Medientafel an. **Verbinden Sie den Stromausgang über den Stromwandler mit dem 20 A Eingang des Multimeters und stellen Sie den Bereichsschalter auf 20 A AC. Spannungsbereich des Voltmeters: 20 V AC.**

Entfernen Sie die Riemenabdeckung und den Antriebsriemen. Positionieren Sie den Verdrängerkolben in den unteren Totpunkt und schalten Sie das Netzteil bei maximaler Leistungsabgabe ein. Lassen Sie die Heizwendel ungefähr fünf Sekunden vorglühen und werfen Sie dann das Schwungrad des Stirlingmotors im Uhrzeigersinn von Hand an. Vorsicht: Klemmen Sie nicht Ihre Finger ein! Wiederholen Sie die Anwerfversuche so lange, bis der Motor von selbst läuft. Sobald der Motor rund läuft, verringern Sie die Leistung, indem Sie einen Heizstrom reduzieren. Der Maximalstrom ist am Aufbau angegeben. In der Zeit, in der sich der Motor nun einläuft, kümmern Sie sich um die Bedienung der Software: Starten Sie das Programm „Heißluftmotor.lab“ auf dem Desktop und schauen Sie sich zum Kennenlernen der Software das Volumen bzw. den Druck als Funktion der Zeit an. Nehmen Sie ein pV-Diagramm auf und bestimmen Sie zur Übung die eingeschlossene Fläche. Zur Dokumentation des Funktionsprinzips des Heißluftmotors drucken Sie in einem gemeinsamen Diagramm ein p(t)- und V(t)- Diagramm aus.

Wenn der Motor eingelaufen ist, messen Sie den Heizstrom und die Heizspannung, den Kühlwasserdurchsatz und die Motordrehzahl. Die Temperaturen T_{zu} und T_{ab} können mit dem Programm Thermolink ausgelesen und grafisch ausgewertet werden. Die Motordrehzahl sowie die Fläche des pV-Diagramms ist mindestens dreimal zu messen.

Messen Sie anschließend die real abgegebene Arbeit W_D durch eine Drehmomentmessung. Lösen Sie die Schrauben des Prony- Zaums, so dass sich dieser leichtgängig auf die Achse des laufenden Motors schieben lässt. Hängen Sie den Federkraftmesser in den Bremszaum ein und ziehen Sie die Schrauben so an, dass eine Kraft von ungefähr 0,8 N wirkt. Durch Variierung der Höhe des Federkraftmessers wird der Prony- Zaum in der Horizontalen gehalten. Da es passieren kann, dass der Bremszaum von der Welle fällt, müssen Sie diesen mit einer Stange kontern. Lassen Sie den Motor nun einige Zeit einlaufen und korrigieren Sie die waagrechte Lage des Prony- Zaums nach. Protokollieren Sie die Drehzahl, die elektrische Leistung und die Fläche des pV- Diagramms und

messen Sie zusätzlich die Bremskraft. Die Motordrehzahl sowie die Fläche des pV-Diagramms sollte wieder mindestens dreimal gemessen werden. Wiederholen Sie diese Messungen für insgesamt vier verschiedene Bremskräfte (0,8 N bis 0,2 N in Schritten von 0,2 N).

Statt des Kraftmessers können Sie für die Drehmomentmessung auch die Waage verwenden. In diesem Fall müssen Sie auf die Metallstange am Ende des Bremszaums den Gummistopfen aufstecken und diesen zentrisch auf den Teller der Waage platzieren. Zusätzlich müssen Sie das Gewicht des Stopfens messen und dieses von Ihren Messwerten abziehen.

Achten Sie darauf, dass Sie den Motor nicht abwürgen. Im Fall eines Stillstandes werfen Sie den Motor rasch wieder an oder schalten das Netzteil aus!

VIII Auswertung

1. Betrieb als Kältemaschine

Berechnen Sie aus der Kompensationsmessung die Kälteleistung des Motors. Stellen Sie mit Hilfe der in Aufgabe 2 gemessenen Leistung des Elektromotors die Energiebilanz auf und diskutieren Sie gegebenenfalls die Diskrepanz.

2. Betrieb als Kältemaschine und Wärmepumpe

Interpretieren Sie den Temperaturverlauf des Wassers im Reagenzglas beim Betrieb des Motors als Kältemaschine und Wärmepumpe. Gehen Sie dabei auch auf den Temperaturverlauf des Kühlwassers ein. Schätzen Sie aus der Gefrierzeit des Wassers die Kälteleistung der Kältemaschine ab und vergleichen Sie diesen mit dem Wert, den Sie in Aufgabe 1 bestimmt haben (spezifische Schmelzwärme $\lambda_{H_2O}=335 \text{ J/g}$). Warum verläuft der Aufheizvorgang des Wassers viel schneller als der Abkühlvorgang?

3. Betrieb als Wärmekraftmaschine

Berechnen Sie aus den Messdaten der Leerlaufmessungen folgende Größen

f	P_{el}	Q_{el}	P_{ab}	Q_{ab}	P_{pV}	Q_{pV}	η_{th}
---	----------	----------	----------	----------	----------	----------	-------------

Der reale thermische Wirkungsgrad η_{th} berechnet sich aus dem Verhältnis der mechanischen Arbeit W_{pV} und der zugeführten Wärme Q_{el} .

Stellen Sie die Energiebilanz auf und berechnen Sie hieraus die Motorverluste Q_V . Diskutieren Sie die einzelnen Beiträge und überlegen Sie sich, wo die Ursachen für die hohen Verluste liegen könnten.

Bestimmen Sie aus den Drehmomentmessungen die mechanische Arbeit W_D und W_{pV} und berechnen Sie den thermische Wirkungsgrad η_{th} sowie den effektiven Wirkungsgrad $\eta_{eff} = W_D/Q_{el}$ (Die Länge des Bremszaums beträgt 25 cm). Tragen Sie η_{th} und η_{eff} als Funktion der Frequenz auf. Versuchen Sie den Kurvenverlauf zu interpretieren. Warum sind die beiden Wirkungsgrade nicht gleich groß?

IX Anhang

Bedienung der Software

Starten Sie das Programm „CASSY Lab“ bzw. die Makros „Heißluftmotor.lab“ oder „Kältemaschine.lab“ vom Desktop aus. Die Makros sind bereits vorkonfiguriert, so dass Sie nur noch die Messparameter einstellen müssen. Um in das Einstellungsmenu zu gelangen, drücken Sie die Taste „F5“ oder klicken Sie auf das Werkzeug-Symbol in der Menuleiste (Abbildung 9). Im Register Darstellung können Sie die Achsenbelegungen festlegen. Um ein pV-Diagramm aufzunehmen, wählen Sie für die x-Achse das Volumen und für die y-Achse den Druck. Sie können natürlich auch andere Darstellungen wie V(t) oder p(t) einstellen. Anschließend müssen Sie das Messintervall und die Anzahl der Messpunkte einstellen. Klicken Sie dazu auf die Schaltfläche „Messparameter anzeigen“. Es öffnet sich ein weiteres Fenster, in dem Sie die entsprechenden Parameter einstellen können. Bei der Aufnahme eines pV-Diagramms sollte der Messabstand 2 ms und die x-Anzahl 125 betragen. Läuft der Motor sehr langsam, so reicht diese Anzahl von Messpunkten nicht aus, ein geschlossenes pV-Diagramm darzustellen. Sie müssen in diesem Fall die Anzahl der Messpunkte erhöhen.

Um die Messung zu starten, drücken Sie entweder die Taste „F9“ oder klicken Sie auf das Uhr-Symbol. Der entsprechende Graph wird auf dem Bildschirm dargestellt. Durch einen Rechtsklick auf den Graph können Sie weitere Einstellungen vornehmen. Es erscheint ein Popup-Menu, das weitgehend selbst erklärend sein sollte. Ebenfalls können Sie durch einen rechten Klick auf die Koordinatenachsen den Wertebereich verändern.

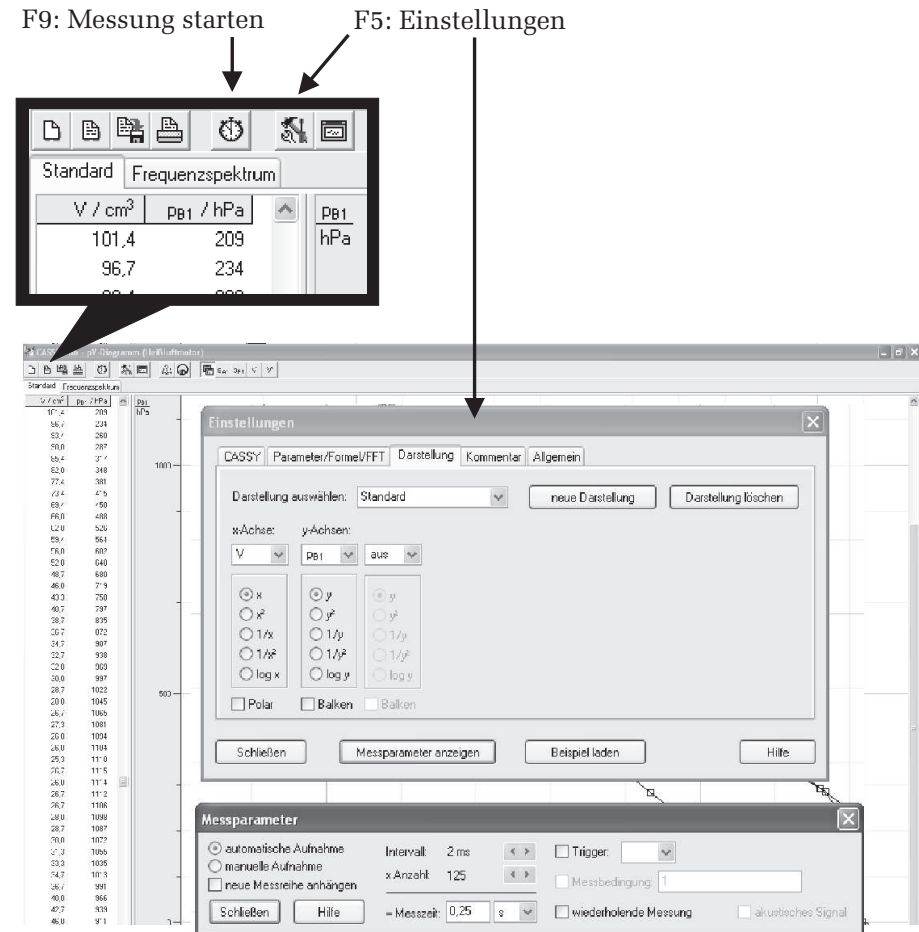


Abbildung 9: Einstellungsfenster der Software CASSY LAB.

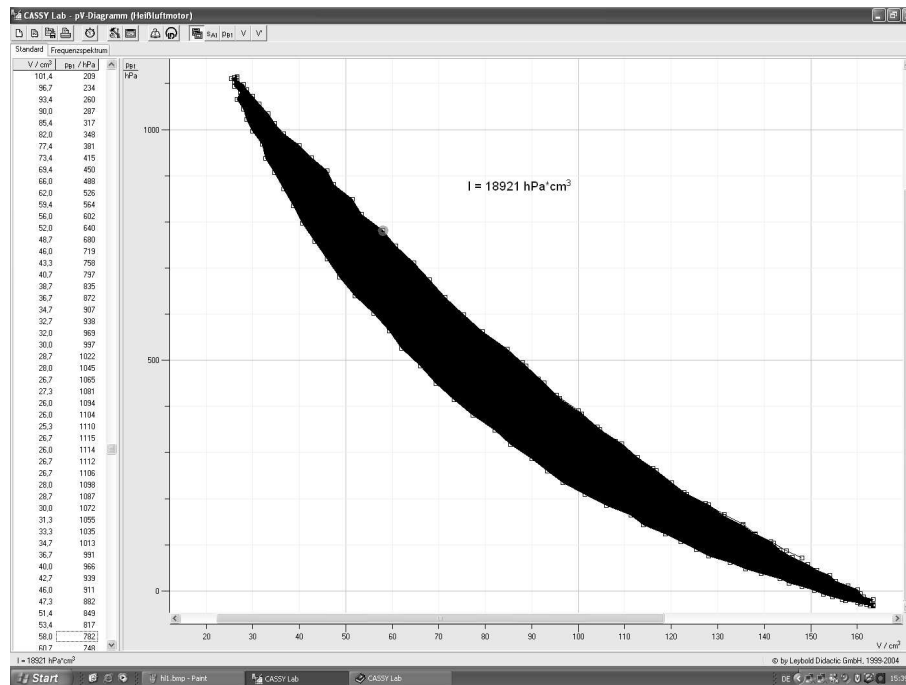


Abbildung 10: Bestimmung der mechanischen Arbeit durch die Fläche des pV-Diagramms.

Zur Bestimmung der Fläche des pV-Diagramms, klicken sie rechts auf das Diagramm und wählen Sie aus dem Menüpunkt „Integral berechnen“, die Option „Peakfläche“ aus. Suchen Sie im pV-Diagramm den Bereich bei dem ein Überlapp der Messpunkte zu Beginn und am Ende der Messung vorliegt. Fahren Sie mit dem Mauszeiger bei gedrückter linker Maustaste von außen nach innen über diesen Bereich. Der komplette Umfang der Kurve muss sich dabei verfärben. Nach dem Loslassen der Taste wird der Flächeninhalt in der linken unteren Ecke des Bildschirms angezeigt. Durch Drücken der Tastenkombination „ALT T“ können Sie den Flächeninhalt zusätzlich auf dem Diagramm platzieren.

Versuch 223

Messung der Boltzmannkonstante Teil I

Brownsche Bewegung



Abbildung 1: Versuchsaufbau.

I Messaufbau

- Durchlichtmikroskop Motoc B1 mit CCD-Kamera
- Kugelförmige Partikel suspendiert in Wasser

- PC mit Drucker
- Thermometer
- Objektmikrometer

II Literatur

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Demtröder, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Die Grundlagen zu den wichtigsten Wahrscheinlichkeitsverteilungen können Sie in der Versuchsbeschreibung des Versuchs 251: *Statistik des radioaktiven Zerfalls* nachlesen.
- Homepage des Praktikums
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Kinetische Theorie der Wärme, Brownsche Bewegung, Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Binomial- und Gauß-Verteilung. Verständnisfragen:

1. Was ist Wärme aus Sicht der kinetischen Theorie der Wärme? Was besagt der Gleichverteilungssatz? Wie hoch ist die thermische Geschwindigkeit eines Partikels der Masse 10^{-15} kg bei Zimmertemperatur?
2. Berechnen Sie das Produkt kT für Zimmertemperatur und geben Sie diesen in der Einheit eV an. Diesen Wert sollten Sie sich für die Zukunft unbedingt merken.
3. Was bezeichnet man als Brownsche Bewegung? Worin liegt die Ursache dieser Bewegung? Welche Größen haben Einfluss auf die Brownsche Bewegung?
4. Wie groß ist der zu erwartende Wert der mittleren Verschiebung bzw. der mittleren quadratischen Verschiebung eines Partikels.

5. Berechnen Sie die mittlere quadratische Verschiebung eines Partikels (Partikelradius $a=500$ nm) suspendiert in Wasser ($T=20^\circ\text{C}$) innerhalb eines Zeitraums von $t=1$ s. Die Viskosität von Wasser können Sie Abbildung 12 entnehmen.

IV Aufgaben

1. Präparieren Sie eine Mikroskopprobe einer Partikelsuspension.
2. Nehmen Sie jede Sekunde und mindestens 150 Mal das Mikroskopbild eines einzelnen Partikels auf.
3. Bestimmen Sie den Abbildungsmaßstab des Mikroskops mit einem Objektmikrometer.
4. Vermessen Sie die Position des Partikels anhand der aufgenommenen Bilder.
5. Berechnen Sie aus der mittleren quadratischen Verschiebung die Diffusionskonstante und die Boltzmannkonstante.

V Motivation

Mit Blütenpollen läßt sich die Existenz von Atomen und Molekülen beweisen

„Heute vor 100 Jahren, am 11. Mai 1905, reichte Albert Einstein bei den „Annalen der Physik“ eine wichtige Arbeit ein, in der er die sogenannte Brownsche Bewegung erklärte. Dem schottischen Botaniker Robert Brown war bereits im Jahr 1827 aufgefallen, daß Blütenpollen in einem Glas Wasser eine eigenartige Zickzackbewegung ausführen. Was war die Ursache dafür? Alle Versuche, diese Brownsche Bewegung zu erklären, scheiterten zunächst. Sie blieb jahrzehntelang geheimnisvoll. Erst Albert Einstein erkannte, daß die Bewegung der kleinen Teilchen in der Flüssigkeit durch ein fortwährendes Stoßen der Wassermoleküle verursacht wird. Dies war in jener Zeit tatsächlich noch ein gewichtiges Argument für die Existenz von Atomen und Molekülen, die im 19. Jahrhundert noch heftig umstritten gewesen ist. Und gleichzeitig paßte Einsteins Beschreibung zur molekularen Theorie der Wärme. Je wärmer beispielsweise Wasser ist, um so größer ist die mittlere Geschwindigkeit, mit

der die Wassermoleküle ungeordnet umherflitzen und damit Stöße verursachen können. So erklärt sich auch der Begriff Thermodynamik: Wärme ist eben etwas Dynamisches. Einstein schrieb damals an einen Freund, daß „unter der Voraussetzung der molekularen Theorie der Wärme in Flüssigkeiten suspendierte Körper von der Größenordnung 1/1000 Millimeter bereits eine wahrnehmbare ungeordnete Bewegung ausführen müssen, welche durch die Wärmebewegung erzeugt ist.“

Nahezu zeitgleich mit Albert Einstein lieferte auch der polnische Physiker Marian Smoluchowski eine korrekte Erklärung der Brownschen Bewegung. Es war dann allerdings der französische Physiker Jean-Baptiste Perrin der einige Jahre später die Brownsche Molekularbewegung experimentell mit hoher Genauigkeit bestätigte. Dafür wurde Perrin im Jahr 1926 mit dem Physik-Nobelpreis ausgezeichnet. ¹

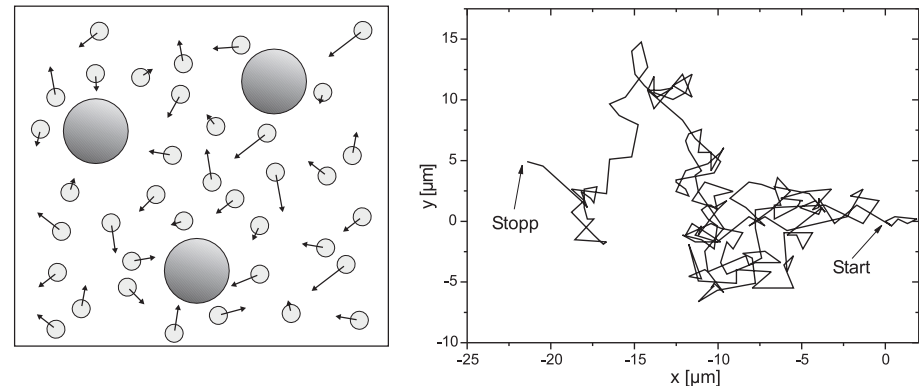


Abbildung 2: Links: Modell der Brownschen Bewegung. Die Moleküle des umgebenden Mediums stoßen aufgrund ihrer thermischen Energie mit den suspendierten Partikeln, wodurch sich diese auf völlig unregelmäßigen Bahnen bewegen. Rechts: Gemessene Bahn eines einzelnen Partikels.

In diesem Versuch werden Sie die Brownsche Bewegung von Partikeln suspendiert in Wasser mit einem Mikroskop beobachten und deren statistische Bewegung untersuchen (Abbildung 2). Durch Vermessen der Teilchenbahn und der

¹Norbert Lossau, Artikel vom 11. Mai 2005 in der Zeitung „Die Welt“

Berechnung der pro Zeiteinheit auftretenden mittleren Verschiebung, können Sie die Boltzmannkonstante bestimmen.

Eine genaue Bestimmung der Boltzmannkonstante mit Hilfe der Brownschen Bewegung ist nur bei der Beobachtung sehr vieler Einzelschritte möglich und daher im Praktikum aus Zeitgründen nicht möglich. Bei einer sorgfältigen Durchführung ist aber eine Genauigkeit von besser als 10 % möglich. Aus diesem Grund werden Sie in Teil II dieses Versuchs ein weiteres Experiment durchführen, mit dem Sie die Boltzmannkonstante weitaus genauer bestimmen können. Bei diesem Versuch messen Sie das thermische Rauschen eines ohmschen Widerstands. Dabei ist eine Genauigkeit von besser als 1 % möglich.

VI Grundlagen

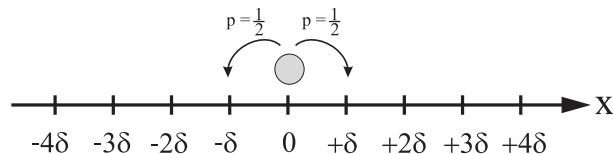


Abbildung 3: *Eindimensionaler Random-Walk. Bei jedem Stoß bewegt sich das Partikel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit entweder nach links oder nach rechts. Die Sprungweite δ soll bei allen Stößen gleich groß sein*

Die Brownsche Bewegung lässt sich mit Hilfe eines sogenannten Random-Walk Modell quantitativ beschreiben (Abbildung 3). Der Einfachheit halber wollen wir zunächst annehmen, dass sich ein Partikel nur in einer Dimension, der x-Richtung, bewegen kann. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Partikel an der Position $x = 0$. Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit berechnen, das Partikel nach der Zeit t im Intervall $[x, x + \Delta x]$ zu finden. Dazu gehen wir von folgenden Annahmen aus:

- Das Partikel erfährt alle τ -Sekunden einen Stoß. Innerhalb der Zeit t treten somit $n = t/\tau$ Stoßprozesse auf.
- Bei jedem Stoß wird das Partikel um die gleiche Distanz δ verschoben. Die Wahrscheinlichkeiten, dass sich das Partikel dabei um $+\delta$ nach rechts, bzw. um $-\delta$ nach links bewegt, sind gleich groß.

- Bei mehreren Partikeln hängt die Brownsche Bewegung eines einzelnen Partikels nicht von der Bewegung der anderen Partikel ab. Jedes Partikel bewegt sich völlig unabhängig von den anderen, auch dann, wenn sich zwei oder mehrere Partikel sehr nahe kommen.

Damit sich das Partikel nach n -Stößen an der Position $x = m\delta$ befindet, muss es insgesamt $(n+m)/2$ -mal in die positive x-Richtung gelaufen sein und $(n-m)/2$ -mal in die negative Richtung. Dabei ist zu beachten, dass m bei geradem n ebenfalls gerade sein muss und entsprechend bei ungeradem n , ungerade sein muss.

Beispiel: Befindet sich das Partikel nach $n = 10$ Stößen an der Position 6δ (d.h. $m = 6$), so ist es insgesamt $(n+m)/2 = 8$ -mal nach rechts gesprungen und $(n-m)/2 = 2$ -mal nach links. Nun gibt es aber verschiedene Möglichkeiten, wie das Partikel an die Position $x = m\delta$ gekommen ist. Es kann z.B. am Anfang zweimal nach links gesprungen sein und anschließend hintereinander 8 Mal nach rechts gelaufen sein. Insgesamt gibt es

$$\binom{n}{\frac{1}{2}(n+m)} = \frac{n!}{[\frac{1}{2}(n+m)]! [\frac{1}{2}(n-m)]!} \quad (1)$$

Möglichkeiten, welchen Weg das Partikel gelaufen sein könnte. Für unser Beispiel mit $n = 10$ und $m = 6$ ergeben sich 45 verschiedene Schrittfolgen.

Damit können wir nun die Wahrscheinlichkeit $P(m; n)$ angeben, mit welcher sich das Partikel nach n -Stößen an der Position $x = m\delta$ befindet. Diese ist gerade durch die Binomialverteilung² gegeben:

$$P(m; n) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+m)} p^{(n+m)/2} (1-p)^{(n-m)/2}, \quad (2)$$

wobei p die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Sprungs nach links bzw. nach rechts angibt. Da die Sprungwahrscheinlichkeiten in beiden Richtungen gleich groß sind, gilt $p = 1/2$ und somit

$$P(m; n) = \frac{n!}{[\frac{1}{2}(n+m)]! [\frac{1}{2}(n-m)]!} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (3)$$

In der Regel ist die Zeit τ zwischen zwei Stößen sehr klein, so dass $n = t/\tau$ bei einer Beobachtungszeit von typischerweise $t = 1$ s, eine sehr große Zahl darstellt. Für diesen Fall können wir $n!$ und $m!$ mit Hilfe der Stirlingschen Formel

²Siehe auch Versuch 251 „Statistik des radioaktiven Zerfalls“

$$n! = (2\pi n)^{1/2} n^n e^{-n} \quad (4)$$

nähern. Damit erhalten wir nach einigen Umformungen für die Wahrscheinlichkeit $P(m; n)$

$$P(m; n) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{m^2}{2n}}. \quad (5)$$

Wir wollen nun statt m und n , die leicht messbaren Größen x und t verwenden. Da m entweder gerade oder ungerade ist, gilt für Δm :

$$\Delta m = \pm 2 \quad (6)$$

und somit

$$P(m; n) \frac{\Delta x}{2\delta} = P(x; n) \Delta x \quad (7)$$

Substituieren wir $n = t/\tau$ sowie $m = x/\delta$ und definieren zusätzlich die Größe D :

$$D = \frac{\delta^2}{2\tau}, \quad (8)$$

so erhalten wir schließlich für die Wahrscheinlichkeit, ein Partikel nach der Zeit t innerhalb des Bereichs $[x, x + \Delta x]$ zu finden:

$$P(x; t) \Delta x = \frac{\Delta x}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \quad (9)$$

$P(x; t)$ in Gleichung (9) ist eine Gaußverteilung (Abbildung 4). Die allgemeine Form solch einer Verteilung lautet

$$G(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(\langle x \rangle - x)^2}{2\sigma^2}}, \quad (10)$$

wobei $\langle x \rangle$ den Mittelwert und σ^2 die Varianz, bzw. σ die Standardabweichung beschreiben.

Da die Verteilung (9) symmetrisch zu $x = 0$ ist, verschwindet die mittlere Verrückung $\langle x \rangle$:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x P(x; t) dx = 0. \quad (11)$$

Dies ist auch sofort einzusehen, da die Wahrscheinlichkeit, dass das Partikel bei einem Stoß entweder nach links oder nach rechts springt, gleich groß ist. Der

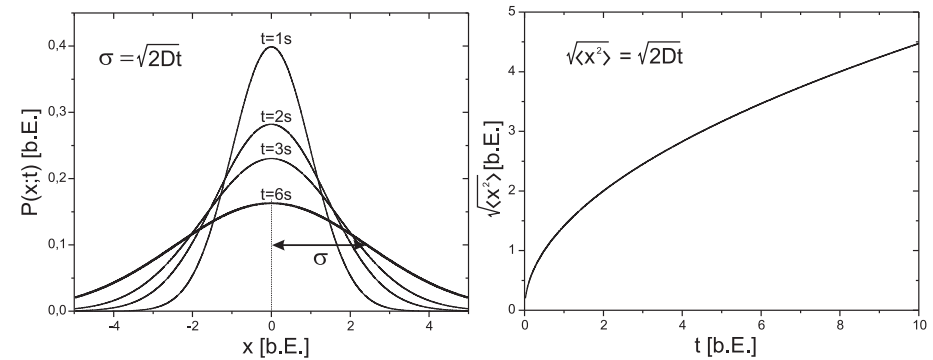


Abbildung 4: Links: Gaußverteilung mit dem Mittelwert $\langle x \rangle = 0$ und der Varianz $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle = 2Dt$. Da die Varianz zeitabhängig ist, wird die Verteilung mit zunehmender Zeit immer breiter. Rechts: Mittleres Verschiebungsquadrat $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$ als Funktion der Zeit.

verschwindende Mittelwert $\langle x \rangle$ ist daher nicht geeignet, die Brownsche Bewegung des Partikels zu beschreiben. Anders sieht es aus, wenn wir das mittlere Verschiebungsquadrat $\langle x^2 \rangle$ berechnen:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x; t) dx = 2Dt = \sigma^2. \quad (12)$$

Das mittlere Verschiebungsquadrat entspricht der Varianz $\sigma^2 = 2Dt$ und damit der Breite der Verteilung.

Damit können wir das wichtige Ergebnis unserer Untersuchung wie folgt formulieren:

Der mittlere Abstand ($\equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle}$) eines Partikels vom Ursprungsort, nimmt mit der Quadratwurzel der Zeit t zu:

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{2Dt} \quad \text{Einstein-Smoluchowski-Gleichung.} \quad (13)$$

Bisher haben wir die Brownsche Bewegung nur in einer Dimension untersucht. Unser Ergebnis lässt sich aber sehr einfach auf mehrere Dimensionen übertragen.

Findet die Brownsche Bewegung in zwei Dimensionen statt, so gilt für das mittlere Verschiebungsquadrat³ $\langle r^2 \rangle$:

$$\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle. \quad (14)$$

Da die Brownsche Bewegung isotrop ist, liefert jeder Summand den Beitrag $2Dt$ und somit

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{4Dt}, \quad (15)$$

bzw. im Dreidimensionalen:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{6Dt}. \quad (16)$$

Der Parameter D wird als Diffusionskoeffizient bezeichnet und ist ein Maß für die Beweglichkeit des Partikels im umgebenden Medium. Nach Einstein ist der Diffusionskoeffizient gegeben durch

$$D = \frac{kT}{f}, \quad (17)$$

wobei f den Reibungskoeffizienten, k die Boltzmannkonstante und T die Temperatur der Flüssigkeit darstellen. Für kugelförmige Partikel mit dem Radius a , die in einer Flüssigkeit der Viskosität η suspendiert sind, berechnet sich f nach dem Stokesschen Gesetz (siehe Versuch 212 - Zähigkeit von Flüssigkeiten):

$$f = 6\pi\eta a. \quad (18)$$

Damit folgt für den Diffusionskoeffizient nach Stokes-Einstein:

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a}. \quad (19)$$

Diese Beziehung verknüpft die makroskopischen Größen η , a und T mit den mikroskopischen Größen δ und τ in Gleichung (8). Einsetzen von (19) in Gleichung (15), liefert für das mittlere Verschiebungsquadrat kugelförmiger Partikel im Zweidimensionalen:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{4kT}{6\pi\eta a} t. \quad (20)$$

³Im mehrdimensionalen Fall schreiben wir für das mittlere Verschiebungsquadrat $\langle r^2 \rangle$ anstatt $\langle x^2 \rangle$.

Damit haben wir die Möglichkeit die Boltzmannkonstante experimentell zu bestimmen. Sind die Größen T , η und der Kugelradius a der Partikel bekannt, so kann durch Messung des mittleren Verschiebungsquadrats die Boltzmannkonstante berechnet werden:

$$k = \frac{6\pi\eta a}{4Tt} \langle r^2 \rangle. \quad (21)$$

VII Durchführung

Lesen Sie **bevor** Sie mit den Messungen beginnen, diesen Abschnitt vollständig durch! Eine Einführung in die Bedienung des Mikroskops und der Messprogramme, erhalten Sie durch den Versuchsbetreuer.

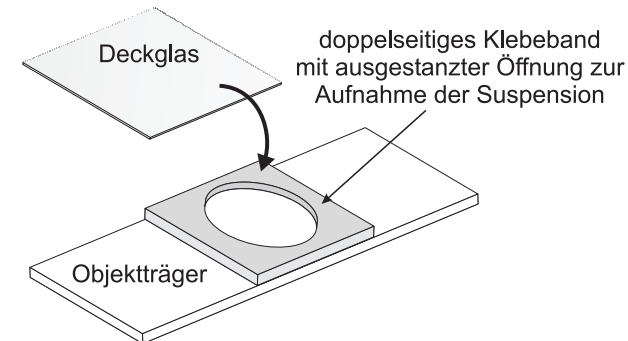


Abbildung 5: Skizze der Probenfassung. Die ausgestanzte Öffnung des doppelseitigen Klebebands wird mit der zu untersuchenden Suspension befüllt und anschließend mit dem Deckglas verschlossen.

1. **Probenpräparation:** Sie sollen die Brownsche Bewegung suspendierter Latex-Partikel in Wasser untersuchen. Um diese mit dem Mikroskop beobachten zu können, benötigen wir eine Probenfassung, die einerseits dick genug ist, so dass sich die suspendierten Partikel darin frei bewegen können, andererseits muss diese auch dünn genug sein, damit eine Fokussierung mit dem Mikroskop möglich ist. Um dies zu gewährleisten, werden Sie

zunächst eine Probenfassung gemäß Abbildung 5 anfertigen: Auf einen Objektträger wird ein doppelseitiges Klebeband aufgebracht, in dessen Mitte zuvor ein Loch ausgestanzt wurde. In diese Öffnung wird die Probenflüssigkeit eingefüllt und mit einem Deckglas verschlossen. Das doppelseitige Klebeband erfüllt dabei zwei Aufgaben: Zum einen vergrößert dieses das Probenvolumen, so dass sich die suspendierten Partikel frei bewegen können, zum anderen dient es zur Abdichtung der Flüssigkeit, wodurch ungewollte Strömungen durch Verdunstungsprozesse unterdrückt werden.

Fertigen Sie vor Versuchsbeginn stets eine neue Probe an! Schneiden Sie dazu ein Stück doppelseitiges Klebeband passend auf die Größe des Deckglases ($24\text{ mm} \times 32\text{ mm}$) zurecht und stanzen Sie mit dem Locheisen zentrisch ein Loch in das Klebeband (Holzunterlage verwenden!). Anschließend kleben Sie das Klebeband mittig auf den Objektträger und entfernen die Abdeckfolie. Schütteln Sie die Flasche mit der Probenflüssigkeit gut durch und pipettieren Sie $250\text{ }\mu\text{l}$ der Probenflüssigkeit in die ausgestanzte Öffnung des Klebebands. Werfen Sie die Pipettenspitze nach Gebrauch sofort in den Abfall. Der Durchmesser der Partikel ist auf der Flasche angegeben. Notieren Sie diesen Wert in Ihr Protokollheft. Legen Sie nun das Deckglas auf das doppelseitige Klebeband und drücken Sie es mit einem Papiertuch vorsichtig an. Dabei darf ruhig etwas von der Flüssigkeit herausfließen. Allerdings dürfen sich keine (größeren) Luftblasen in der Flüssigkeit bilden! Trocknen Sie die Probe mit einem Papiertuch ab und geben Sie auf die Mitte des Deckglases **einen Tropfen** Immersionsöl. Spannen Sie nun die Probe auf den Mikroskoptisch (Abbildung 6) ein. Am Objektivkranz des Mikroskops wählen Sie das Objektiv 100/1.25 oil (100-fache Vergrößerung, Numerische Apertur $NA=1,25$) aus.

Frage: Wozu wird das Immersionsöl benötigt?

Schalten Sie die Mikroskopbeleuchtung ein. Bewegen Sie nun den Mikroskoptisch **VORSICHTIG** mit Hilfe der Fokuseinstellung (*Grob-fokussierung* in Abbildung 6) soweit in Richtung des Objektivs, bis dieses **gerade** den Öltropfen berührt. Versuchen Sie nun durch **vorsichtiges** Scharfstellen mit Hilfe des Feinreglers, einzelne Partikel der Suspension zu beobachten. Die *xy*-Position der Probe können sie mit Hilfe der beiden *xy*-Einstellräder verstellen. Die Fokussierung ist bei der gewählten 1000-fachen Vergrößerung nicht ganz einfach. Sollten Sie hierbei

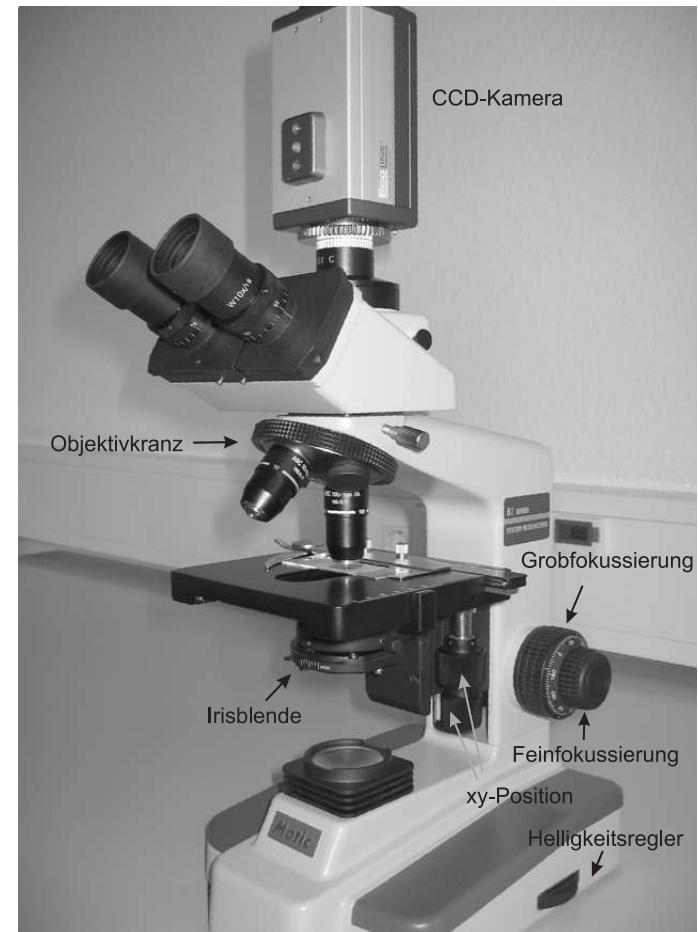


Abbildung 6: Bedienungselemente des Mikroskops.

Probleme haben, wenden Sie sich an den Versuchsbetreuer.

Achtung: Bei der Versuchsdurchführung können systematische Fehler auftreten, die unbedingt zu vermeiden sind:

- Überzeugen Sie sich, dass Sie wirklich nur ein einziges Partikel beobachten. Manchmal kann es vorkommen, dass zwei oder mehrere Partikel „zusammenkleben“. Dies lässt sich gut erkennen, indem man etwas den Fokus variiert.
- Auf keinen Fall dürfen Sie während der Messung die xy -Position des Objektisches verstellen. Auch Erschütterungen des Mikroskops müssen unbedingt vermieden werden.
- Beim Nachfokussieren dürfen Sie mit dem Objektiv auf keinen Fall das Deckglas ihrer Probe berühren. Der dadurch erzeugte Druck, würde die Partikel verdrängen und somit die eigentliche Brownsche Bewegung verfälschen. Sollten Sie beim Nachfokussieren eine abrupte Partikelbewegung beobachten, so müssen Sie sich ein anderes, „höher gelegenes“ Partikel suchen, dessen Position Sie ohne Berührung des Deckglases scharf stellen können.
- Die Probe muss sich im thermischen Gleichgewicht befinden. Ist dies nicht der Fall, so treten Konvektionsströme auf, die wiederum die Brownsche Bewegung verfälschen. Zudem ist es möglich, dass die Probe schlecht präpariert wurde: Ist die Suspension nicht vollständig mit dem Klebeband abgedichtet, so können durch Verdunstungsprozesse ebenfalls ungewünschte Strömungen in der Probe auftreten. Warten Sie daher zur Temperierung der Probe einige Minuten ab, bevor Sie mit der Messung beginnen. Sollte dann immer noch eine Strömungsbewegung erkennbar sein, so müssen Sie gegebenenfalls eine neue Probe vorbereiten. Wenden Sie sich in diesem Fall an Ihren Betreuer.

2. **Aufnahme einer Bildfolge:** Starten Sie vom Desktop aus das Programm *Kamera.exe*. Dieses Programm nimmt in einem festen Zeitabstand ein Bild auf und speichert dieses auf dem Computer. Tragen Sie im Messprogramm für den Zeitabstand 1 s ein. Schalten Sie die Option *Bilder speichern* zunächst ab.

Suchen Sie sich nun ein Partikel aus, in dessen unmittelbarer Umgebung sich keine anderen Partikel befinden und stellen Sie die xy -Position des

Mikroskopisches so ein, dass sich das ausgewählte Partikel im Zentrum des Mikroskopbildes befindet. Zur Verbesserung des Kontrastes sollten Sie die Irisblende am Kondensor auf die Position *MIN* stellen.

Da die Brownsche Bewegung nicht nur in der xy -Bildebene, sondern auch in z -Richtung erfolgt, wird es passieren, dass das zu beobachtende Partikel aus dem Fokus läuft und somit nicht mehr sichtbar wird. Um dem entgegenzuwirken, müssen Sie die Fokussierung des Mikroskops mit dem Feinregler dauernd nachjustieren. Dies erfordert einiges an Feingefühl und besonders Konzentration.

Führen Sie zunächst eine Probemessung durch: Damit sich die Probe durch die Mikroskopbeleuchtung nicht zusätzlich aufheizt, drehen Sie die Helligkeit auf das Minimum zurück. Die Kamera ist auch bei dieser Minimalbeleuchtung empfindlich genug, kontrastreiche Bilder zu liefern. Starten Sie das Programm durch Anklicken des Pfeils in der linken oberen Ecke und versuchen Sie der Bewegung eines Partikels über mehrere Minuten auf dem Monitor zu folgen. Sobald das Partikel auch nur leicht unscharf zu erkennen ist, müssen Sie sofort mit dem Feintrieb des Mikroskops den Fokus vorsichtig nachstellen. **Das Partikel muss während der ganzen Zeit eindeutig erkennbar sein!**

Wenn Sie nun genug Übung im Nachfokussieren erlangt haben und die zuvor genannten Punkte bezüglich der systematischen Fehler berücksichtigt haben, können Sie mit der eigentlichen Messung beginnen. Stoppen Sie das Messprogramm. Schalten Sie die Option *Bilder speichern* ein und starten Sie erneut das Programm. **Insgesamt ist jede Sekunde und mindestens 150 mal, ein Bild aufzunehmen.** Entfernen Sie nach der Messung die Probe und werfen Sie diese in den Abfall. **Achtung: Auf keinen Fall dürfen Sie nach Beendigung der Messung das Programm nochmals starten. Ihre zuvor aufgenommenen Bilder würden sonst überschrieben werden.**

3. Notieren Sie die Zimmertemperatur.

4. **Eichung des Abbildungsmaßstabs:** Um später die Position des Partikels ausmessen zu können, müssen Sie den Abbildungsmaßstab des Mikroskops bestimmen. Benutzen Sie dazu das ausliegende Objektmikrometer. Geben Sie einen Tropfen Immersionsöl auf das Objektmikrometer und legen Sie

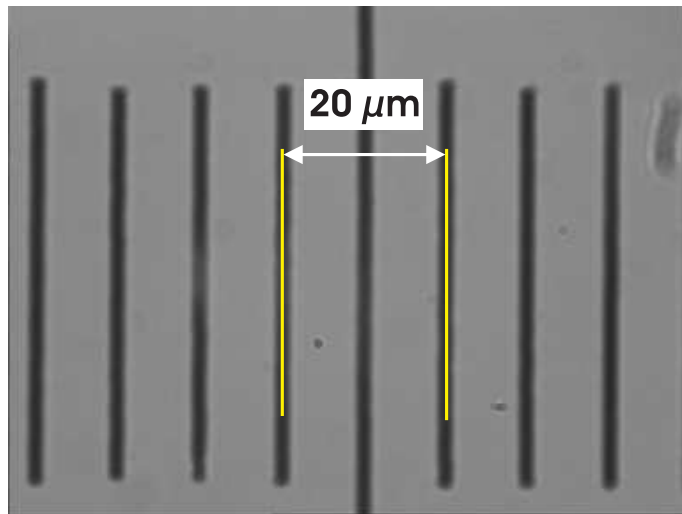


Abbildung 7: Eichung des Abbildungsmaßstabs mit einem Objektmikrometer. Die Distanz zwischen zwei Teilstrichen beträgt $10\text{ }\mu\text{m}$.

dieses auf den Mikroskopisch. Stellen Sie vorsichtig den Fokus ein und positionieren Sie den Mikroskopisch so, dass Sie den Maßstab gemäß Abbildung 7 erkennen können. Beenden Sie das Messprogramm und starten Sie das Programm *Eichung.exe*. Optimieren Sie nochmals die Bildschärfe und speichern Sie dann das Eichbild. Reinigen Sie das Objektmikrometer mit einem Papiertuch und legen Sie es zurück in die Aufbewahrungsbox.

- Vermessung der Partikelpositionen:** Starten Sie das Programm *Auswertung.exe* vom Desktop aus. Um die Partikelpositionen zu bestimmen, müssen Sie wissen, wie viele Bildpixel einem Mikrometer entsprechen. Laden Sie dazu das zuvor gespeicherte Eichbild (Schalter *Eichbild laden* im Feld *Eichung*) und messen Sie mit Hilfe des Cursors den Pixelabstand über eine Distanz von $20\text{ }\mu\text{m}$ (Abbildung 7). Die Pixelwerte werden im Feld *Marker* angezeigt. Den Cursor können Sie zum einen mit der Maus bewegen, als auch mit den Steuerpfeilen unter dem Bildfeld (Abbildung 8). Tragen Sie den gemessenen Pixelabstand in das Feld *Eichung* ein.

Nach dieser Eichung können Sie mit der Vermessung der Partikelpositionen

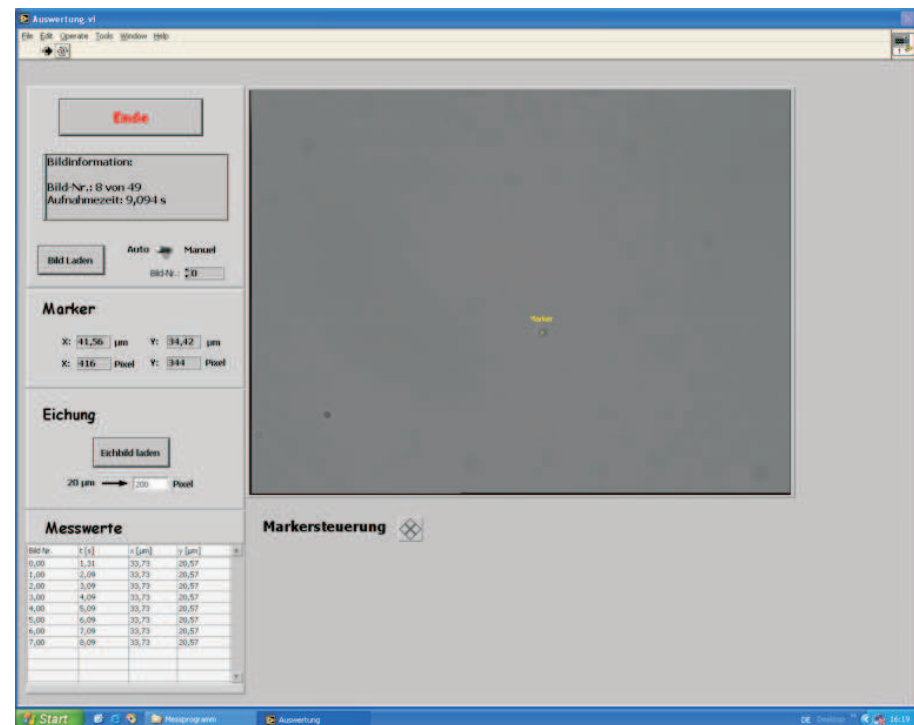


Abbildung 8: Bedienoberfläche des Programms zur Ausmessung der Partikelpositionen der aufgenommenen Bilder.

Ihrer aufgenommenen Bilder beginnen. Laden Sie das erste Bild, indem Sie auf den Schalter *Bild laden* klicken (der daneben liegende Schalter soll auf der Position *Auto* stehen). Verfahren Sie den Marker nun so, dass dieser sich **exakt** in der Mitte des Partikels befindet. Die entsprechenden Koordinaten werden im Feld „Marker“ angezeigt. Wenn Sie nun erneut auf den Schalter *Bild laden* klicken, wird die zuvor ausgemessene Partikelposition gespeichert, im Feld *Messwerte* angezeigt, und das nächst folgende Bild geladen. Vermessen Sie so die Partikelposition aller aufgenommenen Bilder. Das Programm wird automatisch gestoppt, wenn Sie die Partikelposition des letzten aufgenommenen Bildes bestimmt haben. Die Messwerte werden

unter C:\Messungen\Messung.dat als Textdatei gespeichert.

6. Fangen Sie sofort mit der Auswertung der Messdaten an.

VIII Auswertung in Python mit Jupyter Notebook

VIII.1 Importieren und grafische Dartsellung der Messdaten

Starten Sie das Programm Jupyter vom Desktop aus. Wir benötigen die folgenden Module:

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.mlab as mlab
import numpy as np
```

Die Messdaten sind in der Datei `Messung.dat` im Ordner `Messungen` auf dem Desktop gespeichert. Kopieren Sie diese in den Ordner `data` auf dem Desktop. Schauen Sie sich die Messdaten an. Die Datei besitzt eine Headerzeile und besteht aus 4 Spalten. Als Dezimaltrennzeichen werden Kommas verwendet. Zum Importieren der Daten müssen die Kommas durch Punkte ersetzt werden. Das geht mit folgender Funktion:

```
def comma_to_float(valstr):
    return float(valstr.decode("utf-8").replace(',', '.'))
```

Zum Importieren verwenden wir die Numpy Funktion `loadtxt()`. Wir müssen den Pfad/Dateiname angeben. Desweiteren wird die erste Zeile übersprungen und nur die letzten drei Spalten ausgelesen. Der converter ersetzt alle Kommas durch Dezimalpunkte. Mit der Option `unpack=True` wird jede Spalte getrennt in die Arrays `t,x,y` geschrieben:

```
t,x,y=np.loadtxt('data/Messung.dat', skiprows=1, usecols=(1,2,3),
                converters= {1:comma_to_float, 2:comma_to_float,
                             3:comma_to_float}, unpack=True)
```

Das Array `t` enthält die Zeitdaten und `x, y` die gemessenen Positionen. Verschaffen Sie sich einen grafischen Eindruck von der Wanderung des Partikels. Zeichnen Sie die `x,y`- Daten als Punkt-Liniendiagramm.

```
plt.plot(x, y, marker='s', color='red', linewidth=1)
plt.xlabel('x / '+' $\mu$'+'m')
plt.ylabel('y / '+' $\mu$'+'m')
plt.title('Brownian Motion')
plt.savefig('figures/brown1.pdf', format='PDF')
```

Drucken Sie das Diagramm aus und fügen Sie es in Ihr Protokollheft ein. Das Diagramm sollte so ähnlich aussehen wie in Abbildung 9.

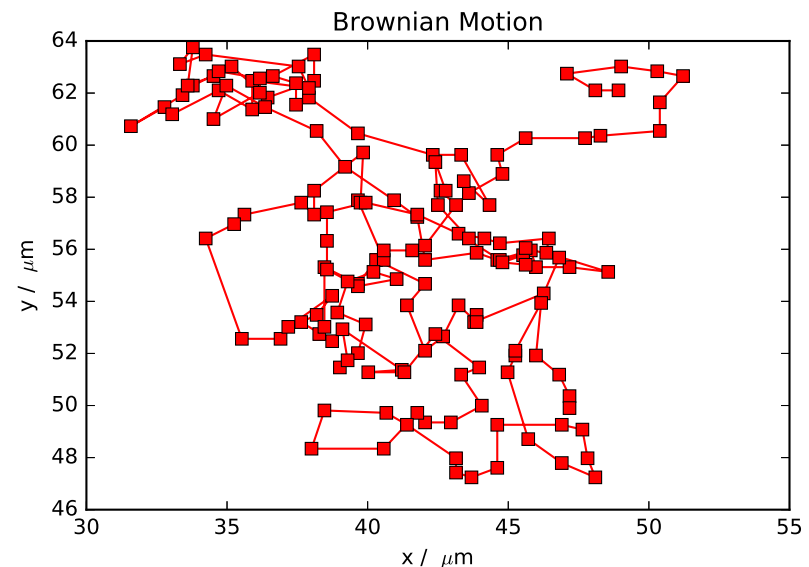


Abbildung 9: Bewegung eines Partikels.

VIII.2 Berechnung des mittleren Verschiebungsquadrates und dessen Fehler

Die Messdaten geben die absoluten Koordinaten an, wir brauchen aber die Koordinatenänderungen $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ und $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ sowie deren Quadrate:

```

for i in range(len(t)-1):
    dt = t[i+1] - t[i]
    dx = x[i+1] - x[i]
    dy = y[i+1] - y[i]
r_squared=dx**2+dy**2

```

Wir benötigen die mittlere quadratische Abweichung (`r_squared_mean`) und dessen Fehler (`r_squared_mean_std`), sowie den Mittelwert des Zeitintervalls von `dt` (`dt_mean`):

```

r_squared_mean=np.mean(r_squared)
print("r_squared_mean= ",r_squared_mean)
r_squared_mean_std=np.std(r_squared)/np.sqrt(len(r_squared))
print("r_squared_mean_std= ",r_squared_mean_std)
dt_mean=np.mean(dt)
print("dt_mean= ", dt_mean)

```

Berechnen Sie hieraus mit Hilfe von Gleichung (21) die Boltzmannkonstante und die Diffusionskonstante D mit den jeweiligen Fehlern. Die Viskosität von Wasser finden Sie in Abbildung 12.

VIII.3 Kontrollverteilung

Nach Gleichung 9 ist die Wahrscheinlichkeit, ein Partikel nach der Zeit t innerhalb des Bereichs $[x, x + \Delta x]$ zu finden durch eine Gaußverteilung gegeben. Überprüfen Sie dies, indem Sie die gemessenen Partikelverschiebungen in ein Histogramm eintragen. Da die Brownsche Bewegung isotrop ist, können Sie sowohl die Verschiebungen dx als auch die Verschiebungen dy gemeinsam in das gleiche Histogramm eintragen. Mit der Funktion `np.append(dx,dy)` werden die Datensätze in das Array `all_data` geschrieben:

```

all_data=np.append(dx,dy)
plt.hist(all_data, normed=1)

```

Die Option `normed=1` normiert die Fläche des Histogramms auf den Wert Eins. Schauen Sie sich die Parameter von `plt.hist()` an und ändern Sie gegebenenfalls die Binbreite. Optimieren Sie die Formatierung des Diagramms. Fügen Sie Achsenbeschriftungen, Einheiten, Diagrammüberschrift etc. ein. In das Histogramm soll noch die zugrundeliegende Gaussverteilung (`mlab.normpdf()`) mit

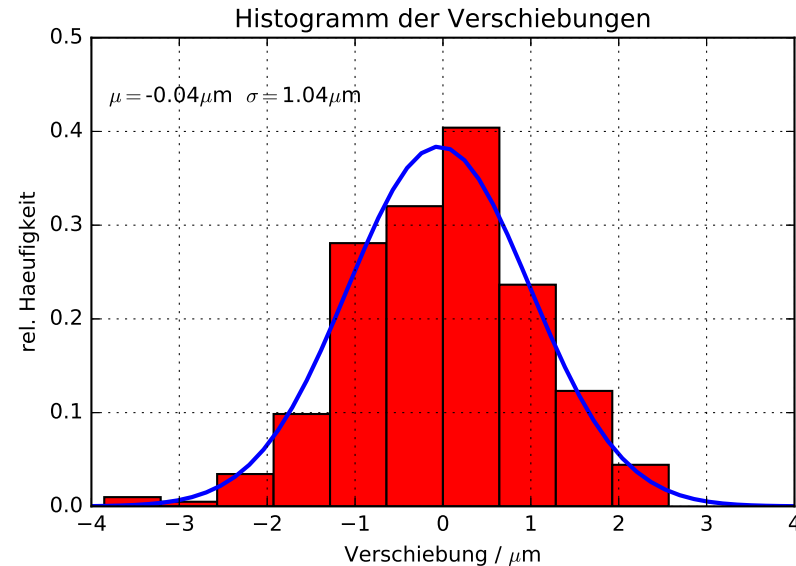


Abbildung 10: Histogramm der Verschiebungen.

eingezeichnet werden. Die Gaussverteilung ist eindeutig durch den Mittelwert (`mu=np.mean(all_data)`) der Verschiebungen sowie deren Standardabweichung (`sigma=np.std(all_data)`) festgelegt. Die Abszissenwerte generieren wir uns mit der Funktion `np.linspace()`:

```

mu=np.mean(all_data)
sigma=np.std(all_data)
gauss = mlab.normpdf(np.linspace(-4,4), mu , sigma)

plt.plot(np.linspace(-4,4), gauss, 'b-', linewidth=2)
plt.savefig('figures/brown2.pdf', format='PDF')

```

Fügen Sie mit dem Befehl `plt.text()` den Mittelwert (`mu`) und die Standardabweichung (`sigma`) mit in das Diagramm ein. Sie können auch \LaTeX -Code eingeben. Z.B. liefert `\mu` den Ausdruck μ und `\sigma` liefert σ . Drucken Sie das Diagramm aus und fügen Sie es in Ihr Protokollheft ein. Das Diagramm

sollte so ähnlich aussehen wie in Abbildung 10.

VIII.4 Kumulative Verteilung der Verschiebungsquadrate

Nach Gleichung (13) ist das mittlere Verschiebungsquadrat $\langle r^2 \rangle$ proportional zur Zeit. Stellt man die kummulative Verschiebung als Funktion der Zeit dar, sollte sich ein linearer Zusammenhang gemäß Abbildung 11 ergeben.

```
r_kumm=np.cumsum(r_squared)
plt.plot(t[:-1], r_kumm, marker='.', color='red', linewidth=0)
plt.xlabel('Zeit / s')
plt.ylabel('Summe  $r_i^2 / \mu m^2$ ')
plt.title('Kummulative Verschiebung')
plt.savefig('figures/brown3.pdf', format='PDF')
```

Fitten Sie eine Gerade an die Daten und tragen Sie die Messwerte und die angepasste Funktion in ein Diagramm ein.

```
from scipy.optimize import curve_fit
```

```
def linear(x,a,b):
    return a*x+b
```

```
popt, pcov = curve_fit(linear, t[:-1], r_kumm)
```

Die gefundenen Fitparameter sind in dem Array `popt` gespeichert. `popt[0]` entspricht der Steigung, `popt[1]` dem Achsenabschnitt. Mit

```
plt.plot(t[:-1], linear(t[:-1],*popt))
```

können Sie die Funktion in Ihr zuvor erstelltes Diagramm einfügen. `*popt` entpackt die Fitparameter direkt in Ihre Funktion. Passen Sie die Formatierung an und tragen Sie Ihre Fitfunktion und Fitparameter mit in das Diagramm ein. Das Diagramm sollte so ähnlich aussehen wie in Abbildung 11. Berechnen Sie aus der Steigung wieder die Boltzmann- und Diffusionskonstante. Stimmen die Werte mit den anderen Messungen überein?

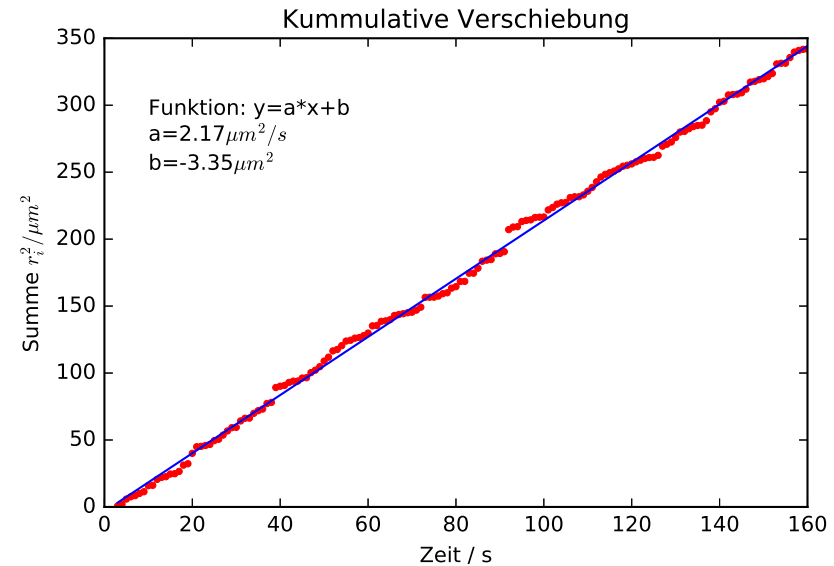


Abbildung 11: Kummulative Verschiebung eines Partikels.

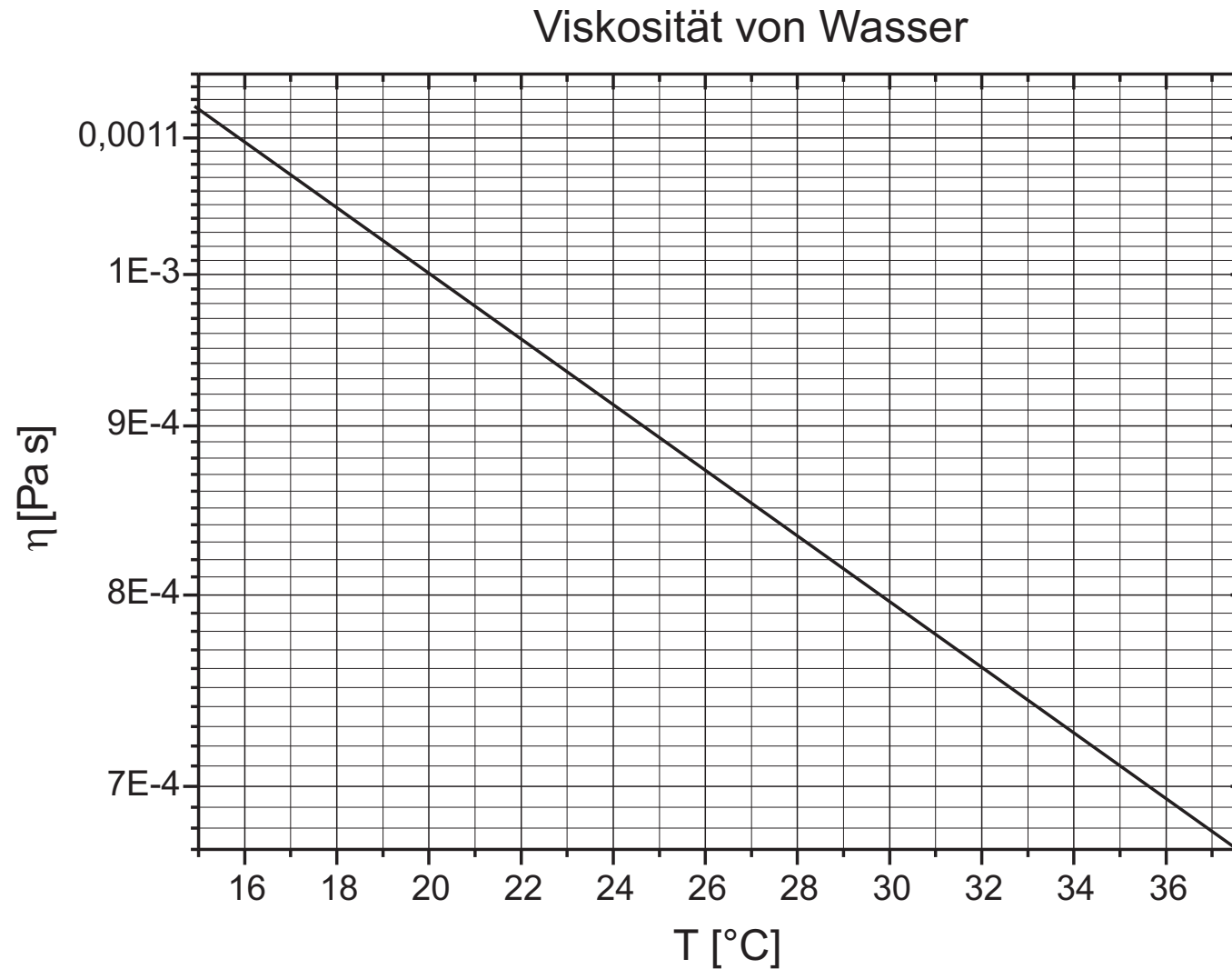


Abbildung 12: Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Wasser.

